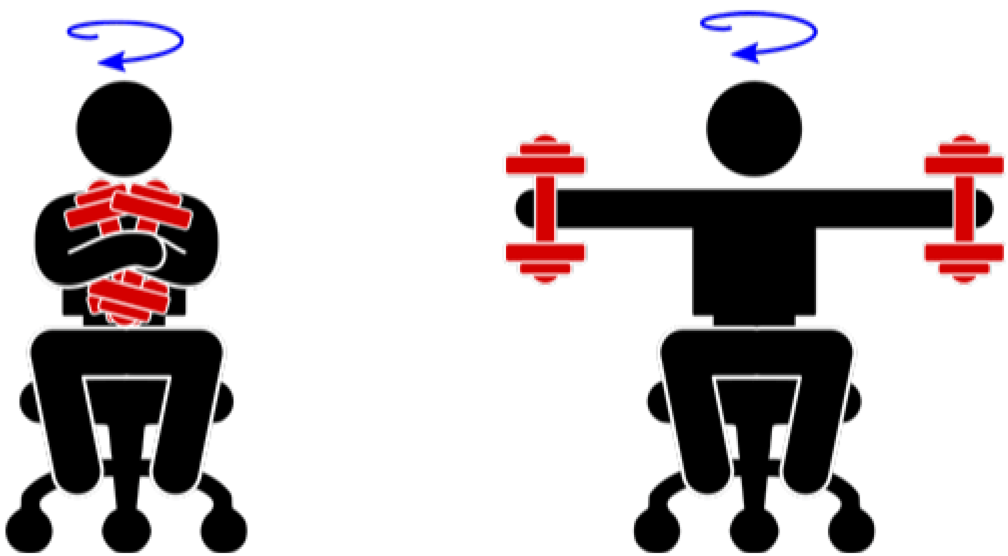
Facultad de Ingeniería
OBERA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

# Física Mecánica
# Energía cinética rotacional e Inercia



| Tema | Capítulo del libro |
| --- | --- |
| Dinámica de Rotación | Capitulo 10: Dinámica del Movimiento de Rotación |

# Energía cinética rotacional e Inercia

## Cuerpo rígido (CR) en rotación → Energía cinética

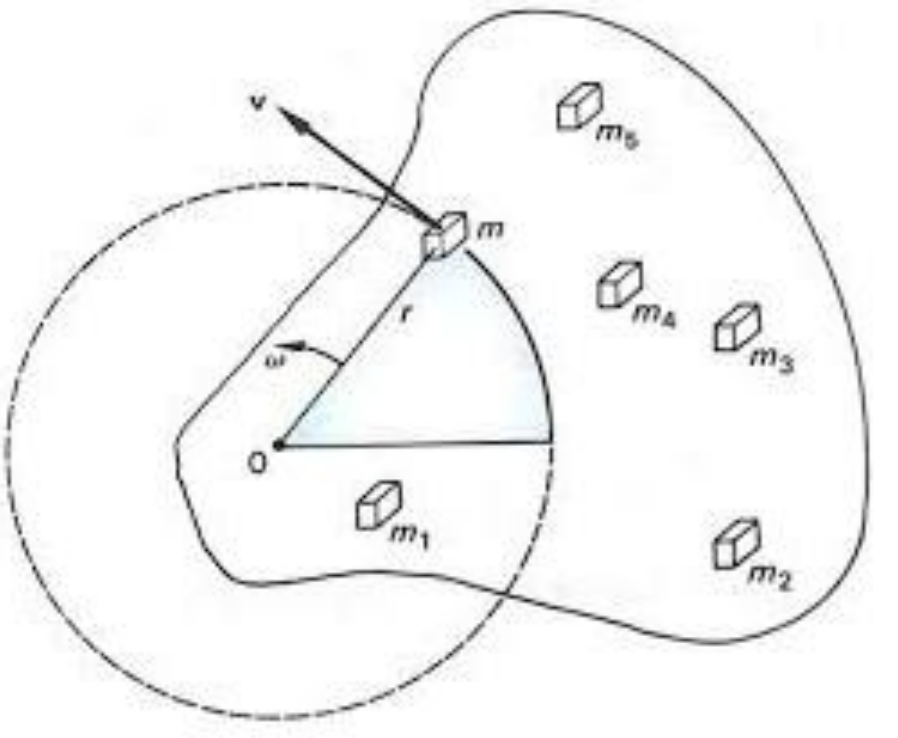
Consideraciones para el análisis:

Eje fijo de rotación.

Consideramos al CR formado pequeñas partículas de masas $m_1$, $m_2$, …….., $m_{i.}$

Las partículas están a una distancia $r_1$, $r_2$ …..$r_i$ del eje de rotación.

Las velocidades de las partículas serán $v_1$, $v_2$,…..$v_i$



# Energía cinética rotacional

Cada "paquete" de masa $m_i$ tiene velocidad $v_i$

$v_i=\omega.r_i$ $\rightarrow$ $K_i=1/2.m_i.v_i^2=1/2.m_i.r_i^2.\omega^2$

K de todo el cuerpo rígido:

$$K=1/2.m_1.v_1^2+1/2.m_2.v_2^2+.......=\Sigma 1/2.m_i.r_i^2.\omega^2$$

# Energía cinética rotacional

$$K = \sum 1/2 . m_i . r_i^2 . \omega^2 = 1/2 . \omega^2 . \sum m_i . r_i^2$$

Momento de Inercia (I)

$$\boxed{I^o = \sum m_i . r_i^2}$$

Análisis de unidades: $kg.m^2$

# Energía cinética rotacional

Energía Cinética Rotacional:

$$\boxed{K = 1/2 . I . \omega^2}$$

Análisis de unidades: $kg.m^2.1/s^2 = N.m = J$

# Momento de Inercia

**Momento de Inercia: $I = \Sigma m_i . r_i^2$**

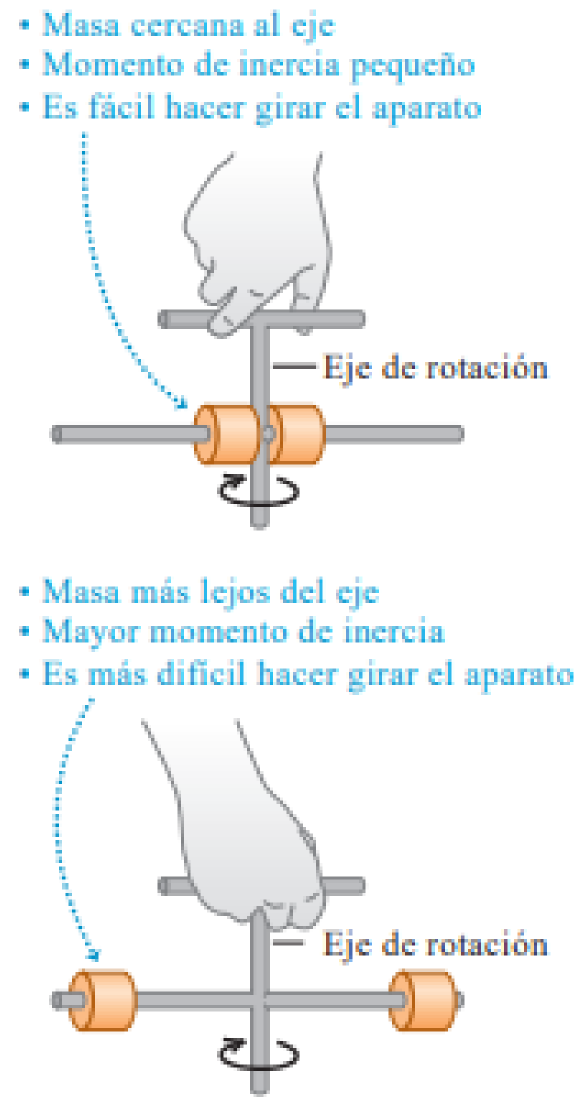
Es una medida de la resistencia de un cuerpo a experimentar cambios en su movimiento de rotación.

Depende de la distribución de masa respecto al eje considerado.

Cuanto mayor es I mas difícil es poner a girar un cuerpo.

