Unidad 4: Dinámica de la Partícula. Parte A

Principio de Inercia (1º Ley de Newton)

"Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, a menos que sea obligado a cambiar de estado por fuerzas que actúan sobre él"

Es equivalente a expresar que "es posible adoptar, por lo menos un sistema de referencia, para el cual toda partícula aislada continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme".

Recuerde se denomina partícula a todo cuerpo cuyas dimensiones y orientación resultan despreciables en la descripción de su movimiento.

A los sistemas de referencia en reposo o que se desplazan con movimiento rectilíneo y uniforme (es decir, no acelerado) se los denomina Sistemas de referencia inerciales.

Una partícula aislada es aquella que no interactúa con otras o sea, no esta afectada por las acciones ("fuerzas") que estas otras pudieran ejercer sobre ella.

Principio de masa (2º Ley de Newton)

"La derivada de la cantidad de movimiento respecto del tiempo es proporcional a la fuerza que actúa sobre el cuerpo y tiene su dirección y sentido".

Siendo $\vec{p} = m\vec{v}$ la "cantidad de movimiento" o "momento lineal"

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Principio de Acción y Reacción (3ª Ley de Newton)

"A toda acción ejercida sobre una partícula, se opone una reacción igual y de sentido contrario que ejerce la propia partícula"

Se refiere a la interacción entre dos partículas y en otras palabras señala que toda vez que una partícula ejerce una fuerza sobre otra, ésta ejerce sobre la primera una fuerza de igual intensidad y dirección pero de sentido contrario.

Principio de independencia de acción de fuerzas

"Todo cuerpo, bajo la acción conjunta de dos fuerzas, describe la diagonal del paralelogramo en el mismo tiempo que emplearía en describir los lados del mismo, bajo la acción de cada una de las fuerzas" Fig 4.1

Si dos o más fuerzas actúan sobre una partícula, la aceleración resultante es igual a la suma de las aceleraciones que adquiriría si cada una de aquellas actuara aisladamente

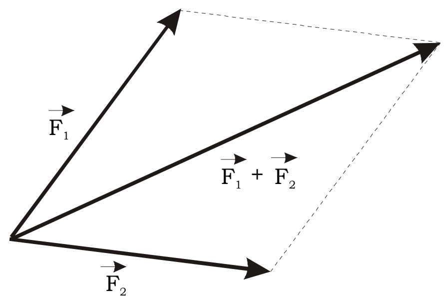

Fig 4.1

Este principio expresa el de superposición de efectos.

Movimiento unidimensional de la partícula

En este apartado se estudia el movimiento de una partícula de masa m a lo largo de una recta. Al quedar de tal modo definida la dirección, es habitual prescindir del tratamiento vectorial de los distintos elementos que intervienen. El tratamiento vectorial es de todos modos, general, y es estrictamente indispensable, en el estudio del movimiento curvilíneo, es decir, en dos o en tres dimensiones.

Según el Principio de Masa:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,v) = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{d^2x}{dt^2} = F = m\,a$$

Expresiones válidas para un partícula cuya masa se acepta como constante.

Este principio, expresado como $\boxed{\frac{dp}{dt} = F = m\,a}$ constituye la Expresión diferencial del Momento Lineal, cuya integración conduce a:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt}$$

Que es la expresión integral del Teorema del momento lineal.

$\int_{t_1}^{t_2} F\,dt$ se denomina impulso de F, o impulso suministrado por la fuerza F.

La expresión $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$ es la “Ecuación fundamental de la Dinámica”, y es una ecuación diferencial ordinaria cuya solución es x = x(t), y en la que F puede ser función de t (fuerza variable en el tiempo), x (Fuerza que depende de la posición) o de v (Fuerza que depende de la velocidad).

A partir de $F = m\frac{dv}{dt}$, se puede expresar $Fv = mv\frac{dv}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{Fv = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}$$

Que es la “Expresión diferencial del Teorema de la Energía”. En esta última expresión $T = \frac{1}{2}mv^2$ se define como Energía Cinética de la partícula.

La forma integral del Teorema de la Energía es:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt}dt \;\Rightarrow \boxed{T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} F\,v\,dt}$$

En la expresión recuadrada, los términos que intervienen representan:

$\int_{t_1}^{t_2} F\,v\,dt$: Trabajo realizado por la fuerza F entre t_1 y t_2.

F v : Potencia suministrada por la fuerza F.

