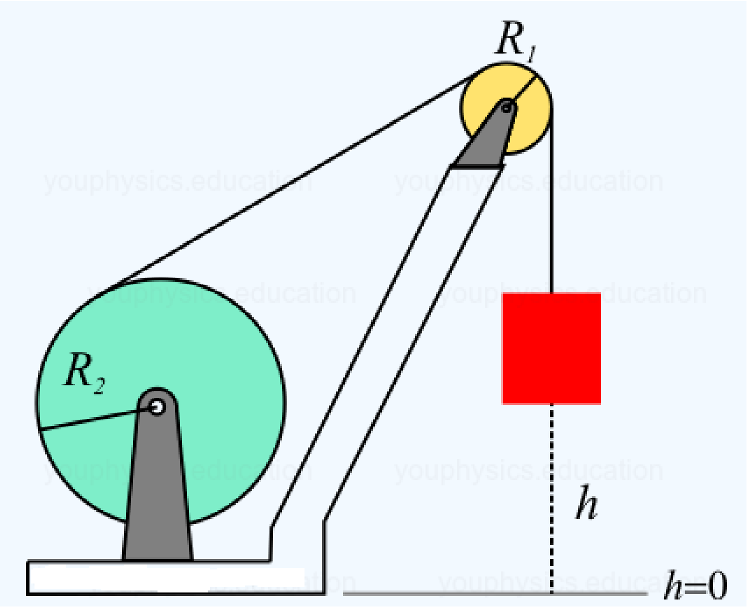
Facultad de Ingeniería
OBERA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

Física Mecánica
Dinámica Rotacional



Tema	Capítulo del libro
Dinámica de Rotación	Capitulo 10: Dinámica del Movimiento de Rotación

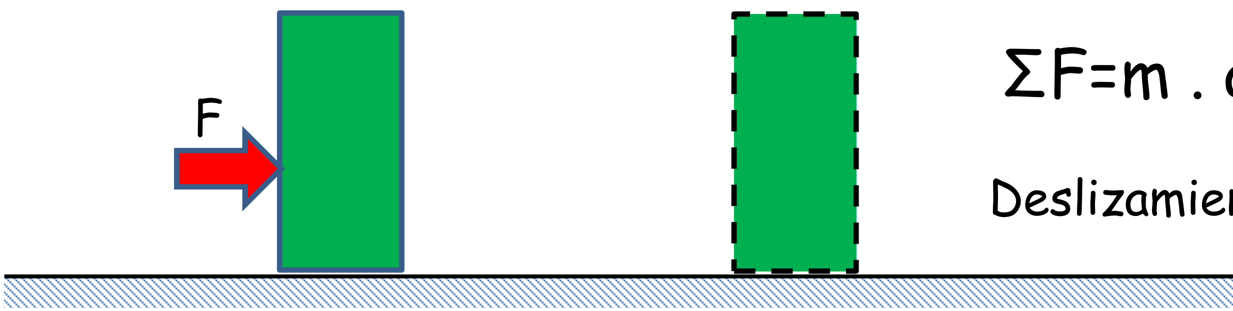
Breves teorías sobre el tema

Dinámica rotacional

Dinámica es la parte de la mecánica que estudia la relación entre el movimiento y las causas que lo producen (las fuerzas). El movimiento de un cuerpo es el resultado de las interacciones con otros cuerpos que se describen mediante fuerzas.

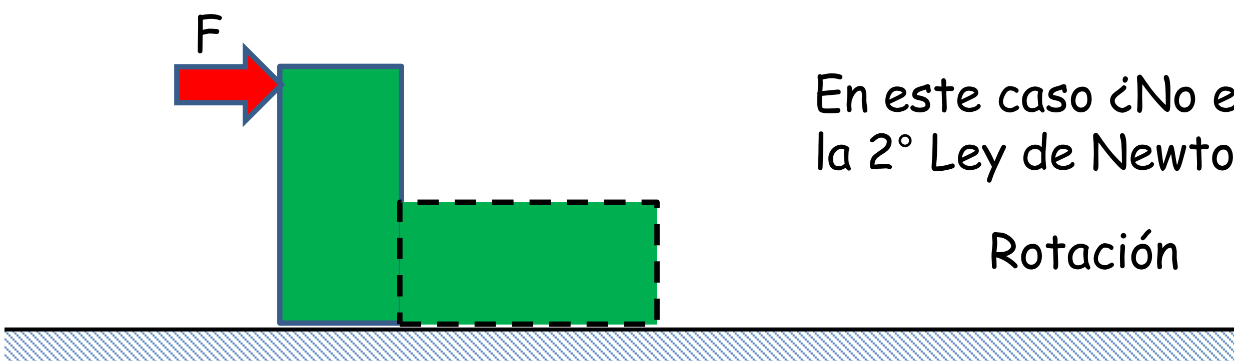
Dinámica rotacional

Una fuerza Fneta≠0 aplicada sobre un cuerpo, provocara que este se mueva.



$\Sigma F = m \,.\, a$

Deslizamiento



En este caso ¿No es aplicable la 2° Ley de Newton?

Rotación

REPASO

Dinámica rotacional

Si tenemos un cuerpo al que queremos hacer girar, ó un cuerpo en rotación que deseamos detenerlo.

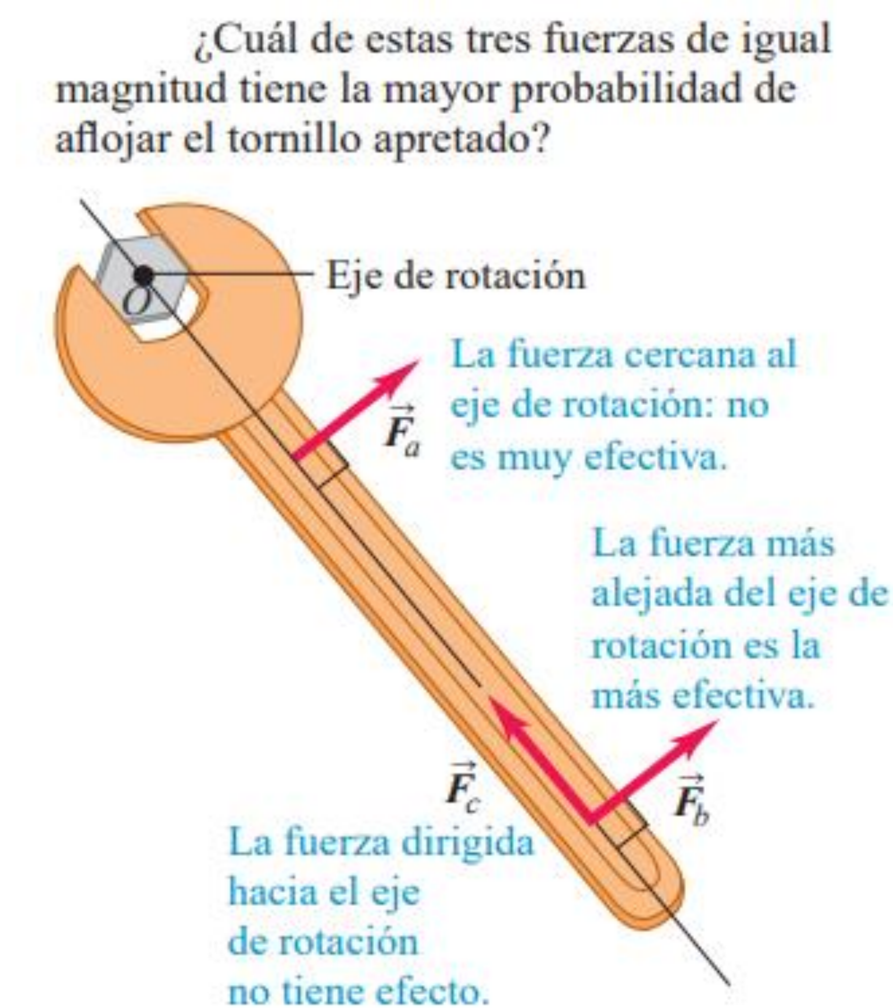
¿Alcanza con simplemente aplicar sobre el cuerpo una fuerza F?

Para cumplir con lo requerido, la fuerza F debe generar sobre el cuerpo un **Momento de torsión** (ó **Torque**)

Dinámica rotacional

¿Cuan eficiente es la fuerza F aplicada? y ¿De que depende esa eficiencia?

- Magnitud
- Dirección
- Punto de aplicación



REPASO

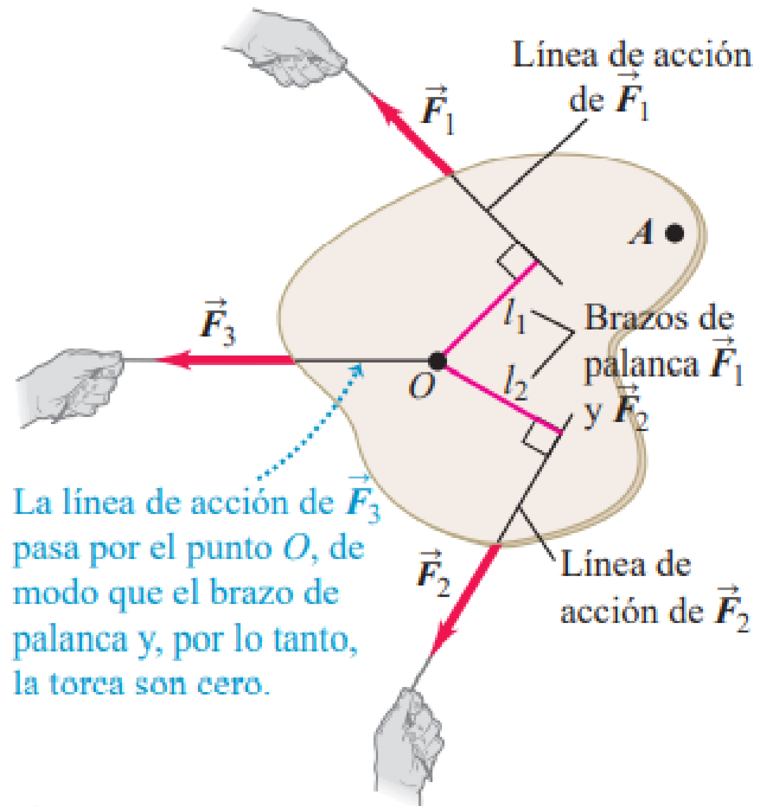
Momento de torsión (Torque)

La tendencia de la fuerza F1 en provocar una rotación alrededor de O

Depende de la magnitud F1, de la distancia perpendicular l1 entre el punto O y la línea de acción de F1.

Llamamos a la distancia l_1 el brazo de palanca (o brazo de momento) de F_1 con respecto a O.

$\vec{F}_1$ tiende a provocar una rotación en *sentido antihorario* alrededor del punto O



$\vec{F}_2$ tiende a producir una rotación en *sentido horario* alrededor del punto O

REPASO

Torque

El esfuerzo de torsión es directamente proporcional tanto a l_1 como a F_1 así que el torque (o momento) de F_1 con respecto a O se define como el producto $F_1.l_1$.

Usamos la letra griega τ (tau) para indicar el torque.

$$\boxed{\tau_1{}^{o} = F_1 l_1}$$

IMPORTANTE: el torque (momento de torsión) **siempre** se define con referencia a un punto específico (que a menudo **pero no siempre** coincide con el origen de coordenadas).

Si modificamos la posición de este punto, el torque de cada fuerza también cambia.

REPASO

Torque

El torque describe la acción de torsión o giro de una fuerza.

El torque es la medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para causar o alterar el movimiento de rotación de un cuerpo.

τ =F . l [N.m] (Newton.metro) No es Joule

REPASO

Torque

Signo del momento de torsión

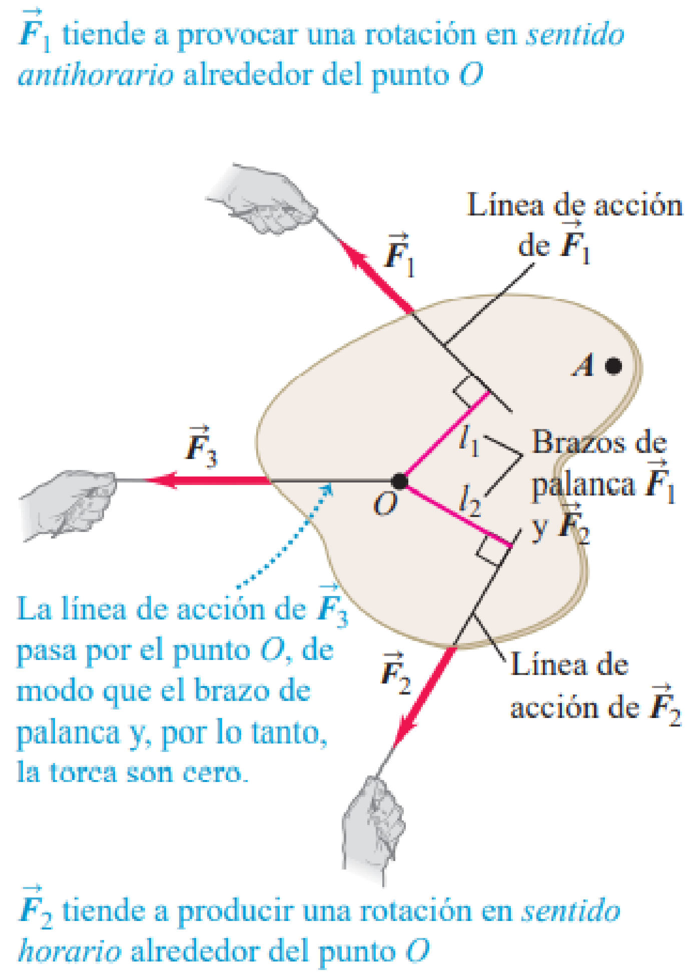
Generalmente se usa *torque anti horario positivo* y *torque horario negativo.*

$$+\quad \tau_1^{o}=F_1.l_1$$

$$\tau_2^{o}=-F_2.l_2$$

$$\tau_3^{o}=0 \quad (l_3=0)$$

[N.m]