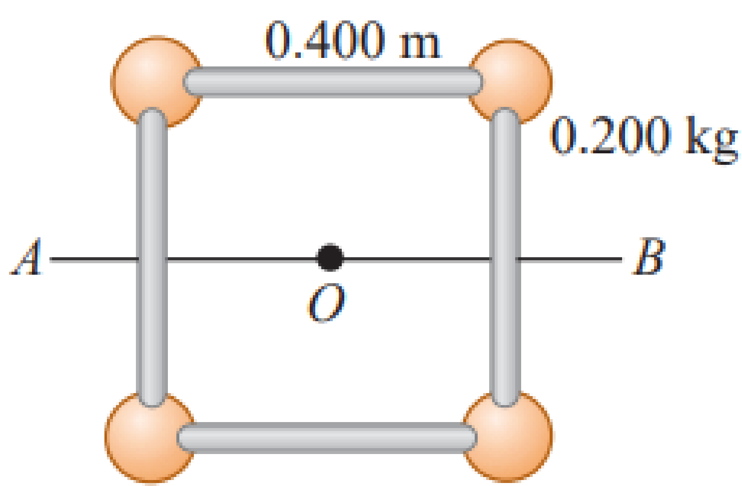
Cuanto mayor es I mas difícil es detener un cuerpo en rotación.

Aparato que gira libremente en torno a un eje vertical. El momento de inercia se puede variar fijando los dos cilindros de igual masa en diferentes posiciones sobre la varilla horizontal.



# Momento de Inercia

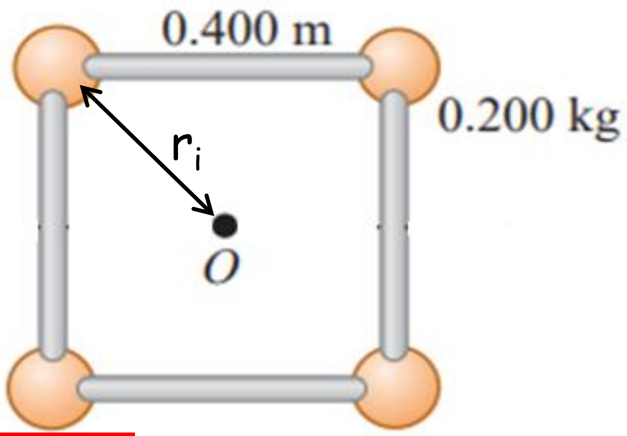
1) Cuatro esferas pequeñas, que pueden considerarse como puntos con masa de 0,2kg c/u, están colocadas en un cuadrado de 0,4m de lado, conectadas por varillas muy ligeras (figura). Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje: a) que pasa por el centro del cuadrado, perpendicular a su plano (que pasa por O en la figura); b) que divide dos lados opuestos del cuadrado (a lo largo de la línea AB en la figura); c) que pasa por los centros de las esferas superior izquierda e inferior derecha y por el punto O.



# Momento de Inercia

a) $I^{o}=\Sigma m_i.r_i^2$

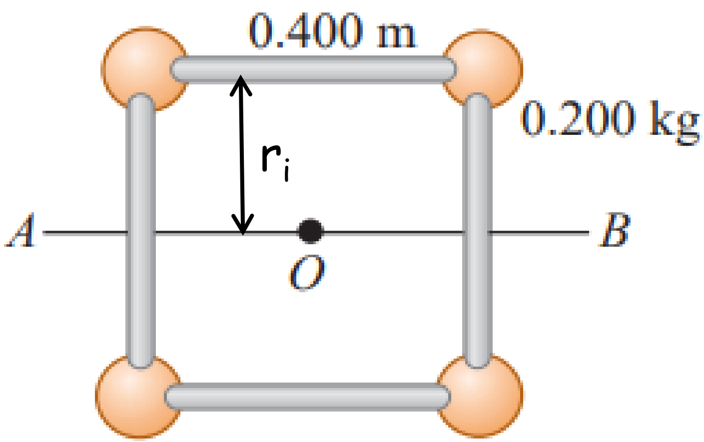
$r_i= \sqrt{(0{,}2m)^2+(0{,}2m)^2} = 0{,}28m$




$I^{o}=0{,}2kg.(0{,}28m)^2+0{,}2kg.(0{,}28m)^2+$
$+0{,}2kg.(0{,}28m)^2+0{,}2kg.(0{,}28m)^2$

$I^{o}=4.\ 0{,}2kg.\ (0{,}28m)^2 \rightarrow$ $\boxed{I^{o}=0{,}063kgm^2}$

b) $I^{AB}=\Sigma m_i.r_i^2 \quad r_i=0{,}2m$




$I^{AB}= 4\ .\ 0{,}2kg\ .\ (0{,}2m)^2$

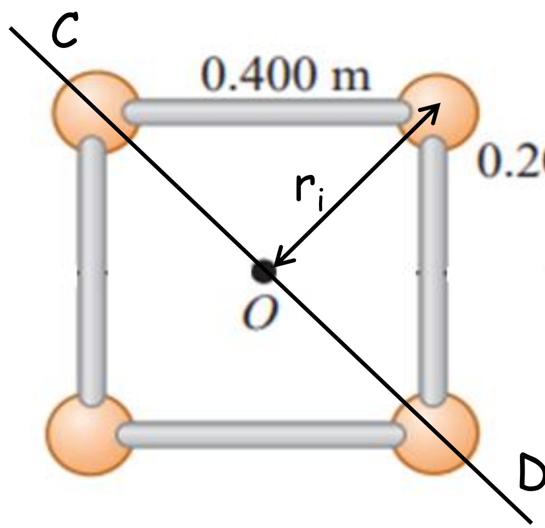
$\boxed{I^{AB}=0{,}032kgm^2}$

# Momento de Inercia

c) $I^{CD} = \Sigma m_i . r_i^2$ $r_i = 0,28m$

$I^{AB} = 2.\ 0,2kg.\ (0,28m)^2 + 2.0,2kg.\ (0m)^2$

$\boxed{I^{CD} = 0,031 kgm^2}$




¿Con respecto a cual de los ejes (O; AB; CD) se necesita menor esfuerzo para hacer girar este sistema de partículas?

# Momento de Inercia

En el caso de un cuerpo rígido cuya distribución de masa es continua y no se puede representar por masas puntuales, para calcular el momento de inercia la sumatoria ($\Sigma$) se convierte en integración ($\int$).

$$I = \Sigma m_i . r_i^2 \qquad \rightarrow \qquad I = \int r^2 . \, dm$$

# Momento de Inercia

Ya hemos visto como calcular el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje.

Pero, **un cuerpo no tiene un único momento de inercia** sino que hay infinita cantidad de ejes respecto a los cuales un cuerpo podría girar. En cada caso el momento de inercia del cuerpo sería distinto.

Ahora vamos a ver como relacionar momentos de inercia calculados respecto a distintos ejes, para el caso que estos ejes sean paralelos.

# Momento de Inercia

## Teorema de los ejes paralelos (Teorema de Steiner)

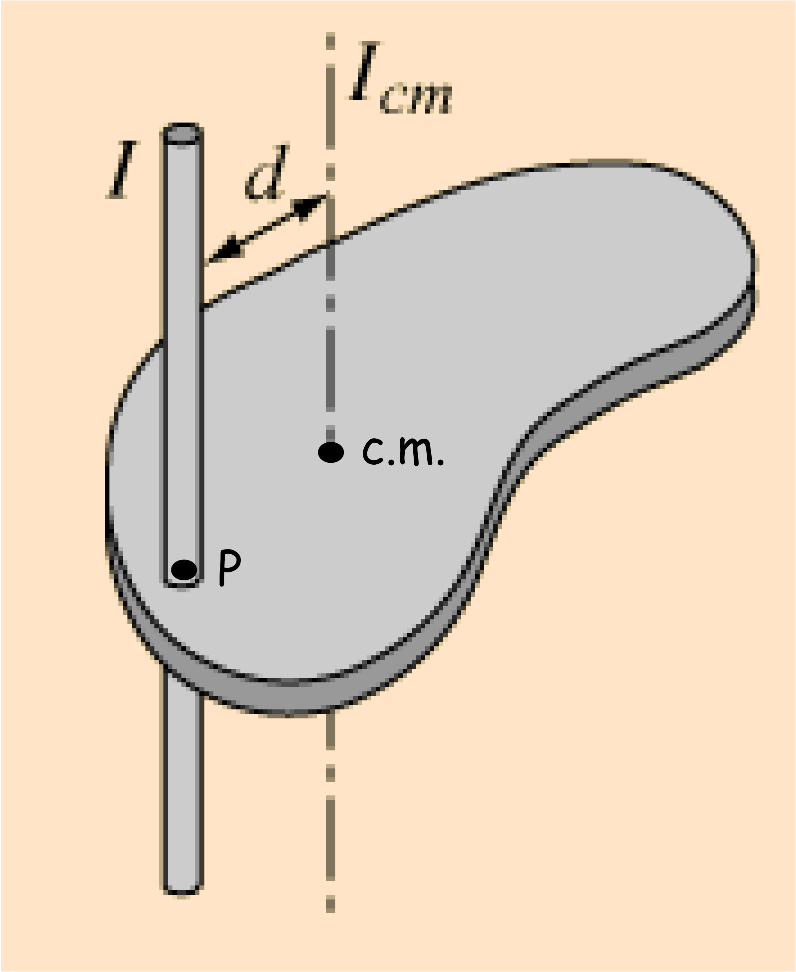
Este teorema dice que: El momento de inercia de un cuerpo (o sistema) respecto a cualquier eje es igual al momento de inercia del cuerpo respecto a un eje paralelo al primero, que pase por el centro de masa (c.m.) más el producto de la masa del cuerpo por la distancia, al cuadrado, que separa ambos ejes.

$$\boxed{I = I^{CM} + M.d^2}$$

*M: masa total del cuerpo.