Así, $T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$

La Ecuación General de la Dinámica, $m\frac{d^2x}{dt^2} = F$ permite abordar los dos grandes grupos de problemas del estudio del movimiento, a saber:

A) Conocidas las fuerzas o acciones de otras partículas o cuerpos sobre una partícula dada, obtener la descripción completa del movimiento, identificando para todo instante, la posición, la velocidad y la aceleración resultantes (Proceso de integración)

B) Conocida la “ley del movimiento”, o sea, x(t), determinar (ademas de la velocidad y la aceleración) la fuerza resultante o acción que la determina (Proceso de derivación).

Como se ha dicho, la fuerza F puede ser función de una o más variables, por ejemplo: $F(x, \dot{x}, t)$ o de una combinación de ellas, pudiendo inclusive existir relaciones funcionales que las liguen entre sí.

Ejemplos:

- ✓ La fuerza de rozamiento es función de la velocidad.
- ✓ La fuerza ejercida sobre un cuerpo cargado por un campo electrostático dependiente del tiempo.
- ✓ La fuerza ejercida por el campo gravitatorio sobre una masa y la fuerza de recuperación elástica son funciones de la posición.
- ✓ La fuerza de resistencia del aire, en general, es función de la posición y de la velocidad.

Finalmente, la solución de la ecuación $\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t)}$ requiere los conocimientos de condiciones iniciales o de referencia, es decir, conocer los valores que asumen x y $\dot{x}$ para un determinado y conocido instante t_0.

Es decir: $\begin{cases} \text{para } t = t_0 \\ x = x(t_0) = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases}$

Caso de Fuerza dependiente del tiempo, únicamente

La ecuación $m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t)$ se expresa como $m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$, y siendo $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$,

Será $m\frac{dv}{dt} = F(t)$, EDO de primer grado (requiere el conocimiento de una condición inicial, en este caso, v(0). Esta EDO se puede resolver por separación de variables seguida de un proceso de integración, o utilizando transformada de Laplace.

Por separación de variables:

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \;\Rightarrow\; m\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} F(t)dt$$

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} F(t)dt \;\Rightarrow\; v(t) = v_0 + \left(\frac{1}{m}\right)\int_{t_0}^{t} F(t)dt$$

Conocido v(t), y siendo $v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v(t)dt \Rightarrow (x - x_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$, y reemplazando v(t) será

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \left(\frac{1}{m}\right)\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t} F(t)dt\right]dt}$$

Caso de Fuerza dependiente de la velocidad, únicamente

En este caso, es F = F(v), y se supone conocida esta relación funcional.
La ecuación general se expresa como:

$$m\frac{dv}{dt} = F(v), \text{ y separando variables: } \frac{dv}{F(v)} = \frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)} = \left(\frac{1}{m}\right)\int_{t_0}^{t} dt = \left(\frac{1}{m}\right)(t - t_0)$$

Siendo F(v) conocida, $\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)} = \varphi(v)$. En principio, siempre es posible obtener $\varphi(v)$ t de ésta, despejar v. Entonces, resultará $v(t) = \psi\left(v_0, \frac{t - t_0}{m}\right)$, y conocidos v_0, t_0, m es $v = \psi(t)$.

Conocida la relación funcional entre la velocidad y el tiempo, se puede obtener la ley del movimiento. Para esto, se parte de $\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t}\psi(t)dt$

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}\psi(t)dt}$$

Caso de Fuerza dependiente de la Posición, únicamente

Para este caso, la ecuación general queda expresada como: $m\frac{dv}{dt} = F(x)$

Multiplicando ambos miembros por dx: $m\frac{dv}{dt}dx = F(x)dx \Rightarrow mv\,dv = F(x)dx$.

Integrando entre las posiciones x_0 y x, y para v_0 y v:

$$\int_{x_0}^{x} F(x)dx = \int_{v_0}^{v} mv\,dv \qquad [I]$$

donde x_0, v_0 son la coordenada y velocidad en un punto de referencia P_0
x y v son la coordenada y velocidad en un punto genérico P.

$\int_{x_0}^{x} F(x)dx$ es el trabajo de la fuerza F(x) al pasar de x_0 a x,

Definición de Energía Potencial: Es el trabajo necesario para llevar una partícula desde un punto genérico hasta el punto que se considera como de referencia.

Esto se expresa: $V(x) = \int_{x}^{0} F(x)dx = -\int_{0}^{x} F(x)dx$

Utilizando el potencial, la expresión [I] resulta:

$$\int_{x_0}^{x} F(x)dx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = V(x_0) - V(x) \qquad [\text{ II }]$$

Si la fuerza que actúa sobre la partícula realiza trabajo positivo, ello representará en una disminución de la función V(x) (Energía Potencial).
Siendo $(^1/_2)mv^2 = T(x)$, la Energía Cinética, la expresión [II] se puede escribir:

$$\boxed{T(x) + V(x) = T(x_0)+V(x_0) = \text{Constante} = E} \qquad [\text{ III }]$$

donde E es la Energía mecánica total del sistema.