Torque

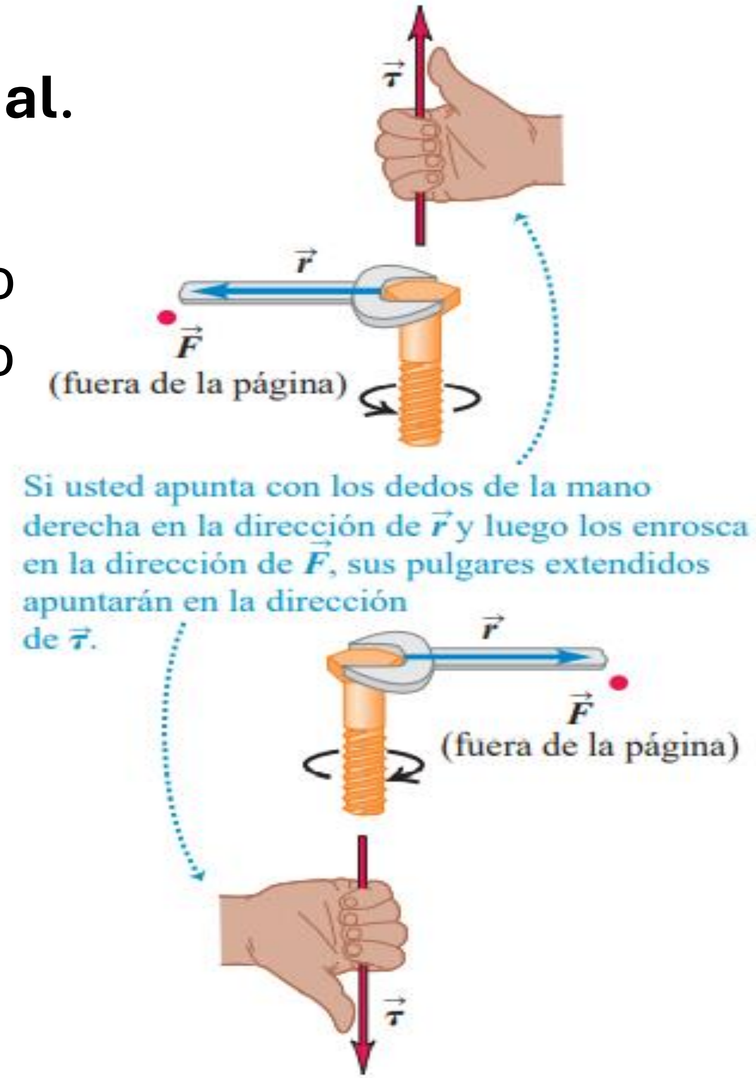
REPASO

Dirección y sentido del vector momento

El ***torque*** es una magnitud física **vectorial**.

La dirección y sentido del vector lo podemos ver por la regla de la mano derecha

En la figura vemos que los dedos de la mano se curvan en el sentido de rotación (giro) que el momento causa.



Torque

Cálculo del momento de torsión

REPASO

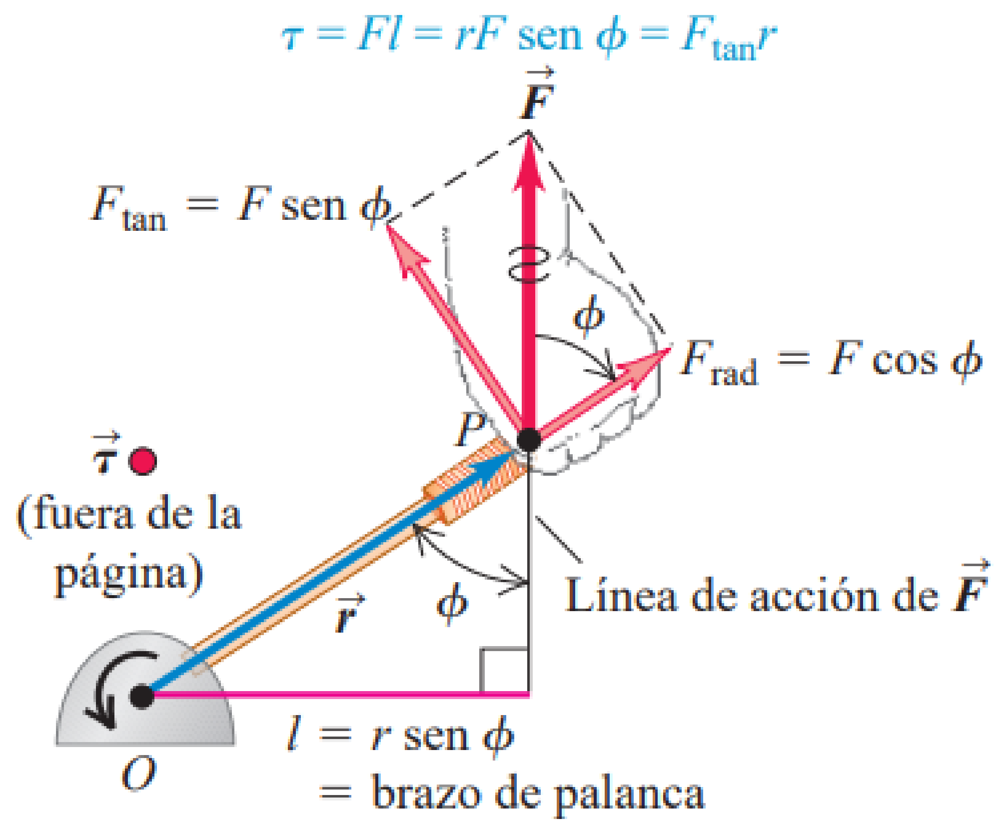
Para calcular el torque podemos hacer:

1. Encontrar el brazo de palanca l y utilizar $\tau = F.l$

2. Determinar el ángulo ϕ entre los vectores r y F ; el brazo de palanca es r en ϕ, así que $\tau = r.F$ sen ϕ.

3. Representar F en sus componentes radial y tangencial

$$\tau = r.F_{tan}$$



Torque

REPASO

Cálculo del momento de torsión

Según estas 3 formas de cálculo: $\tau = Fl = rF \text{ sen } \phi = F_{tan} r$

Pero: $l = r.\text{sen}\phi$, y $F_{tan} = F.\text{sen}\phi$

En todos los casos obtenemos: $\tau = r.F \text{ sen } \phi$

r.(F sen ϕ) es el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{F}$, entonces:

$$\boxed{\tau = r \times F}$$

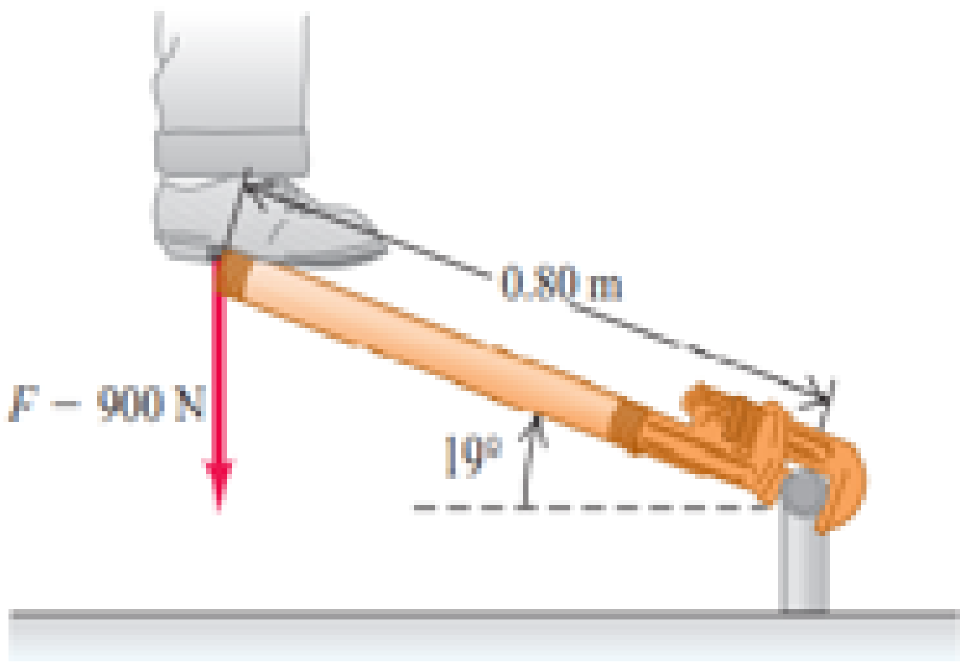
Definición del vector momento de torsión

Torque

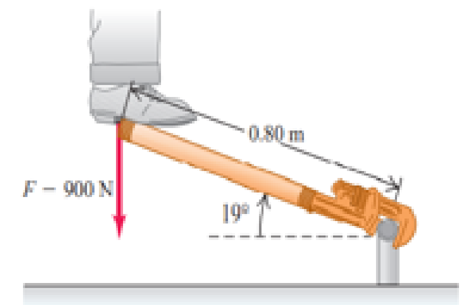
1) Un plomero necesita aflojar una tubería, para ello coloca un caño en el mango de la llave para obtener una extensión de la misma. Se coloca de pie en el extremo del tubo, aplicando todo su peso de 900 N en un punto a 0.80 m del centro de la tubería (ver figura). El mango de la llave y la extensión forman un ángulo de 19° con la horizontal. Encuentre la magnitud y dirección del torque que se aplica en torno al centro de la tubería.

REPASO

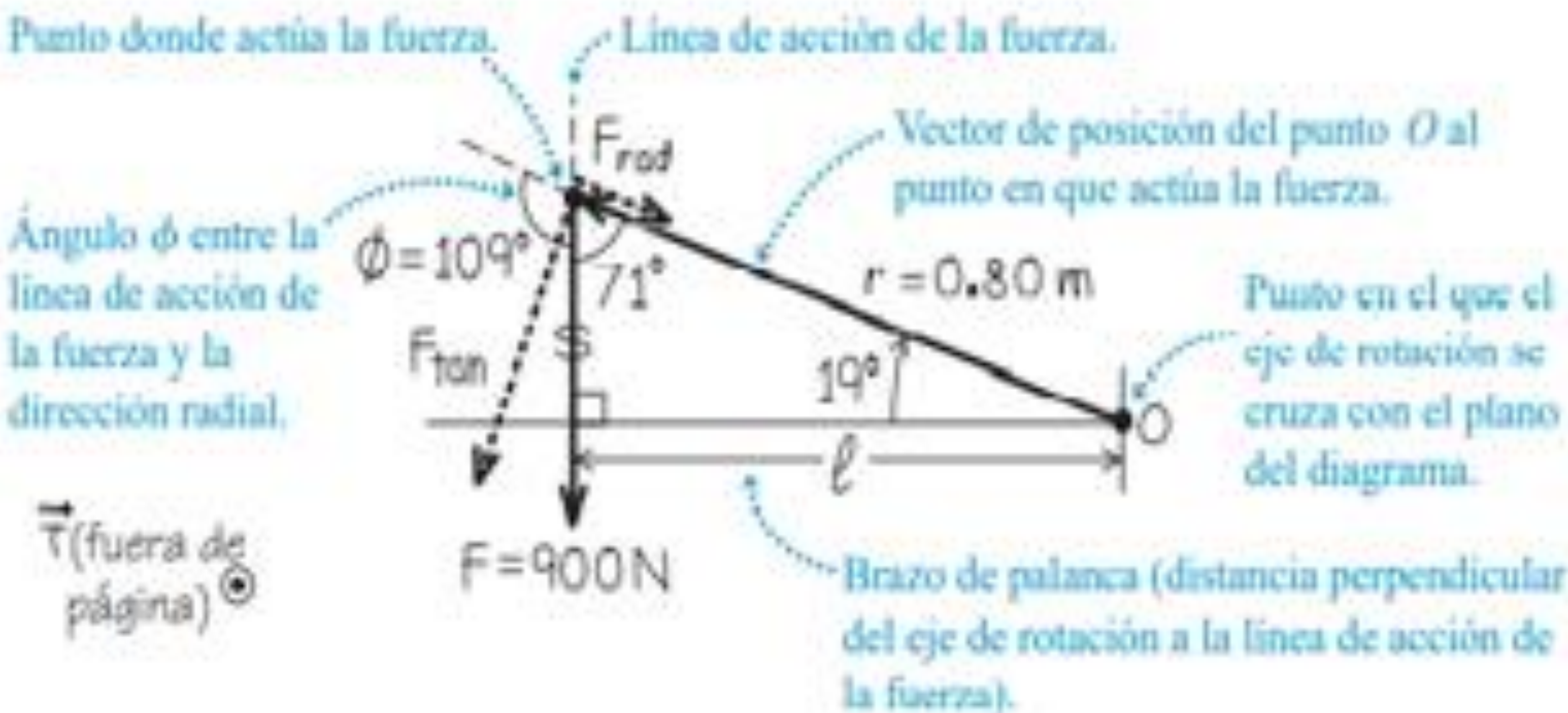
a) Diagrama de la situación



a) Diagrama de la situación



b) Diagrama de cuerpo libre



Torque

1° calculamos el brazo de palanca l:

$l = r \,.\, \text{sen}\phi = 0{,}8\text{m}.\ \text{sen}109° = 0{,}8\text{m}.\ \text{sen}71° = 0{,}756\text{m}$

Entonces: $\tau = F.l = 900\text{N}.\ 0{,}756\text{m} = \underline{680{,}4\text{Nm}}$

Si lo resolvemos usando $\tau = r.F\ \text{sen}\ \phi = 0{,}8\text{m}.900\text{N}.\text{sen}109°$

$\underline{\tau = 680{,}7\text{Nm}}$

Ó lo resolvemos utilizando: $\tau = F_{tan}.r = F.\ \text{sen}71°.r$

$\tau = 900\text{N}.\text{sen}71°.\ 0{,}8\text{m} = \underline{680{,}7\text{Nm}}$

Momento de torsión y aceleración angular (Dinámica rotacional - 2°Ley de Newton)

