

## Unidad 3: Cinemática del Cuerpo Rígido.

### Introducción

En el estudio de la cinemática del sólido se toman en cuenta las dimensiones de los cuerpos. Se verá que el movimiento general de un cuerpo siempre se puede describir como la combinación de movimientos sencillos de traslación y rotación. Se analizarán casos particulares del movimiento de sólidos, tales como el movimiento plano, el movimiento polar o con un punto fijo.

### Definición

**Cuerpo rígido:** Se define como cuerpo sólido rígido aquel elemento constituido por partículas que mantienen sus distancias relativas constantes.

**Cuerpo deformable:** es aquel en el cual las distancias relativas entre partículas pueden variar.

Estudiaremos la cinemática del sólido rígido, o sea las posibilidades y movimientos que puede presentar en el espacio.

El concepto de sólido rígido es una idealización; en la realidad física, el mismo no existe. Nos encontramos en ella con sólidos reales: deformables.

En general, las deformaciones de los sólidos reales son pequeñas comparadas con sus dimensiones y podremos aplicar los conceptos y definiciones relativas al sólidos rígido ideal.

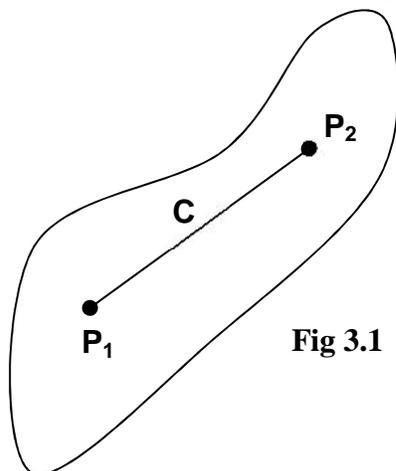
En los casos en que las deformaciones sean importantes respecto de la geometría del sólido, al mismo no podrán aplicarse los conceptos referidos al sólido rígido.

### Condiciones Cinemáticas del Sólido Rígido

Partiendo de la definición dada anteriormente, estableceremos relaciones que ligan las distintas variables cinemática del sólido rígido.

#### Condición analítica de rigidez

La condición de rigidez la podremos expresar por:  $|\vec{c}| = cte$



$|\vec{c}| = cte$  Distancia entre dos puntos

P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub> dos puntos del rígido

Referenciando al sólido rígido respecto de un punto de referencia "O" quedará:

$$\overline{P_2 - P_1} = cte$$

$\overline{(P_2 - P_1)}$ , es el vector diferencia entre los vectores posición de los puntos  $P_1$  y  $P_2$ . Su módulo es la distancia entre los mismos.

### Condición cinemática de velocidades

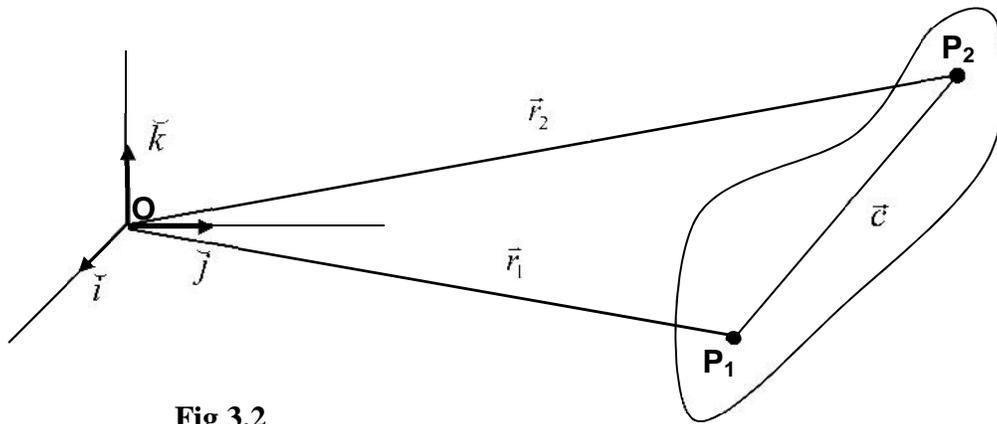


Fig 3.2

$$\overline{(P_2 - P_1)} = cte$$

$$\overline{(P_2 - P_1)} \cdot \overline{(P_2 - P_1)} = cte = \overline{(P_2 - P_1)}^2$$

Si el sólido está en movimiento las posiciones de los puntos  $P_1$  y  $P_2$  son funciones del tiempo entonces:

$$\frac{d}{dt} \overline{(P_2 - P_1)}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \overline{(P_2 - P_1)} \cdot \left[ \frac{d\overline{P_2}}{dt} - \frac{d\overline{P_1}}{dt} \right] = 0$$

$$2 \overline{(P_2 - P_1)} \cdot (\overline{v_2} - \overline{v_1}) = 0$$

donde

$$\overline{v_2} = \frac{d\overline{P_2}}{dt}$$

$$\overline{v_1} = \frac{d\overline{P_1}}{dt}$$

$$\overline{(P_2 - P_1)} \cdot \overline{v_2} = \overline{(P_2 - P_1)} \cdot \overline{v_1} \quad (1)$$

Dividiendo por el módulo de  $\overline{(P_2 - P_1)}$

$$\frac{(P_2 - P_1)}{|P_2 - P_1|} \cdot \vec{v}_2 = \frac{(P_2 - P_1)}{|P_2 - P_1|} \cdot \vec{v}_1$$

queda

$$\check{e}_{21} \cdot \vec{v}_2 = \check{e}_{21} \cdot \vec{v}_1$$

Denominada *condición cinemática para las velocidades*. En definitiva la proyección de las velocidades de dos puntos sobre la dirección de la línea que une dichos puntos es constante fig. 3.3.

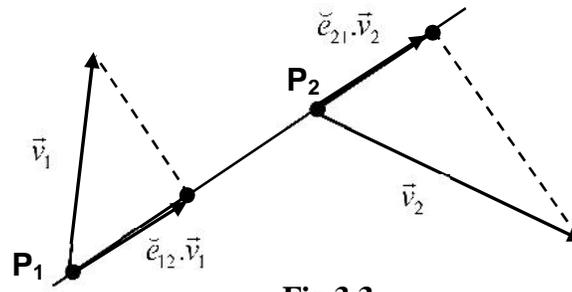


Fig 3.3

### Condición cinemática de aceleraciones

Partiendo de la condición cinemática de velocidades y realizando las derivadas se tiene

$$\left( \frac{dP_2}{dt} - \frac{dP_1}{dt} \right) \cdot \vec{v}_2 + \overline{(P_2 - P_1)} \cdot \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \overline{(P_2 - P_1)} \cdot \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \left( \frac{dP_2}{dt} - \frac{dP_1}{dt} \right) \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_{21} \cdot \vec{v}_2 + \overline{(P_2 - P_1)} \cdot \vec{a}_2 = \vec{v}_{21} \cdot \vec{v}_1 + \overline{(P_2 - P_1)} \cdot \vec{a}_1$$

$$\vec{v}_{21} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \overline{(P_2 - P_1)} \cdot \vec{a}_2 = \overline{(P_2 - P_1)} \cdot \vec{a}_1$$

$$\frac{|\vec{v}_{21}|^2}{|P_2 - P_1|} + \check{e}_{21} \cdot \vec{a}_2 = \check{e}_{21} \cdot \vec{a}_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{21}: \text{velocidad relativa} \\ \vec{a}_2: \text{aceleración de } P_2 \\ \vec{a}_1: \text{aceleración de } P_1 \end{array} \right.$$

$$\vec{a}_2 \cdot \check{e}_{21} = \vec{a}_1 \cdot \check{e}_{21} - \frac{|\vec{v}_{21}|^2}{|P_2 - P_1|}$$

Condición cinemática de aceleraciones

O sea que la proyección de la aceleración en el punto  $P_2$  sobre la dirección  $\overline{(P_2 - P_1)}$  es igual a la proyección de  $\vec{a}_1$  sobre la misma dirección menos el cuadrado escalar de la velocidad relativa dividido por la distancia que separa los puntos.

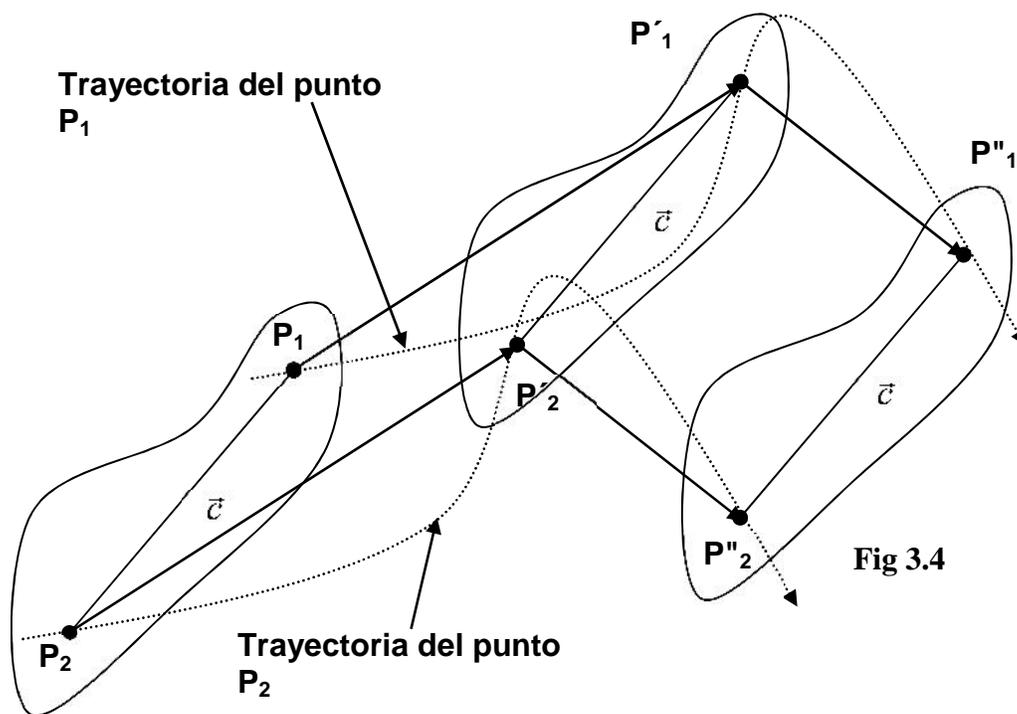
## Movimientos del Sólido en el Espacio

El sólido rígido no vinculado, en el espacio puede realizar movimientos o sea tener distintas ubicaciones y orientaciones en el espacio a través del tiempo. Estos movimientos pueden ser puros o compuestos.