[III] expresa la ley (teorema) de la conservación de la energía mecánica total, y significa que si la fuerza depende sólo de la posición, la totalidad del trabajo se produce a expensas de la energía potencial y da lugar al incremento de la energía cinética.

Un sistema de fuerzas que satisface [III] se dice es conservativo, y es condición que la fuerza dependa sólo de la posición.

Cuando aparecen fuerzas que no dependen solo de la posición, aparecen otras formas de energía, y se dice que intervienen fuerzas "disipativas", y el sistema será no conservativo.

De $\quad T(x) + V(x) = E \quad \Rightarrow (^1/_2)mv^2 + V(x) = E \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}$

y siendo $v = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{m}{2}}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \int_{t_0}^{t} dt = (t-t_0)$

La ley de movimiento podría obtenerse resolviendo la integral y despejando x(t).

Teniendo presente que $V(x) = -\int_{x_0}^{x} F\,dx$ resulta:

$$-\frac{dV(x)}{dx} = F(x)$$

Es decir que la energía potencial es una función escalar cuya derivada, cambiada de signo da la fuerza. De aquí surge que todo punto cuya coordenada cumpla que $\dfrac{dV(x)}{dx} = 0$, al hacer $F(x) = 0$, constituye un punto de equilibrio.

No debe perderse de vista el carácter escalar del potencial, y el carácter vectorial de la fuerza. La última expresión, $\dfrac{dV(x)}{dx}$ es la componente en x (coordenada a la que hemos restringido el movimiento en este estudio) del *Gradiente* de V(x). (Se sabe que el gradiente asigna a un campo escalar un vector cuya dirección es la dirección de máxima variación, y cuyo módulo es el valor de la máxima derivada)

Curvas de Potencial

Para un movimiento unidimensional, es posible graficar V(x) en función de x fig. 4.2.

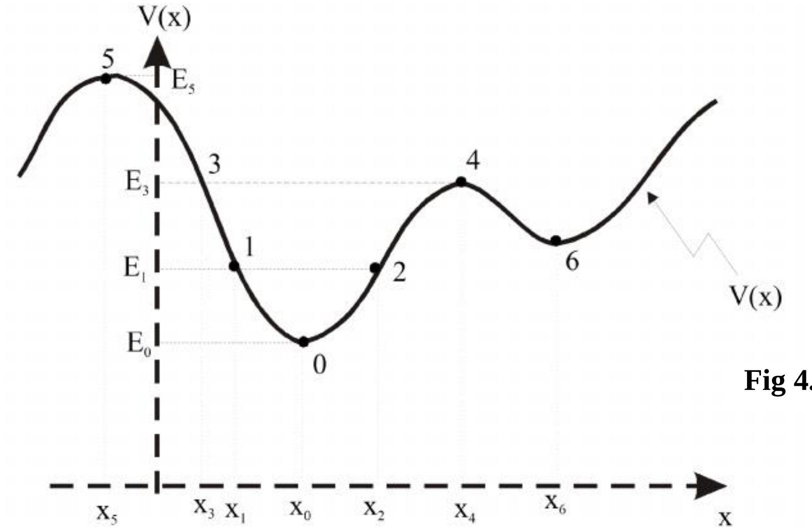

Fig 4.2

La ecuación $\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \int_{t_0}^{t} dt = (t-t_0)$ expresa que, para una energía dada E, la partícula sólo puede evolucionar en un intervalo en que $V(x) \leq E$. El análisis de la curva, de tal modo, conduce a las siguientes conclusiones:

- ✓ Si la energía inicial es $E = E_0$, la partícula sólo podrá permanecer en x_0. Allí estará en un punto de equilibrio: la tangente geométrica a la curva es horizontal, y ello indica que $\left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$.
- ✓ Los puntos 4,5y 6 corresponden a las coordenadas x_4,x_5 y x_6 para las que igualmente se verifica equilibrio de fuerzas.
- ✓ Si las condiciones iniciales condujeran a un nivel de energía $E = E_1$, el movimiento de la partícula quedaría confinado entre x_1 y x_2.
- ✓ Como $E = V(x) + T(x)$ se tendría, si se adopta como nivel de referencia $V(x_0)=0$, que:
  - ➢ en x_0, $E_1 = T(x_0)$: La energía es enteramente cinética y además, T(x) alcanza su valor máximo.
  - ➢ en los puntos 1 y 2, $E_1 = V(x_1) = V(x_2)$: La energía es enteramente potencial, y esta es máxima para el intervalo $[x_1,x_2]$.
  - ➢ La velocidad disminuye al acercarse a x_1 o a x_2, puntos de retorno. El movimiento cesa y se invierte su sentido al alcanzarlos. El trama $[x_1,x_2]$ suele denominarse "valle de potencial".

