Unidad 3: Cinemática del Cuerpo Rígido

Conceptos generales

En el estudio de la cinemática del sólido la distribución de su masa resulta fundamental y se verá ademas que el movimiento general siempre puede ser descripto como la combinación de movimientos sencillos de traslación y rotación. Se analizarán casos particulares del movimiento de sólidos, tales como el movimiento plano, el movimiento polar o con un punto fijo.
Para comenzar se define a un cuerpo rígido como un conjunto de partículas materiales que mantienen sus distancias relativas constantes aunque este concepto de sólido rígido es una idealización ya que en la realidad física no existe, presentándose sólidos reales que se deforman variando las distancias relativas entre partículas, es decir puede cambiar de forma.
En general las deformaciones de los sólidos reales son pequeñas comparadas con sus dimensiones y podremos aplicar los conceptos y definiciones relativas al sólidos rígido ideal pero en los casos en que las deformaciones sean importantes respecto de la geometría del sólido no podrán ser aplicados.
La cinemática del sólido rígido estudia las diferentes posibilidades de movimientos que puede presentar en el espacio para lo cual se comenzará definiendo la condición analítica de rigidez. La Figura (4 .1) presenta el esquema de un cuerpo en el espacio y dos puntos P_1 y P_2.
La distancia entre ambos puntos se obtiene, referenciándolos a un sistema de coordenadas, mediante el valor absoluto de la diferencia de las posiciones de ambos puntos dada por

$$\left|\vec{OP}_2 - \vec{OP}_1\right| \qquad (4-1)$$

Por la condición de rigidez esta distancia permanecerá constante independientemente de las interacciones que se realicen sobre el cuerpo. Si se refieren ambos puntos mediante vectores posición la distancia puede escribirse con el siguiente producto escalar.

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\,.\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = cte$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 = cte \qquad (4-2)$$

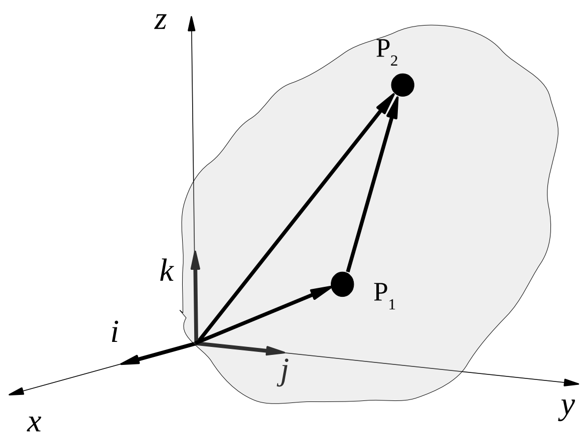

Figura 4.1: Posición de dos puntos de un cuerpo rígido respecto de un sistema de referencia cartesiano.

Si el sólido está en movimiento las posiciones de los puntos P_1 y P_2 son funciones del tiempo entonces, derivando la expresión (4-2):

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 = 0$$

$$2.(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\,.\,\frac{d}{dt}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\,.\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = 0 \qquad (4-3)$$

Dividiendo miembro a miembro la expresión (4-3) por el módulo del vector $\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|$ se obtiene el versor que indica la dirección del segmento que une ambos puntos quedando

$$\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} \cdot (\vec{v}_2-\vec{v}_1) = 0$$

$$\vec{e}_{2-1} \cdot (\vec{v}_2-\vec{v}_1) = 0$$

Si de esta última se distribuye el producto escalar y se ordena se tendrá

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{e}_{2-1} = \vec{v}_1 \cdot \vec{e}_{2-1} \qquad (4-4)$$

La expresión (4-4) se denomina condición cinemática de velocidades que gráficamente se interpreta de acuerdo a la Figura 4.2. como la proyección de los vectores velocidad de dos puntos de un cuerpo rígido en la dirección definida por el versor *e*$_{2-1}$.
Se resalta que, a pesar de que los dos puntos poseen distintas velocidades sus proyecciones sobre la recta de unión de ambos es idénticas cumpliendo con la condición de rigidez.