### Movimientos puros del sólido en el espacio

#### Traslación pura Fig. 3.4

Este tipo de movimiento se da cuando la recta que une dos puntos cualquiera, conserva su módulo y dirección en las distintas posiciones que ocupa el sólido a través del tiempo.



En  $t = t$  se tiene  $P_1, P_2$   
 en  $t = t'$  se tiene  $P'_1, P'_2$   
 Para  $t = t''$  se tiene  $P''_1, P''_2$

#### Características cinemática del movimiento de traslación del sólido

- Todos los puntos del rígido tienen idénticas velocidades instantáneas:

$$\bar{v}_1 = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\overline{P'_1 - P_1})}{\Delta t} \quad \bar{v}_2 = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\overline{P'_2 - P_2})}{\Delta t} \quad (1)$$

$$P_2 = P_1 + c \quad P'_2 = P'_1 + c \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) resulta:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2$$

- Los vectores desplazamiento  $c$  y velocidad de traslación  $v$  son vectores libres.
- Toda línea del sólido se traslada manteniéndose paralela a si misma.

Supongamos tener las bielas  $P_1 - O_1$  y  $P_2 - O_2$  que pivotean en  $O_1$  y  $O_2$ ; Fig. 3.5 la placa que une  $P_1 - P_2$  pasa a ocupar la posición  $P'_1 - P'_2$  después de la traslación el vector  $c$  se traslada paralelo a si mismo. La velocidad de todos los puntos es idéntica.

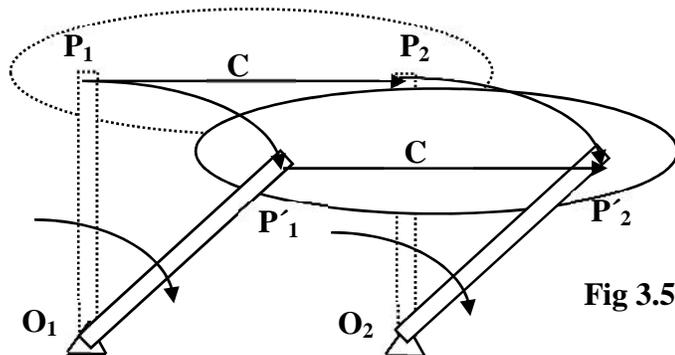


Fig 3.5

- Las trayectorias de todos los puntos son idénticas y superponibles.

### Rotación pura

**Definición:** Cuando un sólido se mueve de tal manera que permanecen fijos dos de sus puntos se dice que está en rotación.

En realidad permanecen fijos todos los puntos que se encuentran sobre la recta definida por esos dos puntos Fig. 3.6.

Si  $O_1$  y  $O_2$  permanecen fijos y  $O_3$  se encuentra alineado con ellos se tendrá:

$$\overline{O_3 - O_1} = r \cdot \overline{O_2 - O_1}$$

derivando la anterior quedará

$$(\overline{V_3 - V_1}) = r \cdot (\overline{V_2 - V_1})$$

Pero

$$\overline{V_2} = \overline{V_1} = 0$$

Entonces se deduce que

$$\overline{V_3} = 0$$

Como  $O_3$  es genérico todos los puntos alineados

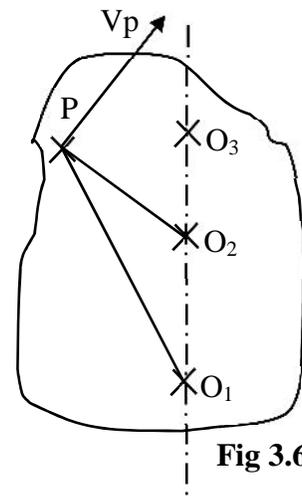


Fig 3.6

en  $\overline{O_1 - O_2}$  permanecerán fijos.

### Velocidad en la rotación

El estado de velocidad del sólido se estudia partiendo de la condición de rigidez. Para un punto cualquiera P fuera del eje fig. 3.7:

$$\overline{(P - O_1)^2} = cte$$

$$\overline{(P - O_2)^2} = cte$$

Considerando que la posición del punto es función del tiempo se deriva quedando:

$$2 \cdot \overline{(P - O_1)} \cdot (\overline{V_p} - \overline{V_1}) = 2 \cdot \overline{(P - O_1)} \cdot \overline{V_p} = 0 \quad \text{pues } \overline{V_1} = 0$$

$$2 \cdot \overline{(P - O_2)} \cdot (\overline{V_p} - \overline{V_2}) = 2 \cdot \overline{(P - O_2)} \cdot \overline{V_p} = 0$$

de lo anterior surge que  $v_p$  es perpendicular a  $c$  y a  $\overline{(P - O_2)}$ , luego es perpendicular al plano  $\overline{P, O_1 O_2}$ .

La posición del sólido queda determinado por tres puntos. Luego el movimiento del sólido queda determinado por el movimiento de un plano del mismo.

La recta  $\overline{O_1 O_2}$  fig. 3.7, permanece fija en ese plano, luego el movimiento del sólido está dado por el movimiento del punto. La velocidad del punto  $P_1$  y en general la de todos los puntos, es perpendicular al eje.

En un tiempo  $\Delta t$ , el plano barre un ángulo  $\Delta\phi$ . Se define la velocidad angular media como

$$\check{S}_m = \frac{\Delta\{\}}{\Delta t}$$

y la velocidad angular instantánea como

$$\check{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\{\}}{\Delta t}$$

Un punto cualquiera del sólido por ejemplo  $P_i$  que esta a una distancia  $r_i$  del eje en el intervalo  $\Delta t$  describe un arco  $\overline{AB}$  de trayectoria circular de radio  $r_i$ .

$$\overline{AB} = \Delta l = r_i \cdot \Delta\{\}$$

La velocidad del punto  $P_i$

$$V_i = \frac{dl}{dt} = r_i \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\{\}}{\Delta t} = r_i \cdot \frac{d\{\}}{dt} = r_i \cdot \check{S}$$

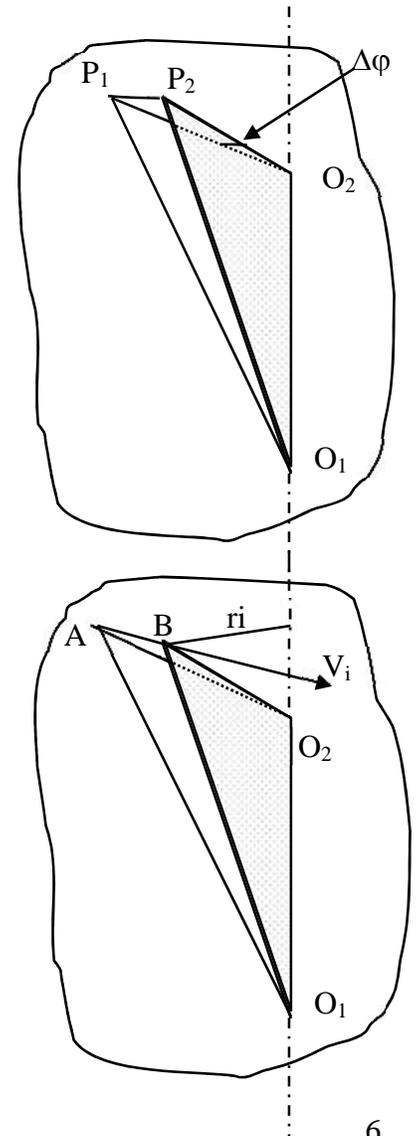


Fig 3.7

La velocidad de un punto, es igual al producto de la velocidad angular por el radio del punto respecto del eje de rotación.

### Vector velocidad angular

Es conveniente otorgarle al vector  $\omega$  (velocidad angular) carácter vectorial.

1). El módulo es:

$$|\omega| = \frac{d\zeta}{dt}$$

2) Dirección: la del eje de rotación

3) Sentido: según la regla de la mano derecha

4) Punto de aplicación: cualquier punto del eje de rotación (vector deslizante)

$$V_{pi} = \omega \cdot (\overline{Pi - O_1}) \cdot \text{sen } r$$

Nos queda

$$V_{pi} = \omega \times (\overline{Pi - O_1})$$

O sea que la velocidad de un punto es el momento del vector rotación respecto de ese punto. (por eso se le otorga carácter vectorial).