- ✓ Para que la partícula pueda alcanzar la posición x_4, la energía inicial debería alcanzar a $E = E_2$. En x_4, la partícula podrá bien regresar hacia el valle de x_0, bien escapar hacia el valle de x_6.

Estados de Equilibrio

De particular interés resulta el análisis de las situaciones de equilibrio, el carácter del mismo , y las condiciones de su existencia, para fuerzas actuantes dependientes de la posición. Se ha dicho que los estados de equilibrio presentan donde las fuerzas aplicadas sobre la partícula son nulas, o sea F(x) = 0.

Siendo $-\dfrac{dV(x)}{dx}=F(x)$, las condiciones necesarias y suficientes para que la partícula se encuentre en un punto de equilibrio, es que dado V(x); $\dfrac{dV(x)}{dx}=0$.

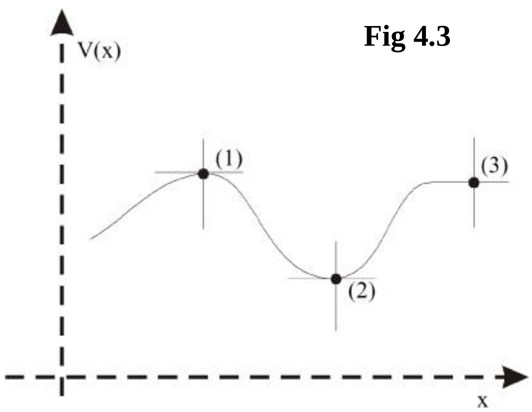

Fig 4.3

Los puntos (1), (2) y (3) cumplen con la condición $\dfrac{dV(x)}{dx}=0$, y se denominan puntos de equilibrio.

Desarrollando $\dfrac{dV(x)}{dx}$ en series de potencias:

$$\frac{dV(x)}{dx}=\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)_0+\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 x+ +\frac{1}{2}\left(\frac{d^3V(x)}{dx^3}\right)_0 x^2+....$$

Despreciando los términos de orden superior y considerando el origen de coordenadas en el punto donde $\dfrac{dV(x)}{dx}=0$ queda:

$$-\frac{dV(x)}{dx}=-\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)x=F$$

En el punto x0 en que se verifica $\dfrac{dV(x)}{dx}=0$, $\left(\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}\right)$ puede adoptar un valor >0,<0 o igual a 0. Ello conduce a los siguientes casos:

1. Equilibrio Estable:

Si $\left(\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0>0$, la ecuación general del movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F=-\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{m}\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 x=0$$

llamando $\omega_0^2=\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0$, se puede rescribir la ecuación como:

$$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x=0} \quad \text{cuya solución es del tipo} \quad \boxed{x(t)=A\,Cos(\omega_0 t+\theta)}$$

El movimiento así descrito es armónico y ocurre en torno del punto de equilibrio, A y θ dependen de las condiciones iniciales.

La condición $\left(\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0>0$, en un punto donde $\dfrac{dV(x)}{dx}=0$, implica que el punto en cuestión es un mínimo relativo. Puede expresarse entonces que si la función potencial posee un mínimo en el punto de equilibrio, entonces este es estable. Implica que si una partícula es alejada del punto de equilibrio, tiende a retornar.

2. Equilibrio Inestable

Si $\left(\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 < 0$, la ecuación general del movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{m}\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 x = 0$$

llamando $\omega_0^2 = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0$, se puede rescribir la ecuación como:

$$\boxed{\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0}$$

La solución a esta ecuación diferencial se puede expresar como:

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{\omega_0 t}}$$

donde C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales. En esta expresión, los coeficientes de las exponenciales son positivos, lo que se interpreta de la siguiente manera: apartada la partícula de su posición de equilibrio, la partícula tiende a alejarse indefinidamente.