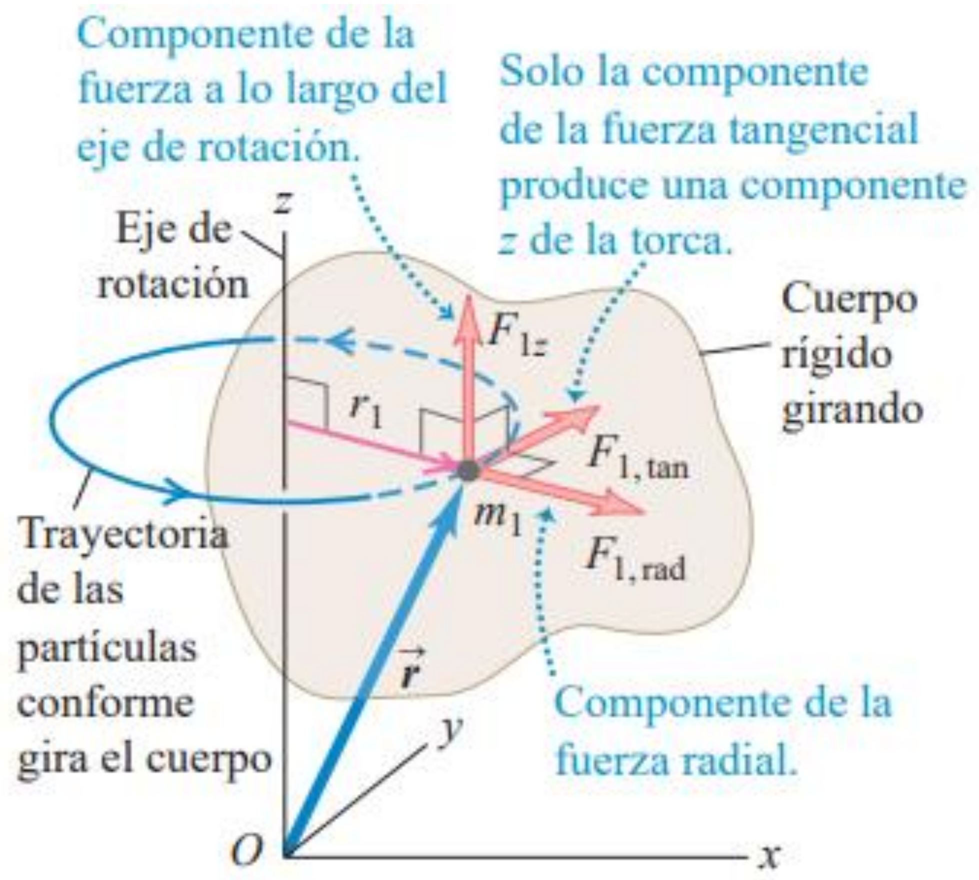
Considero un cuerpo formado de partículas girando en torno al eje z.

Analizo la partícula de masa m_1 ubicada a r_1 del eje z.

F_1, la fuerza neta sobre $m_{1.}$

F_{1z} y F_{1rad} no generan M respecto a z.

$$F_{1tan}=m_1.a_1$$



M:momento de torsión (τ)

Momento de torsión y aceleración angular (Dinámica rotacional - 2°Ley de Newton)

$a_1 = \alpha . r_1 \quad \rightarrow \quad F_{1tan} = m_1 . \alpha . r_1$

multiplico por r_1 ambos lados.

$$\underbrace{F_{1tan} . r_1}_{\tau_1^z} = \underbrace{m_1 . r_1^2}_{I_1^z} . \alpha$$

$$\tau_1^z = I_1^z \quad . \alpha$$

Si generalizamos para todo el cuerpo:

$$\tau_1^z + \tau_2^z + \tau_3^z + \ldots\ldots = (m_1 . r_1^2 + m_2 . r_2^2 \; m_3 . r_3^2 \ldots\ldots) . \alpha \quad \rightarrow$$

Dinámica rotacional - 2°Ley de Newton

$$\boxed{\tau_{neto} = I.\alpha}$$

2° Ley de Newton para un cuerpo rígido en rotación

Esta ecuación es valida solamente para cuerpos rígidos.

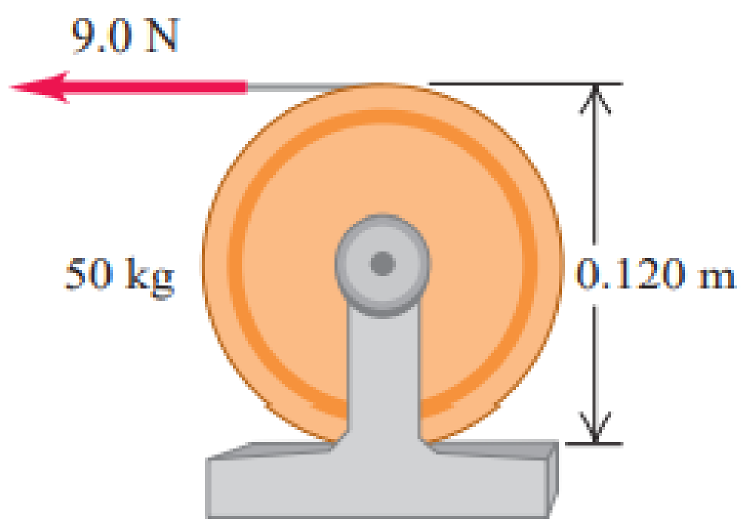
I representa la resistencia del cuerpo a iniciar el movimiento de rotación, o la resistencia a cambiar su estado de rotación.

Para el calculo de τ_{neto} se consideran solamente las fuerzas externas.

Unidades: $N.m = kg.m^2 .1/s^2 = kg.m.1/s^2.m = N.m$

Dinámica rotacional - 2°Ley de Newton

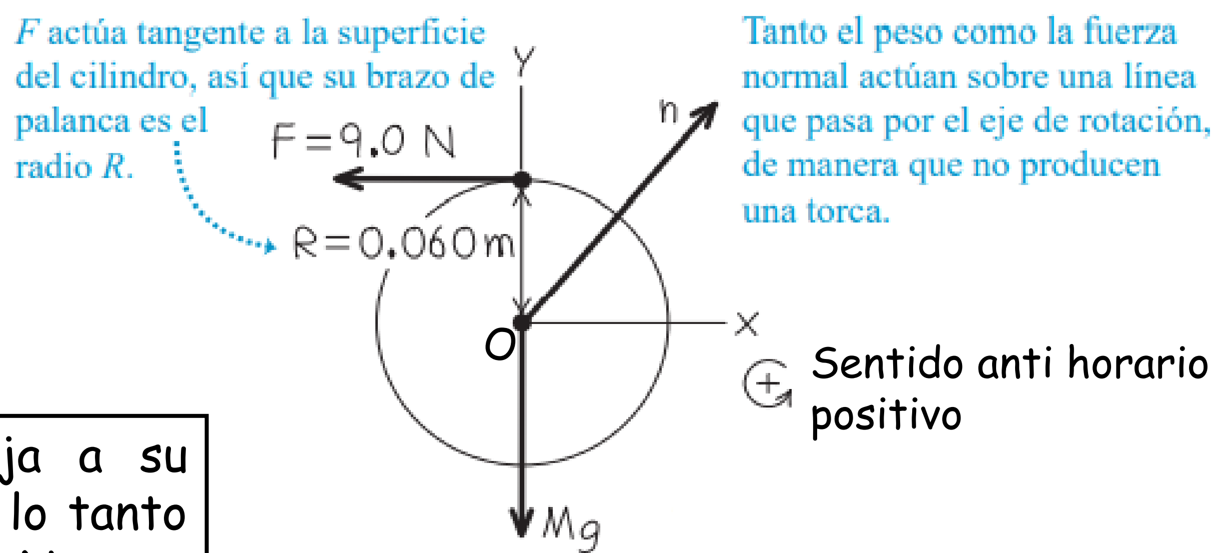
2) Un cable ligero, inextensible, se enrolla alrededor de un cilindro sólido con masa de 50kg y 0,12m de diámetro, que gira alrededor de un eje fijo horizontal y está montado en cojinetes sin fricción (figura). Una fuerza constante de 9,0N tira del extremo libre del cable una distancia de 2,0m, haciendo girar el cilindro conforme se desenrolla sin resbalar. Si el cilindro está inicialmente en reposo. ¿Cuál es la aceleración del cable?



Dinámica rotacional - 2°Ley de Newton

Nuestro sistema es la polea con el cable (cuyo peso es despreciable).

Nos piden calcular la aceleración de la soga, por lo tanto no nos sirve plantear energía. Vamos a plantear por dinámica, para ello 1° dibujamos el DCL.



Sentido anti horario positivo

La polea se encuentra fija a su estructura de soporte, por lo tanto esta en equilibrio (ΣF=0). No nos sirve este planteo porque no hay aceleración.
Pero la polea gira, entonces planteo Dinámica rotacional para hallar su aceleración tangencial.

Dinámica rotacional - 2°Ley de Newton

$$\Sigma\tau_O = I_o . \alpha$$

La polea gira sobre su eje porque F tiene brazo de palanca respecto a O.

$\Sigma\tau_O = F.R$ $\qquad$ $I_o = 1/2.M.R^2$ (de tabla)

$$F.R = 1/2.M.R^2 .\alpha \rightarrow \alpha = \frac{F.R}{1/2.M.R^2}$$

$$\alpha = \frac{9N.0,06m}{\frac{1}{2}.50kg.(0,06m)^2} \qquad \alpha = 6\ rad/s^2$$

Dinámica rotacional - 2°Ley de Newton

Conocemos la aceleración angular de la polea.

Ahora, podemos calcular la aceleración tangencial del borde de la polea, que también es la aceleración del cable, dado que el mismo "gira" sobre el borde.

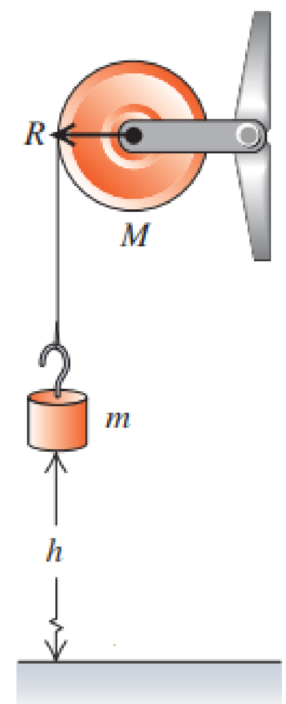
$a = \alpha . R = 6\ rad/s^2 . 0{,}06m \rightarrow$ $\underline{\mathbf{a=0{,}36m/s^2}}$

Dinámica rotacional - 2°Ley de Newton

3) Enrollamos un cable ligero e inextensible en un cilindro sólido de masa M y radio R. El cilindro gira con fricción despreciable alrededor de un eje horizontal fijo. Atamos el extremo libre del cable a un bloque de masa m y soltamos el bloque a partir del reposo a una distancia h sobre el piso. Conforme el bloque cae, el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar. Obtenga:

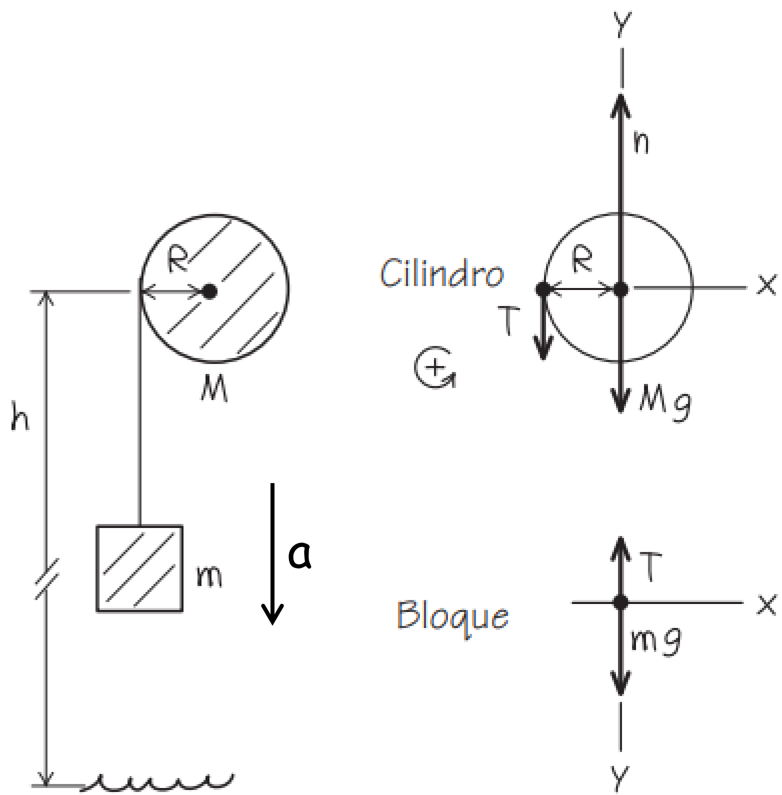
a) ¿cuál es la aceleración del bloque que cae?

b) ¿cuál es la tensión en el cable?



Dinámica rotacional - 2°Ley de Newton

Debido a que los componentes del sistema tienen distintos tipos de movimientos, aplicaremos dinámica rotacional a la polea y dinámica de traslación al bloque.



$$\Sigma\tau_{eje}=I_{eje}.\alpha$$

$$T.R=(1/2.M.R^2).\alpha \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=m.a$$

$$m.g-T=m.a \qquad (2)$$

(Por conveniencia hemos tomado el eje Y positivo hacia abajo)

Dinámica rotacional - 2°Ley de Newton

En principio parece que tenemos 2 ecuaciones (1) y (2), y 3 incógnitas T, a y α.