El movimiento se denomina uniforme cuando:

$$\dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = cte$$

### Aceleración en la rotación

La aceleración angular de un punto cualquiera del sólido se obtiene derivando:

$$\omega = \frac{d\zeta}{dt} \tilde{e}_w \quad \text{donde } \tilde{e}_w \text{ es el versor en la dirección del eje.}$$

Derivando

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \chi = \frac{d^2\zeta}{dt^2} \cdot \tilde{e}_w + \frac{d\zeta}{dt} \cdot \frac{d\tilde{e}_w}{dt} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} \tilde{e}_w$$

La aceleración tangencial del mismo punto del sólido se obtiene derivando:

$$V_{pi} = \omega \times (\overline{Pi - O_1})$$

Quedando

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dt} = a_i &= \frac{d\omega}{dt} \times (\overline{Pi - O_1}) + \omega \times \frac{d(\overline{Pi - O_1})}{dt} \\ &= \chi \times (\overline{Pi - O_1}) + \omega \times (\omega \times r_i) \end{aligned}$$

Donde el primer término del sumando es la aceleración tangencial y el segundo término la aceleración centrípeta.

### Campo de velocidades

Si cada punto del sólido le corresponde una velocidad, por lo tanto, podemos decir, que el estado instantáneo del movimiento del rígido queda definido por un campo de velocidades.

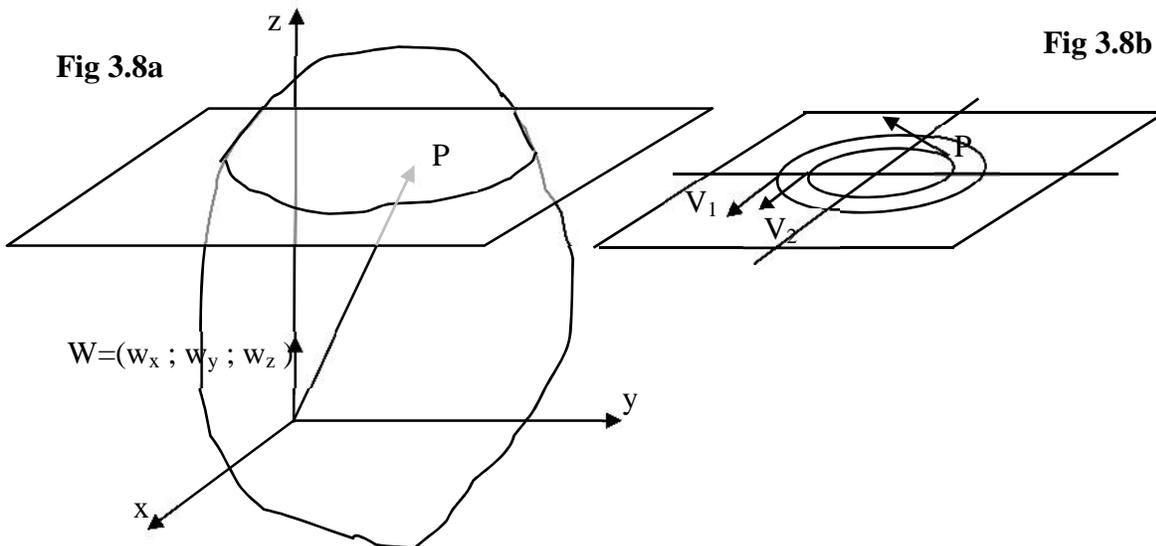
En el caso de la rotación pura; el movimiento queda completamente determinado por el vector  $\omega$ . La configuración de las líneas de campo resultan circunferencias. y.

Si adoptamos un sistema referencial fijo fig.3.8a. La velocidad instantánea del punto  $P_{(x,y,z)}$  es:

$$V_p = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \check{S}_x & \check{S}_y & \check{S}_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \text{ en este caso } \check{S}_x = \check{S}_y = 0$$

$$V_p = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 0 & \check{S}_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\check{S}_z \cdot y \cdot \check{i} + \check{S}_z \cdot x \cdot \check{j}$$

que se encuentra en el plano x-y fig.3.8b



## Grados de libertad del sólido

Estudiaremos el sólido en el espacio. Supongamos tener tres partículas en el espacio.

El número de grados de libertad de las mismas es:  $3 \text{ p} \times 3 = 9$  grados de libertad (GDL)

Si rigidizamos las posiciones relativas de dichas partículas mediante tres vínculos geométricos.

Es decir que la distancia entre ellas se mantenga constante

$$(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2 = cte$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

y teniendo presente que cada vínculo geométrico restringe un grado de libertad, nos queda entonces:

$$9 \text{ grados de libertad} - 3 = 6 \text{ grados de libertad}$$

Si adicionamos una nueva partícula  $P_i$ , agregamos 3 grados de libertad, pero también adicionamos 3 nuevos vínculos. Podemos así seguir adicionando infinitas partículas hasta constituir un sólido rígido. Este sólido poseerá en el espacio, **6 grados de libertad** fig.3.10.

Estos seis grados de libertad pueden ser los tres desplazamientos de un punto del mismo y tres rotaciones no paralelas  $3+3=6$ ; o bien la definición de dos puntos y un ángulo de rotación:

$$(3 \times 2) - 1 + 1 = 6$$

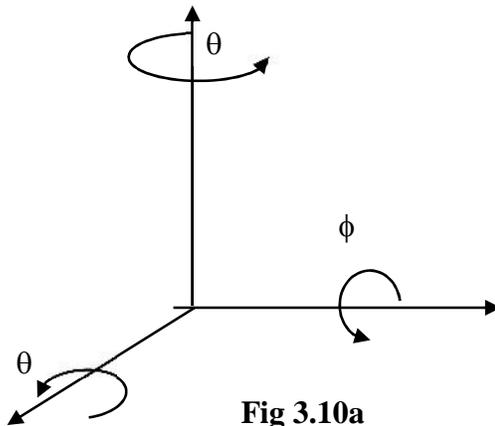


Fig 3.10a

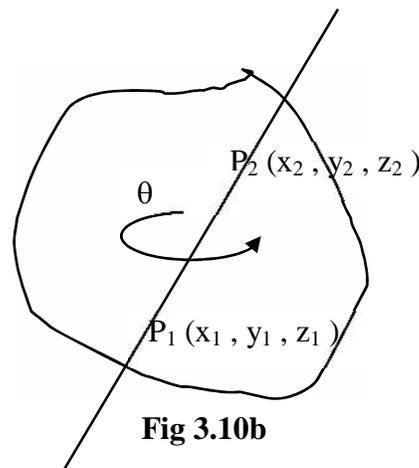


Fig 3.10b

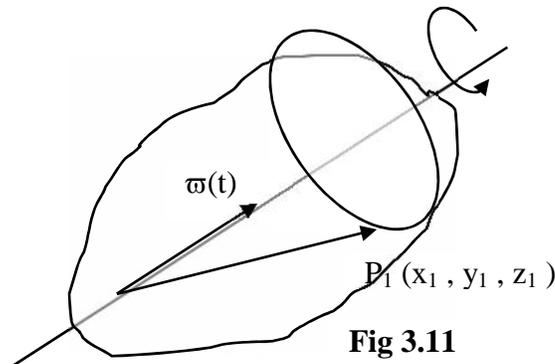
## Movimiento polar del sólido

Es un movimiento en el cual un solo punto (polo) permanece fijo, fig.3.11. El vector rotación  $\dot{\theta}$  no permanece fijo a través del tiempo, si no que va cambiando su orientación en el espacio en función del tiempo.

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$$

La expresión de la velocidad instantánea de cada punto es:

$$V_p = \dot{\theta} \times (\overline{P - O})$$



Así definido el movimiento polar, el sólido posee 3 (tres) grados de libertad ya que le hemos restringido el movimiento a un punto "O" (tres grados de libertad).

### Orientación del sólido en el espacio en un movimiento polar

Para orientar en el espacio un sólido que posee un punto fijo; adoptaremos dos sistemas referenciales: uno fijo (absoluto); y un sistema solidario con el sólido (en movimiento); ambos ortogonales. Estos sistemas estarán relacionados mediante una transformación de rotación expresada por una matriz  $[A]$ , ortogonal.

Esta rotación puede descomponerse en tres rotaciones independientes de tal manera que el producto de las matrices que representan esas rotaciones de como resultado la matriz:

$$[A] = [A_3][A_2][A_1]$$

### Ángulos de Euler

Definiremos tres rotaciones independientes que compuestas darán como resultado una rotación total que nos dará la relación entre un sistema fijo y un sistema solidario con el sólido (que fija la orientación del sólido).

#### 1º rotación: Angulo de precesión

Supongamos un sistema inicial (i,j,k,) fig.3.12a y realizamos una rotación sobre el eje k. El eje k' será el mismo k original, los versores i, j rotarán sobre un ángulo de precesión  $\varphi$ . fig.3.12b

La matriz de transformación es:

$$[A\{\} ] = \begin{bmatrix} \cos\{\} & \text{sen}\{\} & 0 \\ -\text{sen}\{\} & \cos\{\} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

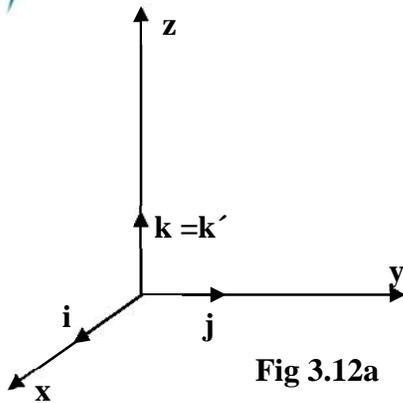


Fig 3.12a

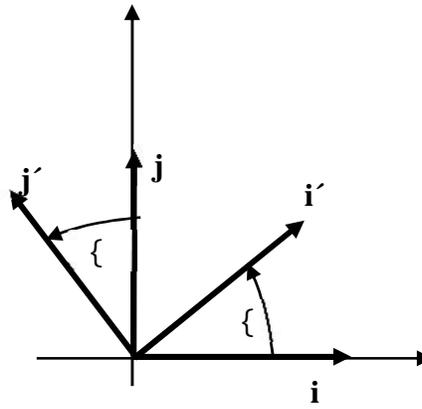


Fig 3.12b

La rotación se provoca en el plano x-y. El eje de rotación es el eje z.