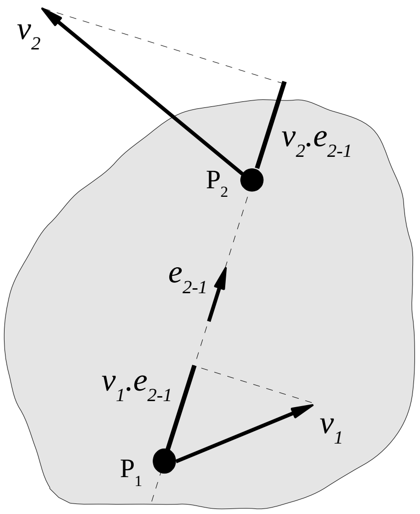

Figura 4.2: Aplicación de la condición cinemática de velocidades a dos puntos de un cuerpo rígido en movimiento.

Derivando la expresión (4-3) se obtendrá

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \cdot (\vec{v}_2-\vec{v}_1) + (\vec{r}_2-\vec{r}_1) \cdot \frac{d}{dt}(\vec{v}_2-\vec{v}_1) = 0$$
$$(\vec{v}_2-\vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2-\vec{v}_1) + (\vec{r}_2-\vec{r}_1) \cdot (\vec{a}_2-\vec{a}_1) = 0$$
$$(\vec{v}_2-\vec{v}_1)^2 + (\vec{r}_2-\vec{r}_1) \cdot (\vec{a}_2-\vec{a}_1) = 0$$

Dividiendo miembro a miembro la expresión anterior por el módulo del vector $|\vec{r}_2-\vec{r}_1|$ se obtiene

Operando algebraicamente se tendrá

$$\frac{(\vec{v}_2-\vec{v}_1)^2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} + \frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} \cdot (\vec{a}_2-\vec{a}_1) = 0$$
$$\frac{(\vec{v}_2-\vec{v}_1)^2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} + \vec{e}_{2-1} \cdot (\vec{a}_2-\vec{a}_1) = 0$$
$$\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_{2-1} = a_1 \cdot \vec{e}_{2-1} - \frac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|^2}{|\vec{P_2-P_1}|} \qquad (4-5)$$

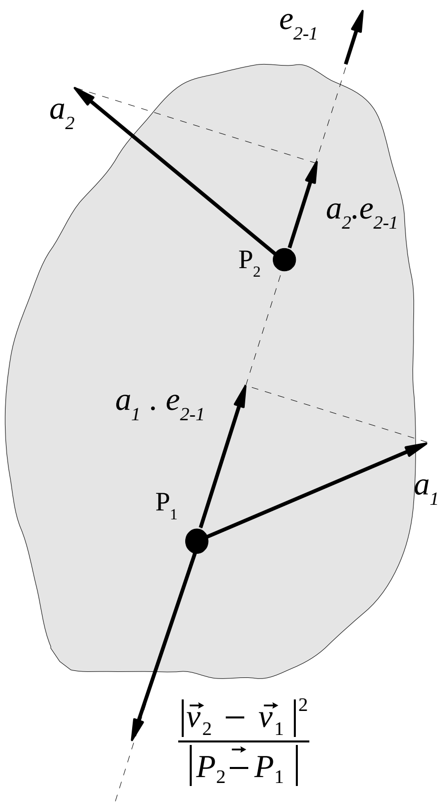

Figura 4.3: Se indican las tres proyecciones de cada aceleración sobre la recta punteada más la aceleración centrípeta.

La expresión (4 – 5) representa la condición cinemática de aceleraciones cuya interpretación gráfica puede verse en la Figura 4.3 que a fines didácticos las proyecciones de las aceleraciones de ambos puntos han sido dibujadas positivas. El tercer término corresponde a la aceleración centrípeta y debe quedar siempre opuesto a la dirección del versor ***e***$_{2-1}$ dado que se tomó como referencia el punto P_1.

Movimientos del Sólido en el Espacio

El sólido rígido no vinculado en el espacio puede realizar movimientos y llegar poseer diferentes ubicaciones y orientaciones en el transcurso del tiempo. Estos movimientos pueden ser puros o compuestos los cuales se desarrollarán a continuación.