# Momento de Inercia

$$\boxed{I^P = I^{CM} + M.d^2}$$



# Momento de Inercia
## *Teorema de Steiner – Demostración*

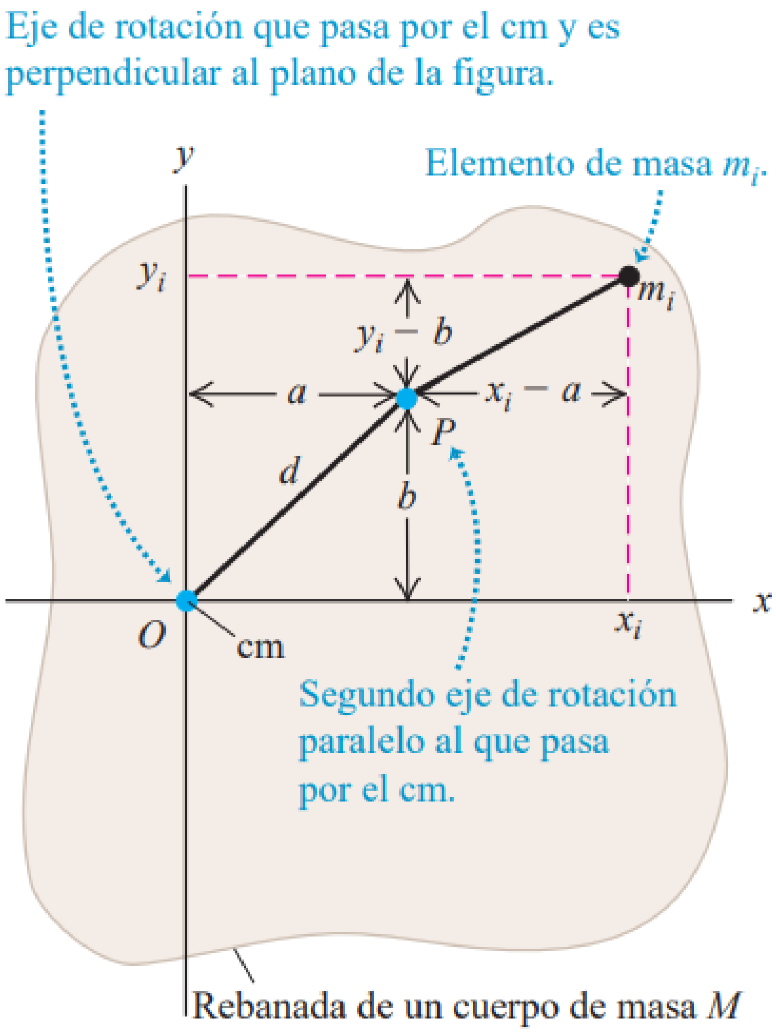
*Como dijimos, un cuerpo NO tiene UN UNICO momento de inercia, sino que estos pueden ser infinitos. Cada uno de ellos esta relacionado a un eje respecto del cual se calcula el momento de inercia.*

# Momento de Inercia
## *Teorema de Steiner - Demostración*

Vamos a demostrar esta relación:

$$I^P = I^{CM} + M.d^2$$

Para ello consideramos un cuerpo de masa M, del cual tomamos para el análisis una “rebanada” muy delgada, paralela al plano x-y y perpendicular al eje z.



# Momento de Inercia

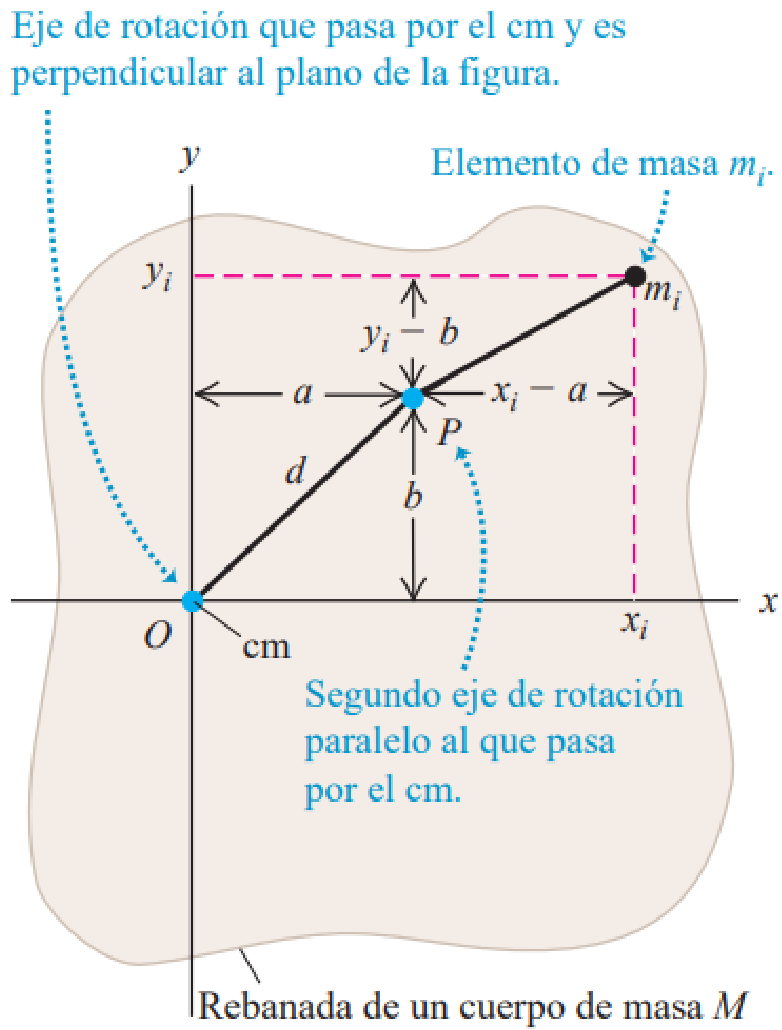
## Teorema de Steiner - Demostración

1) Consideramos dos ejes paralelos al eje z: uno pasa por el centro de masa, y el otro por un punto P.

2) Tomamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro de masa del cuerpo; así, las coordenadas del centro de masa son $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$.

3) El eje que pasa por el centro de masa atraviesa esta rebanada delgada en el punto O, y el eje paralelo la atraviesa en el punto P, cuyas coordenadas x e y son (a; b).

4) La distancia entre los dos ejes es d, donde $d^2 = a^2 + b^2$.



# Momento de Inercia
## *Teorema de Steiner - Demostración*

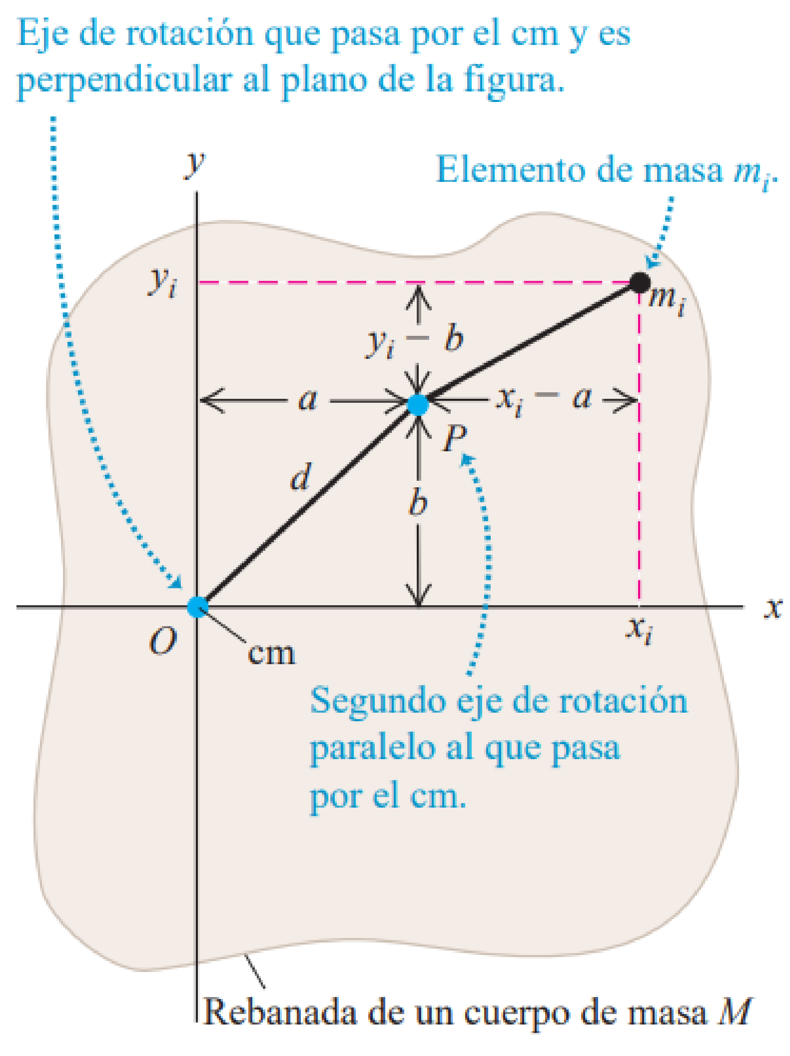
5) Considero un elemento de masa mi de la rebanada, con coordenadas ($x_i$, $y_i$, $z_i$).