Las condiciones de equilibrio para un punto de equilibrio inestable son:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dx} = 0 \\ \dfrac{d^2V}{dx^2} < 0 \end{cases} \qquad \text{condición de máximo en la curva de potencial.}$$

3. Equilibrio indiferente.

$$\text{Si } \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 = 0 \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = F = \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_0 x = 0$$

$$\Rightarrow \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \text{(La fuerza actuante es nula)}$$

Esta última ecuación diferencial tiene por solución $x(t) = C_1t+C_2$, donde las constantes dependen de las condiciones iniciales. Esta ecuación corresponde a un movimiento a velocidad constante, lo que resulta lógico pues la fuerza que se ejerce sobre la partícula es nula.

Las condiciones de equilibrio indiferente son entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dx} = 0 \\ \dfrac{d^2V}{dx^2} = 0 \end{cases} \qquad \text{En la curva de potencial, indican potencial constante.}$$

Movimiento Curvilíneo de la Partícula

Consiste en el estudio del movimiento en dos o tres dimensiones. Es imprescindible el tratamiento vectorial de los distintos elementos intervinientes.

Según el Principio de masa:

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad [\,1]$$

Por el principio de independencia, o de Superposición de efectos:

$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$, donde $\vec{F}_i$ son las fuerzas actuantes sobre la partícula y $\vec{F}$, la Resultante, o fuerza equivalente a la acción combinada del conjunto $\vec{F}_i$.

Para un tratamiento en coordenadas cartesianas, la ecuación [1] es equivalente al tratamiento simultáneo de :

$$m\ddot{x} = F_x \qquad m\ddot{y} = F_y \qquad m\ddot{z} = F_z \qquad [\,2\,]$$

puesto que $m\vec{a} = m(\ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k}) = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$

En coordenadas intrínsecas:

$$m\vec{a} = m\frac{dv}{dt}\mathbf{T} + m\frac{v^2}{\rho}\mathbf{N} = F_T\,\mathbf{T} + F_N\mathbf{N} \qquad F_B=0$$

La fuerza $\vec{F}$ es en general, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$

La integración del sistema de 3 ecuaciones diferenciales de 2º orden como [2], genera 6 constantes arbitrarias, y plantea el conocimiento de condiciones iniciales $\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$. La resolución es laboriosa, aunque se siguen los mismos lineamientos desarrollados para el caso unidimensional. Particularmente si ocurre la independencia dimensional dada por:

$$F_x = F_x(\dot{x},x,t)$$

$$F_y = F_y(\dot{y},y,t)$$

$$F_z = F_z(\dot{z},z,t)$$

Las tres ecuaciones resultan independientes entre sí y el tratamiento en x, y o z es similar al ya estudiado.

A continuación, se presenta un resumen de las expresiones vectoriales, válidas para 2 y tres dimensiones, de los teoremas enunciados:

Cantidad de Movimiento o Momento Lineal:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Principio de Masa:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{F}$$

Impulso de $\vec{F}$ (Teorema del Momento Lineal, forma integral):

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

Teorema de la Energía(forma integral)

$$T_2 - T_1 = (^1/_2)m\left(\left|\vec{v}_2\right|\right)^2 - (^1/_2)m\left(\left|\vec{v}_1\right|\right)^2 = \int_a^b \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

Teorema de la Energía(Forma diferencial)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

Momento Angular o Momento Cinético

Es el momento del vector Momento lineal de la partícula, respecto de un punto 0.

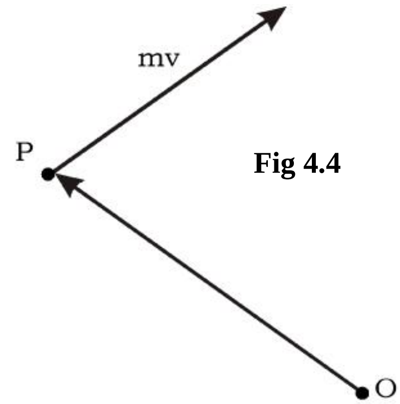

Fig 4.4

Sea $\vec{p} = m\vec{v}$ el momento angular de la partícula P de masa m y $\vec{v}$ la velocidad respecto del punto "O" se define

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$$

Como el momento angular es entonces el vector perpendicular al plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$. En el caso de un movimiento en el espacio, este vector cambiara de modulo y dirección a medida que la partícula se desplace.

Un caso particular se da cuando la partícula se mueve en un plano y el punto "O" esta contenido en el mismo, en este caso, el vector momento angular será siempre perpendicular al plano.

Derivando el momento angular respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v} + \vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

como $\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v} = 0$ por ser paralelos

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = m\,\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt} = m(\vec{r}\times\vec{F})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = m(\vec{r}\times\vec{F})}$$ Forma diferencial del **Teorema del momento cinético**:

La variación en el tiempo del momento angular respecto de un punto "0" es igual al momento de la fuerza actuante sobre la partícula respecto de "0".

