Unidad 1: Álgebra Tensorial

Introducción.

El álgebra de las *funciones vectoriales lineales* o *tensores* son instrumentos matemáticos que se utilizan para el estudio de la dinámica de los sólidos y para desarrollar este concepto, se partirá de un ejemplo concreto como el de un sólido, en este caso un cilindro homogéneo mostrado en la Figura 1.1. Para el análisis se define una terna de ejes cuyo origen coincida con el centro de masa del cuerpo.

Si al cuerpo se lo hace girar solamente respecto al eje "z" el vector momento angular estará dado por la expresión

$$\vec{L}_z = I_z . \vec{\omega}_z \qquad (1-1)$$

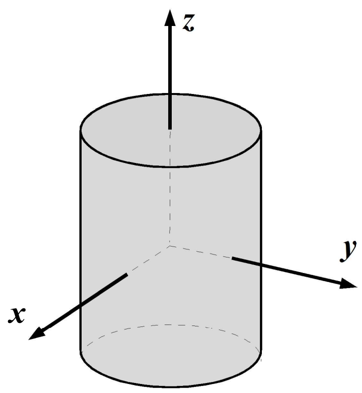
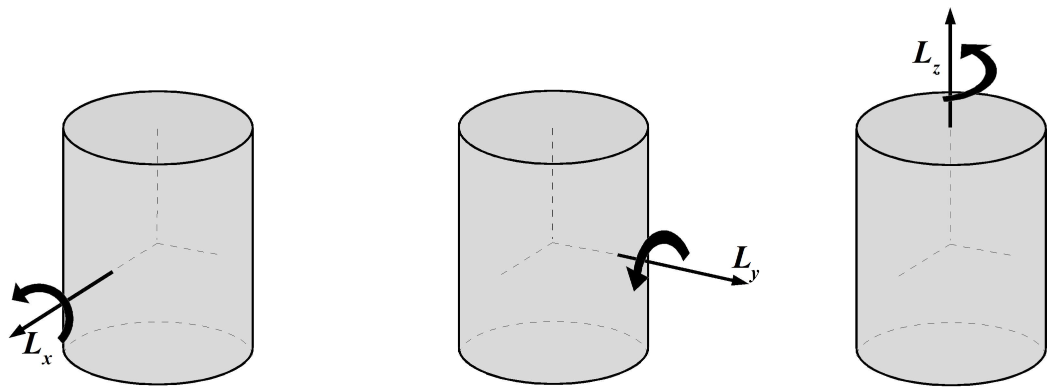


Figura 1.1: Cilindro homogéneo con el origen de la base coincidente con el centro de masa y los ejes de simetría.

Se puede apreciar que existe colinealidad entre los vectores momento angular y velocidad angular siendo I_z una magnitud escalar que define el momento de inercia baricéntrico del cilindro respecto al mismo eje. Los vectores momento angular se muestran para cada caso en la Figura 1.2. donde se representan los vectores momento angular respecto a cada uno de los ejes cartesianos (mostrando con las flechas gruesas el sentido de giro) si el cuerpo girara independientemente con velocidades angulares coincidentes con ellos.



Caso a: Rotación respecto a "x" Caso b: Rotación respecto a "y" Caso c: Rotación respecto a "z"

Figura 1.2: Momento angular generado al hacer girar el cilindro respecto a cada uno de sus ejes de simetría.

Finalmente si se desea generalizar la situación de un sólido que rota en una dirección no coincidente con ninguno de los tres eje se puede presentar toda esta información mediante una sola expresión en forma matricial como:

$$\vec{L} = I . \vec{\omega}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad (1-2)$$

Si el sólido girara de manera que la velocidad angular tenga solo componentes "x" e "y" , de acuerdo a la expresión (1-2) se tendrá

$$\vec{L}=I.\vec{\omega}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

Se puede comprobar que si el giro que realiza el sólido es únicamente respecto a un solo eje, por ejemplo el eje "z", el momento angular quedaría tal como lo expresa la ecuación 1-1 quedando ambos vectores colineales.