Pero como el cable no resbala sobre la polea mientras se desenrolla, la aceleración del cable (y por lo tanto del bloque) es igual a la aceleración tangencial del cilindro, entonces podemos plantear que: $a=\alpha.R$ (3)

Operando con las ecuacs (1),(2) y (3)

$$a=\frac{g}{1+\frac{M}{2m}} \qquad T=\frac{m.g}{1+\frac{2m}{M}}$$

Traslación y rotación combinadas

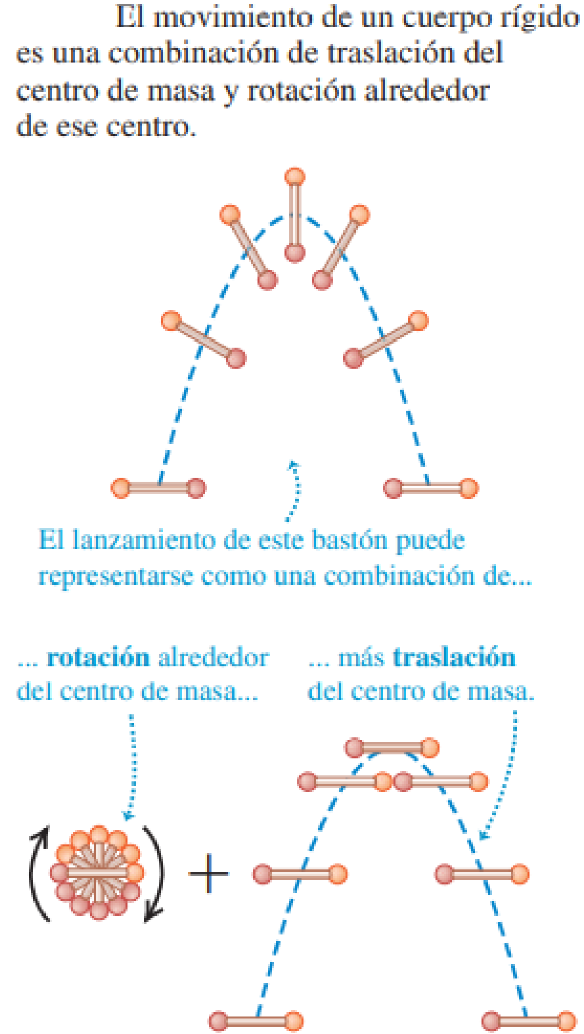
Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

El movimiento de un cuerpo rígido puede representarse como una combinación de movimiento traslación del centro de masa y rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.

Por lo tanto la energía cinética K, del cuerpo rígido, esta compuesta de dos partes:

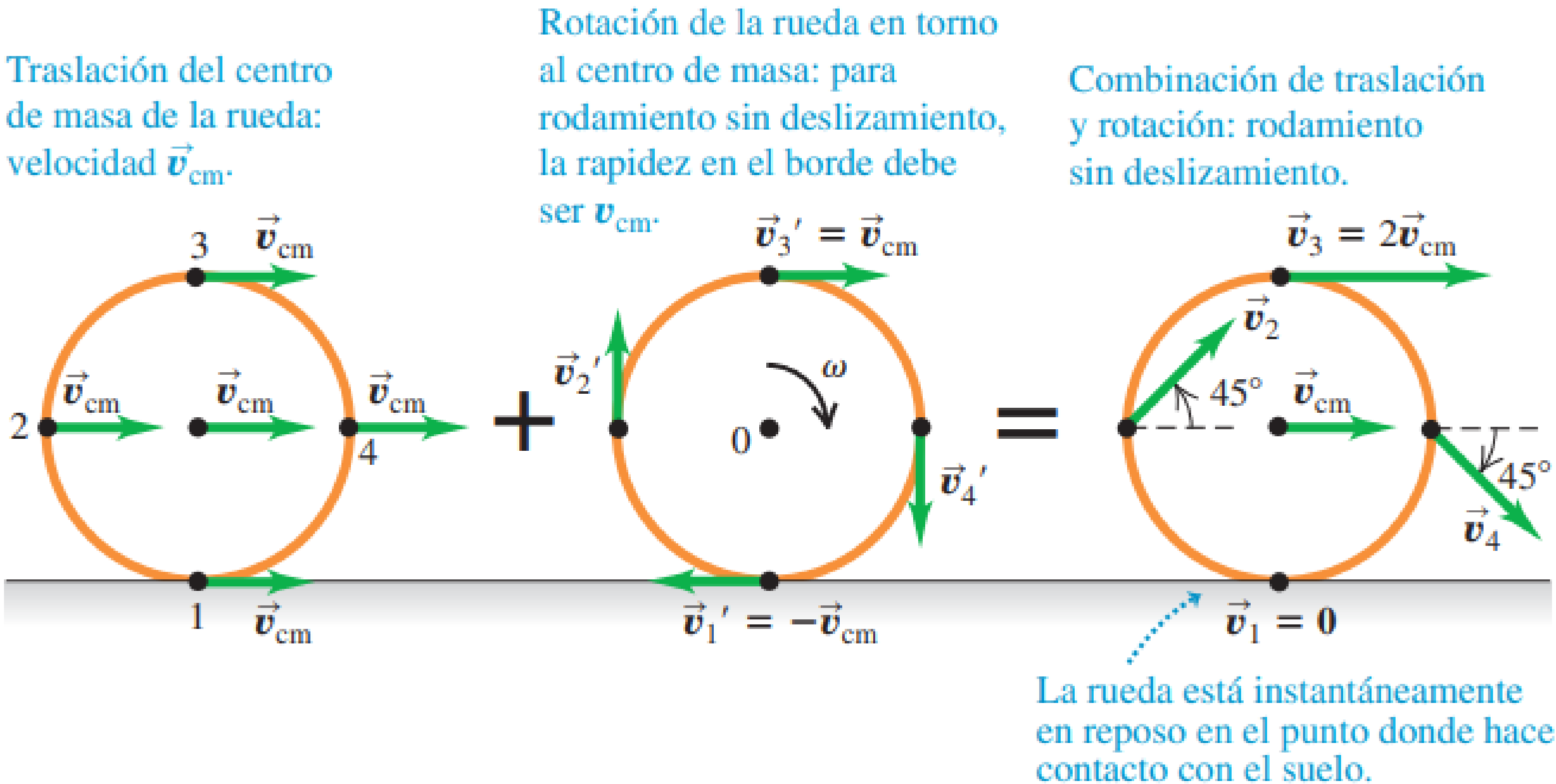
$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

(cuerpo rígido con traslación y rotación)



Rodamiento sin deslizamiento: Rototraslación

Un caso importante de traslación y rotación combinadas es el de rodar sin deslizar, como el movimiento de la rueda de bicicleta.



Rodamiento sin deslizamiento: Rototraslación

El movimiento de una rueda es la suma del movimiento traslación del centro de masa y el movimiento rotación de la rueda alrededor del centro de masa.

$$v_{cm} = R\omega \qquad \text{(condición para rodar sin resbalar)}$$

La rueda se traslada con una velocidad v_{CM} y rota alrededor del CM, ó podemos decir que en un instante dado, la rueda gira alrededor de un "eje de rotación instantáneo" que pasa por el punto de contacto con el suelo (en nuestra figura sería el pto1).

Rodamiento sin deslizamiento: Rototraslación

Entonces, la energía cinética K de la rueda es:

$$K=1/2.I_1.\omega^2$$

Por teorema de ejes paralelos:

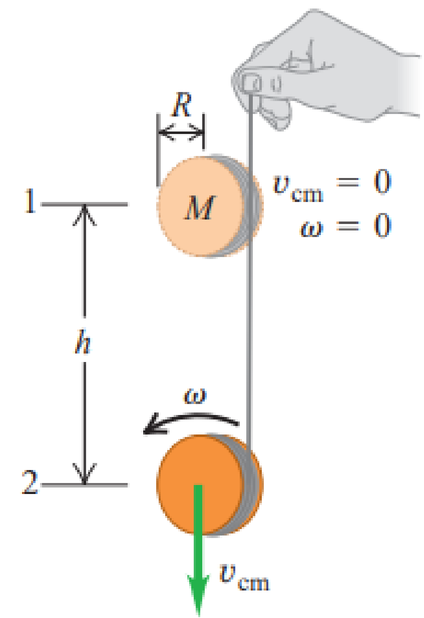
$$I_1=I_{CM}+M.R^2$$

Finalmente:

$$K = \frac{1}{2}I_1\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\mathrm{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\mathrm{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}{}^2$$

Rodamiento sin deslizamiento: Rototraslación

4) Se construye un yoyo enrollando una cuerda con masa despreciable varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio R (ver figura). Se sostiene el extremo de la cuerda fija mientras se suelta el cilindro desde el reposo. La cuerda se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Use consideraciones de energía para calcular la rapidez v_{cm} del centro de masa del cilindro después de caer una distancia h.



Rodamiento sin deslizamiento: Rototraslación

El extremo superior de la cuerda está fijo, no se tira de este hacia arriba, así que la mano no efectúa trabajo sobre el sistema de la cuerda y el cilindro.

Hay fricción entre la cuerda y el cilindro pero, como la cuerda no resbala sobre la superficie del cilindro, no se pierde energía mecánica (la fricción NO realiza trabajo).

Entonces: $K_1+U_1=K_2+U_2$

$K_1=0$ (el yo-yo parte del reposo)

Para la energía potencial tomamos como referencia 0 (cero) el pto. 2

$U_1=M.g.h$ $U_2=0$

El yo-yo mientras va rotando sobre su eje se traslada hacia abajo.

$K_2=1/2.I_{CM}.\omega^2+1/2.M.v_{CM}^2$

Rodamiento sin deslizamiento: Rototraslación

Entonces: $\cancel{K_1}+U_1=K_2+\cancel{U_2}$

$$0 + M.g.h=1/2.I_{CM}.\omega^2+1/2.M.v_{CM}^2 + 0$$

$I_{CM}=1/2.M.R^2$ (momento de inercia de un cilindro en CM)

Por tratarse de una rodadura sin resbalamiento: $v_{CM}=\omega.R$

$$M.g.h=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}.M.R^2).(\frac{v_{CM}}{R})^2+1/2.M.v_{CM}^2$$

Operando: $\boxed{v_{CM}=\sqrt{\frac{4}{3}.g.h}}$

Dinámica en traslación y rotación combinadas

Podemos analizar el movimiento de traslación y rotación desde la **dinámica**.

La traslación queda expresada por la 2° Ley de Newton:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$$

La rotación alrededor del CM queda expresada por el análogo rotacional de la 2° Ley de Newton:

$$\sum \tau_z = I_{\text{cm}}\alpha_z$$

Dinámica en traslación y rotación combinadas

Lo anterior es válido siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

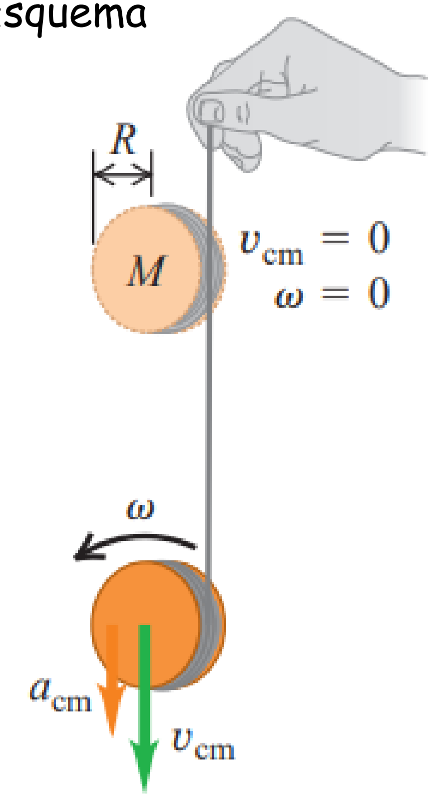
1. ***El eje que pasa por el centro de masa debe ser un eje de simetría.***
2. **El eje no debe cambiar de dirección.**

El eje de una rueda de bicicleta pasa por el centro de masa de la rueda y es un eje de simetría. Por lo tanto, la rotación de la rueda está descrita por la ecuación $\Sigma\tau_z = I_z.\alpha$, siempre que la bicicleta no dé la vuelta ni se incline hacia un lado (lo cual alteraría la orientación del eje).

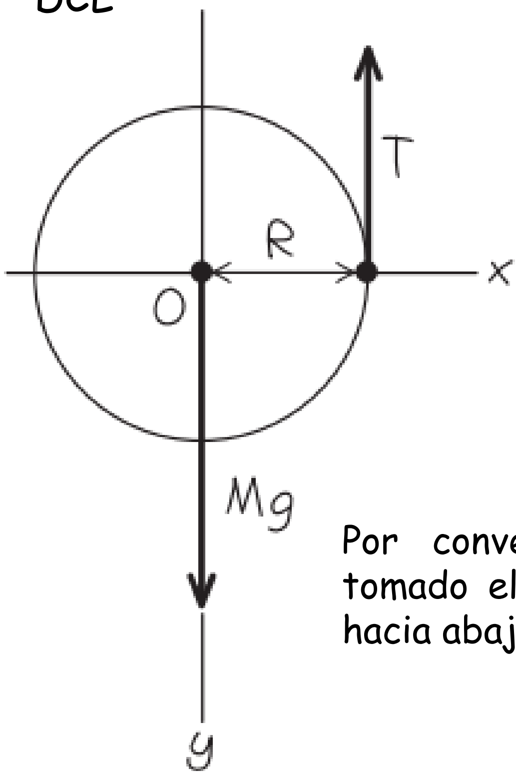
Dinámica en traslación y rotación combinadas

5) Para el yo-yo del ejercicio 4), calcular la aceleración del cilindro y la tensión en la cuerda.