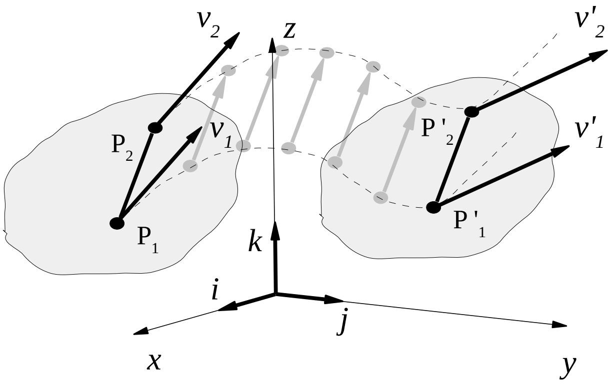

Figura 4.4: Dos posiciones diferentes de un cuerpo rígido indicando el comportamiento del segmento AB.

Movimiento de traslación puro.

Este tipo de movimiento se da cuando la recta que une dos puntos cualquiera de un sólido conserva su dirección en las distintas posiciones que ocupa a través del tiempo según se muestra en la Figura 4.4.

Las características cinemáticas del movimiento de traslación del sólido son:

1 - Todos los puntos del rígido tienen idénticas velocidades instantáneas. Esto se puede observar en la Figura 4.4 donde $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ y $\vec{v}\,'_1 = \vec{v}\,'_2$

2 - Toda línea del sólido se traslada manteniéndose paralela a si misma. Tal lo que ocurre con el segmento P_1-P_2 de la misma figura.

3 - Las trayectorias de todos los puntos son idénticas y pueden ser superpuestas exactamente unas con otras.

Movimiento de rotación

Cuando un sólido se mueve de tal manera que permanecen fijos dos de sus puntos se dice que está en rotación lo que puede extenderse a todos los puntos que se encuentran sobre la recta definida por los dos primeros y el estado de velocidad del sólido se estudia partiendo de la condición de rigidez. En la Figura 4.5 los puntos O_1 y O_2 se encuentran fijos en el espacio así como todos aquellos que se encuentre sobre la linea punteada o eje definida por ambos. Para un punto cualquiera *P* fuera de dicha linea las distancias a los puntos O_1 y O_2 permanecerán constantes, es decir el valor absoluto de las distancias será constante de acuerdo a

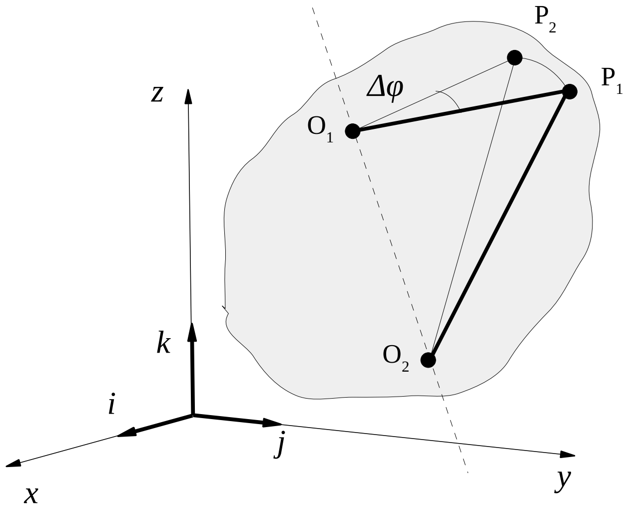

Figura 4.5: P.

$$\left|\overrightarrow{P-O_1}\right| = \left|\overrightarrow{P-O_2}\right| = cte$$

La misma expresión se puede escribir como

$$\left(\overrightarrow{P-O_1}\right)^2 = \left(\overrightarrow{P-O_2}\right)^2 = cte$$

Considerando que la posición del punto es función del tiempo se puede derivar las anteriores quedando

$$2\ .\ (\overrightarrow{P-O_1}).\frac{\partial(\overrightarrow{P-O_1})}{\partial t}=2\ .(\overrightarrow{P-O_1}).\frac{\partial(\overrightarrow{P-O_1})}{\partial t}=0$$

$$2\ .\ (\overrightarrow{P-O_1}).(\vec{V}_P-\vec{0})=2\ .(\overrightarrow{P-O_1}).(\vec{V}_P-\vec{0})=0$$

$$2\ .\ (\overrightarrow{P-O_1}).\vec{V}_P=2\ .(\overrightarrow{P-O_1}).\vec{V}_P=0$$