Esta última característica entre los vectores **L** y **ω** no se verifica en general, sino que se trata de un caso particular por lo que, si el cuerpo girara respecto a un eje transversal como el indicado en la Figura 1.3 los vectores mencionados no serían colineales

La relación entre estas magnitudes es conocida por lo que a cada vector ω, le corresponde un vector **L** perfectamente definido. Se puede pensar entonces en una operación lineal tal que, realizada sobre el vector velocidad angular **ω**, de por resultado el vector **L**. Esto puede representarse mediante la ecuación operacional

$$\vec{L}=[I].\vec{\omega} \quad (1-4)$$

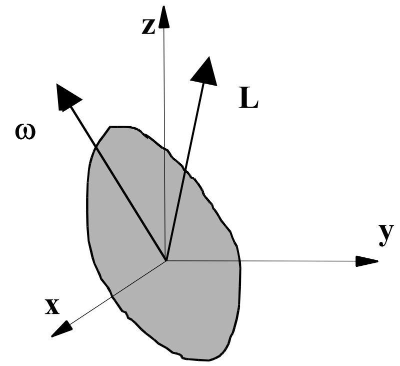


Figura 1.3: Sólido cuyo momento angular no coincide con el vector velocidad angular.

Aquí, $[I]$ representa el operador que "transforma" al vector $\vec{\omega}$ en el vector $\vec{L}$ y está representada dada por una matriz de 3x3 donde cada una de sus componentes dependerá de la forma en que está distribuida la masa del sólido respecto al sistema referencial en la que esta se exprese. De la ecuación (1-4) podemos "despejar" dicha matriz quedando

$$[I]=\vec{L}/\vec{\omega} \quad (1-5)$$

Esta operación entre dos vectores como se sabe no es factible de realizar y se indica al sólo efecto de introducir el siguiente razonamiento: la naturaleza del resultado del cociente entre dos cantidades puede ser diferente y "más complicada" que la de las cantidades originales por ejemplo, el cociente de dos números naturales puede ser un número irracional (1/3 = 0,3...) y de modo análogo, el cociente entre vectores puede ser diferente a un vector.

En este sentido y siguiendo con el razonamiento anterior a esta nueva magnitud $[I]$ se la denominará tensor y, para el caso particular de la forma en que se encuentra distribuida la masa de un sólido, tensor de inercia.

Otro ejemplo de tensor es el tensor producto tensorial de dos vectores cuya nomenclatura y representación en forma matricial es la siguiente

$$\vec{a}\otimes\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

Es importante recalcar que un mismo tensor puede ser representado en diferentes sistemas referenciales adoptando distintas representaciones.

Transformación de coordenadas

Las componentes $a_i b_j$ son las componentes del tensor en el sistema referencial en el cual se

encuentran representados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
En un sistema referencial distinto y que se encuentre relacionado al primero mediante la matriz de transformación (o de cambio de base) [M], las componentes del tensor serán distintas, es decir, la representación del tensor será distinta pero el tensor es el mismo.
Por lo tanto si se tiene un vector expresado en las bases (*i, j,* k) y se lo desea representar en otras coordenadas referenciales cuyas bases son (*i', j', k'*) utilizando la matriz de transformación se tendrá[1]

$$\vec{v}'_{(i'j'k')}=[M]\ \vec{v}_{(i\ j\ k)}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{(i'j'k')}=[M]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(i\ j\ k)} \qquad (1-7)$$

Si se desea realizar el cambio de base del producto tensorial que se simboliza como $\vec{a}\otimes\vec{b}$ de $(i\ j\ k)\rightarrow(i'j'k')$ para obtener $\vec{a}'\otimes\vec{b}'$ por medio de la matriz de cambio de base [M] se debe realizar el producto matricial siguiente

$$\vec{a}\otimes\vec{b}=[M]\ [\vec{a}\otimes\vec{b}]\ [M]^T$$

Donde $[M]^T$ indica la transposición de la matriz de cambio de base, equivalente a la inversión cuando las matrices son ortonormales.