Esquema



DCL



Por conveniencia hemos tomado el eje Y positivo hacia abajo

Dinámica en traslación y rotación combinadas

Al tratarse de un cuerpo rígido en rototraslación, planteamos para la traslación del CM:

$$\Sigma F_{ext}=M.a_{CM} \quad \rightarrow \quad M.g-T=M.a_{CM} \qquad (1)$$

Para la rotación del CM:

$$\Sigma \tau_{CM}=I_{CM}.\alpha \quad \rightarrow \quad \circlearrowright + \; T.R=I_{CM}.\alpha=\frac{1}{2}.M.R^2.\alpha \qquad (2)$$

No hay resbalamiento:

$$v_{CM}=\omega.R \quad \text{derivando} \quad a=\alpha.R \qquad (3)$$

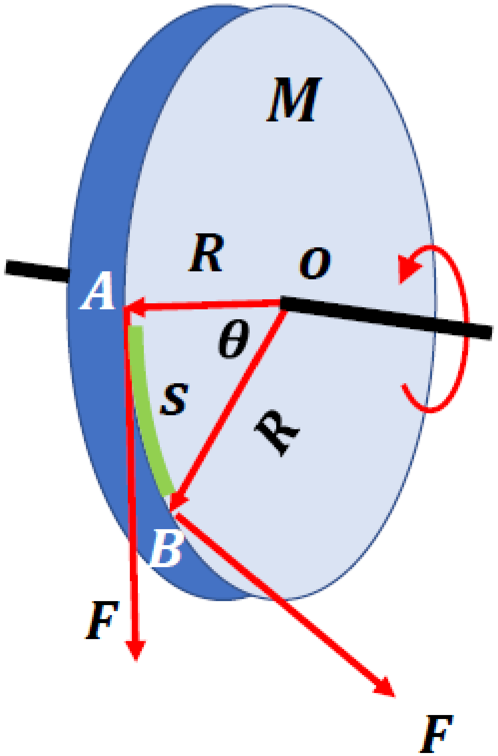
Dinámica en traslación y rotación combinadas

Operando las ecuaciones (1), (2) y (3)

$$\boxed{a_{CM}=\frac{2}{3}\ g}$$

$$\boxed{T=\frac{1}{3}\ Mg}$$

Trabajo en la rotación



$$W_{A-B} = F \,.\, s$$

$$W_{A-B} = F \,.\, \theta \,.\, R$$

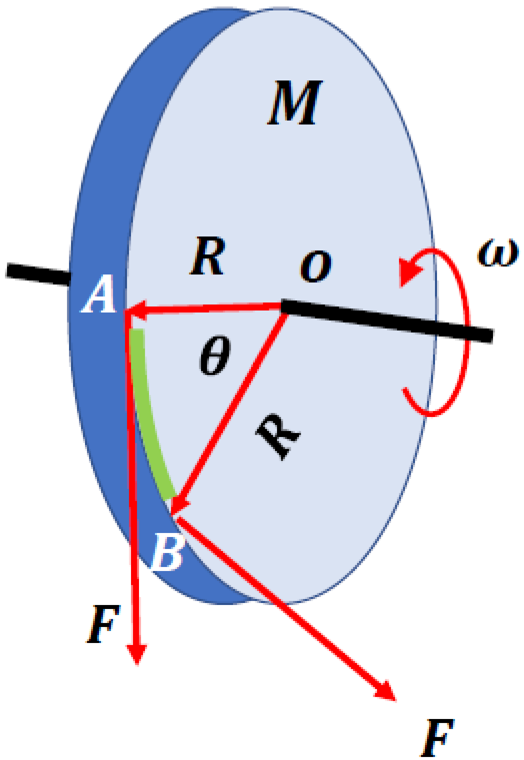
$$W_{A-B} = \tau . \theta$$

Análisis de unidades

$$[W] = [N].[1].[m] = [Joule]$$

El trabajo que realiza la fuerza tangencial "F" aplicada al disco desplazándose el arco de circunferencia "s" es equivalente al torque "τ" por el ángulo barrido "θ".

Potencia en la rotación



$$Pot_{media} = \frac{W_{A-B}}{t}$$

$$\frac{W_{A-B}}{t} = \frac{F\,.\,s}{t} = \frac{F\,.\,R\,.\,\theta}{t}$$

$$Pot_{instantánea} = \tau\,.\,\omega$$

TP Nº 11

Ejercicio Nº 8

El eje de un motor eléctrico tiene una masa de 200 g y un radio de 5 cm. El par motor de fuerzas vale 50 gf.cm

a) ¿Cuánto tarda el motor en alcanzar 100 rpm? $\longrightarrow$ t= ¿?

b) ¿Qué potencia desarrolla en ese instante? $\longrightarrow$ P=¿?

τ = 50 gf.cm $\longrightarrow$ Pasar a Nm

$$\tau = 50\ \cancel{gf}.\cancel{cm} \times \frac{1\ \cancel{kgf}}{1000\ \cancel{gf}} \times \frac{9{,}8\ N}{1\ \cancel{kgf}} \times \frac{1\ m}{100\ \cancel{cm}} \Rightarrow \tau = 4{,}9\ .\ 10^{-3}\ Nm$$

a) ¿Cuánto tarda el motor en alcanzar 100 rpm?

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha\, t$$

Incógnita

No tengo

$I = MR^2$

M= 0,2 kg

R= 0,05 m

$$\tau = I . \alpha$$

4,9.10 $^{-3}$ Nm

$$\alpha = \frac{\tau}{I}$$

$$t = \frac{(\omega_f - \cancel{\omega_0})}{\alpha} = \frac{(\omega_f - \cancel{\omega_0})}{\frac{\tau}{I}} = \frac{(\omega_f - \cancel{\omega_0})\, I}{\tau} \Rightarrow t = \ldots\, s$$

b) ¿Qué potencia desarrolla en ese instante?

$$P_i = \tau \; \omega$$

100 rpm

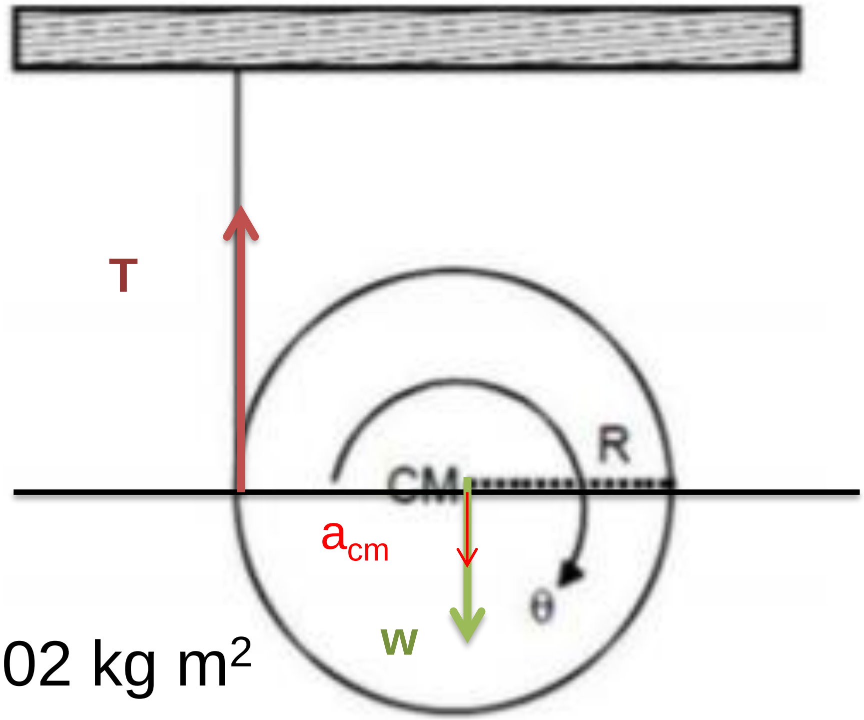
4,9.10 $^{-3}$ Nm

$$\Rightarrow \quad P_i = \ldots\ldots \; W$$

Ejercicio Nº 9

Un disco de masa M = 1kg y radio R=0,2 m tiene enrollada una cuerda en su periferia y cae partiendo del reposo mientras la cuerda que se sostiene de su extremo se desenrolla. Determinar:

a) La aceleración del centro de masas.
b) La aceleración tangencial en la periferia del disco.
c) La tensión en la cuerda

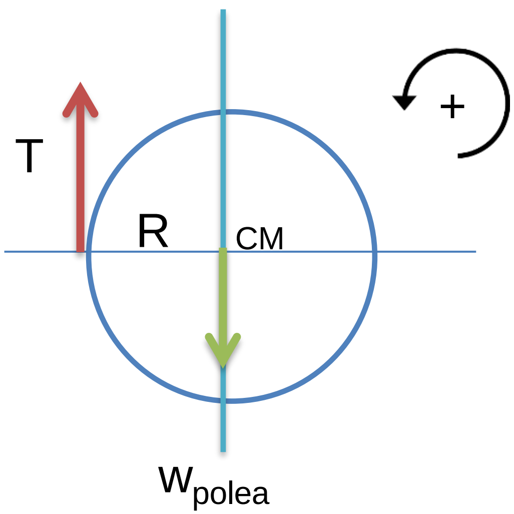


$$\boxed{\tau_{CM} = I_{CM} . \alpha}$$

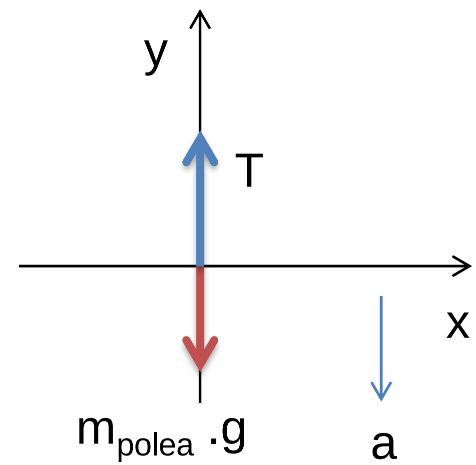
$$\alpha = a / R$$

$$I_{CM} = ½ MR^2 \longrightarrow I_{CM} = 0{,}02 \text{ kg m}^2$$

DCL Polea



$$\alpha = (-a / R)$$



$$\boxed{\tau_{CM} = I_{CM} . \alpha}$$

$$-T . R = I_{CM} \ (-a / R)$$

$$T = (I_{CM} \ a / R^2)$$

$$\sum F = m_p . a$$

b) $T - w = m_p . (-a)$

$$T = w - m_p . a$$

$$I_{CM} \; (\mathbf{a} / R^2) = w - m_p \cdot \mathbf{a}$$

$$I_{CM} \; \mathbf{a} = (w - m_p \cdot \mathbf{a}) \, R^2$$

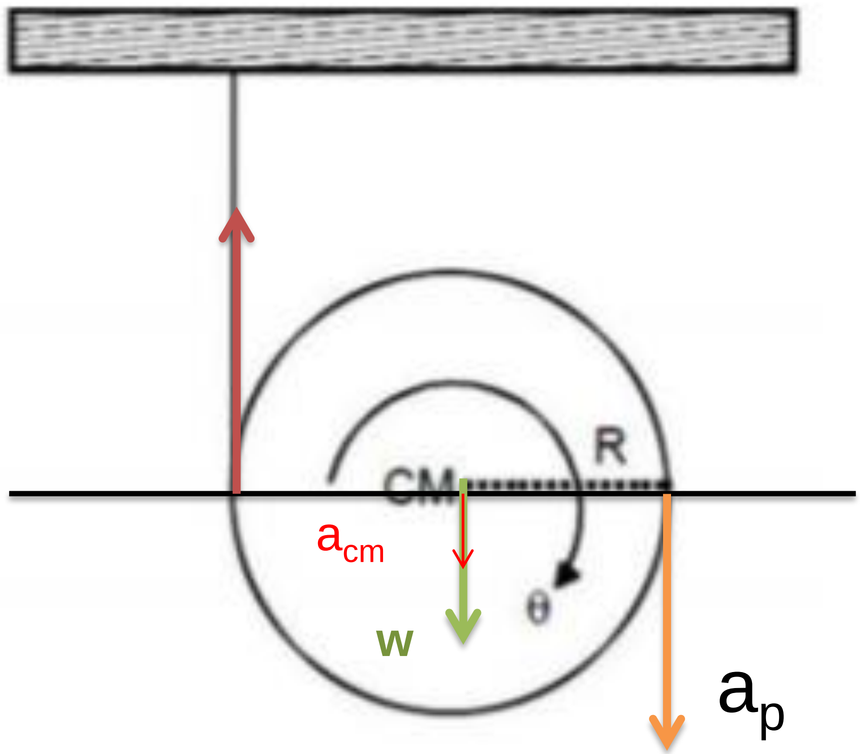
$$I_{CM} \; \mathbf{a} + m_p \cdot \mathbf{a} \, R^2 = w \, R^2$$

$$a \, (I_{CM} + m_p \cdot R^2) = w \, R^2$$

Aceleración del centro de masa

$$\mathbf{a} = \frac{w \, R^2}{(I_{CM} + m_p \cdot R^2)}$$

La aceleración tangencial en la periferia del disco



Aceleración del centro de masa

$$\boxed{\alpha} = a_{cm} / R$$

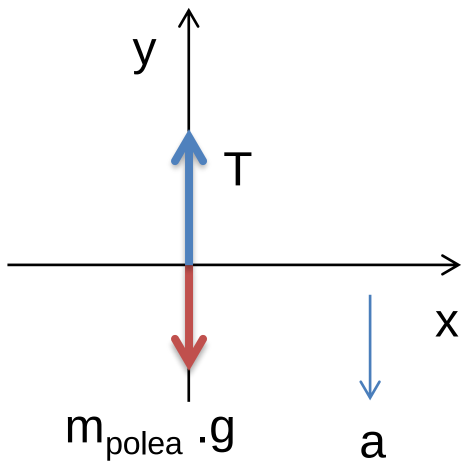
Es la misma en toda la polea

$$a_{periferia} = \alpha D$$

Distancia al eje de rotación

b) La tensión en la cuerda

$$T = w - m_c \cdot a$$



Ejercicio Nº 10

Un motor eléctrico ejerce un momento de torsión constante de 10 N.m sobre una piedra de amolar montada en un eje. El momento de inercia de la piedra es I = 2,0 kg.m^2 y el sistema parte del reposo.

a) Calcular el trabajo efectuado por el motor en 8,0 segundos y la energía cinética al final de este lapso.

b) ¿Qué potencia media desarrolló el motor?