6) Entonces, el momento de inercia $I^{cm}$ de la rebanada (o sea respecto del eje O que pasa por el centro de masa) es:

$$I^{CM} = \Sigma m_i . (x_i^2 + y_i^2)$$

7) De igual modo el momento de inercia de la rebanada alrededor del eje que pasa por P es:

$$I^P = \Sigma m_i . [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$



# Momento de Inercia

## *Teorema de Steiner - Demostración*

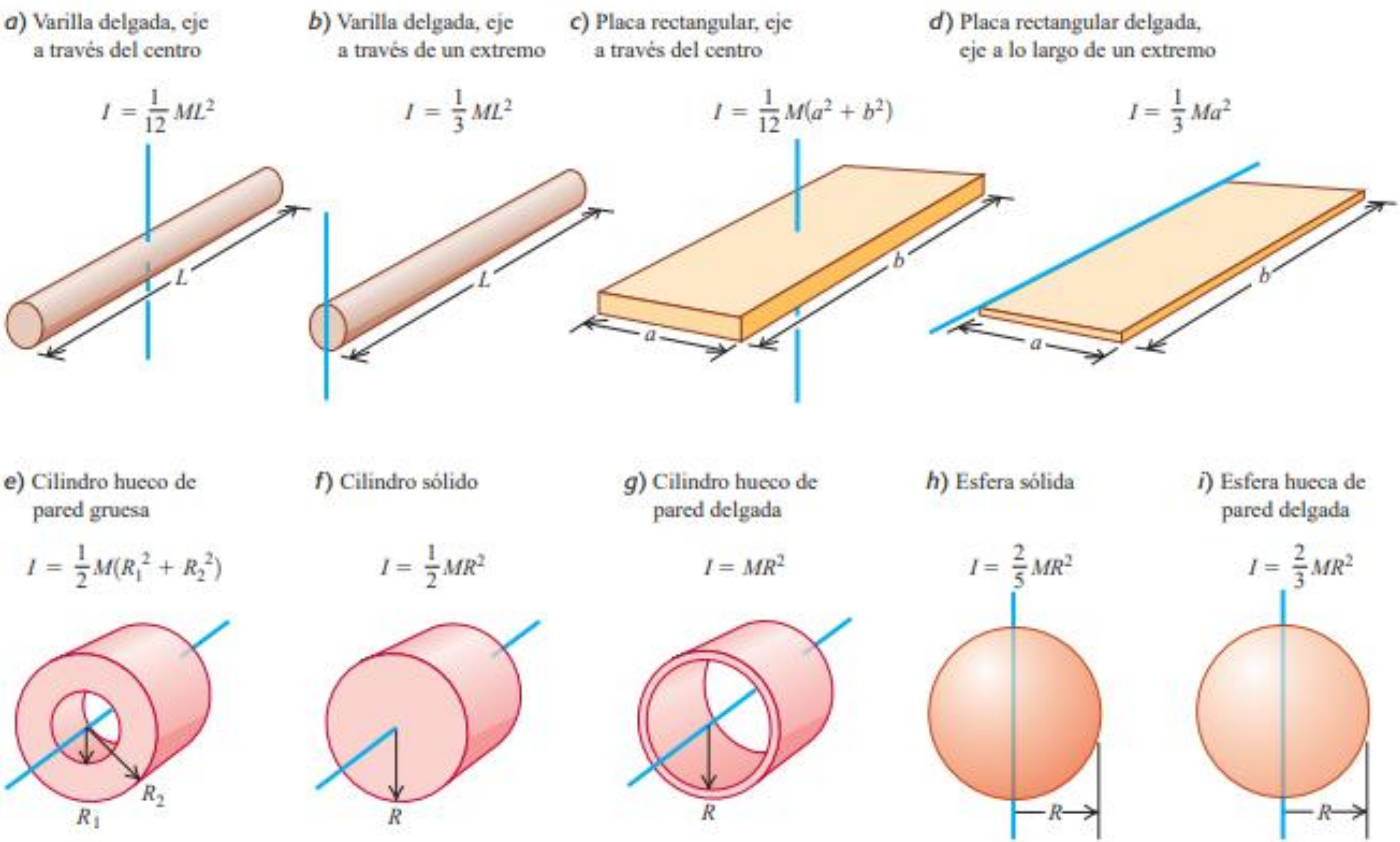
8) Operando y reagrupando $I^P$, obtenemos:

$$I^P = \underbrace{\Sigma m_i.\,(x_i^{\,2}+y_i^{\,2})}_{I^{CM}} - 2a.\,\Sigma m_i.\,x_i - 2b.\,\Sigma m_i.\,y_i + \underbrace{(a^2+b^2)}_{d^2}.\,\underbrace{\Sigma m_i}_{M}$$

$$\boxed{=0}$$

* Las $\Sigma m_i.\ x_i$ y $\Sigma m_i.\ y_i$ son iguales a cero porque están referidas al CM, por lo tanto los productos $m_i.x_i$ ó $m_i.y_i$ están equilibrados a uno y otro lado del CM y se cancelan.

# Momento de Inercia

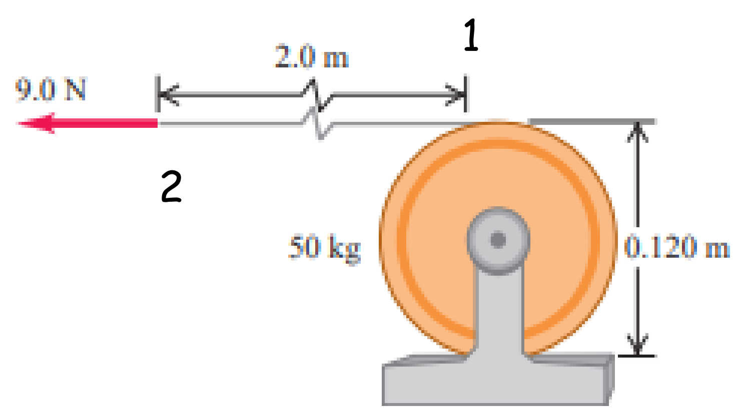


# Energía cinética rotacional

3) Un cable ligero, y que no se estira, se enrolla alrededor de un cilindro sólido con masa de 50 kg y 0,12 m de diámetro, que gira alrededor de un eje fijo horizontal y está montado en cojinetes sin fricción (figura). Una fuerza constante de 9,0 N tira del extremo libre del cable una distancia de 2,0 m, haciendo girar el cilindro conforme se desenrolla sin resbalar. Si el cilindro está inicialmente en reposo, calcule:

a) la rapidez angular final (ω) del cilindro.

b) la rapidez final (v) del cable.



# Energía cinética rotacional

a) y b) Podemos resolver este ejercicio empleando los conceptos del teorema de Trabajo y Energía.

$$W_{neto} = \Delta K = K_2 - K_1$$

El cable es de masa despreciable, por lo tanto nuestro sistema se simplifica a la polea, la cual adquiere energía cinética rotacional.

$$W_{neto}=F.d.\cos 0° \qquad K=1/2.I.\omega^2$$

Inicialmente la polea esta en reposo: $K_1=0$; $K_2=1/2.I.\omega_2^{\,2}$

# Energía cinética rotacional

Necesitamos calcular I respecto del eje de giro de la polea. Para ello consideramos la polea como un cilindro sólido y obtenemos I de tabla.

$$I=1/2.m.r^2$$

$$I=1/2.\ 50kg.\ (0{,}06m)^2 = 0{,}09kgm^2$$

$$F.\ d= 1/2.\ I.\ \omega_2{}^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2.F.d}{I}} = \sqrt{\frac{2.\ 9N.\ 2m}{0{,}09kgm}}$$

$\omega=$ ……… $\rightarrow$ $v=\omega.r=$………


¡Vamos a practicar!