Generalización del concepto de tensor

Los tensores hasta aquí presentados a modo de ejemplo son tensores de segundo orden y su representación se realiza mediante matrices de 3x3, los vectores en cambio son tensores de primer orden representados mediante matrices de 1x3 y finalmente los escalares son tensores de orden cero.
El número de componentes de un tensor se determina elevando la dimensión del espacio de representación del tensor al orden del tensor, es decir n^p llamando n a la dimensión del espacio y p al orden del tensor.
Para el caso del tensor dado por la expresión (1-6) se tendrá para un espacio tridimensional

$$n^p=3^2=9$$

En adelante se utilizaran tensores de inercia de orden 2 para representar las características de un sólido ligadas a la forma en que está distribuida su masa.
Un tensor posee propiedades independientes del sistema de representación, denominadas invariantes y algunas de ellas son:

1. Dado el tensor de orden cero o escalar, el mismo no cambia en distintos sistemas referenciales.

2. Dado el tensor de primer orden o vector $\vec{V}=(v_x;v_y;v_z)$ se cumple que el módulo del vector es un invariante ante cambios de coordenadas.

3. Dados los vectores $\vec{U}=(u_x;u_y;u_z)$ y $\vec{V}=(v_x;v_y;v_z)$
   a) El producto escalar de los mismos es un invariante.
   b) El ángulo entre los mismos es un invariante.
   c) En general, de las operaciones entre invariantes de tensores resultan nuevos invariantes.

---
1 Ver ejemplo de cambio de base en el Anexo 1

4. Para un tensor de segundo orden se pueden distinguir los siguientes invariantes:
Dado un tensor de segundo orden y su correspondiente representación en dos sistemas referenciales tales como

$$[T]=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \text{ y } [T']=\begin{pmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{pmatrix}$$

los invariantes son:

- La suma de las componentes de la diagonal principal en ambos tensores resulta idéntica

$$t_{11}+t_{22}+t_{33} = t'_{11}+t'_{22}+t'_{33}=K$$

- Dado un tensor de de segundo orden se puede deducir de este uno de primer orden (o vector) cuya forma será

$$\vec{V}=[(t_{23}-t_{32});(t_{31}-t_{13});(t_{12}-t_{21})]$$

Es evidente que para el caso de tensores simétricos este será nulo.

5. A un tensor de segundo orden le corresponde un escalar invariante dado por su determinante.

$$det[T]=k$$

Operaciones entre tensores

Las operaciones que se pueden realizar entre tensores son:

a) Adición y sustracción: Esta operación esta definida para tensores del mismo orden por lo tanto dados dos tensores, su suma (o resta) es otro tensor cuyas componentes son las sumas (o restas) de las componentes del mismo subíndice. En forma matricial

$$[S]=[T]+[U] \text{ y con respecto a sus componentes } s_{mn}=t_{mn}+u_{mn}$$

b) Multiplicación por un escalar: Se define la multiplicación de un tensor por un escalar, al nuevo tensor que resulta de multiplicar cada componente del tensor por dicho escalar. En forma matricial

$$[S]=k[T] \text{ y con respecto a sus componentes } s_{mn}=k\ t_{mn}$$

c) El producto tensorial de un tensor de orden "*p*" por otro de orden "*q*" da por resultado un tensor de orden "*p+q*", cuyas componentes son el producto de las componentes del primero por las componentes del segundo.

Tensores simétricos y antisimétricos.