DATOS
$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = 10\ \text{Nm} \\ I = 2{,}0\ \text{kg m}^2 \\ t = 8\ \text{s} \end{array} \right.$$

$$\boxed{W = \tau\ \theta} \longrightarrow W = \ldots\ldots\ J$$

$$\theta = \cancel{\theta_0} + \cancel{\omega_0}\ .\ t_f + ½\ .\ \alpha\ .\ t^{\,2}$$

$$\tau = I.\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} \Rightarrow \alpha = 5\ 1/s^2$$

b) ¿Qué potencia media desarrolló el motor?

$$P_{media} = \frac{W}{t} \longrightarrow W_{neto} = \Delta K = K_f - \cancel{K_0}$$

$$P_{media} = \ldots\ldots\ W$$

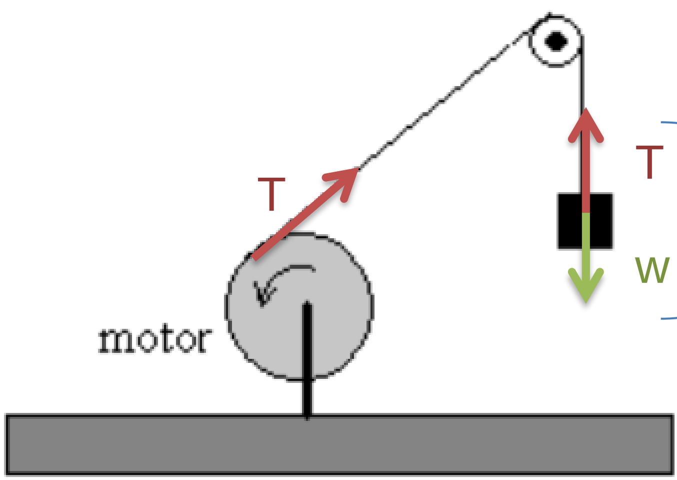
Ejercicio Nº11

Un bloque de 2000 kg está suspendido en el aire por un cable de acero que pasa por una polea y acaba en un torno motorizado. El bloque asciende con velocidad constante de 8 cm/s. El radio del tambor del torno es de 30 cm y la masa de la polea es despreciable.

a) ¿Cuánto vale el momento que ejerce el cable sobre el tambor del torno?

b) ¿Cuánto vale la velocidad angular del tambor del torno?

c) ¿Qué potencia tiene que desarrollar el motor? Calcular el trabajo realizado durante 10 s



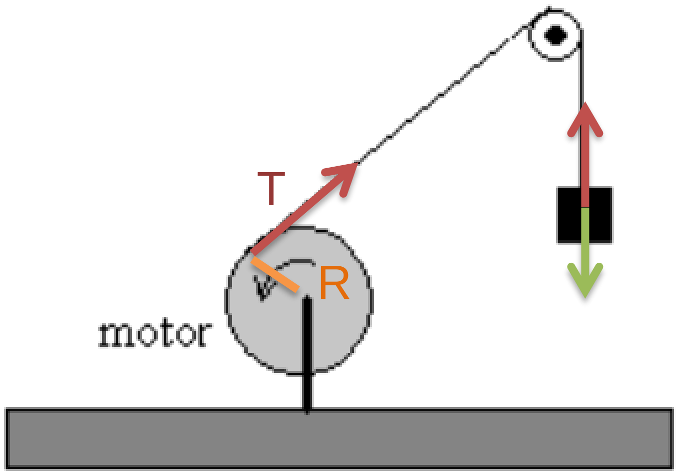
$v_{constante} = 0{,}08$ m/s

$$\sum F_y = 0$$

$$T - w = 0$$

$$T = w = 2000 \text{ g x } 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 19{,}6 \text{ N}$$

a) ¿Cuánto vale el momento que ejerce el cable sobre el tambor del torno?



τ = T. R = 19,6 N .0,3 m

τ = ...Nm

b) ¿Cuánto vale la velocidad angular del tambor del torno?

$$v = \omega\, R \longrightarrow \omega = \frac{v}{R} \longrightarrow \omega = \ldots\ldots 1/s$$

c) ¿Qué potencia tiene que desarrollar el motor? Calcular el trabajo realizado durante 10 s

$$P_i = \tau\ \omega$$

Se calculo en el punto b)

Se calculo en el punto a)

$W = \tau \; \theta$

Se calculo en el punto a)

$\theta = \cancel{\theta_0} + \omega \, . \, t_f$

Se calculo en el punto b)

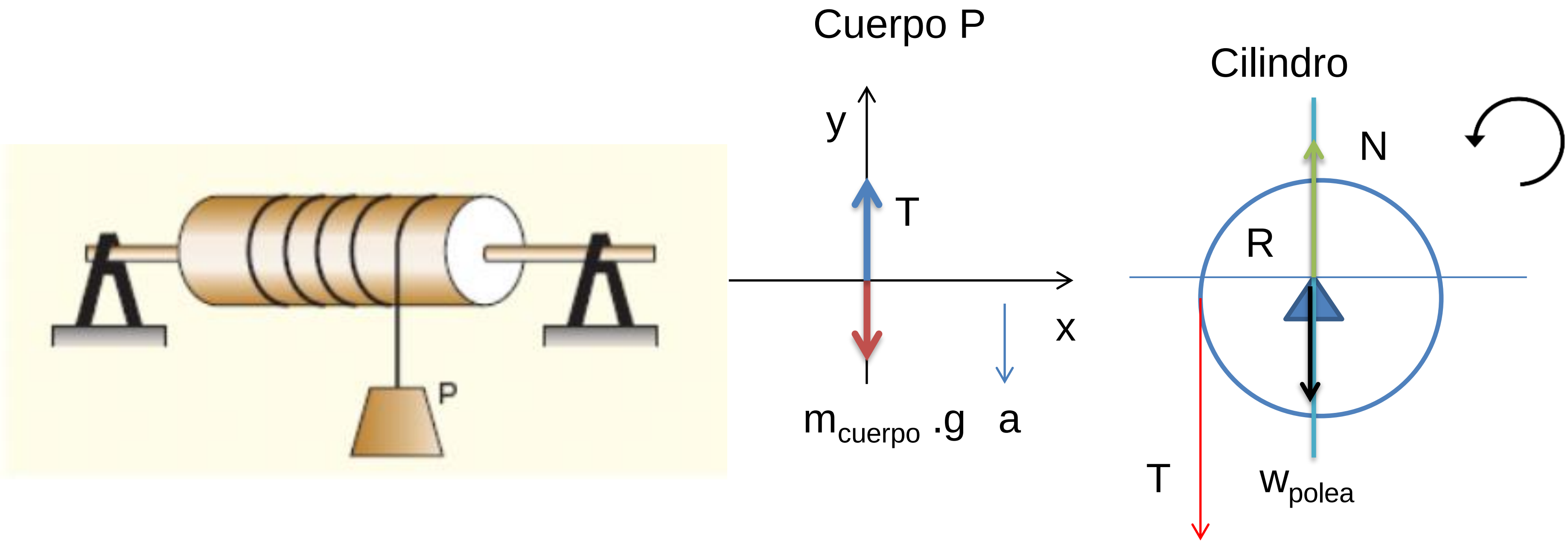
W = …..J

Ejercicio Nº 12

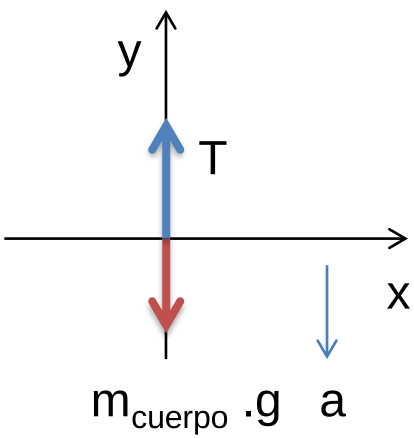
Un cilindro macizo de 10 cm de radio y 10 kg de masa y 1m de longitud gira alrededor de un eje horizontal por la acción de una pesa de 0,2 kg de peso que cuelga del extremo de una cuerda que se va desenrollando.

Determinar el trabajo hecho por el torque aplicado sobre el cilindro luego de 2 s de iniciado el movimiento, suponiendo que parte del reposo.

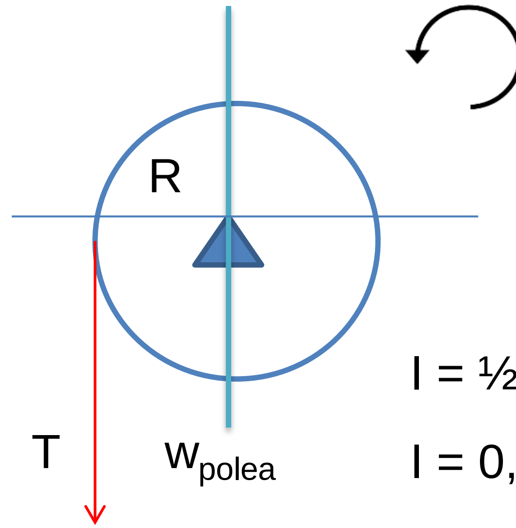
Calcular el trabajo neto hecho por el sistema luego de 2 s de iniciado el movimiento, suponiendo que parte del reposo.



Cuerpo P



Cilindro



$I = \frac{1}{2}\ 10\ kg\ (0{,}1m)^2$

$I = 0{,}05\ kgm^2$

$$\sum F = m_p .\ a$$

$$T - w = m_p .\ (-a)$$

$$T = w - m_p .\ a$$

$$\tau_{neto} = I.\alpha$$

$$T\ .\ R = I\ \alpha \longrightarrow \alpha = a\ /\ R$$

$$\underbrace{w - m_p \, . \, \mathbf{a}}_{T} \; . \, R \quad = \; I \; \underbrace{\mathbf{a} \, / \, R}_{\alpha}$$

$$w = \; I \; (\mathbf{a} \, / \, R) + \; m_p \, . \, \mathbf{a} \; . \, R = a \, (I/R) + m_p \, R$$

$$a = \frac{w}{[(I/R) + m_p \, R]} \quad \Rightarrow \quad a = \ldots\ldots\ldots \; m/s^2$$

$$\alpha = a \, / \, R \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ldots\ldots \; 1/s^2$$

Determinar el trabajo hecho por el torque aplicado sobre el cilindro luego de 2 s de iniciado el movimiento, suponiendo que parte del reposo.

$I = 0{,}05\ \text{kgm}^2$

$t = 2\ \text{s}$

$$W = \tau\,\theta \left\{ \begin{array}{l} \tau = I . \alpha \\ \theta = \cancel{\theta_0} + \cancel{\omega_0} \, . \, t_f + \tfrac{1}{2} \, . \, \alpha \, . \, t^2 \end{array} \right.$$

$W = \ldots\ldots\ldots \text{J}$

Calcular el trabajo neto hecho por el sistema luego de 2 s de iniciado el movimiento, suponiendo que parte del reposo.

$$W_{neto} = \Delta K = K_f - \cancel{K_0}$$

$$W_{neto} = K_f = ½\, m\, v_f^2 + ½\, I\, \omega_f^2$$

$$v_f = \omega_f R$$

$$\omega_f = \cancel{\omega_0} + \alpha\, t$$

$$W_{neto} = \ldots\ldots\ldots\ J$$

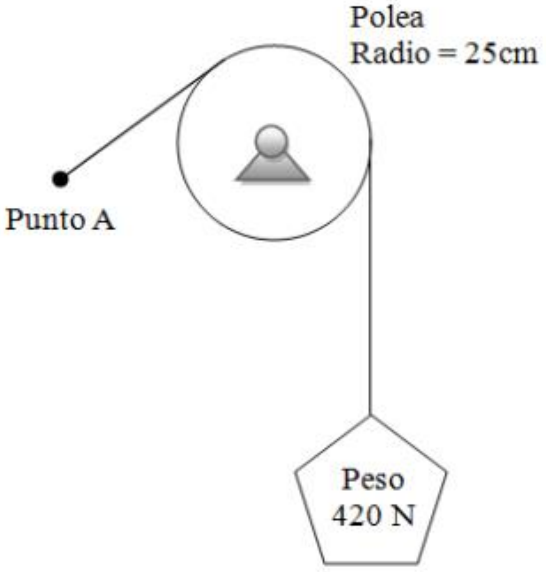
Ejercicio N°13

Se desea bajar una carga de 420 N utilizando una cuerda de masa despreciable a través de una polea de 25 cm de radio y 18 kg de masa. Se pretende bajar la carga 8 m desde su posición de reposo en 2 segundos.

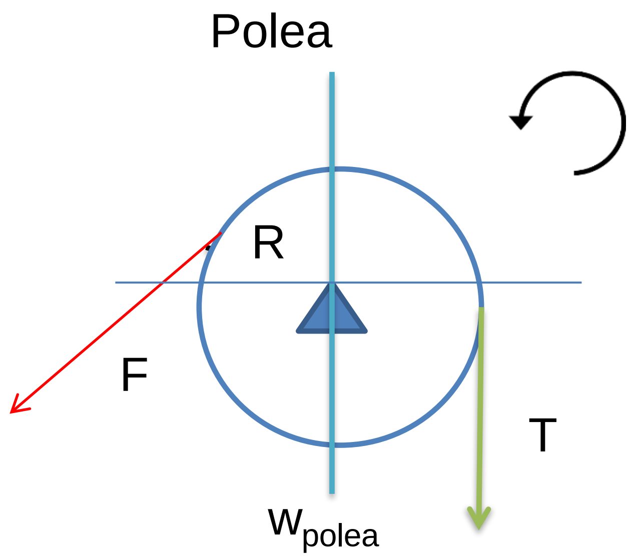
Realizar el diagrama de cuerpo libre en la polea y en la carga. Además determinar:

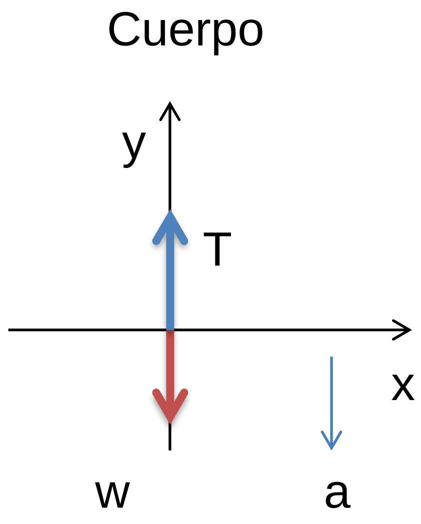
a) La fuerza que se debe aplicar en el extremo A de la cuerda.

b) El trabajo que debe realizar una persona en el extremo A de la cuerda.

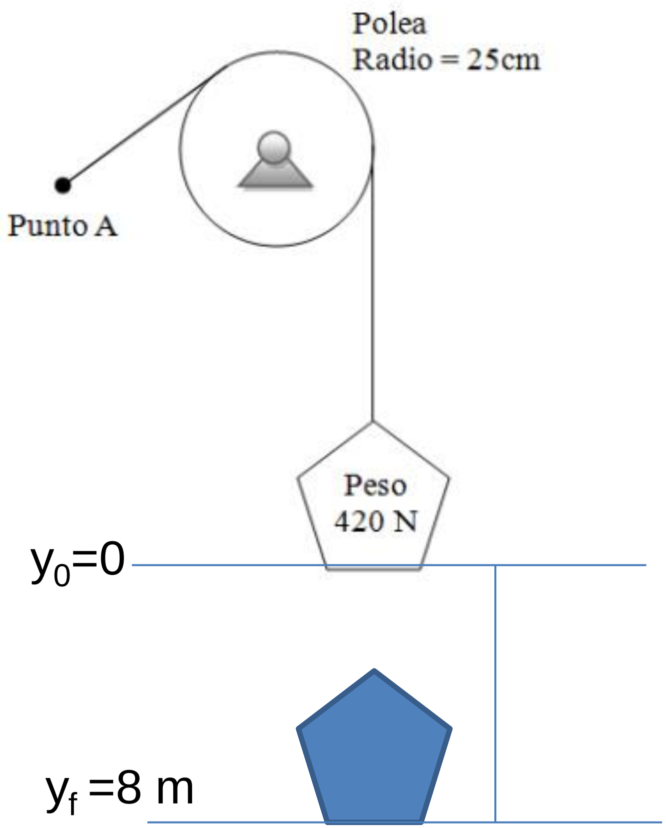


Realizar el diagrama de cuerpo libre en la polea y en la carga





a) La fuerza que se debe aplicar en el extremo A de la cuerda.