Como ningún vector de los productos indicados es nulo, se deduce que los vectores son perpendiculares entre si y a su vez perpendicular al plano definido por los puntos $\boldsymbol{O_1 - O_2 - P}$
La posición del sólido queda determinado por tres puntos y su movimiento por el del punto ***P***.
La velocidad de cualquier punto será perpendicular al eje O_1 - O_2 (siempre que no se encuentren sobre el eje).
En un tiempo Δt el plano barre un ángulo $\Delta\varphi$ con el cual se define la velocidad angular media como

$$\omega_{media}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

La correspondiente velocidad angular instantánea será entonces

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Un punto cualquiera del sólido que se encuentre a una distancia r perpendicular al eje (que corresponderá al radio) describirá una trayectoria circular cuyo arco estará dado por

$$\Delta s=\Delta\varphi\,.\,r$$

La rapidez instantánea de dicho punto valdrá

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.r_P$$

$$v_P\quad=\quad\omega\ .\ r_P$$

La velocidad de un punto es igual al producto de la velocidad angular por el radio del punto respecto del eje de rotación. Debido al tratamiento vectorial que se le otorga a la mayoría de las magnitudes tratadas hasta aquí, es conveniente otorgarle a la velocidad angular un carácter vectorial para lo cual se utilizará el producto vectorial ya empleado en cinemática de la partícula quedando

$$\vec{v}_P=\vec{\omega}\times\vec{r}_P\qquad(4-6)$$

Para determinar la aceleración se deriva la expresión (4 – 6) utilizando la regla del prtoducto quedando

$$\vec{a}_p=\frac{d(\vec{v}_P)}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_P+\vec{\omega}\times\frac{d(\vec{r}_P)}{dt}$$

Analizando cada termino por separado se tendrá

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_P=\alpha\times\vec{r}_P$ $\rightarrow$ corresponde a la aceleración tangencial.

$\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_P}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{v}_P=\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}_P$ $\rightarrow$ corresponde a la aceleración normal o centrípeta.

Finalmente la aceleración para cada punto del cuerpo rígido será la suma de la aceleración tangencial y la centrípeta

$$\vec{a}_p=\vec{\alpha}\times\vec{r}_P+\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}_P \qquad (4-7)$$

Si a cada punto del sólido le corresponde una velocidad se puede decir que el estado instantáneo del movimiento del rígido queda definido por un campo de velocidades. En el caso de la rotación pura quedará completamente determinado por el vector $\vec{\omega}$ y la configuración de las líneas de campo resultan circunferencias.
Si adoptamos un sistema referencial fijo cuyo eje "z" coincida con el eje de giro del sólido, la velocidad instantánea de cualquier punto *P* quedará definido por la expresión

$$\vec{v}_p=\begin{pmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{pmatrix}$$

Como en el caso indicado ω_x y ω_y son nulos la expresión queda reducida a

$$\vec{v}_p=\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{pmatrix}=-\omega_z\ .\ r_y\,\vec{i}+\omega_z\ .\ r_x\,\vec{j}=\omega_z\ .(-r_y.\,\vec{i}+r_x.\,\vec{j})$$

Esto muestra que las velocidades se encuentran en planos perpendiculares al eje "z".

Grados de libertad
Si se tiene una partícula en el espacio esta se puede mover en tres direcciones por lo que se definirá el número de grados de libertad como

GCL = 3 . 1

Al tener tres partículas tendrán

GCL = 3 . 3 = 9

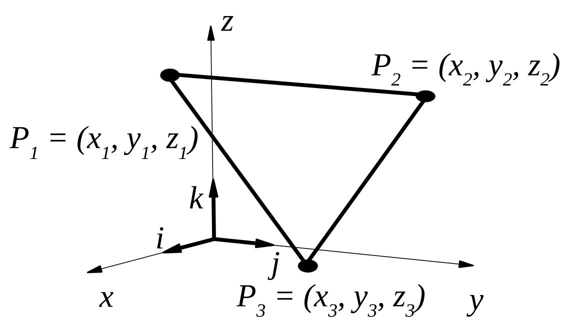

Figura 4.6: P.