# Ejercicio 3

Una pieza de un acoplamiento mecánico, como se observa en la figura, tiene una masa de 3,6 kg. Medimos su momento de inercia alrededor de un eje que pasa a 0,15 m de su centro de masa y obtenemos Ip = 0,132 kg.m2. Calcular el momento de inercia $I_{cm}$ respecto de un eje paralelo que pasa por el centro de masa.

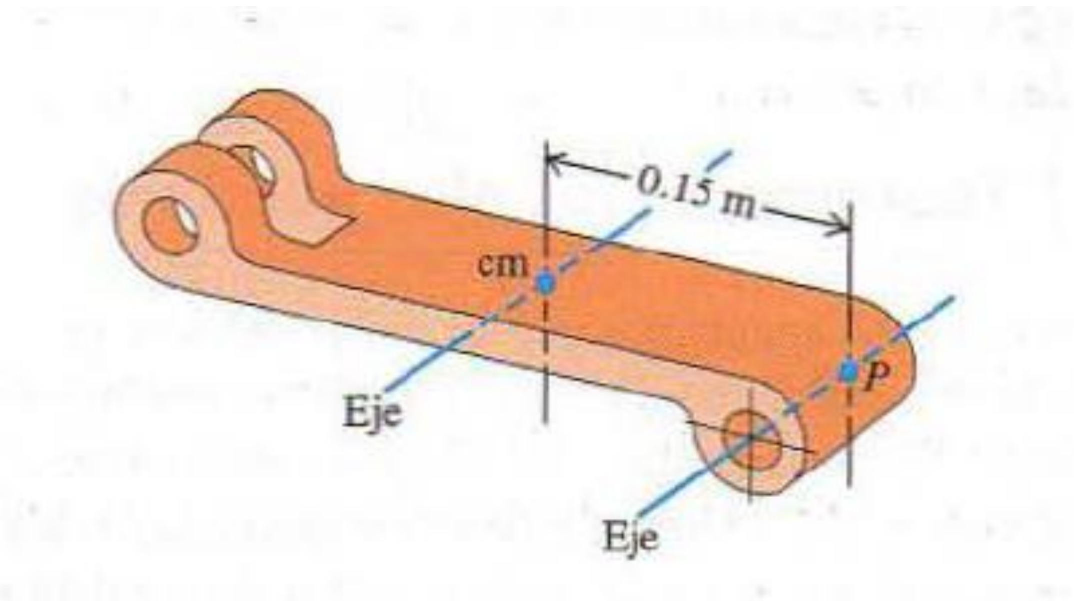
$$\boxed{I_P = I_{CM} + M.d^2}$$

0,132 kg m2

¿?

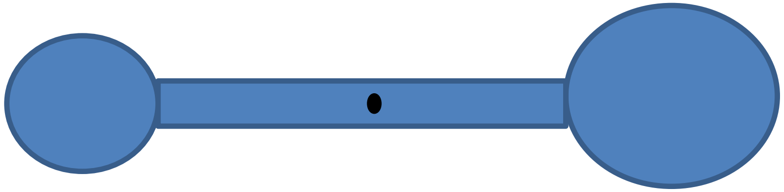
3,6 kg

0,15 m



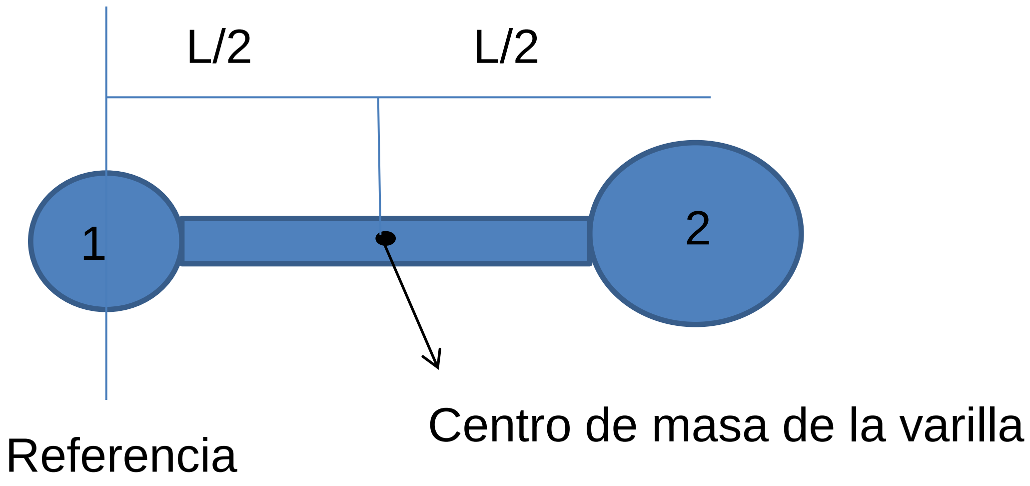
## Ejercicio N° 4

Utilizando el Teorema de Steiner, determinar los momentos de inercia baricéntricos del sistema indicado en el esquema, sabiendo que las dos masas de los extremos se consideran como puntuales y se encuentran unidas por una varilla de 1 m de longitud cuyo momento de inercia baricéntrico vale $I_0 = 0{,}1$ kg m$^2$. Cada una de las masa vale 3 kg y 4 kg.



1° Calcular el CM del sistema (baricentro)

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{m_{\mathrm{total}}}$$




$$X_{CM} = \frac{\cancel{M_1 x_1} + M_{varilla}\, L/2 + M_2\, L}{M_1 + M_{varilla} + M_2}$$

$$\Downarrow$$

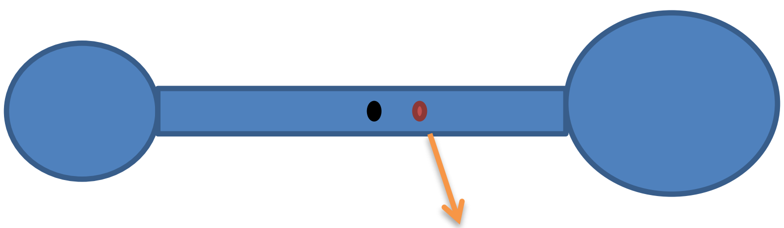
¿?

$$I_{varilla} = 1/12\, M\, L^2$$

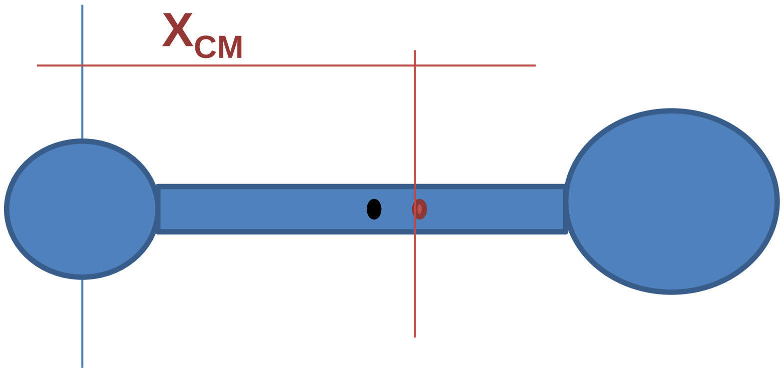
$0{,}1\ kg\ m^2$ Despejo 1 m

$$M_{\ varilla} = \ldots\ldots\ kg$$

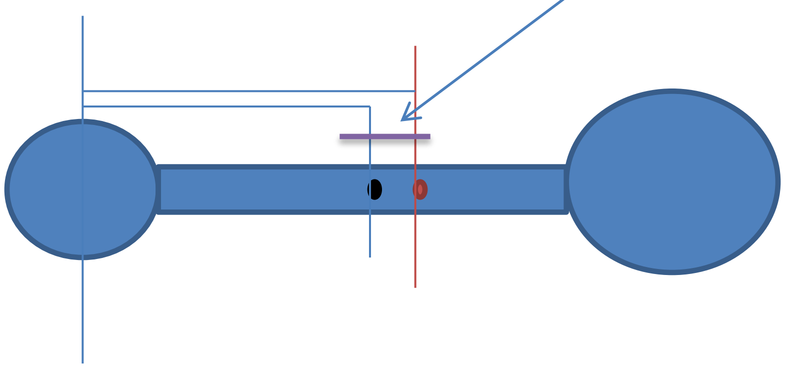
$$X_{CM} = \frac{\cancel{M_1 x_1} + M_{varilla}\, L/2 + M_2\, L}{M_1 + M_{varilla} + M_2} \Rightarrow X_{CM} = \ldots..\ m$$