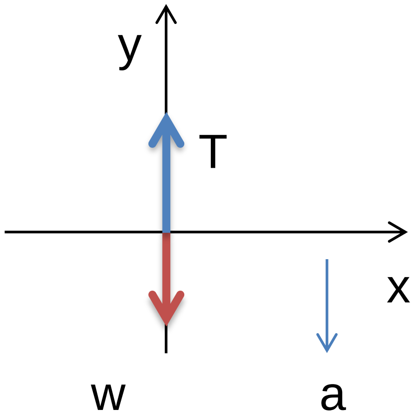
$$y_f = \cancel{y_0} + \cancel{v_{oy}t} + \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

$$-8\text{ m} = + \frac{1}{2}\, a\, (2\text{ s})^2$$

$$a = \frac{-\,2\,(8\text{ m})}{4\text{ s}^2}$$

$$a = -\ \ldots\ldots\text{m/s}^2$$

Cuerpo

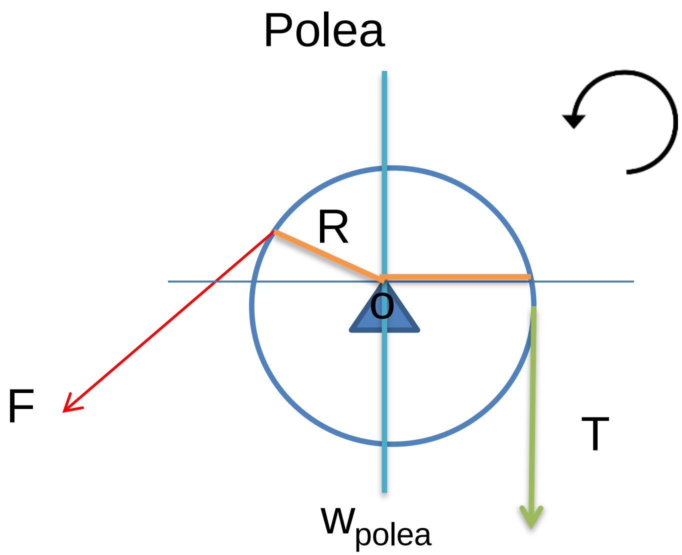


$$\sum F = m_p . a$$

$$T - w = m_p . (-a)$$

$$T = w - m . a$$

$$T = \ldots\ldots\ N$$



$$\tau_0 = I.\alpha$$

$$F \,.\, R \;-\; T \,.\, R \;=\; I \;\alpha$$

$$\alpha = a \,/\, R$$

$$F \,.\, R \;-\; T \,.\, R \;=\; I \;\frac{a}{R}$$

$$F = \frac{[I \;\; a/R \;+\; T \,.\, R\,]}{R}$$

F = ……..N

b) El trabajo que debe realizar una persona en el extremo A de la cuerda.

$$W_p = F.\ d$$

8 m

Calculamos en el punto anterior

$a = -v_0 / t$

Sabiendo el tiempo, calculo la aceleración

$T = w + m_c \cdot a$

c) Hallar las aceleraciones del sistema

$a = \ldots.\ m/s^2$

$\alpha = a / R$

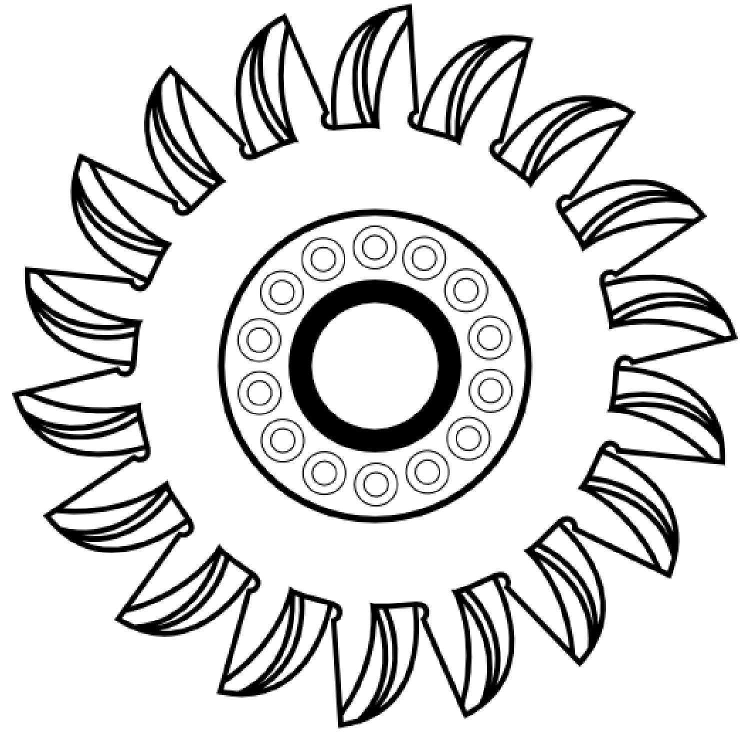
$\alpha = \ldots\ldots..\ 1/s^2$

Ejercicio N°14

Una rueda grande de turbina pesa 120 kg y tiene un radio de 1 m. Un momento de torsión friccional de 80 Nm se opone a la rotación del eje.

a) ¿Qué momento de torsión se deberá aplicar para acelerar la rueda de manera tal que partiendo del reposo alcance una velocidad de 300 rpm en 10 s?

b) Hallar el trabajo realizado por el torque en los 10 segundos que se aplica el mismo.



$$+\ \tau_{neto} = I.\alpha$$

$$\tau_{fr} + \tau = I\ \alpha$$

a) ¿Qué momento de torsión se deberá aplicar para acelerar la rueda de manera tal que partiendo del reposo alcance una velocidad de 300 rpm en 10 s?

$$\circlearrowleft + \quad \tau_{neto} = I.\alpha$$

$$I = ½\, M\, R^2$$

$$\tau_{fr} + \tau = I\, \alpha$$

$$\omega_f = \cancel{\omega_0} + \alpha\, t$$

$$-\, 80\ Nm + \tau = ½\, M\, R^2\, \alpha$$

$$\omega_f / t = \alpha$$

$$\tau = ½\, M\, R^2\, (\omega_f / t) + 80\ Nm$$

b) Hallar el trabajo realizado por el torque en los 10 segundos que se aplica el mismo.

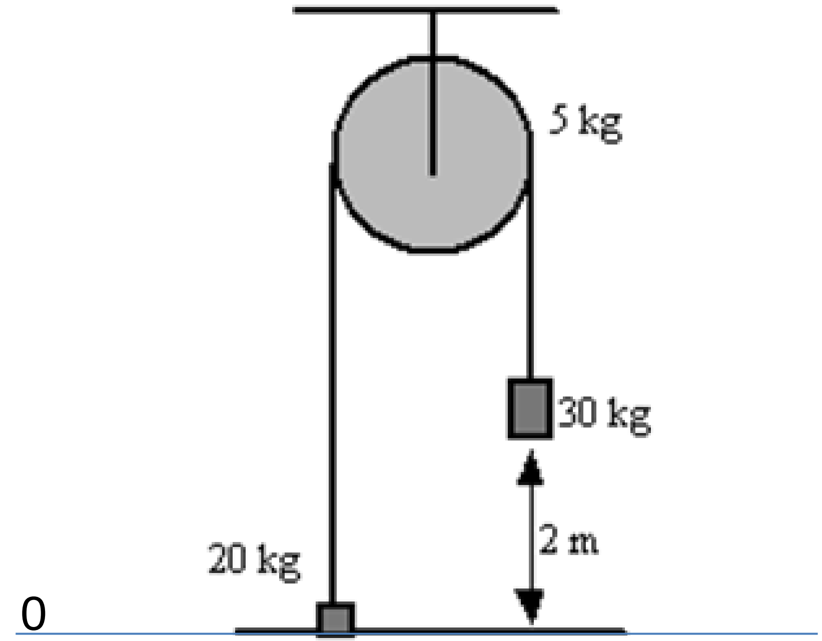
$$W = \tau \ \theta$$

Calculamos en el punto anterior

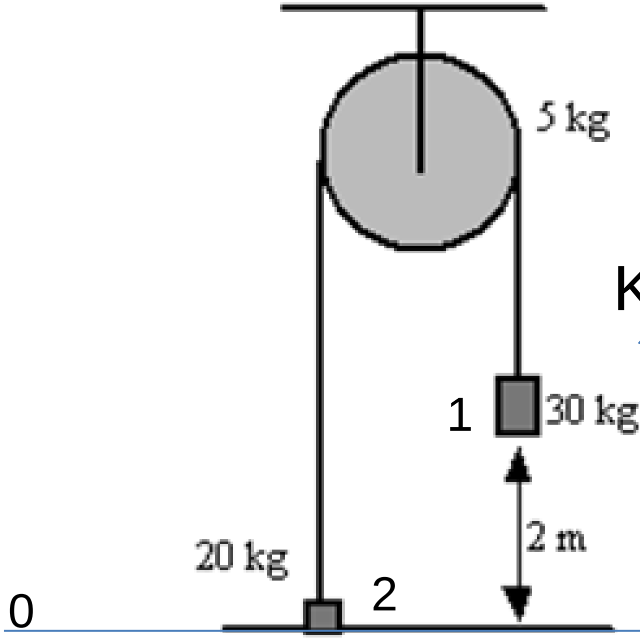
$$\theta = \cancel{\theta_0} + \cancel{\omega_0 \,.\, t_f} + ½ \,.\, \alpha \,.\, t^2$$

Ejercicio Nº 15

El sistema de la figura está inicialmente en reposo. El bloque de 30 kg masa está a 2 m del suelo. La polea ($I=\frac{1}{2}MR^2$) es un disco uniforme de 20 cm de diámetro y 5 kg de masa. Se supone que la cuerda no resbala sobre la polea.
Encontrar por energía:
A) la velocidad del bloque de 30 kg justo antes de tocar el suelo,
B) a velocidad angular de la polea en ese instante.
C) Determinar las tensiones de la cuerda.



A) la velocidad del bloque de 30 kg justo antes de tocar el suelo



$$E_o = E_f$$

$$\cancel{K_{01}} + U_{01} + \cancel{K_{02}} + \cancel{U_{02}} = K_{f1} + U_{f2} + K_{f2} + U_{f2}$$

$$U_{01} = K_{f1} + U_{f1} + K_{f2} + U_{f2}$$

$$m_1gh = \tfrac{1}{2} m_1v_f^2 + \tfrac{1}{2} m_2v_f^2 + m_2gh + \tfrac{1}{2} I\,\omega^2$$

$$m_1gh - m_2gh = \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2)\, v_f^2 + \tfrac{1}{2} I\,\omega^2$$

$$(m_1 - m_2)gh = \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2)\, v_f^2 + \tfrac{1}{2} I\,\omega^2$$

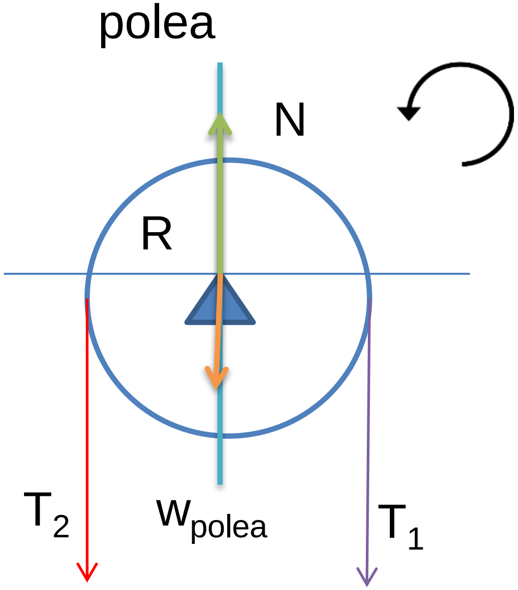
$$(m_1 - m_2)gh = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

$$\frac{(m_1 - m_2)gh - \tfrac{1}{2} I \omega^2}{\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)} = v_f^2 \Rightarrow v_f^2 = \ldots\ldots m/s$$

B) a velocidad angular de la polea en ese instante.

$$\omega = v_f / R$$

C) Determinar las tensiones de la cuerda.



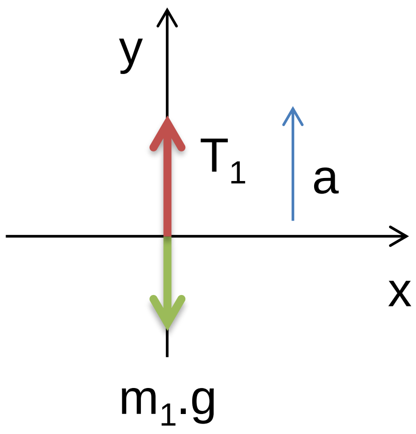
$$\tau_{neto} = I.\alpha$$

$$-T_1 . R + T_2 . R = I \alpha$$

¿? ¿?