### 2º rotación: Angulo de nutación

El sistema rota sobre el eje  $i'$  (línea de nodo) un ángulo de nutación  $\theta$ . El sistema pasa de  $i', j', k'$  a  $i'', j'', k''$ . El eje  $i' \equiv i''$  o sea se conserva la dirección  $i'$ . fig. 3.13

La matriz de transformación es:

$$[A_{\theta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

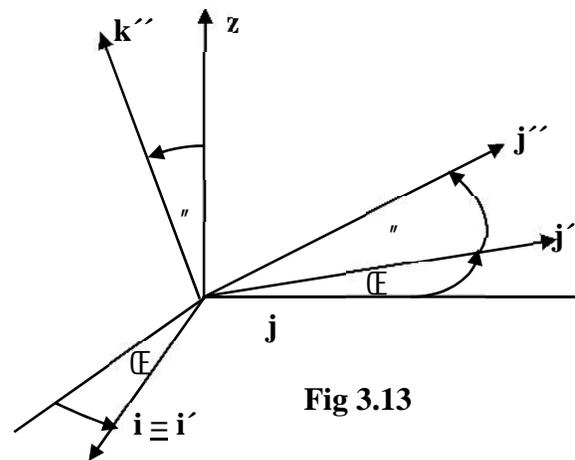


Fig 3.13

### 3º rotación: Angulo de rotación propia

El sistema rota sobre el eje  $k''$ , la rotación se denomina rotación propia del ángulo  $\psi$ .

El sistema pasa de  $i'', j'', k''$  a  $i_1, j_1, k_1$  Fig. 3.14.

La matriz de rotación es:

$$[A_{\psi}] = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

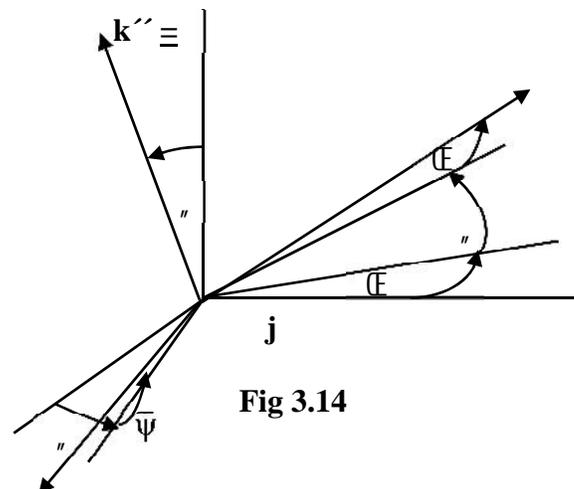


Fig 3.14

La transformación total resulta:

$$[A] = [A\{\}][A_{\theta}][A\{\}$$

Donde  $[A]$  es una matriz ortogonal, o sea que su determinante es 1 y su inversa es igual a su transpuesta.

$$\det[A] = 1$$

$$[A]^{-1} = [A]^T$$

$$a_{ik} \cdot a_{ij} = u_{ij} \begin{cases} u_{ij} = 1 & i=j \\ u_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Los tres ángulos  $\{\}$ ,  $\theta$ , y  $\{\}$  son en general funciones del tiempo.

$$\varphi = \varphi(t)$$

$$\theta = \theta(t)$$

$$\psi = \psi(t)$$

### Movimiento rototraslatorio

#### Teorema de Euler - Chassles:

El movimiento más general de un sólido es el de una traslación seguida de una rotación. Fig.3.15

Siempre es posible descomponer el movimiento de un sólido en una traslación de un punto más una rotación respecto de un eje que pasa por dicho punto más una rotación respecto de un eje que pasa por dicho punto.

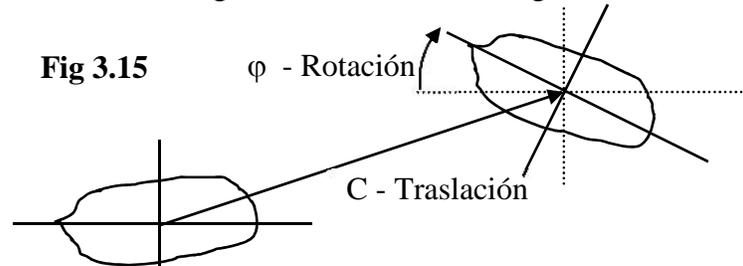


Fig 3.15

#### Sistema de traslación y rotaciones

Supongamos tener un rígido, cuyo movimiento resulta de la superposición de varias traslaciones y rotaciones; podemos considerar que el estado de movimiento del mismo queda descrito en cada instantes por un sistema de vectores

$\omega_i$  = vectores velocidad de rotación  
en un eje que pasa por  $A_i$

$V_i$  = vectores velocidad de traslación.

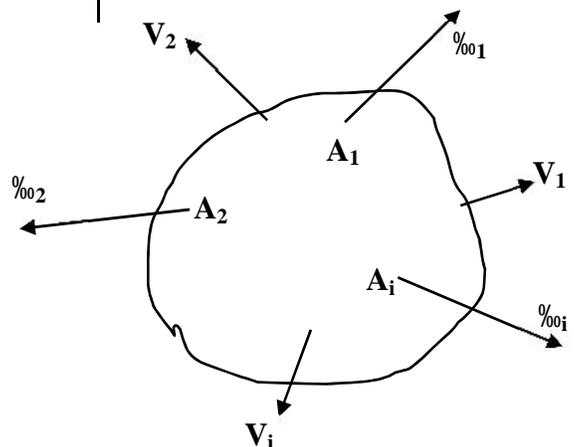


Fig 3.16

### Polo de reducción.

Según el teorema de Euler-Chasles es posible describir el movimiento general anterior, mediante la traslación de un punto "O" y una rotación respecto de un eje que pasa por "O".

Al punto "O" que elegiremos arbitrariamente le denominamos polo de reducción del sistema rototraslatorio.

Si consideramos la velocidad de un punto cualquiera P. El mismo estará sujeto a todas las velocidades de traslación y rotación. Entonces:

$$V_P = \sum V_i + \sum \omega_0 \times (\overline{P - A_i})$$

$$\overline{V_P} = \overline{V_O} + \omega_0 \times (\overline{P - O})$$

Como

$$(\overline{P - A_i}) = (\overline{O - A_i}) + (\overline{P - O})$$

Reemplazando queda

$$V_P = \sum V_i + \sum \omega_{0i} \times [(\overline{O - A_i}) + (\overline{P - O})]$$

$$V_P = \sum V_i + \sum \omega_{0i} \times (\overline{O - A_i}) + \sum \omega_{0i} \times (\overline{P - O})$$

$$\overline{V_P} = \overline{V_O} + \omega_0 \times (\overline{P - O})$$

$$\text{donde } \omega_0 = \sum \omega_{0i}$$

Es decir hemos expresado la velocidad de un punto de un sólido en función de la velocidad de un polo "O" y una rotación respecto del mismo.

Para dos puntos cualquiera P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub>

$$\overline{V_{P1}} = \overline{V_O} + \omega_0 \times (\overline{P_1 - O})$$

$$\overline{V_{P2}} = \overline{V_O} + \omega_0 \times (\overline{P_2 - O})$$

Proyectando sobre la recta que une ambos puntos

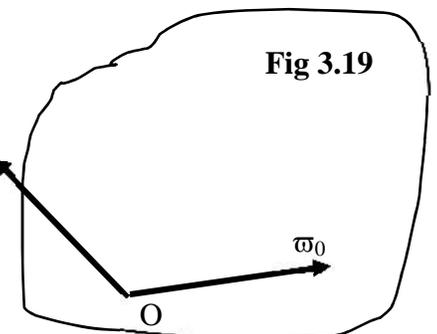
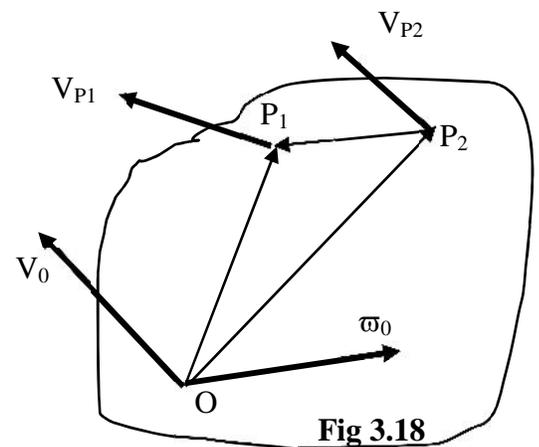
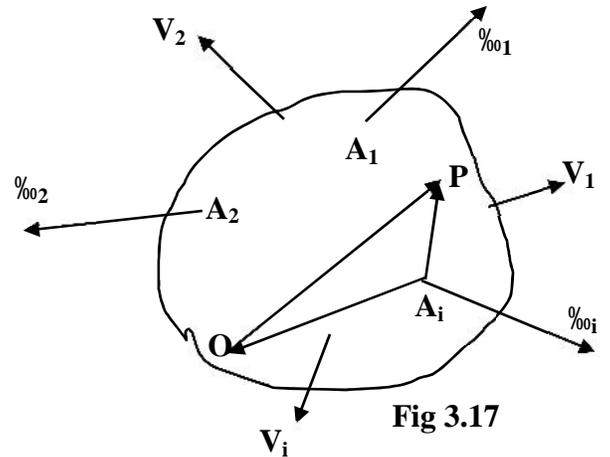
$$e_{1-2} \cdot \overline{V_{P1}} = e_{1-2} \cdot \overline{V_O} + e_{1-2} \cdot [\omega_0 \times (\overline{P_1 - O})]$$