Si las tres partículas anteriores se mantienen rígidas mediante tres vínculos geométricos, o lo que es lo mismo estas representan un cuerpo rígido de 3 partículas de acuerdo a lo esquematizado en la Figura 4.6, las posiciones relativas de dichas partículas es decir las distancias entre ellas se mantendrá constante y teniendo presente que cada vínculo geométrico restringe un grado de libertad queda entonces

9 grados de libertad - 3 = 6 grados de libertad

Si se adiciona una nueva partícula a las tres anteriores se agrega con ello 3 grados de libertad, pero si se la vincula a las anteriores también se adiciona 3 nuevos vínculos. Podemos así seguir adicionando infinitas partículas hasta constituir un sólido rígido. Este sólido poseerá en el espacio 6 grados de libertad.
Estos seis grados de libertad pueden ser los tres desplazamientos de un punto del mismo y tres rotaciones no paralelas o bien la definición de dos puntos y un ángulo de rotación, etc.

Movimiento polar del sólido
Es un movimiento en el cual un solo punto (polo) permanece fijo en el espacio y el vector rotación ω no permanece fijo por lo que puede ir cambiando su orientación en el espacio en función del tiempo.
Así definido el movimiento polar, el sólido posee 3 (tres) grados de libertad ya que se ha restringido el movimiento a un punto "O" por lo que las tres posibilidades de movimiento son rotaciones respecto a las tres direcciones ortogonales.

Orientación del sólido en el espacio en un movimiento polar
Para orientar en el espacio un sólido que posee un punto fijo se adoptarán dos sistemas referenciales: uno fijo o absoluto y otro sistema solidario con el cuerpo rígido que se encuentra en movimiento ambos ortogonales.
La rotación del sistema móvil estará relacionado mediante una transformación que puede ser expresada mediante una matriz ortogonal [A] que a su vez pueda descomponerse cada rotación en tres rotaciones independientes expresadas mediante el producto de las matrices que representen a cada una de ellas quedando $[A] = [A_1] . [A_2] . [A_3]$.

Angulos de Euler
En el movimiento polar se pueden definir tres rotaciones independientes que compuestas darán como resultado una rotación total que brinde la relación entre un sistema fijo y un sistema solidario con el sólido que fije la orientación del mismo. Estas rotaciones son:
1 - **Angulo de precesión.**
Este ángulo de rotación se consigue girando la terna de eje respecto de “z” lo que generará un ángulo φ de precesión en los ejes **x** e **y**. El eje **z** no gira ya que sobre este se realizará el giro según la Figura 4.7. La matriz de transformación que representa el paso de las bases *(i, j, k)* a *(i', j', k')* es:

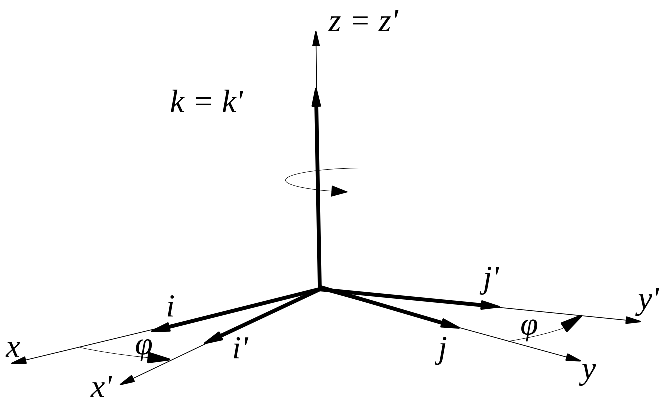

Figura 4.7: Terna girando respecto del eje z=z´.

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos\varphi & sen\,\varphi & 0 \\ -sen\,\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

$$[A_1] = \begin{pmatrix} +\cos\varphi & sen\,\varphi & 0 \\ -sen\,\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4-8)$$

2 - Angulo de nutación

Si a partir de la posición final de rotación anterior se produce una nueva rotación pero respecto del eje "x" (a la que se dominará línea de nodo) un ángulo θ el sistema pasará desde *(i', j', k')* a *(i'', j'', k'')* permaneciendo los versores $i' = i''$, es decir se conserva la dirección del eje "x" según se especifica en la Figura 4.8.