La forma integral de este teorema es: $\boxed{\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{r}\times\vec{F})dt}$

Unidad 4: Vínculos o Ligaduras. Parte B

Hasta aquí se ha analizado el movimiento libre de la partícula. A la acción de las fuerzas exteriores, ella responderá sin condicionamientos.

Cuando aparecen restricciones al movimiento, aquella libertad queda condicionada. Estas condiciones se materializan a través de vínculos o ligaduras.

Se llama vínculo a cualquier sistema material capaz de impedir o condicionar el libre movimiento de una partícula o cuerpo.

Los vínculos pueden ser simples, dobles, etc, según eliminen uno, dos, etc, grados de libertad.

La eliminación de grados de libertad constituyen restricciones que se imponen al movimiento. En consecuencia, tres ligaduras simples, convenientemente dispuestas, eliminan los tres grados de libertad de una partícula, produciendo su inmovilización.

Las restricciones al movimiento suelen presentarse cuando la partícula se halla condicionada a desplazarse sobre una curva o sobre una superficie. Constituyen casos de movimientos muy usuales, y de las más habituales aplicaciones prácticas. Representan el caso del MOVIMIENTO RESTRINGIDO.

Sobre una curva, el movimiento de la partícula se halla restringido en dos grados de libertad, pudiendo la partícula moverse únicamente según la ley R(s), siendo q = s la coordenada que determina en cualquier instante la posición.

Sobre una superficie la posición de la partícula queda determinada por $R = R(q_1,q_2)$, 0 sea, función de dos coordenadas. el movimiento tiene dos grados de libertad. En consecuencia, restringir el movimiento a una superficie representa imponer una condición de vínculo.

Desde el punto de vista matemático, los vínculos se representan por relaciones de vinculo.

Ejemplo 1: Una partícula obligada a deslizar sobre un alambre cuyo eje describe una curva plana $y = f(x)$, $\forall x$ / $a \leq x \leq b$. Para P, el alambre constituye un vínculo mecánico, el que matemáticamente se expresa por la relación de vinculo:

$$y - f(x)= 0, \; a \leq x \leq b.$$

Ejemplo 2. Una partícula puede moverse *en el interior* de una esfera de radio r. Al poder ocupar cualquier posición dentro del volumen limitado por la superficie, incluido su contorno, la relación de vínculo resulta:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, \; x \leq r, \; y \leq r, \; z \leq r$$

Ejemplo 3: Una partícula sujeta al extremo de una *varilla indeformable* de longitud L, y fija en su extremo opuesto P_0. La relación de vínculo para el sistema de referencia adoptado es:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2+(z-z_0)^2=L^2$$

La partícula evolucionará siempre sobre una superficie esférica de radio L.

Observaciones:

1. La relación de vínculos expresa las posibilidades que tiene el movimiento, pero no caracteriza físicamente al vínculo. Así, una partícula sujeta a una cuerda inextensible de longitud l, constituye un vínculo físicamente diferente de los indicados en los ejemplos 2 y 3. La relación de vínculo es, sin embargo, igual a la del ejemplo 2.
2. La expresión de la relación de vínculo depende del sistema de referencia que se adopte.

Las consideraciones precedentes permiten la siguiente agrupación: los vínculos mecánicos pueden ser completos o bilaterales, o incompletos o unilaterales.

El vínculo es completo cuando la partícula está obligada a permanecer en todo momento en contacto con él.

Matemáticamente, la relación de vínculo constituye *una ecuación o igualdad*. En este tipo de vínculo para cada desplazamiento **ds** es siempre posible que ocurra el opuesto **-ds**.

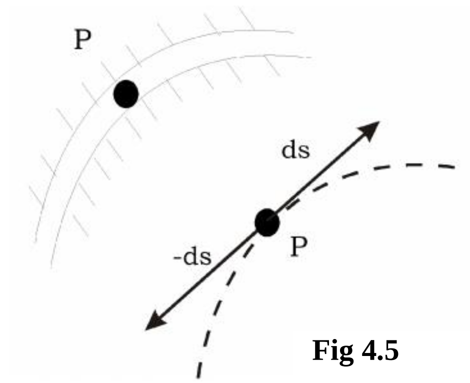

Fig 4.5

El vínculo es incompleto cuando solo impone una condición de frontera entre dos semiespacios y la partícula queda condicionada únicamente a no trasponerla, pudiendo evolucionar en cualquier punto del semiespacio habilitado. El contacto con la frontera es posible, pero no forzoso. Matemáticamente, la relación de vínculo constituye una inecuación o desigualdad. En estos casos, para algunos desplazamientos posibles **ds_2**, no son posibles sus opuestos **$-ds_2$**.