$\alpha = a / R$

Masa 1

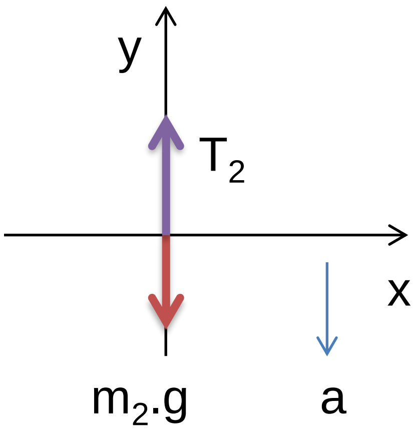


$$\sum F_y = m_1 .\ a$$

$$T_1 - w_1 = m_1 .\ a$$

$$T_1 = w_1 + m_p \ .\ a$$

Masa 2



$$\sum F_y = m_2 .\ a$$

$$T_2 - w_2 = m_2 .\ (-a)$$

$$T_2 = w_2 - m_2 \ .\ a$$

$$-T_1 \, . \, R + T_2 \, . \, R = I \;\alpha$$

$$\alpha = a / R$$

$$T_1 = \underbrace{w_1 + m_p \, . \, a}$$

$$T_2 = \underbrace{w_2 - m_2 \, . \, a}$$

$$-(w_1 + m_p \;\, a) \;\; R + (w_2 - m_2 \;\, a \,) \, .R = I \;\, (a/R)$$

$$-(w_1 + m_p \, . \, a) \, R^2 + (w_2 - m_2 \;\, a \,) \;\, R^2 = I \, a$$

$$-w_1 \;\, R^2 + w_2 \;\, R^2 = I \, a + m_1 \;\, a \;\, R^2 + m_2 \;\, a \, R^2$$

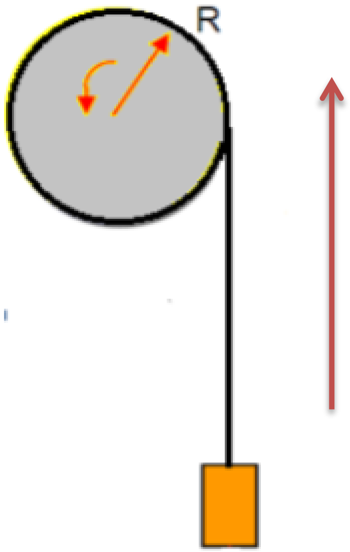
$$-w_1 \;\, R^2 + w_2 \;\, R^2 = a \, (I + m_1 \, R^2 + m_2 \;\, R^2 \,)$$

Puedo calcular las tensiones de los DCL de las cuerpos 1 y 2

$$a = \frac{-w_1 \;\, R^2 + w_2 \;\, R^2}{(I + m_1 \, R^2 + m_2 \;\, R^2 \,)}$$

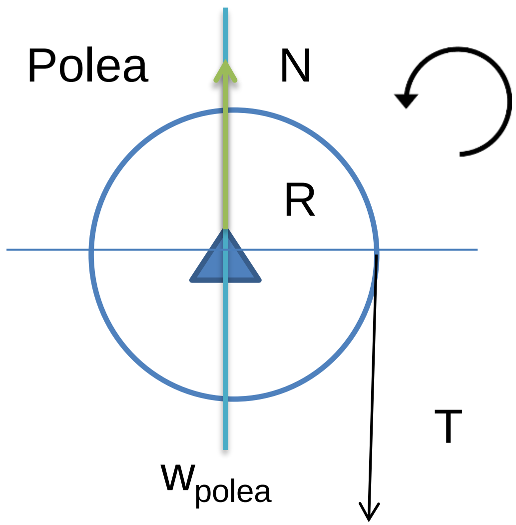
Ejercicio Nº 16

En cierto instante el bloque que se muestra en la figura, es tirado hacia arriba con una velocidad de 2,0 m/s. El bloque logra subir una distancia de 50 cm antes de detenerse. El radio del cuerpo que estira el bloque es de 0,4 m. Además se sabe que el bloque pesa 10 N.



a) Determinar el valor del momento de inercia del cuerpo cilíndrico donde se enrolla la cuerda.
b) Realizar los diagramas de cuerpo libre del sistema y determinar la tensión en la cuerda.
c) Hallar las aceleraciones del sistema

a) Determinar el valor del **momento de inercia** del cuerpo cilíndrico donde se enrolla la cuerda.



N y w_{polea} no producen torque

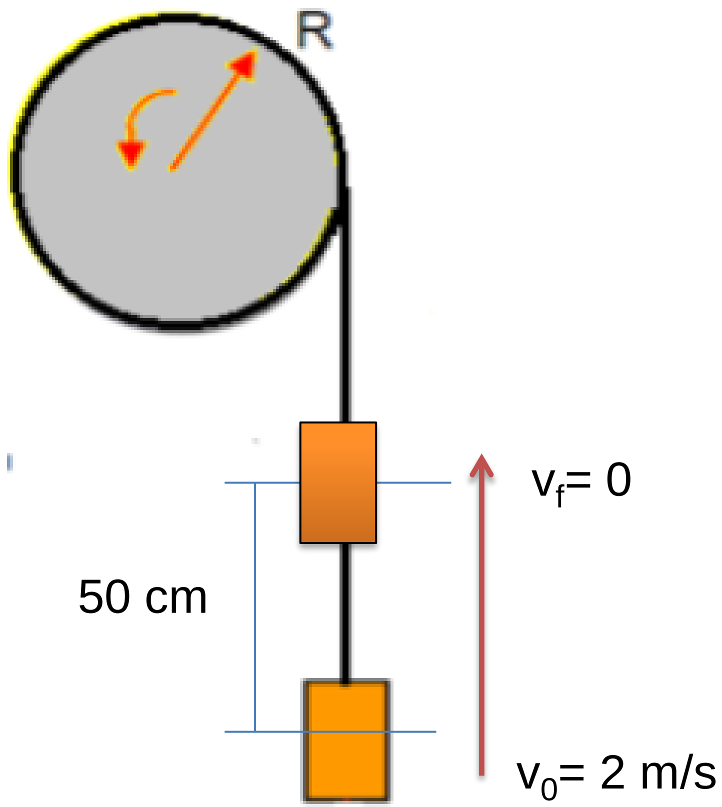
$$\tau_{neto} = I.\alpha$$

$$-T \, . \, R = \boxed{I} \, \alpha$$

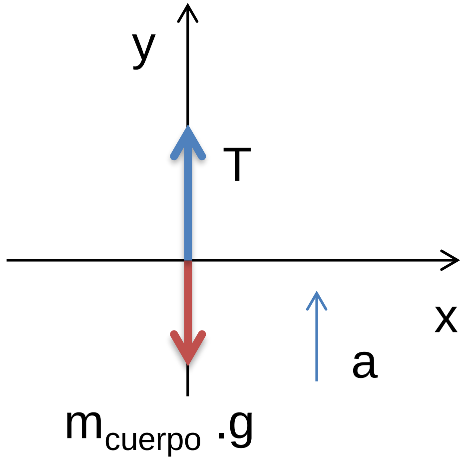
¿? ¿?

$$\alpha = a / R$$

b) Realizar los diagramas de cuerpo libre del sistema y determinar la **tensión** en la cuerda.



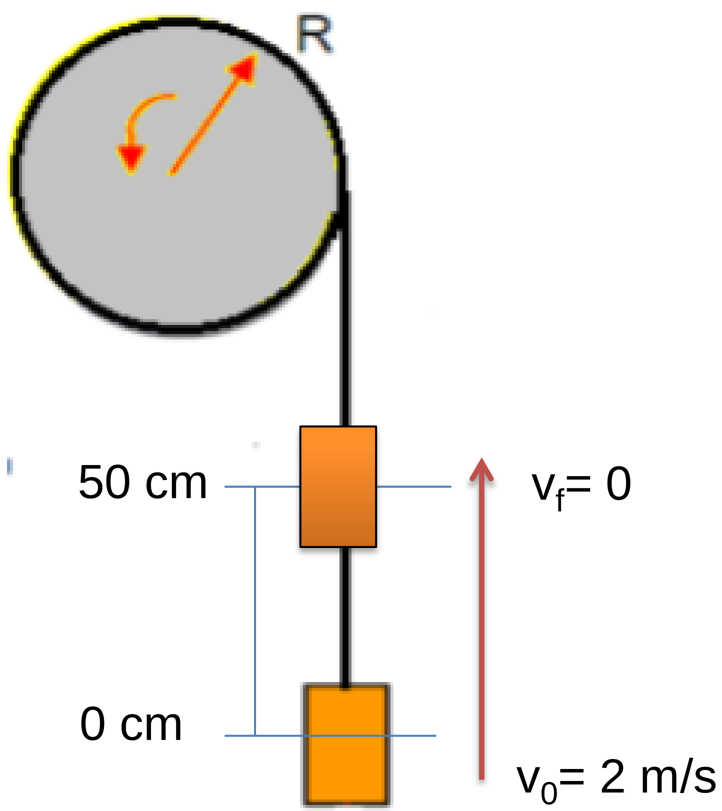
Cuerpo



$$\sum F = m_c .\ a$$

$$T - w = m_c .\ a$$

$$T = w + m_c .\ a$$



$$\cancel{v_f} = v_0 + a\,t$$

$$0 = v_0 + a\,t \Rightarrow a = -\underbrace{v_0 / t}$$

$$y = \cancel{y_o} + v_o\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2$$

$$y = v_o\,t + \tfrac{1}{2}\,(-v_o/\cancel{t})\,t^{\cancel{2}}$$

$$y = v_o\,t - \tfrac{1}{2}\,v_o\,t$$

$$y = \tfrac{1}{2}\,v_o\,t$$

Despejo

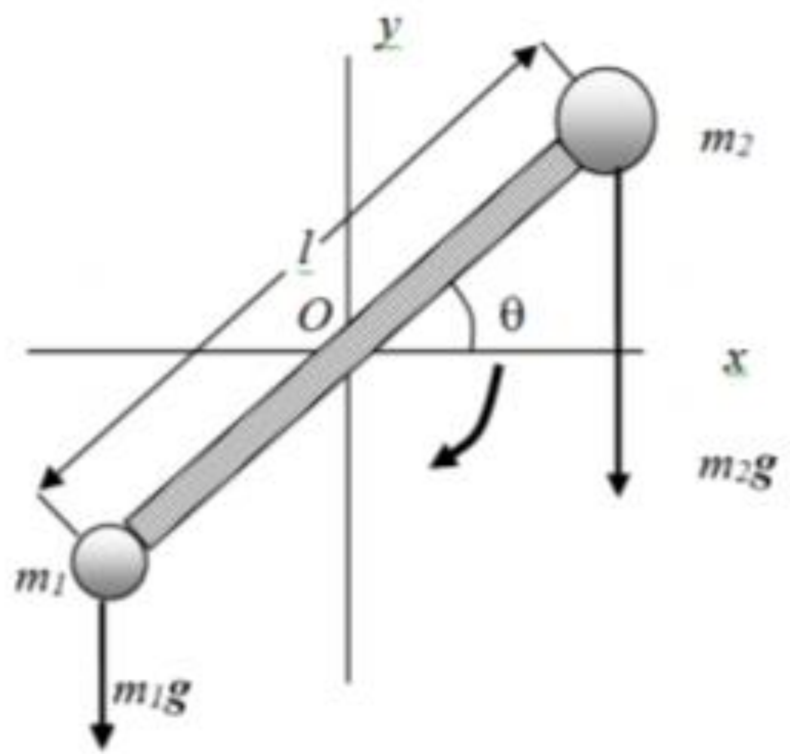
Ejercicio Nº 17

Una barra rígida de masa M=2 kg y longitud l = 0,5m, gira en un plano vertical respecto a un pivote que pasa por su centro (ver figura). Se unen dos partículas de masa m_1=500g y m_2=1kg en los extremos de la barra.

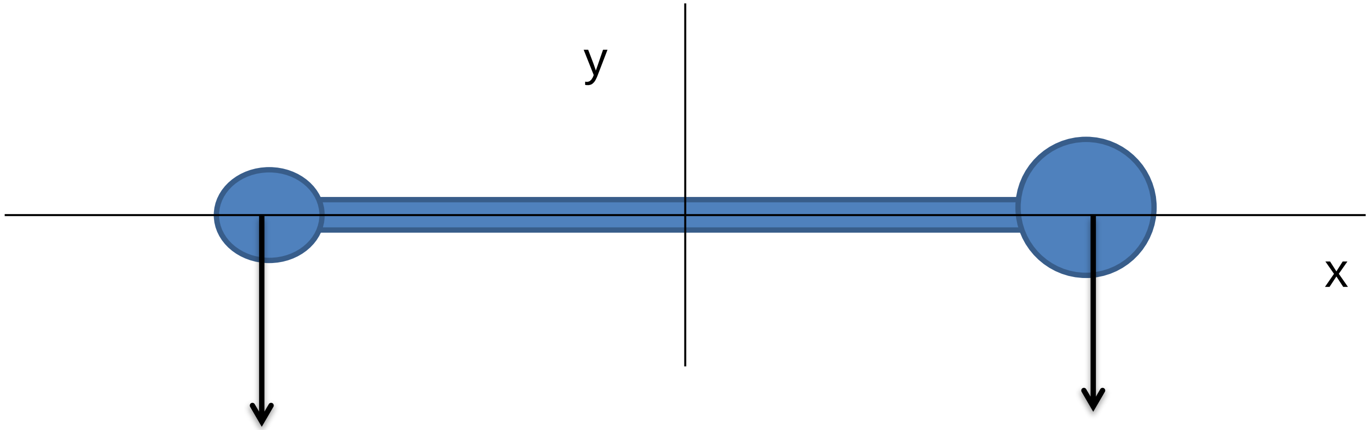
Determinar:

a) El torque neto que actúa sobre el sistema cuando la barra se encuentra en posición horizontal.

b) La aceleración angular cuando la barra se encuentra en posición horizontal.



a) El torque neto que actúa sobre el sistema cuando la barra se encuentra en posición horizontal.



$$\tau_{neto} = I.\alpha$$

$$\tau_{neto} = \tau_1 + \tau_2$$

$+$ $\tau_1 = w_1 \, . \, (L/2)$

$+$ $\tau_2 = - \, w_2 \, (L/2)$

$$\tau_{neto} = I . \alpha \longrightarrow \text{Despejo}$$

$$\alpha = \ldots\ldots\ldots \; 1/s^2$$

b)

a)

$$\underbrace{w_1 . (L/2) - w_2 (L/2)}_{} = I . \alpha$$

$$I = \underbrace{1/12 \, M_{barra} L^2 + m_1 (L/2)^2 + m_2 (L/2)^2}_{L^2/4 \, (M/3 + m_1 + m_2)}$$