Para este caso la matriz correspondiente para representar matricialmente dicha transformación será

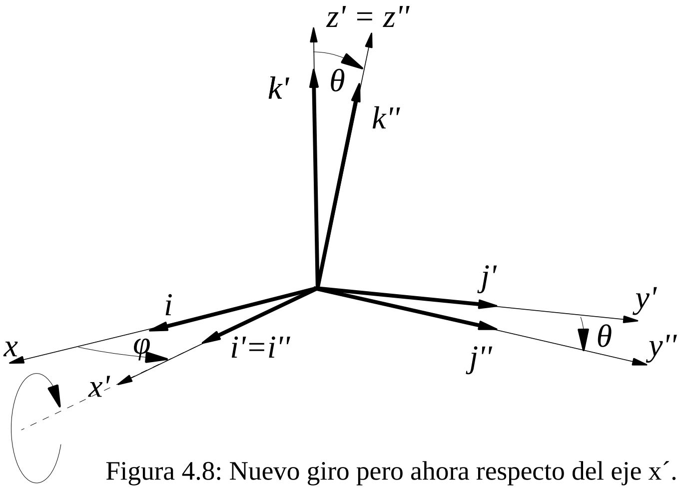

Figura 4.8: Nuevo giro pero ahora respecto del eje x´.

$$\begin{pmatrix} i'' \\ j'' \\ k'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix}$$

$$[A_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (4-9)$$

3 – Angulo de rotación propia

Por último para realizar el tercer giro el sistema rota sobre el eje z´´ que se denominará rotación propia representada por el ángulo ψ que por razones didáctica en la Figura 4.9 solo se representa este ángulo. La matriz de transformación correspondiente estará dada por

$$\begin{pmatrix} i''' \\ j''' \\ k''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & sen\psi & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ -sen\psi & \cos\psi & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i'' \\ j'' \\ k'' \end{pmatrix}$$

$$[A_3] = \begin{pmatrix} \cos\psi & sen\psi & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ -sen\psi & \cos\psi & 0 \end{pmatrix} \qquad (4-10)$$

Cada una de las matrices $[A_1]$,$[A_2]$ y $[A_3]$ poseen las siguientes características:

- ✔ Son ortogonales, o sea que su determinante det$[A_i]$ = 1
- ✔ Su inversa es igual a su transpuesta, es decir que $[A_i]^{-1} = [A_i]^{T}$
- ✔ Los tres ángulos de rotación son dependientes del tiempo.

Movimiento rototraslatorio. Teorema de Euler-Chassles.

Este es el movimiento más general que puede presentar un sólido en el espacio y para su análisis se puede utilizar el principio de superposición de movimientos que se pueden descomponer en la traslación de un punto del cuerpo más una rotación respecto de un eje que pase por dicho punto.

Sistema de traslación y rotaciones

Si se tiene un cuerpo rígido cuyo movimiento resulta de la superposición de varias traslaciones y rotaciones, se puede considerar que el estado de movimiento del mismo queda descripto en cada instante por un sistema de vectores de traslación de los puntos A_1, A_2, … A_n dados por $\vec{V}_1+\vec{V}_2+...+\vec{V}_n$ y vectores de velocidad de rotación respecto a ejes que pasen respectivamente por cada uno de ellos dadas por $\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2+...+\vec{\omega}_n$ según la Figura 4.9.

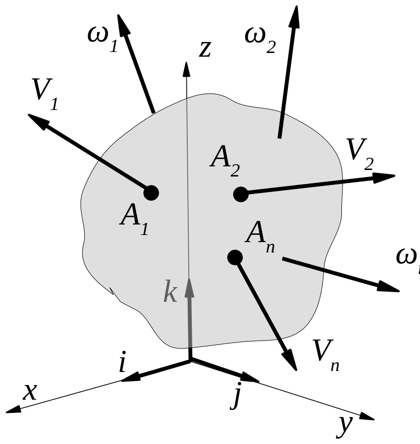

Figura 4.9: Movimiento de un cuerpo rígido en traslación y rotación simultaneas.

Según el teorema de Euler-Chasles es posible describir el movimiento general anterior, mediante la traslación de un único punto del cuerpo rígido "O" que se puede elegir arbitrariamente y se lo denominará polo de reducción del sistema rototraslatorio más una rotación respecto de un eje que pasa por dicho polo "O".