Un tensor de segundo orden es simétrico si $t_{ij}=t_{ji}$ y es antisimétrico si $t_{ij}=-t_{ji}$
Las propiedades de simetría y antisimetría son independientes del sistema referencial.
Ademas todo tensor puede expresarse como la suma de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico. En forma matricial

$$[T]=\frac{1}{2}([T]+[T]^T)+\frac{1}{2}([T]-[T]^T)$$

Con respecto a sus componentes será

$$t_{ij}=\frac{1}{2}(t_{ij}+t_{ji})+\frac{1}{2}(t_{ij}-t_{ji})$$

Diagonalización de un tensor.

Dado un tensor no diagonal en un sistema referencial cualquiera, se buscará la manera de encontrar otro sistema referencial en el cual la representación de dicho tensor sea diagonal.
Esta operación implica la determinación de los vectores y valores característicos (autovectores y autovalores) de la matriz que representa al tensor.
Si se tiene una transformación lineal expresada mediante la matriz $[H]$ que refiere un mismo vector pero en dos sistemas referenciales diferentes, se puede indicar en forma matricial como

$$[v']^T=[H]\,[v]^T$$

Del mismo modo existirán vectores tales que al aplicarles el operador $[H]$ se transforman en vectores colineales al primero de manera que el vector transformado es múltiplo escalar del vector original cumpliendo con

$$[v']^T=\lambda[v]^T$$

En forma matricial se puede escribir la igualdad

$$[H]\,[v]^T=\lambda[1].[v]^T$$

La matriz $[1]$ representa a la matriz identidad

$$[1]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Puede reescribirse entonces lo siguiente:

$$[H]\,[v]^T-\lambda[1]\,[v]^T=0$$
$$([H]-\lambda[1]).[v]^T=0$$

Esta última ecuación homogénea será nula cuando la diferencia del paréntesis sea nula por lo tanto se puede plantear el determinante

$$det([H]-\lambda[1])=0$$

Este último se puede presentar indicando cada uno de los elementos quedando

$$\left|\begin{matrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{matrix} h_{11}-\lambda & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22}-\lambda & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33}-\lambda \end{matrix}\right| = 0 \quad (8)$$

Al resolver el determinante y agrupando los valores constantes en los coeficientes A, B y C queda el siguiente polinomio de tercer grado:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \qquad (1-9)$$

Esta ecuación se denomina ecuación característica y sus raíces $\lambda_1, \lambda_2\, y\, \lambda_3$ se denominan valores característicos, autovalores o eigenvalues.
Reemplazando en la expresión (1-8) el autovalor λ_1 se obtiene

$$\left|\begin{matrix} h_{11}-\lambda_1 & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22}-\lambda_1 & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33}-\lambda_1 \end{matrix}\right| \cdot \begin{pmatrix} v_{1-\lambda 1} \\ v_{2-\lambda 1} \\ v_{3-\lambda 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1-10)$$

De esta ecuación se obtienen los tres vectores asociados a λ_1
Para encontrar el segundo vector se procede de la misma manera pero reemplazando λ por λ_2 De igual modo con el tercer vector.
Estos vectores se denominan vectores característicos, vectores propios, autovectores o eigenvectores y para ellos se verifican los siguientes corolarios y teoremas:

a. Los autovalores de una matriz de componentes real y simétrica son reales.
b. Un autovector no puede corresponder a dos autovalores distintos.
c. Si v_1, v_2, v_3 son autovectores que corresponden a valores propios distintos, entonces son linealmente independientes.
d. Si v_i, v_j son autovectores que corresponden a los autovalores λ_i y λ_j de una matriz simétrica real, entonces son ortogonales.