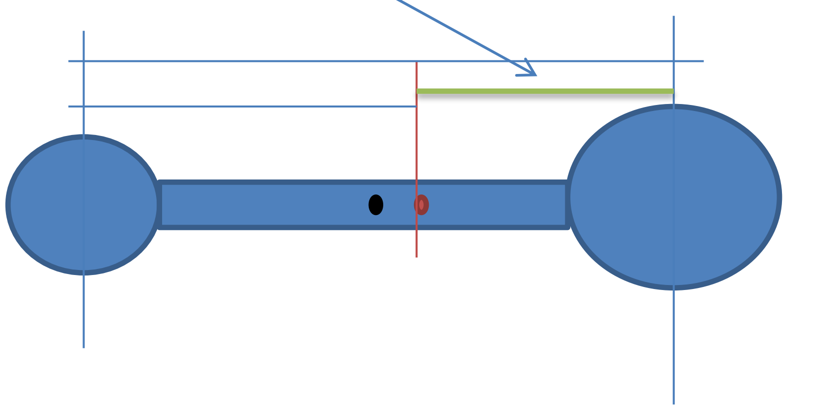


Centro de masa del sistema



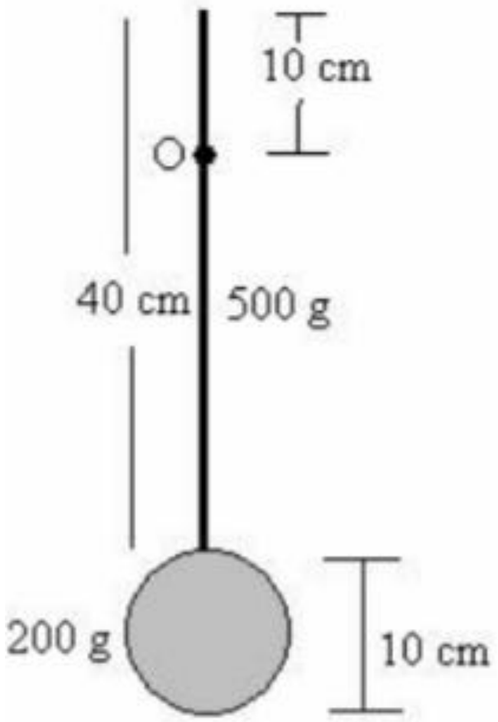

$$I^0_{CM} = M_1\,(X_{CM})^2 + I_{varilla} + M_{varilla}\,\underbrace{(X_{CM} - L/2)^2} + M_2\,\underbrace{(L - X_{CM})^2} = \ldots\ldots\ \mathrm{kg\ m^2}$$





**Ejercicio Nº 5**

El péndulo de un reloj está formado por una varilla de 500 g y 40 cm de longitud y una lenteja de forma esférica de 200 g de masa y 5 cm de radio, tal como se indica en la figura. El punto de suspensión O está a 10 cm del extremo de la varilla.




Calcular:

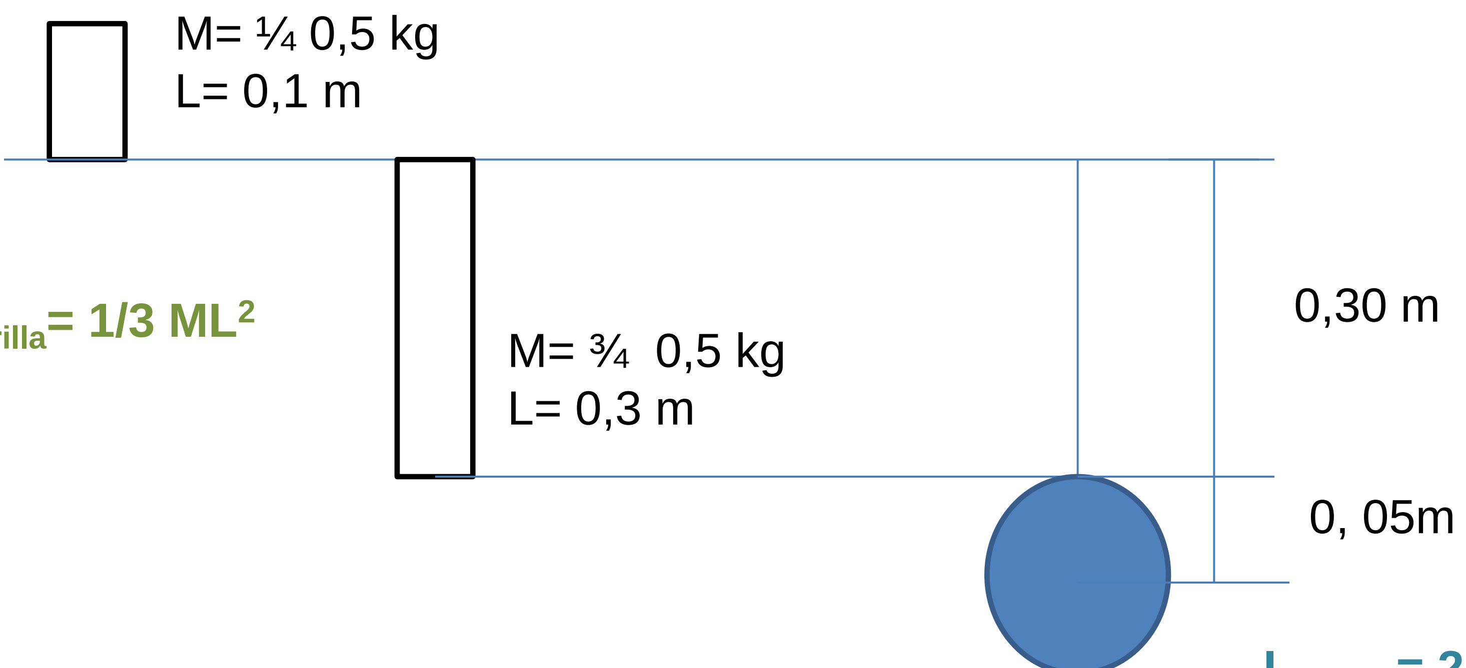
a) el momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por O.

b) el momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la varilla y que pase por el centro de masa del sistema.

a) el momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por O.