Si se considera la velocidad de un punto cualquiera P, el mismo estará sujeto a todas las velocidades de traslación y rotación pudiéndose expresar

$$\vec{V}_P=\sum \vec{V}_i+\sum(\vec{\omega}_i\times \overrightarrow{P-A_i}) \qquad (4-11)$$

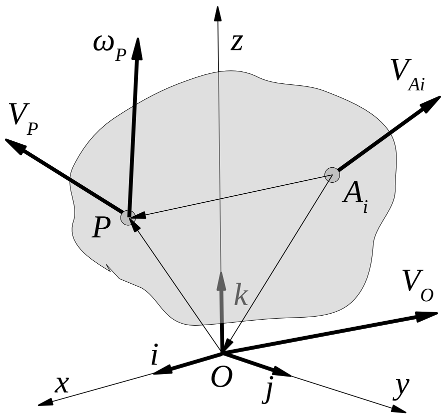

Figura 4.9: P.

Como

$$(\overrightarrow{P-A_i})=(\overrightarrow{O-A_i})+(\overrightarrow{P-O})$$

Reemplazando esta última en la expresión (4–11) queda

$$\vec{V}_P=\sum \vec{V}_i+\sum \vec{\omega}_i\times[(\overrightarrow{O-A_i})+(\overrightarrow{P-O})]$$

$$\vec{V}_P=\sum \vec{V}_i+\sum \vec{\omega}_i\times(\overrightarrow{O-A_i})+\sum \vec{\omega}_i\times(\overrightarrow{P-O})$$

$$\vec{V}_P=\ \vec{V}_O\ \ +\ \ \vec{\omega}\times(\overrightarrow{P-O}) \qquad (4-12)$$

Es decir hemos expresado la velocidad de un punto de un sólido en función de la velocidad de un polo "O" y una rotación respecto del mismo.

Para dos puntos cualquiera P_1 y P_2 se tendrá, aplicando el teorema de Euler Chasles a cada uno de ellos tomando como polo el punto O se tendrá

$$\vec{V}_{P1}=\ \vec{V}_O\ \ +\ \ \vec{\omega}\times(\overrightarrow{P_1-O}) \qquad (4-13)$$
$$\vec{V}_{P2}=\ \vec{V}_O\ \ +\ \ \vec{\omega}\times(\overrightarrow{P_2-O}) \qquad (4-14)$$

Proyectando cada una de estas velocidades en la dirección de la recta que une ambos puntos se tendrá

$$\vec{v}_{P1}\ .\ \vec{e}_{P2-P1}=\vec{v}_{P2}\ .\ \vec{e}_{P2-P1}$$

Reemplazando en esta última las expresiones (4-13) y (4-14) quedará

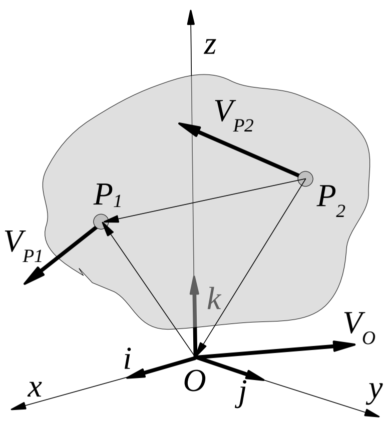

Figura 4.10: Movimiento del sólido tomando el punto O como polo.

$$[\vec{V}_O + \vec{\omega}\times(\overrightarrow{P_1-O})] \,.\, \vec{e}_{P2-P1} = [\vec{V}_O + \vec{\omega}\times(\overrightarrow{P_2-O})] \,.\, \vec{e}_{P2-P1}$$
$$\vec{V}_O .\, \vec{e}_{P2-P1} + \vec{\omega}\times(\overrightarrow{P_1-O}) \,.\, \vec{e}_{P2-P1} = \vec{V}_O .\, \vec{e}_{P2-P1} + \vec{\omega}\times(\overrightarrow{P_2-O}) \,.\, \vec{e}_{P2-P1}$$
$$\vec{\omega}\times(\overrightarrow{P_1-O}) \,.\, \vec{e}_{P2-P1} = \vec{\omega}\times(\overrightarrow{P_2-O}) \,.\, \vec{e}_{P2-P1}$$
$$\vec{V}_1 \,.\, \vec{e}_{P2-P1} = \vec{V}_2 \,.\, \vec{e}_{P2-P1}$$

Se puede observar que cumple con la condición cinemática para las velocidades por lo que cualquier punto del sólido puede tomarse como polo de reducción y en el caso que se eligiera uno fuera del cuerpo, se deberá considerar que tal punto está afectado por el movimiento del mismo sólido.