Diagonalización de una matriz simétrica real.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ autovalores de [A], matriz real y simétrica que representa a un tensor en un sistema referencial ortogonal y v_1, v_2, v_3 los autovectores correspondientes.
Dividiendo cada autovector por su módulo (denominados autoversores) y ordenándolos en forma adecuada, se puede formar una base ortogonal directa. Con ellos se genera la matriz $[M]$ de forma tal que sus filas sean los autovectores hallados como se muestra en la expresión siguiente.

$$[M] = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

Esta matriz $[M]$ es la matriz de transformación que liga el referencial original con un sistema referencial cuya base esta formada por los autoversores.
Premultiplicando $[A]$ por $[M]$ y posmultiplicandolo por $[M]^T$, resulta una matriz diagonal $[D]$ siendo los elementos de la diagonal los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

En forma matricial queda

$$[M]\,[A]\,[M]^T=[D]=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\qquad(1-11)$$

Esta matriz diagonal es la representación del tensor en el referencial cuya base esta generada por los autovectores.

Casos particulares

Los tensores simétricos pueden ponerse en forma diagonal mediante una transformación ortogonal apropiada. Los elementos de la diagonal son únicos, aunque pueden no aparecer en el mismo orden en la diagonal de la matriz. Los ejes del sistema referencial en el cual el tensor tiene representación diagonal se denominan ejes principales. Si los autovalores son distintos, estos ejes son únicos y ortogonales.
Como casos particulares, pueden aparecer autovalores iguales. Si aparecen dos autovalores iguales, se dice que el autovalor es doblemente degenerado, si los tres autovalores son iguales, el mismo es triplemente degenerado.
En el caso de triple degeneración, el tensor tiene la misma representación el todo sistema referencial, y cualquier eje es eje principal. Como ejemplo, el tensor de inercia de una esfera de densidad uniforme es diagonal para todo sistema referencial cuyo origen sea el centro de la esfera y cualquier eje que pase por su centro es un eje principal de inercia.
En el caso de doble degeneración, el eje principal asociado al autovalor distinto es único, y perpendicular a un plano. Cualquier eje que esté contenido en este plano y corte al eje principal único es eje principal.

Forma cuadrática asociada

Se llama forma cuadrática a una expresión de segundo grado en "*n*" variables en x_i por lo tanto si la matriz [A] es la representación de un tensor la *forma cuadrática asociada al tensor* puede ser expresada como

$$Q(x)=[x][A][x]^T$$

Escribiendo en sus correspondientes coordenadas queda

$$Q(x)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Realizando el producto matricial indicado se tendrá

$$Q(x)=a_{11}x_1x_1+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2x_2+a_{23}x_2x_3+\ldots$$
$$Q(x)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2\qquad(1-12)$$

Definiendo $Q(x)=1$ la expresión (1-12) se tendrá

$$1=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2\qquad(1-13)$$

Se trata de una ecuación de segundo grado, que define una superficie de segundo orden en el espacio tridimensional.

Como no tiene términos lineales, se trata de un elipsoide o un hiperboloide de una o dos hojas. Esta superficie se denomina superficie característica o cuádrica característica y permite representar un tensor en forma gráfica.
La cuadrática asociada a un tensor es un invariante ante cambios de sistemas referenciales y en particular para un sistema referencial cuya base asociada son los autovectores la representación del tensor será diagonal por lo que su forma cuadrática asociada se reduce a:

$$Q(x)=\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\lambda_3 x_3^2 \qquad (1-14)$$

En el sistema referencial para el cual el tensor es diagonalizado, la forma cuadrática se reduce a

$$1=\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\lambda_3 x_3^2 \qquad (1-15)$$

En el caso del tensor de inercia, dado que los autovalores son momentos de inercia, siempre positivos, la cuádrica es siempre un elipsoide, que en el caso de doble degeneración es un elipsoide de revolución, y en el caso de triple degeneración es una esfera.

Anexo 1

Tensor de Inercia

El tensor de Inercia se estudiará como un ejemplo de aplicación de tensores de segundo orden que permite resumir las características de un sólido, relativas a la cantidad de masa que posee, y a la forma en que esta está distribuida. Su importancia para esta asignatura radica en la utilización del mismo en el estudio de la dinámica de rotación de los sólidos.
Los componentes del tensor de inercia de un sólido referido a un sistema referencial "xyz", son los momentos de inercia del sólido respecto de los ejes, elementos que se encuentran en la diagonal, y los productos de inercia.