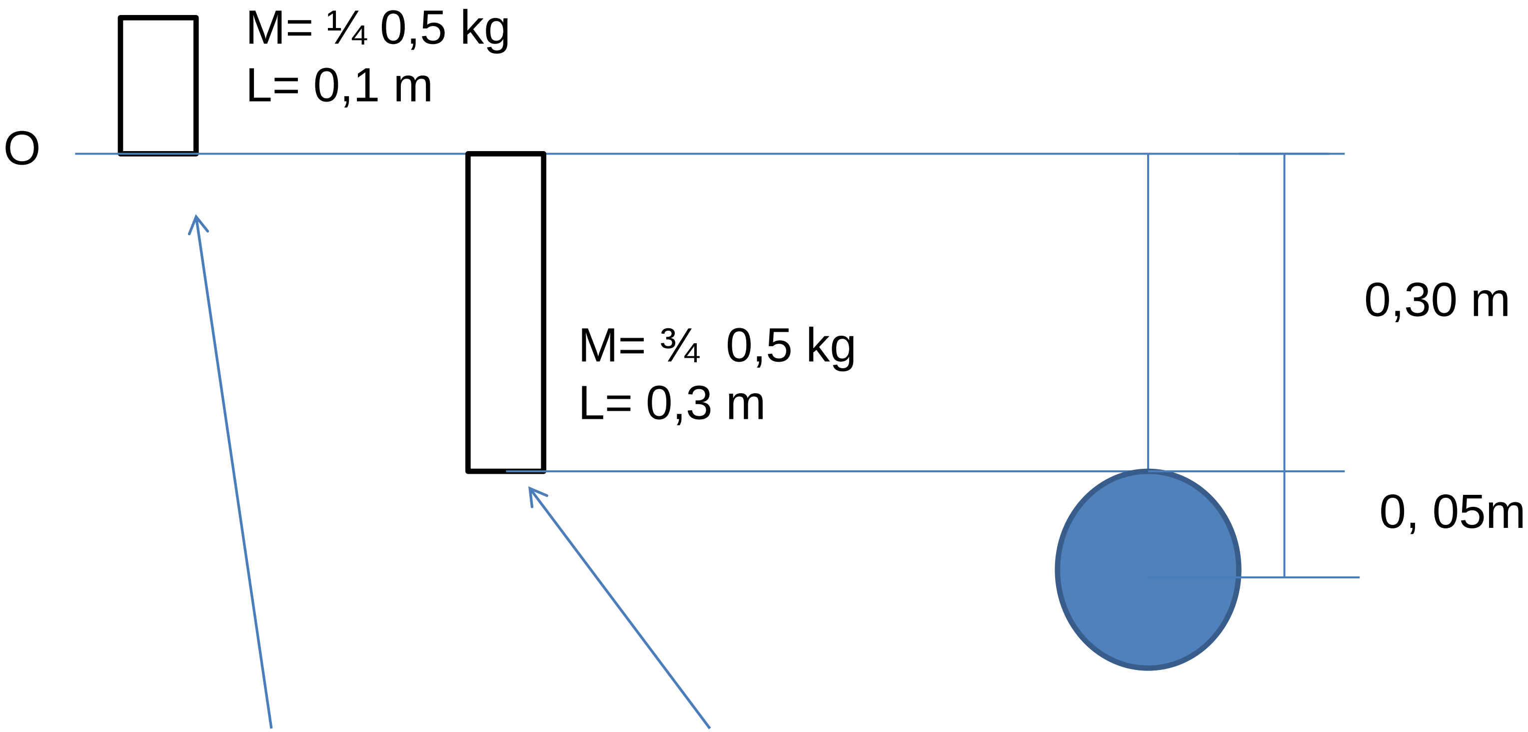
## RESOLUCIÓN A

Considero una barra delgada cuyo momento de inercia pasa por un extremo y ese extremo coincide con el punto de referencia O.




$I_{varilla} = 1/3\ ML^2$

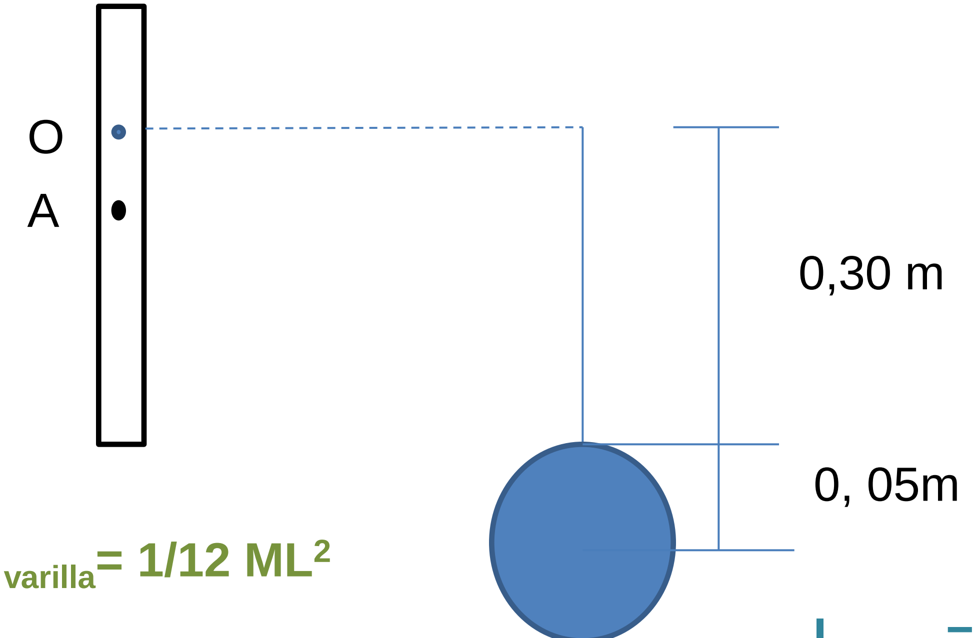
$I_{lenteja} = 2/5\ MR^2$




$$I_O = [\overbrace{1/3\ (0{,}5/4)\ kg\ (0{,}1\ m)^2} + \overbrace{1/3\ (3.0{,}5/4)\ kg\ (0{,}3)^2}]\ + [2/5\ 0{,}2\ kg\ (0{,}05m)^2 + 0{,}2\ kg\ (0{,}35m)^2]$$

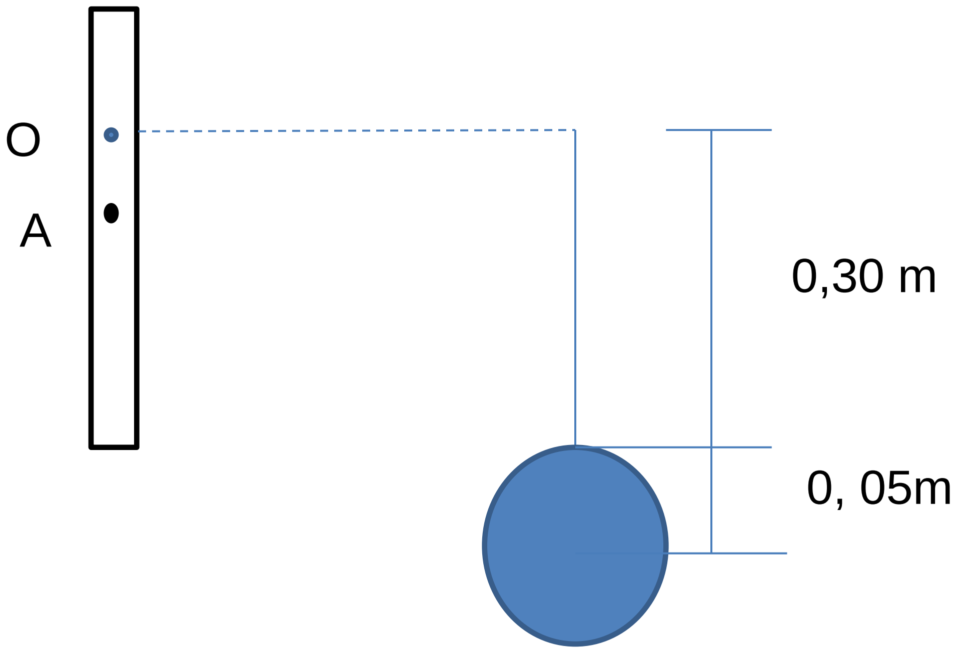
## RESOLUCIÓN B

Considero una barra delgada cuyo momento de inercia pasa por su CM. Se utiliza Steiner para resolver



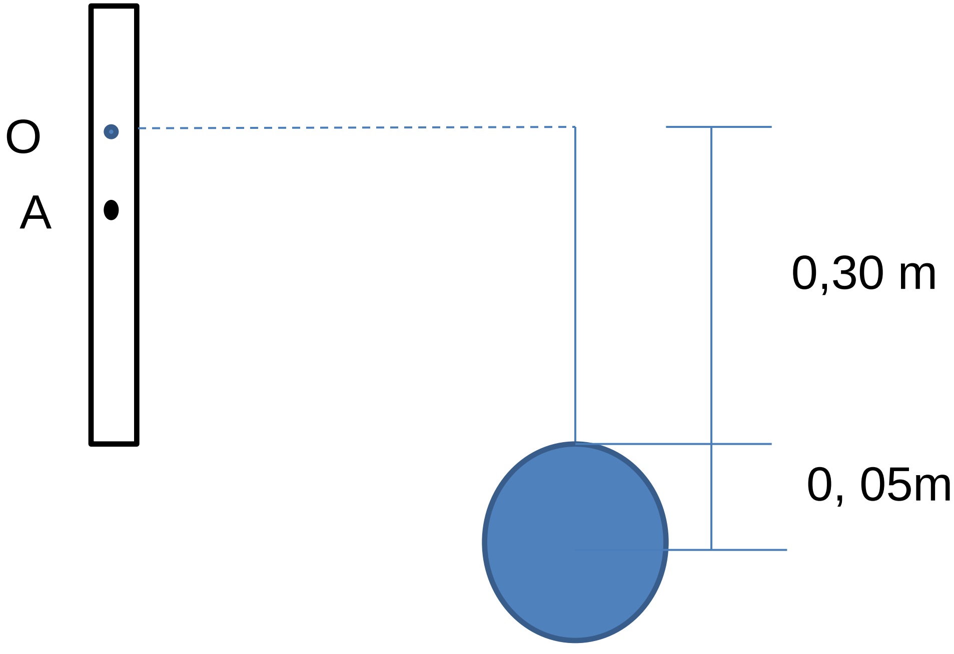

$I_{varilla} = 1/12\ ML^2$

$I_{lenteja} = 2/5\ MR^2$




$$I_A = \quad I_{barra} \quad + \quad I_{lenteja}$$

$$I_A = (1/12\ M\ L^2 + M\ d^2) + (2/5\ MR^2 + M\ d^2)$$




$$I_A = (1/12\ M\ L^2 + M\ d^2) + (2/5\ MR^2 + M\ d^2)$$

$$I_A = [1/12\ \ 0{,}5\ kg\ \ (0{,}4\ m)^2 + 0{,}5\ kg\ (0{,}1)^2]\ \ + [2/5\ 0{,}2\ kg\ \ (0{,}05m)^2 + 0{,}2\ kg\ (0{,}35m)^2]$$