Los vínculos podrán ser **rugosos** o **lisos**, según introduzcan o no fuerzas disipativas de fricción o rozamiento.

También es posible considerar vínculos de naturaleza y acción dinámica variables o constantes en el tiempo.

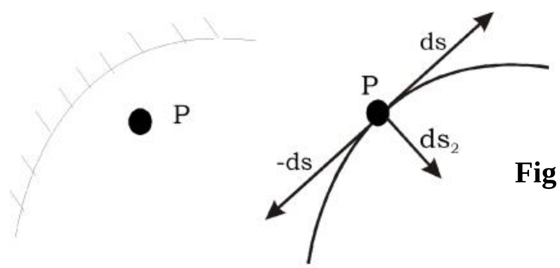

Fig 4.6

Reacciones de vínculos

La restricción al movimiento que introduce un vínculo, constituye una acción dinámica actuante sobre la partícula. Es decir, se materializa mediante fuerzas conocidas como Reacciones de vínculo. Así, los vínculos son responsables de la aparición de fuerzas reactivas, en tanto que a las restantes acciones actuantes sobre la partícula, se denominan fuerzas activas.

Son características de las reacciones de vínculo:

- dependen de las fuerzas activas actuantes.
- Si las fuerzas se anulan, las reacciones de vínculo se anulan.
- Las reacciones de vínculo no pueden, de por sí, producir movimiento.

Diagrama de cuerpo libre: Esquema en que se representan todas las fuerzas actuantes: activas, por interacción de la partícula con otros sistemas, y reactivas introducidas por los vínculos.

Vínculos Rugosos. Rozamiento.

Se ha dicho que los vínculos rugosos son los que introducen fuerzas disipativas de rozamiento. Estas acciones se oponen al deslizamiento relativo entre partículas y vínculos, y se ejercen según la dirección tangencial.

Para describir las características del rozamiento de primera especie, es conveniente considerar un cuerpo (que se puede asimilar a una partícula) apoyado sobre una superficie rugosa que actúa como vínculo, y se puede señalar que:

- La magnitud de la fuerza de rozamiento es independiente de la extensión de la superficie de contacto.
- Depende de la naturaleza de las superficies en contacto.
- Es proporcional a la acción de las fuerzas activas normales a la superficie o vínculo.
- Equilibra cualquier componente tangencial de la fuerza exterior, es decir, impide desplazamientos, mientras no se supere el valor límite fN, en que f es el coeficiente de rozamiento estático (siempre menor que la unidad)

El movimiento en presencia de vínculos.

En presencia de vínculos, la ecuación general del movimiento se expresa por:

$$\mathbf{F_a} + \mathbf{F_{vin}} = m\mathbf{a}$$

$\mathbf{F_a}$ es la fuerza activa, $\mathbf{F_{vin}}$ es la resultante de todas las reacciones de vínculos. Cada una de estas reacciones admite una descomposición $(\mathbf{F_{vin}})_i = (F^T_{vin})_i + (F^N_{vin})_i$, donde $(F^T_{vin})_i$ es la reacción de vínculo tangencial y $(F^N_{vin})_i$ la reacción de vínculo normal.

Cuando el vínculo es liso, $(F^T_{vin})_i = 0$, es decir, la reacción es normal a la superficie o curva en que se materializa el vínculo.

En vínculos rugosos $(F^T_{vin})_i$ es debida a las fuerzas de fricción o rozamiento.

Movimiento de una partícula sobre una curva lisa.

Para una curva lisa y fija se puede considerar el movimiento en coordenadas intrínsecas $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. La reacción de vínculo actúa en el plano normal a la trayectoria (tiene componentes según $\mathbf{T}$ (versor Tangente) y $\mathbf{N}$ (versor normal). Entonces, si la fuerza activa es $\mathbf{R} = R_t\mathbf{T} + R_n\mathbf{N} + R_b\mathbf{B}$ ($\mathbf{B}$=versor binormal)

Aplicando $\mathbf{F_a} + \mathbf{F_{vin}} = m\mathbf{a}$,

Tendremos las siguientes ecuaciones en componentes:

$$\begin{cases} F_t = m\ddot{s} \\ R_n + F^N_{vin} = m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} \\ R_b + F^b_{vin} = 0 \end{cases}$$

Movimiento sobre una superficie lisa

Una superficie en el espacio está expresada por : $f(x,y,z,t) = 0$ [1].