Tensor de inercia: [I] = $\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$

Donde: Ixx, Iyy, Izz son los momentos de inercia, $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz}=I_{zx}$, $I_{yz}=I_{zy}$ son los productos de inercia.

Estos momentos y productos de inercia, para distribuciones continuas de masa, se calculan de acuerdo a las siguientes expresiones:

$I_{xx} = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right)\rho[x, y, z]dV$

$I_{yy} = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right)\rho[x, y, z]dV$

$I_{zz} = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right)\rho[x, y, z]dV$

$I_{xy}=I_{yx} = -\iiint_V xy\rho[x, y, z]dV$

$I_{xz} =I_{zx}= -\iiint_V xz\rho[x, y, z]dV$

$I_{yz} =I_{zy}= -\iiint_V yz\rho[x, y, z]dV$

En estas definiciones para los momentos y productos de inercia, se tiene.

= $\rho[x, y, z]$ densidad de masa V = volumen ocupado por el sólido

x, y, z son las coordenadas en el sistema "xyz" del elemento de volumen "dV"

$\rho[x, y, z]$ dV es la masa (dm) del elemento de volumen "dV"

Para sistemas formados por m_i masas puntuales, las definiciones para los momentos de inercia son las siguientes:

$I_{xx}= \sum (y_i^2 + z_i^2)m_i$
$I_{yy}= \sum (x_i^2 + z_i^2)m_i$
$I_{zz}= \sum (x_i^2 + y_i^2)m_i$

$I_{xy}=I_{yx} = -\sum (x_i y_i)m_i$

$-\sum (x_i z_i)m_i$

$I_{xz} = I_{zx} =$

$I_{yz} = I_{zy} = \quad -\sum (y_i z_i) m_i$

Donde x_i, y_i, z_i son las coordenadas en el sistema "xyz" de la masa puntual m_i.

En base a las definiciones de los elementos que componen el tensor de inercia, se puede afirmar que el tensor de inercia es simétrico, y sus coeficientes son números reales.

El tensor de inercia y la transformación de coordenadas

Sea el tensor de inercia [I], referido a un sistema referencial "xyz". Si se considera un sistema referencial x'y'z', rotado respecto del primero, el tensor de inercia [I] referido a este sistema referencial es el mismo, pero su representación cambiará. Significa esto que las componentes del tensor tendrán valores distintos. La relación entre ambas representaciones del tensor se obtienen mediante las ecuaciones de transformación:

$[I]' = [R][I][R]^T$

Donde [R] es la matriz modal o matriz de cambio de base, que relaciona representaciones en xyz con representaciones en x'y'z'.

Para cada tensor de inercia, existe por lo menos un sistema referencial en el cual la representación de la matriz es diagonalizada. Para determinar estas direcciones, puede utilizar el procedimiento descrito en la sección correspondiente, las direcciones que coinciden con las de ese sistema referencial, se denominan ejes principales de inercia.

Ejemplos: Para un sólido cilíndrico de densidad de masa uniforme, el tensor de inercia referido a cualquier sistema referencial de ejes ortogonales tal que su origen esté ubicado en el centro de gravedad, y tenga un eje coincidente con el eje del cilindro, es diagonal izado.

El tensor de inercia como operador lineal

Para un sólido en rotación, el momento angular del mismo puede obtenerse aplicando como un operador lineal el tensor de inercia al vector velocidad angular.

$\mathbf{L} = [\,\mathbf{I}\,]\, \boldsymbol{\omega}$

Si $\boldsymbol{\omega}$ tiene la dirección de un eje principal de inercia, es un autovector del operador, es decir, para este caso **L** será colineal con $\boldsymbol{\omega}$

Según lo visto en Física 1, la variación del momento angular de un cuerpo, expresada como su derivada respecto del tiempo, es igual al torque o momento externo que actúa sobre e