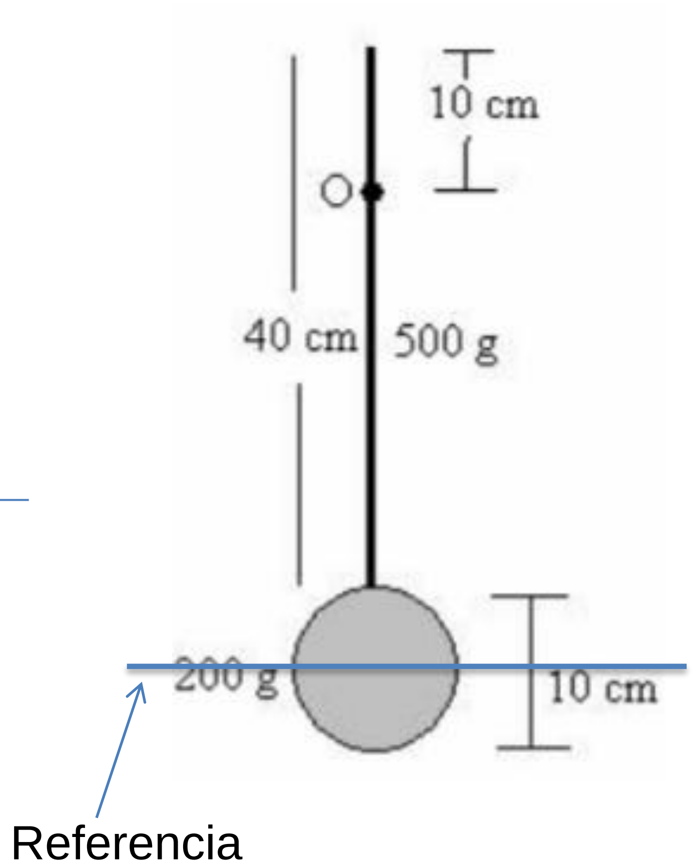
$I_A$ = ……..kg $m^2$

b) el momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la varilla y que pase por el centro de masa del sistema

$$y_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{m_{\text{total}}}$$

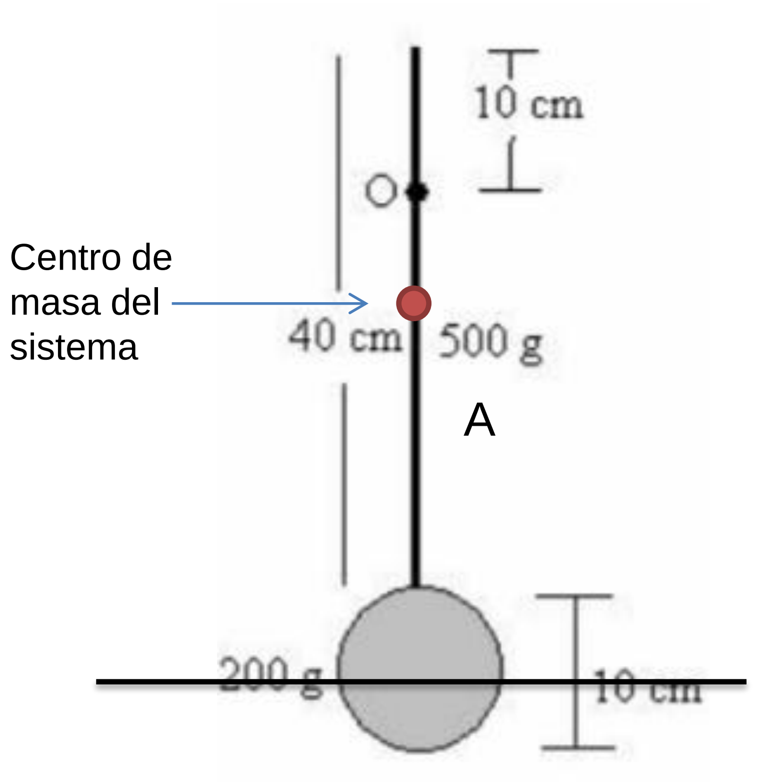
$$Y_{CM} = \frac{0{,}5 \text{ kg } 0{,}25 \text{ m} + 0{,}2 \text{ kg } 0 \text{ m}}{0{,}5 \text{ kg} + 0{,}2 \text{ kg}}$$

$$Y_{CM} = \ldots\ldots \text{ m}$$



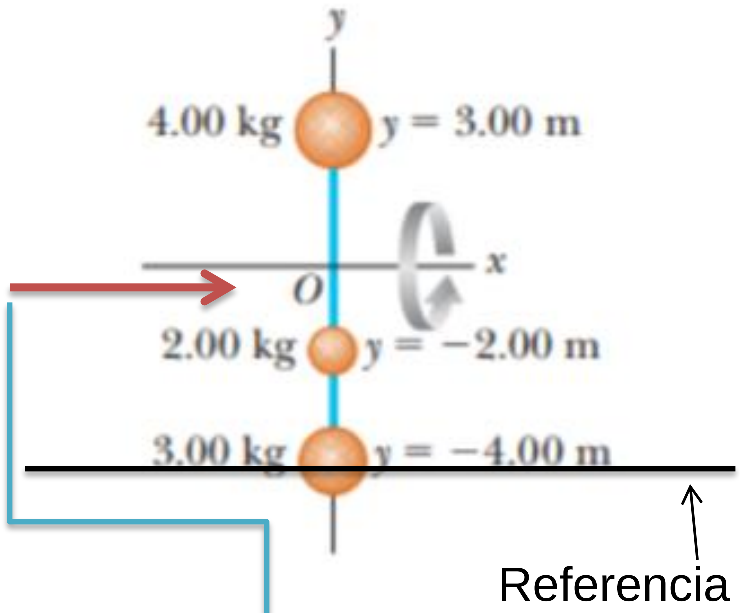
$$I^{A}_{CM} = I_{varilla} + M_{varilla}\,(0{,}25\text{ m} - y_{CM})^2 + M_{lenteja}\,(y_{CM})^2$$

$$= \ldots\ldots \text{ kg m}^2$$



## Ejercicio Nº 6

Dado el sistema de la figura, calcular:
a) Ubicación del Centro de masa.
b) Momento de inercia respecto al CM.
c) Momento de inercia respecto al eje x.



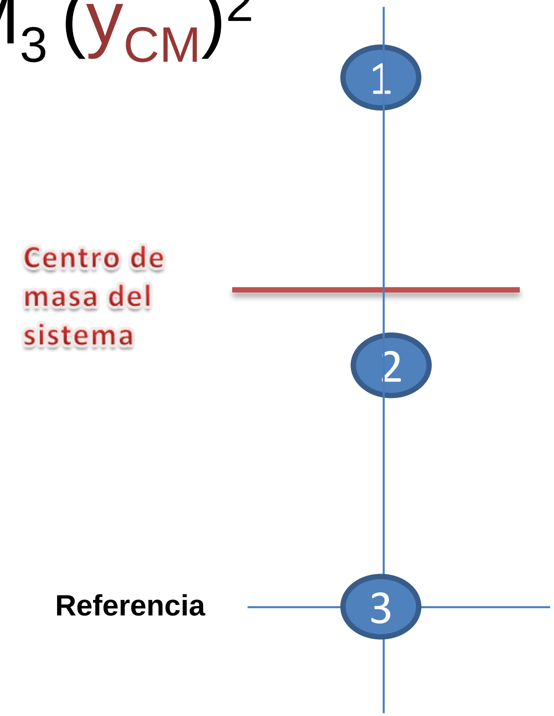

a)

$$y_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{m_{\text{total}}}$$

$$Y_{CM} = \frac{4\text{ kg } 7\text{ m} + 2\text{ kg } 2\text{ m} + \cancel{3\text{ kg } 0\text{ m}}}{4\text{ kg} + 2\text{ kg} + 3\text{ kg}} \Rightarrow Y_{CM} = \ldots\ldots\text{ m}$$

$$I_{CM} = M_1\,(7 - y_{CM})^2 + \; M_2\,(y_{CM} - 2)^2 + \; M_3\,(y_{CM})^2$$

$$= \ldots\ldots \text{ kg m}^2$$




$$I_{CM} = \ldots\ldots\ldots \text{ Kg m}^2$$

c) Momento de inercia respecto al eje x.

$$I_x = I_{CM} + M\,d^2$$