$$e_{1-2} \cdot \overline{V_{P1}} = e_{1-2} \cdot \overline{V_O} + e_{1-2} \cdot [\omega_0 \times (\overline{P_2 - O}) + (\overline{P_1 - P_2})]$$

$$e_{1-2} \cdot \overline{V_{P1}} = e_{1-2} \cdot \overline{V_O} + e_{1-2} \cdot \omega_0 \times (\overline{P_2 - O}) + e_{1-2} \cdot \omega_0 \times (\overline{P_1 - P_2}) \cdot 0$$

$$e_{1-2} \cdot \overline{V_{P1}} = e_{1-2} \cdot \overline{V_O} + e_{1-2} \cdot \omega_0 \times (\overline{P_2 - O}) + 0$$

$$e_{1-2} \cdot \overline{V_{P1}} = e_{1-2} \cdot \overline{V_{P2}}$$



Cumple con la condición cinemática para las velocidades.  
O sea que nuestro sistema queda reducido a:

$$\omega_0 = \sum \omega_{0i}$$

$$V_0 = \sum V_i + \sum \omega_{0i} \times (\overline{A_i - O})$$

### Invariante vectorial.

Si elegimos un polo arbitrario  $O'$ , allí también se tendrá que  $\omega_0' = \sum \omega_{0i}$ . Luego  $\omega_0 = \omega_0'$  es un invariante vectorial para los distintos polos elegidos.

### Invariante escalar.

Suponiendo haber reducido el sistema al polo "O" y conociendo  $\omega$  y  $V_0$ .

En  $O_1$  se conoce  $\omega$  y  $V_0$ . Respecto de "O" se tendrá:

$$\overline{V_P} = \overline{V_O} + \omega \times (\overline{P - O})$$

Tomando " $O_1$ " como polo de reducción se tendrá:

$$\overline{V_P} = \overline{V_{O_1}} + \omega \times (\overline{P - O_1})$$

Sabiendo que  $V_p = V_{p'}$  y además

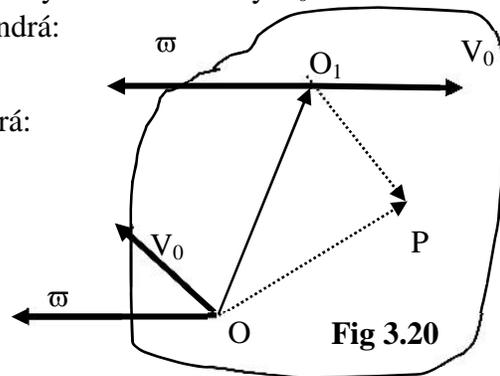
$$(\overline{P - O}) = (\overline{P - O_1}) + (\overline{O_1 - O})$$

igualando:

$$\overline{V_O} + \omega \times (\overline{P - O_1}) = \overline{V_{O_1}} + \omega \times (\overline{P - O_1})$$

$$\overline{V_O} + \omega \times (\overline{P - O_1}) = \overline{V_{O_1}} + \omega \times (\overline{P - O_1}) + \omega \times (\overline{O_1 - O})$$

$$\overline{V_O}' = \overline{V_{O_1}} + \omega \times (\overline{O_1 - O})$$



Trasladamos el vector traslación; para ello se debe adicionar el momento del vector rotación por la distancia que separa los dos polos.

Proyectando sobre  $\vec{S}$ .

$$\overline{V_O}' \cdot \frac{\omega_0}{|\omega_0|} = \overline{V_{O_1}} \cdot \frac{\omega_0}{|\omega_0|} + [\omega_0 \times (\overline{O_1 - O})] \cdot \frac{\omega_0}{|\omega_0|}$$

Como el segundo término del segundo miembro es cero queda

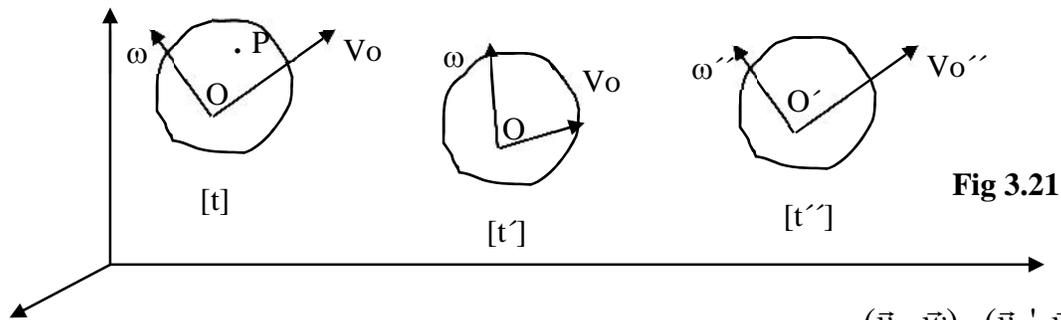
$$\overline{V_O}' \cdot \frac{\omega_0}{|\omega_0|} = \overline{V_{O_1}} \cdot \frac{\omega_0}{|\omega_0|}$$

= INVARIANTE ESCALAR

La proyección de las velocidades de traslación sobre la dirección del vector rotación es constante para cualquier polo elegido, en el mismo instante de tiempos: a esta proyección se lo denomina invariante escalar.

Los invariantes: vectorial y escalar, varían en el tiempo.

Los invariantes I.V. e I.E. definen estados instantáneos del movimiento.



En cada punto, el estado de movimiento queda definido por  $(\vec{v}_o, \vec{\omega})$ ,  $(\vec{v}_o', \vec{\omega}')$ ,  $(\vec{v}_o'', \vec{\omega}'')$  y el espacio recorrido por el punto P en dt.

$$V_p dt = V_o dt + [\omega_0 \times (P - O)] dt$$

La proyección de  $\vec{v}_o$  sobre  $\vec{\omega}$  es constante para los distintos polos, para un mismo instante de tiempo.

### Descomposición

Llamamos descomponer el movimiento de un sólido a elegir un polo de reducción y establecer los invariantes; o sea definir el movimiento en términos de  $\vec{\omega}$  y  $\vec{v}_o$ .

Podemos elegir infinitos polos de reducción.

### Descomposición impropia

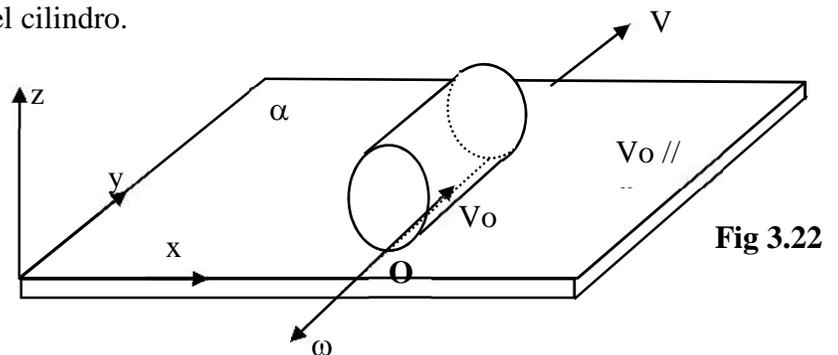
Se da cuando  $\vec{v}_o$  no se mantiene paralelo a  $\vec{\omega}$  en los distintos instantes de tiempo para el polo "O" elegido.

### Descomposición propia

Se da cuando para el polo elegido,  $\vec{v}_o$  se mantiene paralelo a  $\vec{\omega}$  en los distintos instantes de tiempo.

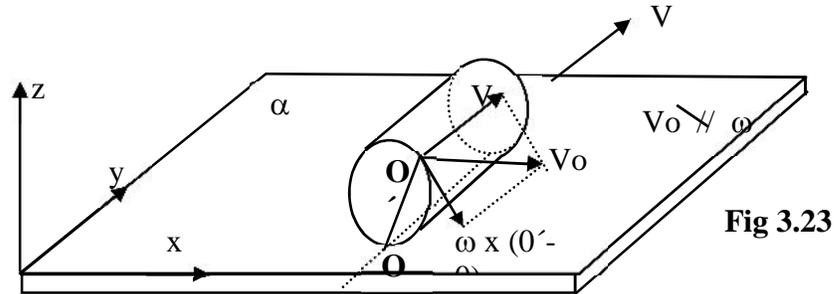
**Ejemplo:** supongamos un cilindro que rueda sobre un plano que posee una traslación perpendicular la rotación del cilindro.

**Descomposición propia:** se logra tomando como polo "O" la generatriz de contacto en el instante (t). En el instante siguiente la generatriz de contacto mantiene la condición de paralelismo entre  $\vec{v}_o$  y  $\vec{\omega}$ .