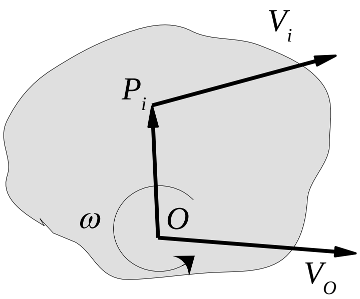

Figura 4.10: Movimiento del sólido tomando el punto O como polo.

Centro instantáneo de rotación

El movimiento más general de un sólido, es el rototraslatorio que se reduce a una rotación **ω** aplicada en un punto **O** y una traslación V_o. Si el movimiento es plano **ω** debe ser perpendicular al plano que contiene ambas velocidades entonces un punto cualquiera Pi, tendrá velocidad:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_O + \vec{\omega}\times(\overrightarrow{P_i-O}) \qquad (4-15)$$

Siempre que el sólido rote existirá un punto perteneciente o no al mismo que en un instante dado su velocidad sea nula y solo rote respecto a dicho punto al que se lo denominará centro instantáneo de rotación (CIR). Debe entenderse que dicho punto cambia de posición pero en ese instante su velocidad de traslación se anula. Si se lo toma como polo de reducción la velocidad del punto “Vi”quedará

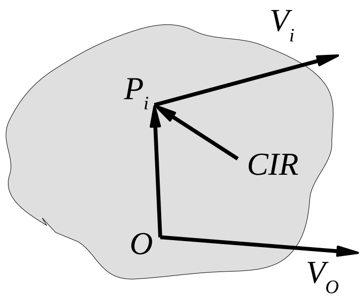

Figura 4.11: Posición del CIR tomado como polo.

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{CIR} + \vec{\omega}\times(\overrightarrow{CIR-O})$$
$$\vec{V}_i = 0 + \vec{\omega}\times(\overrightarrow{CIR-O}) \qquad (4-16)$$

Igualando (4-15) y (4-16)

$$\vec{V}_O + \vec{\omega}\times(\overrightarrow{P_i-O}) = \vec{\omega}\times(\overrightarrow{CIR-O})$$
$$\vec{V}_O = \vec{\omega}\times(\overrightarrow{CIR-O}) - \vec{\omega}\times(\overrightarrow{P_i-O}) = 0$$
$$\vec{V}_O = \vec{\omega}\times(\overrightarrow{CIR-P_i}) \qquad (4-17)$$

Realizando el producto vectorial indicado e igualando los vectores de ambos miembros se tendrá

$$\begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ X_{CIR} & Y_{CIR} & Z_{CIR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\,.\,Y_{CIR} \\ \omega\,.\,X_{CIR} \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta expresión se deduce que las coordenadas del CIR son

$$V_{0x} = -\omega\,.\,Y_{CIR} \;\rightarrow\; Y_{CIR} = -\frac{V_{0x}}{\omega}$$
$$V_{0y} = \omega\,.\,X_{CIR} \;\rightarrow\; X_{CIR} = \frac{V_{0y}}{\omega}$$

Propiedades del Centro instantáneo de rotación

- El CIR tiene velocidad nula.
- Está definido para un instante determinado.
- En otro instante la ubicación del CIR cambia.
- En cada instante, las normales trazadas desde los orígenes de los vectores velocidades pasan por el CIR.

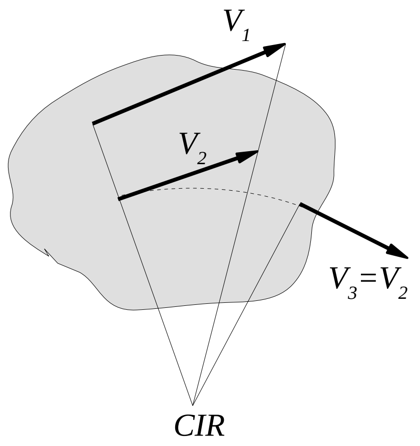

Figura 4.11: Posición del CIR tomado como polo.