La superficie será fija cuando: $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$. Si es lisa, debe ser $(\mathbf{F_{vin}}) = (F^N_{vin}) = \lambda\,\nabla f$,

donde λ es un escalar y ∇f es el gradiende de f.

La ecuación fundamental es $\mathbf{R} + (F^N_{vin}) = \mathbf{R} + \lambda\nabla f = m\mathbf{a}$, ($\mathbf{R}$ es la fuerza activa) que se puede expresar en componentes:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = R_x + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = R_y + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = R_z + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \qquad [2]$$

Mediante las ecuaciones [1] y [2] se puede resolver el movimiento si se conocen las condiciones iniciales ($\mathbf{r}_0$,$\mathbf{v}_0$).

Existirá equilibrio toda vez que la resultante de las fuerzas activas sea nula, o bién normal a la superficie (caso de vínculo bilateral). En caso de vínculo incompleto, además es necesario que **R** tenga un sentido único: el que posibilite presión de la partícula sobre la superficie.

Dinámica Relativa de la Partícula

En Cinemática hablamos de Sistemas de Referencia Fijos y Móviles. En Dinámica, a su vez distinguimos *sistemas Inerciales* y *No Inerciales*. Entre los sistemas móviles, basta una rotación de los mismos para que estén en acelerados y en consecuencia, constituyen sistemas no inerciales.

En Cinemática Relativa, hemos establecido la relación entre la aceleración de la partícula referida a un sistema fijo cuando interviene además, al menos un sistema móvil (en el caso más general, animado de movimiento de rototraslación).

$$a\big|_F = a\big|_M + \ddot{R} + \dot{\omega}\times r\big|_M + 2\,\omega\times v\big|_M + \omega\times(\omega\times r\big|_M)$$

Por la ecuación fundamental de la dinámica: **F** = m**a** considerando a un sistema fijo como Inercial y al sistema en rototraslación como no inercial:

$$F = ma\big|_F = ma\big|_M + m\ddot{R} + m\dot{\omega}\times r\big|_M + 2m\,\omega\times v\big|_M + m\omega\times(\omega\times r\big|_M)$$

En esta expresión, se define a:

$F\big|_M = ma\big|_M$ (masa x aceleración relativa)

Fuerza inercial de arrastre: $-(m\ddot{R} + m\dot{\omega}\times r\big|_M + 2m\,\omega\times v\big|_M + m\omega\times(\omega\times r\big|_M) = F\big|_A)$

= (masa x aceleración de arrastre)

Esta fuerza inercial de arrastre constituye una "fuerza correctiva que permite ajustar la ecuación fundamental cuando está referida a un sistema no inercial, o sea:

$$F\big|_M = ma\big|_M = F\big|_F - F\big|_A$$

La fuerza inercial de arrastre se compone de una de Arrastre por traslación y otra de arrastre por rotación:

$$F\big|_A = F\big|_{A(\text{Traslación})} + F\big|_{A(\text{Rotación})}$$

$$F\big|_{A(\text{Traslación})} = -\,m\ddot{R}$$

$$F\big|_{A(\text{Rotación})} = -\,(m\dot{\omega}\times r\big|_M + 2m\,\omega\times v\big|_M + m\omega\times(\omega\times r\big|_M))$$

Entre los términos de la fuerza de arrastre por rotación, se distinguen:

$2m\,\omega\times v\big|_M$ = Fuerza de inercia de Coriolis.

$m\,\dot{\omega}\times r\big|_M$ = Fuerza de inercia debida a la aceleración de la rotación.

$m\omega\times(\omega\times r\big|_M)$ =Fuerza de inercia Centrífuga.

Principio de D´Alembert

Se trata de un Principio que permite plantear los problemas de dinámica en forma similar a problemas de estática, es decir mediante ecuaciones de equilibrio.
En el apartado anterior, se ha introducido el concepto de fuerza inercial, la cual surge de la multiplicación de la masa de la partícula por una aceleración.
En base a esta idea la ecuación de Newton
F = m a escrita como F – m a = 0
Considerando ahora la cantidad - m a como una fuerza inercial F^{IN}, la ecuación anterior puede pensarse como una ecuación de equilibrio
$F + F^{IN} = 0$
Esta última ecuación permite tratar un problema de dinámica como uno de estática planteando la ecuación de movimiento como la indicada mas arriba.
Esto constituye la base del principio de D´Alembert para un sistema. Cabe resaltar que las ecuaciones basadas en este principio y las correspondientes a la segunda ley de Newton son enteramente equivalentes.