### Descomposición impropia

Si elegimos el polo "O" en otro punto  $\vec{v}_o'$  no será paralelo a  $\vec{\omega}$  y tenemos descomposición impropia:



### Ejemplos de composición de rotaciones

Analizaremos los siguientes casos particulares.

#### Cuerpo rígido sometido a dos rotaciones iguales y de sentido contrario

La velocidad de un punto genérico  $\vec{v}_p = \omega_1 \times (\vec{P} - \vec{O}_2) - \omega_1 \times (\vec{P} - \vec{O}_1)$

$$\vec{v}_p = \omega_1 \times (\vec{O}_1 - \vec{O}_2) = cte \quad \forall P$$

$(\vec{O}_1 - \vec{O}_2)$  no depende del punto.

El movimiento del sólido es una traslación

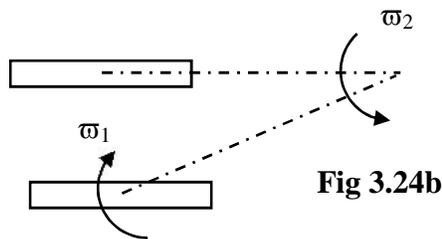


Fig 3.24b

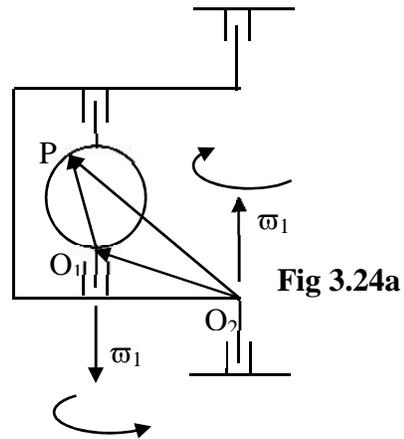


Fig 3.24a

#### Dos rotaciones concurrentes

La velocidad del punto P es:

$$\vec{v}_p = \omega_1 \times (\vec{P} - \vec{O}) + \omega_2 \times (\vec{P} - \vec{O})$$

$$\vec{v}_p = (\omega_1 + \omega_2) \times (\vec{P} - \vec{O})$$

$$\vec{v}_p = \omega_R \times (\vec{P} - \vec{O})$$

Donde  $\vec{\omega}_1$  y  $\vec{\omega}_2$  no están fijos en el espacio. Se trata de un movimiento polar. Se puede describir el estado instantáneo del movimiento mediante un único vector  $\omega_R$  aplicado en el punto fijo "O".

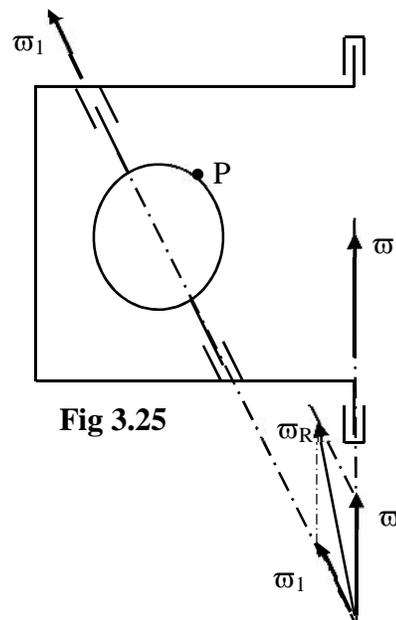


Fig 3.25

### Eje central del movimiento

Para un polo "O" arbitrario elegido tendremos un  $\vec{v}_o$  y el invariante vectorial  $\vec{w}$ .

Buscaremos ahora el lugar geométrico donde se cumple que sea  $\vec{w} // \vec{v}_o$  o sea que de una traslación paralela a la rotación.

$$\vec{v}_c = r \omega$$

El módulo de  $\vec{v}_c$  será  $|\vec{v}_c| = \vec{v}_o \cdot \frac{\omega}{|\omega|}$ , invariante escalar.

Podemos determinar el punto "C" de su recta de acción multiplicando vectorialmente por  $\vec{w}$  a la expresión  $\vec{v}_c = \vec{v}_o + \omega \times (\vec{C} - \vec{O})$  y considerando que  $\vec{v}_c$  se supone paralelo a  $\vec{w}$  o sea su producto escalar cero.

$$\vec{v}_c \times \omega = \vec{v}_o \times \omega + \omega \times (\vec{C} - \vec{O}) \times \omega = 0$$

$$\text{desarrollando } \omega \times (\vec{C} - \vec{O}) \times \omega = 0$$

$$(\vec{C} - \vec{O}) \cdot (\omega \times \omega) - \omega \cdot [(\vec{C} - \vec{O}) \times \omega] = 0$$

En particular tomando un punto tal que

$$(\vec{C} - \vec{O}) \perp \vec{w} \text{ nos queda:}$$

$$\vec{v}_o \times \omega + (\vec{C} - \vec{O}) \cdot \vec{\omega} = 0$$

$$(\vec{C} - \vec{O}) = \frac{\vec{v}_o \times \omega}{\omega^2}$$

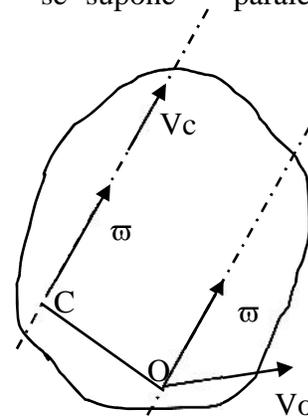


Fig 3.26

Nos da la posición del punto "C" del eje central respecto del polo arbitrario "O".

La recta definida por el punto "C" y la dirección de  $\frac{\omega}{|\omega|}$  se denomina eje central del movimiento

y es el lugar de los puntos que tomados como polos de reducción dan lugar a una traslación paralela a la rotación.

Los puntos del eje central son de velocidad mínima y el movimiento se denomina helicoidal tangente.

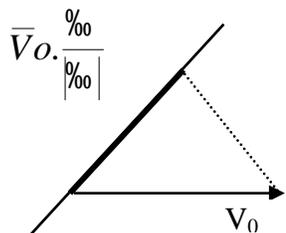
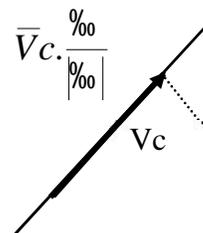


Fig 3.27



### Ecuación del eje central

Sea  $(x_c, y_c, z_c)$  las coordenadas de "C" referido a un polo arbitrario "O" y  $\vec{w}$  el invariante vectorial; la ecuación del eje central será:

$$\overline{P - C} = r \cdot \check{S} \quad \text{Ecuación vectorial}$$

$$\begin{cases} x - x_c = r \cdot \check{S}_x \\ y - y_c = r \cdot \check{S}_y \\ z - z_c = r \cdot \check{S}_z \end{cases}$$

Ecuación paramétrica

$$\frac{x - x_c}{\check{S}_x} = \frac{y - y_c}{\check{S}_y} = \frac{z - z_c}{\check{S}_z}$$

Ecuación del eje central



Fig 3.28

Si conocemos en el polo arbitrario "O" a  $\vec{v}_o$  y  $\vec{\omega}$ . Tendremos que

$$\vec{V}_c = \vec{V}_{min} = \vec{V}_o \cdot \frac{\check{S}}{|\check{S}|} = I_{escalar}$$

El eje central puede o no estar dentro del sólido dado.

### Movimiento helicoidal tangente

Observamos que un movimiento rototraslatorio se puede reducir a un movimiento de rotación  $\vec{\omega}$  alrededor de un eje y una traslación  $\vec{v}_o$  paralela a dicho eje, de magnitud igual al invariante escalar. Dicho eje se denomina eje central y el movimiento helicoidal.

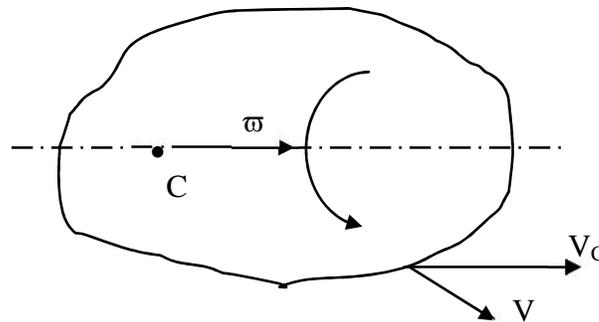


Fig 3.29

Si  $\vec{\omega}$  se mantiene constante en el tiempo, cada punto describe arcos de hélices cilíndricas y su velocidad proviene de la descomposición de una rotación  $\vec{\omega}$  y una traslación con la misma dirección.

### Axoides

El eje central va tomando distintas posiciones en el espacio, y describe una **superficie reglada** que se llama **axoide**.

De acuerdo a cual sea la terna de referencia que se tome se tendrá:

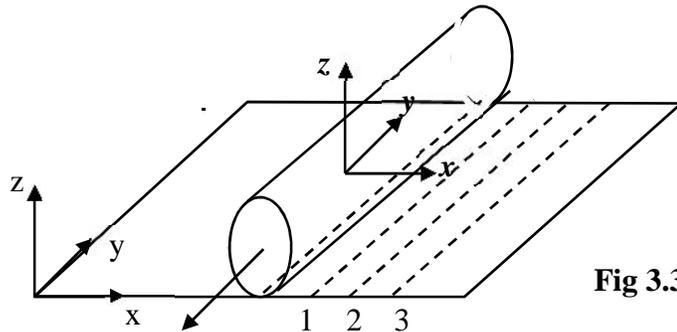
**Axoide fijo:** superficie generada por el eje central visto desde una terna fija.

**Axoide móvil:** superficie generada por el eje central, vista desde un sistema solidario al sólido considerado.

### Ejemplos

#### Movimiento paralelo

**Cilindro que rueda sin resbalar sobre un plano:**



**Fig 3.30**

- Visto desde el sistema fijo el eje central se ubica siempre en el plano x-y. El axoide fijo es un plano.
- Visto desde el sistema de movimiento el eje central se ubica en un cilindro.
- El movimiento en este caso, puede ser descrito como el rodar de un cilindro sobre el plano.

### Movimiento polar

#### Dos conos con generatriz de contacto

El sólido rota respecto

de z con rotación  $\tilde{S}_2$  y

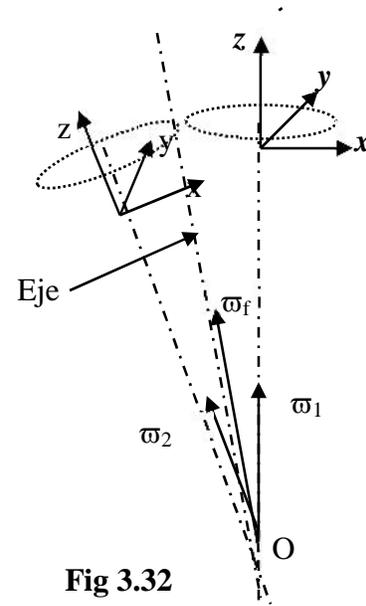
respecto de z con rotación

$\tilde{S}_1$  manteniendo fijo el polo "O".

El eje central coincide en dirección con la composición de las velocidades angulares. Los axoides que se generan son:

- Visto desde un sistema fijo un cono con eje z.
- Visto desde un sistema móvil, solidario con el sólido, el axoide es un cono con eje z.
- Los dos axoides son conos circulares que ruedan sin resbalar. Su generatriz de contacto es el eje central.

Como "O" permanece fijo, en este caso  $\vec{v}_c = 0$



**Fig 3.32**

## Movimiento Plano

### Introducción

Cuando un sistema se mueve de tal manera que todos sus puntos tienen velocidades paralelas a un plano fijo, el sistema tiene un movimiento "plano". Es suficiente considerar solo el movimiento de una sección plana, paralela al plano fijo. Es decir se reduce al estudio de la cinemática de una figura plana.

Desde otro punto de vista se puede considerar el movimiento, como el rodar de dos axoides cilíndricos con invariante escalar nulo.

La intersección del axoide fijo con un plano dará una curva denominada base, y la del axoide móvil, rodante. Luego el movimiento plano puede ser considerado como el rodar de la "ruleta" sobre la "base"

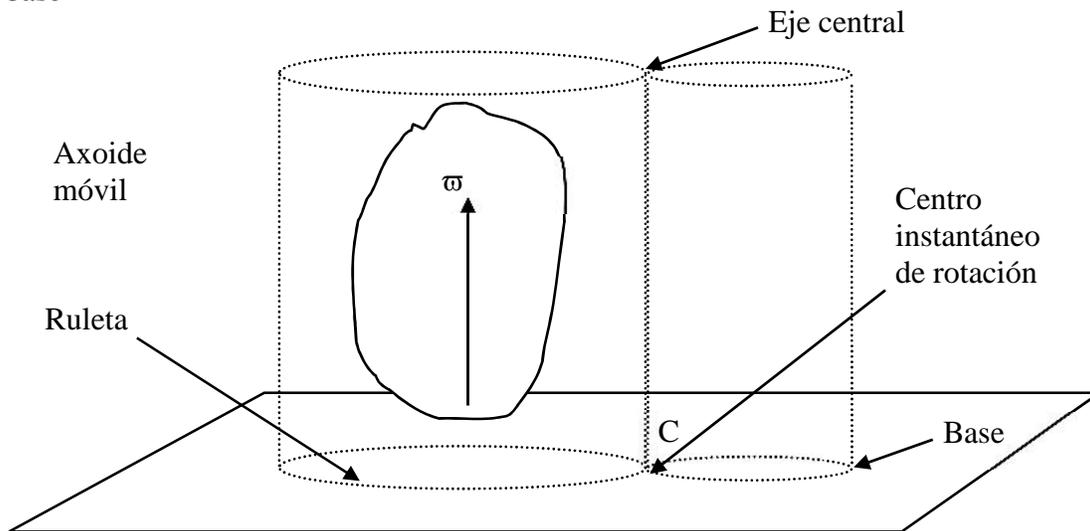


Fig 3.33

### Centro instantáneo de rotación

El movimiento más general de un sólido, es el rototraslatorio que se reduce a una rotación  $\omega$  aplicada en punto O y una traslación  $\vec{v}_o$ . Si el movimiento es plano;  $\vec{\omega}$  debe ser perpendicular al plano  $\vec{f}_o$  y  $\vec{v}_o$  paralelo al mismo. Entonces un punto cualquiera  $R_i$ , tendrá velocidad:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_o + \omega \times (\overline{R_i - O}) \quad (\text{Ec. 1})$$

Siempre existirá un punto "C" donde:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_o + \omega \times (\overline{C - O}) = 0$$

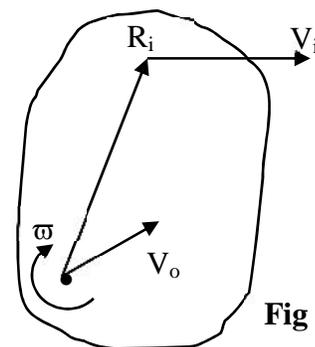


Fig 3.34

un

O sea un punto de velocidad nula.

Como "C" tiene velocidad nula.

Tomando como polo de reducción "C":

$$\bar{V}_i = \bar{V}_0 + \omega_0 \times (\overline{R_i - C})$$

Igualando (1) y (2)

$$V_0 + \omega_0 \times (\overline{R_i - O}) = \omega_0 \times (\overline{R_i - C})$$

$$V_0 + \omega_0 \times [(\overline{R_i - O}) - (\overline{R_i - C})] = 0$$

$$V_0 + \omega_0 \times (\overline{C - O}) = 0$$

multiplicando por  $\vec{S}$

$$\omega_0 \times V_0 + \omega_0 \times \omega_0 \times (\overline{R_i - O}) = \omega_0 \times \omega_0 \times (\overline{R_i - C}) = 0$$

$$\omega_0 \times V_0 = -\omega_0 \times \omega_0 \times (\overline{C - O})$$

$$(\overline{C - O}) = \frac{\omega_0 \times V_0}{\omega_0^2} \quad (3)$$

$(\overline{C - O})$  da la ubicación del centro de rotación "C".

Las coordenadas respecto del polo "O"

$$\vec{S} = \vec{S}. \vec{k}$$

$$(\overline{C - O}) = X_c. \vec{i} + Y_c. \vec{j}$$

$$V_o = V_o. \cos \gamma. \vec{i} + V_o. \sin \gamma. \vec{j}$$

resolviendo (3)

$$X_c = \frac{V_o}{|\vec{S}|} \cdot \sin \gamma$$

$$Y_c = \frac{V_o}{|\vec{S}|} \cdot \cos \gamma$$

coordenadas del centro instantáneo de rotación

### Propiedades del Centro instantáneo de rotación

El CIR tiene velocidad nula. El mismo está definido

para un instante determinado.

En otro instante la ubicación del CIR cambia:

- En cada instante las normales de las trayectorias que describen los puntos de la trayectoria de la figura móvil pasan por el CIR.
- La velocidad de un punto cualquiera es normal a la recta que lo une con el CIR.

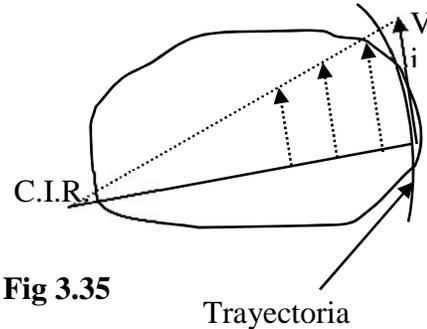


Fig 3.35

### Trayectorias polares

Supongamos dos planos superpuestos, uno de ellos sostiene la figura móvil, el otro fijo. Si marcamos sobre los dos planos, las ubicaciones del CIR (o polo de velocidades), obtendremos dos curvas: una sobre el plano fijo llamado base; y otra sobre el plano móvil llamada ruleta.

O sea que se puede reproducir el movimiento, mediante el rodar sin resbalar de la ruleta sobre la "base".

### Ejemplo

Consideremos la barra AB que se mueve de tal manera que el punto A se desliza sobre el eje x y el punto B sobre el eje y.

$AB=l$

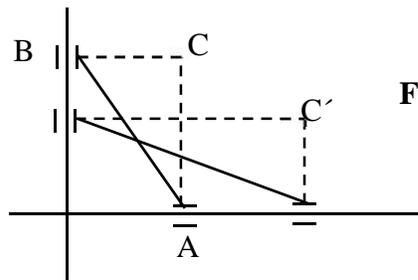


Fig 3.36

Trazando por A y por B las normales a las trayectorias, en su intersección obtenemos el CIR. Si trazamos para cada posición obtendremos la curva "base", en este caso una circunferencia de radio " $l$ " = (AB).

Las distintas posiciones del punto CIR respecto de un sistema solidario con la barra, describe la curva "ruleta" en este caso es una circunferencia de diámetro " $l$ ".

### Deducción de la ecuación de la base

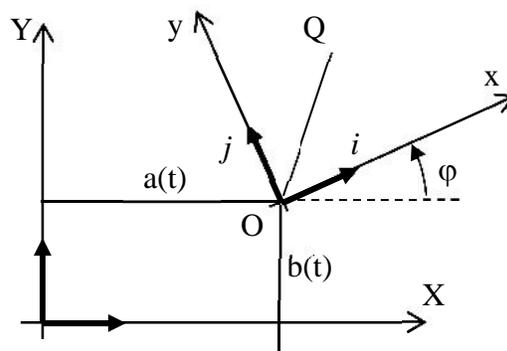


Fig 3.37

$a(t)$  y  $b(t)$  son las coordenadas del origen  $O$  del sistema  $xy$  solidario a la figura móvil.

$a$  y  $b$  son funciones del tiempo

$\varphi$ : parámetro

La velocidad de un punto  $Q$  respecto del sistema fijo

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_O + \dot{\xi}x(\overline{Q - O})$$

Si en particular tomamos el centro instantáneo de rotación "C"  $\vec{V}_C = 0$  por definición de centro instantáneo de rotación.

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_O + \dot{\xi}x(\overline{Q - O}) = 0$$

$$\vec{V}_O = \frac{dQ}{dt} \cdot \vec{I} + \frac{db}{dt} \cdot \vec{J}$$

$$\dot{\xi} = \dot{\xi} \cdot \vec{k} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = \frac{d\{\}}{dt} \end{array} \right.$$

$$\overline{(C - O)} = (X_c - a) \cdot \vec{I} + (Y_c - b) \cdot \vec{J}$$

donde  $X_c$  y  $Y_c$  son las coordenadas del punto "C" referido al sistema fijo.

O sea

$$\vec{V}_C = \vec{V}_O + \begin{bmatrix} I & J & K \\ 0 & 0 & \frac{d\{\}}{dt} \\ (X_c - a) & (Y_c - b) & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Sus proyecciones son:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{da}{dt} - \frac{d\{\}}{dt} \cdot (Y_c - b) = 0 \\ \frac{db}{dt} + \frac{d\{\}}{dt} \cdot (X_c - a) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y_c = b + \frac{da}{d\{\}} \\ X_c = a - \frac{db}{d\{\}} \end{array}$$

Pero

$$\frac{\frac{da}{dt}}{\frac{d\{\}}{dt}} = \frac{da}{d\{}} \quad ; \quad \frac{\frac{db}{dt}}{\frac{d\{\}}{dt}} = \frac{db}{d\{}}$$

Nos queda

$$Y_c = b + \frac{da}{d\{}}$$

$$X_c = a - \frac{db}{d\{}}$$

(4) Ecuaciones paramétricas de la base

### Deducción de la ecuación de la rodante

La coordenadas vectorial de la rodante respecto del sistema móvil es  $\overline{(C - O)}$

$$\overline{(C - O)} = \overline{(C - O')} - \overline{(O - O')}$$

Llamando  $X_c$   $Y_c$  a las coordenadas de C en el sistema móvil.

Tendremos:

$$X_c \cdot \check{i} + y_c \check{j} = X_c \cdot \check{I} + Y_c \cdot \check{J} - a\check{I} - b\check{J}$$

Proyectando sobre los ejes móviles para lo cual multiplicamos escalarmente ambos miembros de la igualdad anterior:

$$\check{i} : (\cos\{\} \cdot \check{I} + \text{sen}\{\} \cdot \check{J})$$

$$\check{j} : (-\text{sen}\{\} + \cos\{\} \cdot \check{J})$$

Nos queda:

$$X_c = (X_c - a) \cdot \cos\{\} + (Y_c - b) \cdot \text{sen}\{\}$$

$$Y_c = -(X_c - a) \cdot \text{sen}\{\} + (Y_c - b) \cdot \cos\{\}$$

Reemplazando (4)

$$\boxed{\begin{aligned} X_c &= -\frac{db}{d\{}} \cdot \cos\{\} + \frac{da}{d\{}} \cdot \text{sen}\{\} \\ Y_c &= \frac{db}{d\{}} \cdot \text{sen}\{\} + \frac{da}{d\{}} \cdot \cos\{\} \end{aligned}}$$

Ecuaciones paramétricas de la ruleta.

## Velocidad de alternación del centro instantáneo de velocidad

Hemos definido el centro instantáneo de velocidad o polo de velocidades, a aquel punto que en cada instante se cumple.

$V_i = \check{S}x(\overline{R_i - C})$  Es decir el plano móvil gira en un movimiento de rotación pura respecto de "C".

Este punto singular está definido para cada instante en un punto del plano fijo.

La posición de este punto varía de instante en instante.

Las distintas posiciones de dicho punto referida al sistema fijo constituyen la base.

Podemos decir que el Centro instantáneo recorre la base.

Simultáneamente, referido al sistema solidario con el plano móvil, el CIR recorre la ruleta.

La velocidad con que el polo de velocidades recorre la base, se denomina "velocidad de alternación del polo de velocidades"

$V_c : (V_{xc}, V_{yc})$

Las componentes de esta velocidad, teniendo presente las ecuaciones de base

$$\begin{cases} X_c = b + \frac{da}{d\xi} \\ Y_c = a - \frac{db}{d\xi} \end{cases}$$

Nos queda:

$$\begin{cases} V_{x_c} = \dot{X}_c = \frac{db}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{da}{d\xi} \right) \\ V_{y_c} = \dot{Y}_c = \frac{da}{dt} - \frac{d}{dt} \left( \frac{db}{d\xi} \right) \end{cases}$$

## Estado de aceleración en el movimiento plano

La velocidad de un punto cualquiera es:

$$\frac{dRi}{dt} = \check{S}x(\overline{Ri - C})$$

Donde "C" es el centro instantáneo de rotación

Derivando respecto del tiempo

$$\frac{d^2 Ri}{dt^2} = \frac{d\check{S}}{dt} x(\overline{Ri - C}) + \check{S}x \left( \frac{dRi}{dt} - \frac{dc}{dt} \right)$$

o bien

$$\frac{d^2 Ri}{dt} = \frac{d\check{S}}{dt} x(\overline{Ri - C}) + \check{S}x[\check{S}x(\overline{Ri - C})] - \check{S}xV_c$$

$$\boxed{\frac{d^2 Ri}{dt^2} = \frac{d\check{S}}{dt} x(\overline{Ri - C}) - \check{S}^2 \cdot (\overline{Ri - C}) - \check{S}xV_c}$$

Donde:

$V_c$  : velocidad de alternación del polo.

$\frac{d^2 Ri}{dt^2}$  : aceleración total del punto Ri

$\frac{d\check{S}}{dt}$  : aceleración angular

C: coordenada del polo de velocidades

### Polo de aceleraciones

La expresión de aceleración para un punto cualquiera

$$\frac{d^2 Ri}{dt^2} = \frac{d\check{S}}{dt} x(\overline{Ri - C}) - \check{S}^2 \cdot (\overline{Ri - C}) - \check{S}xV_c \quad (1)$$

Buscamos un punto de aceleración nula

$$\frac{d^2 C_o}{dt^2} = \frac{d\check{S}}{dt} x(\overline{C_o - C}) - \check{S}^2 \cdot (\overline{C_o - C}) - \check{S}xV_c = 0 \quad (2)$$

restando (2) (1)

$$\frac{d^2 Ri}{dt^2} = \frac{d\check{S}}{dt} x(\overline{Ri - C_o}) - \check{S}^2 \cdot (\overline{Ri - C_o})$$

que es la derivada con respecto al tiempo de:

$$\frac{d^2 Ri}{dt^2} = \frac{d\check{S}}{dt} x(\overline{Ri - C_o})$$

respecto de las aceleraciones todo acontece como si la figura móvil tuviese un movimiento de rotación pura en torno a  $C_o$ .

Este punto  $C_o$  se denomina polo de las aceleraciones.

## Coordenadas del polo de aceleraciones

Por definición de polo de aceleraciones

$$\frac{d^2 C_o}{dt^2} = \frac{d\check{S}}{dt} x(\overline{C_o - C}) - \check{S}^2 \cdot (\overline{C_o - C}) - \check{S} x V_c = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d\check{S}}{dt} &= \frac{d\check{S}}{dt} \cdot \check{k} & V_c &= V_{x_c} \check{i} + V_{y_c} \check{j} \\ \check{S} &= \check{S} \cdot \check{k} & (\overline{C_o - C}) &= X_o \check{i} + Y_o \check{j} \end{aligned}$$

reemplazando

$$\begin{bmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 0 & \frac{d\check{S}}{dt} \\ X_o & Y_o & 0 \end{bmatrix} - \check{S}^2 (X_o \check{i} + Y_o \check{j}) - \begin{bmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 0 & \check{S} \\ V_{x_c} & V_{x_c} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Obtenemos:

$$\check{i} \left( -Y_o \frac{d\check{S}}{dt} - \check{S}^2 X_o + V_{y_c} \cdot \check{S} \right) = 0$$

$$\check{j} \left( X_o \frac{d\check{S}}{dt} - \check{S}^2 Y_o + V_{x_c} \cdot \check{S} \right) = 0$$

cuya solución da los valores de  $X_o$  y  $Y_o$ . En particular si la aceleración  $\frac{d\check{S}}{dt} = 0$

$$X_o = \frac{V_{y_c}}{\check{S}}$$

$$Y_o = -\frac{V_{x_c}}{\check{S}}$$