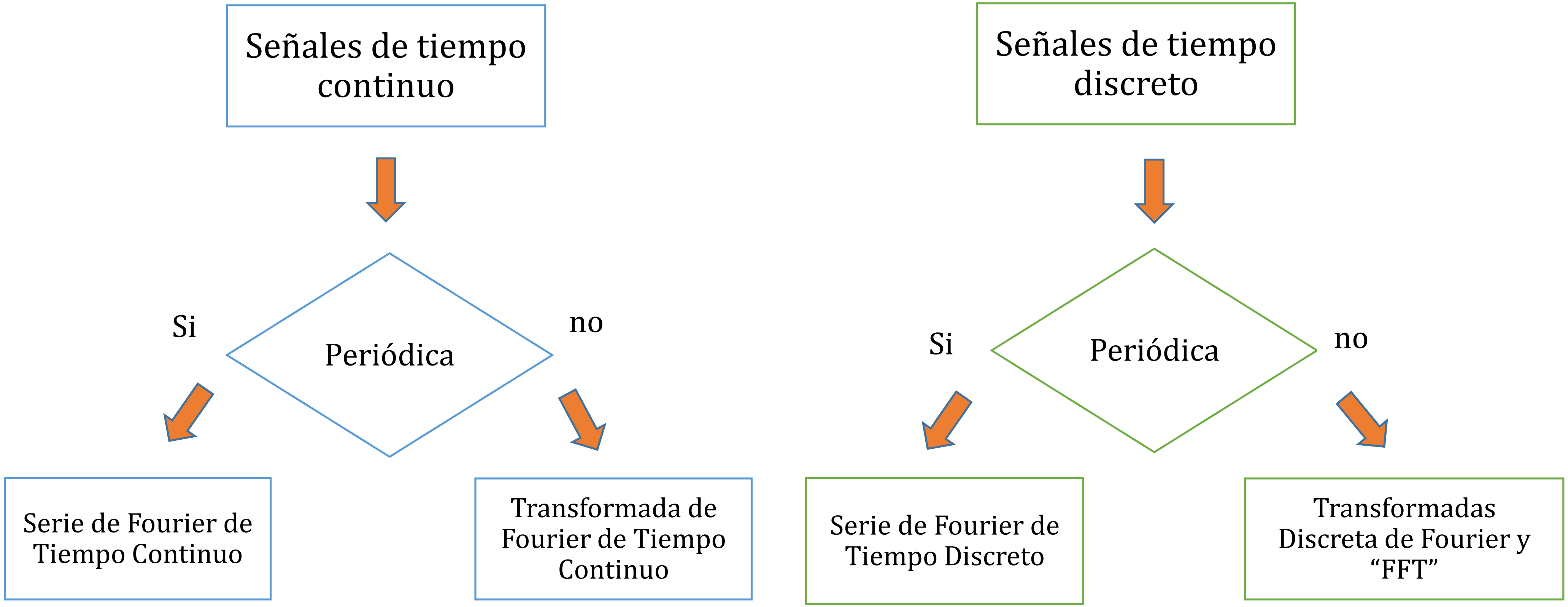
SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería en Computación

UNIDAD 7

TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER
“FFT”

HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS ESPECTRAL



TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER Y RÁPIDA DE FOURIER

DFT/FFT

El análisis y procesamiento espectral es de vital importancia para el procesamiento de señales. Tiene aplicaciones en prácticamente cualquier rama de la ciencia, y si tenemos un teléfono celular, utilizamos Transformadas de Fourier **miles de veces por día.**

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER
DISCRETE FOURIER TRANSFORM: DFT

Es un algoritmo que nos permite analizar frecuencialmente una señal discreta y obtener un espectro **también discreto**

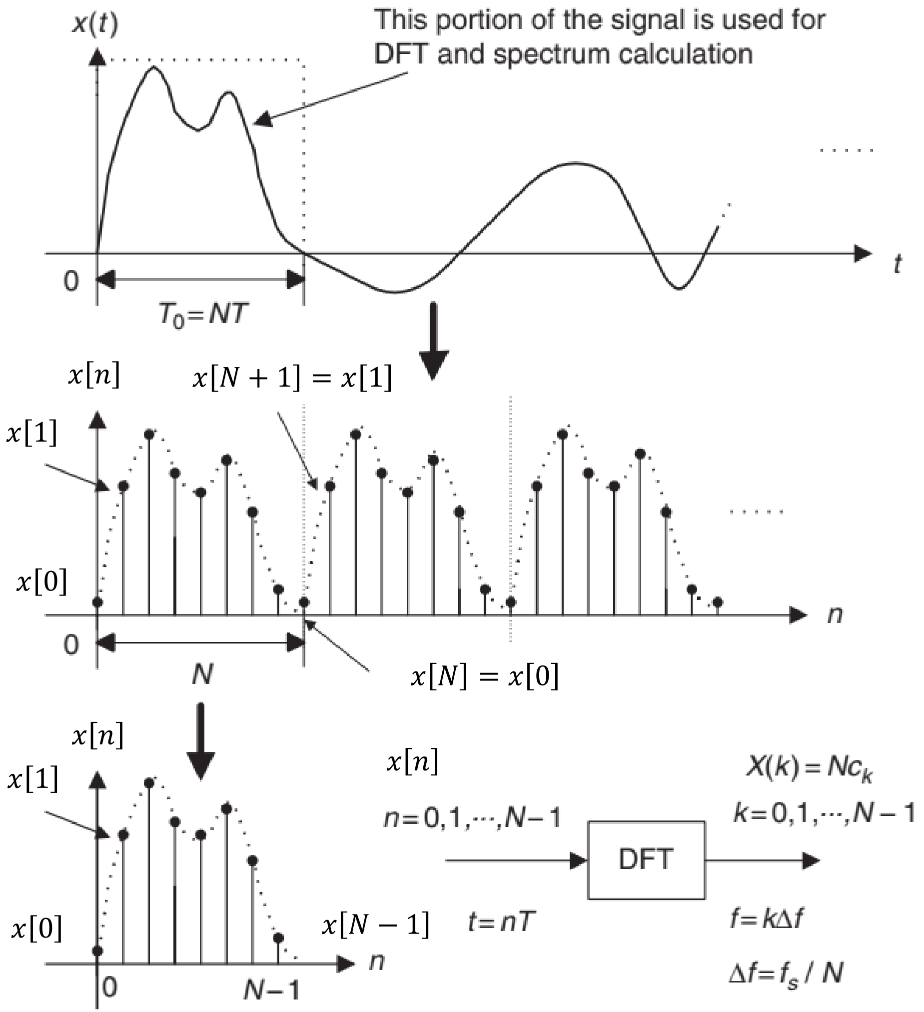
Se basa en suponer que toda señal discreta es periódica dentro de una ventana de análisis de **longitud N**

DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}$$

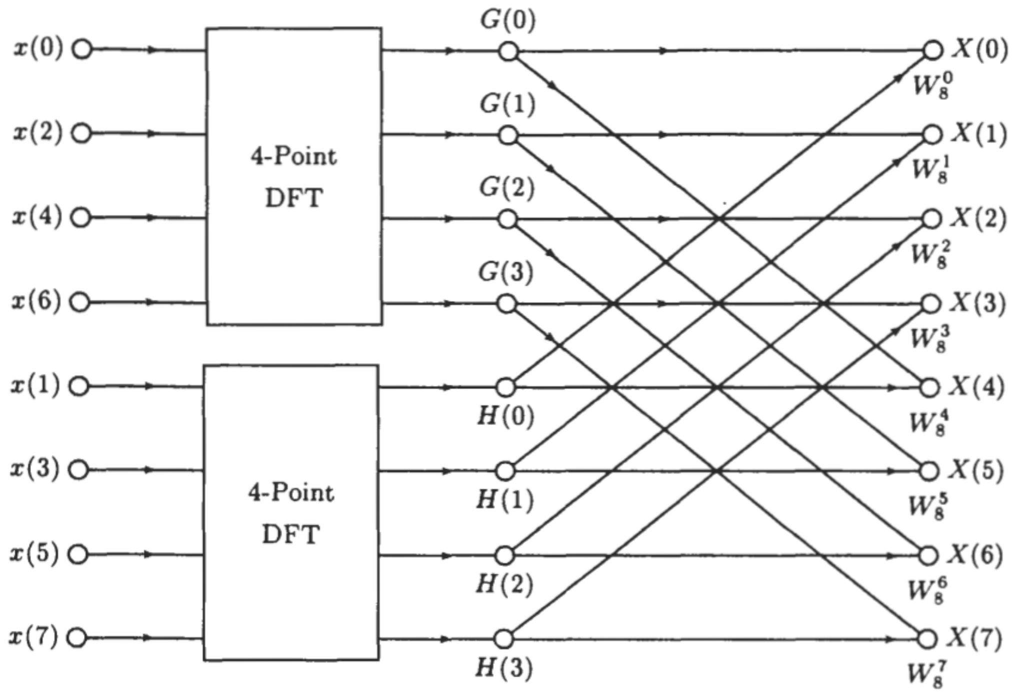


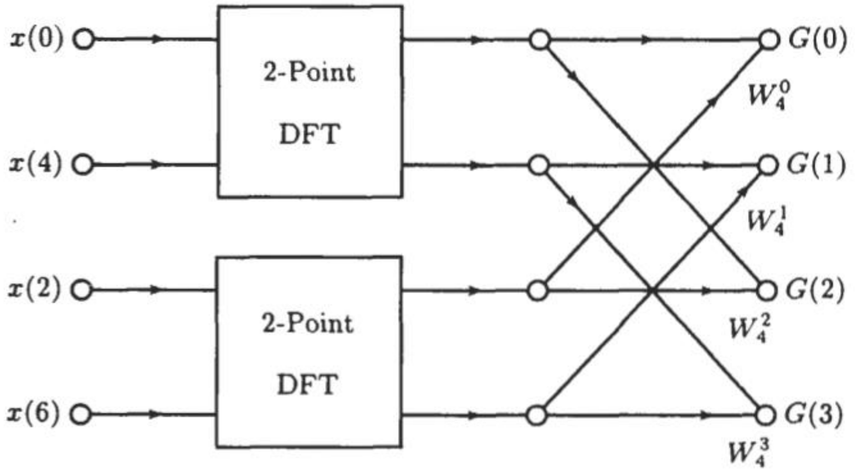
TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER – FFT

Para permitir que todos los sistemas de comunicación, equipos de análisis espectral, etc. etc. puedan funcionar en tiempo real, la DFT (*Discrete Fourier Transform*) se debe poder calcular de manera eficiente y rápida.

Para esto se han desarrollado algoritmos de cálculo rápido de la DFT que explotan las condiciones de simetría de las señales y permiten obtener resultados de manera muy eficiente:

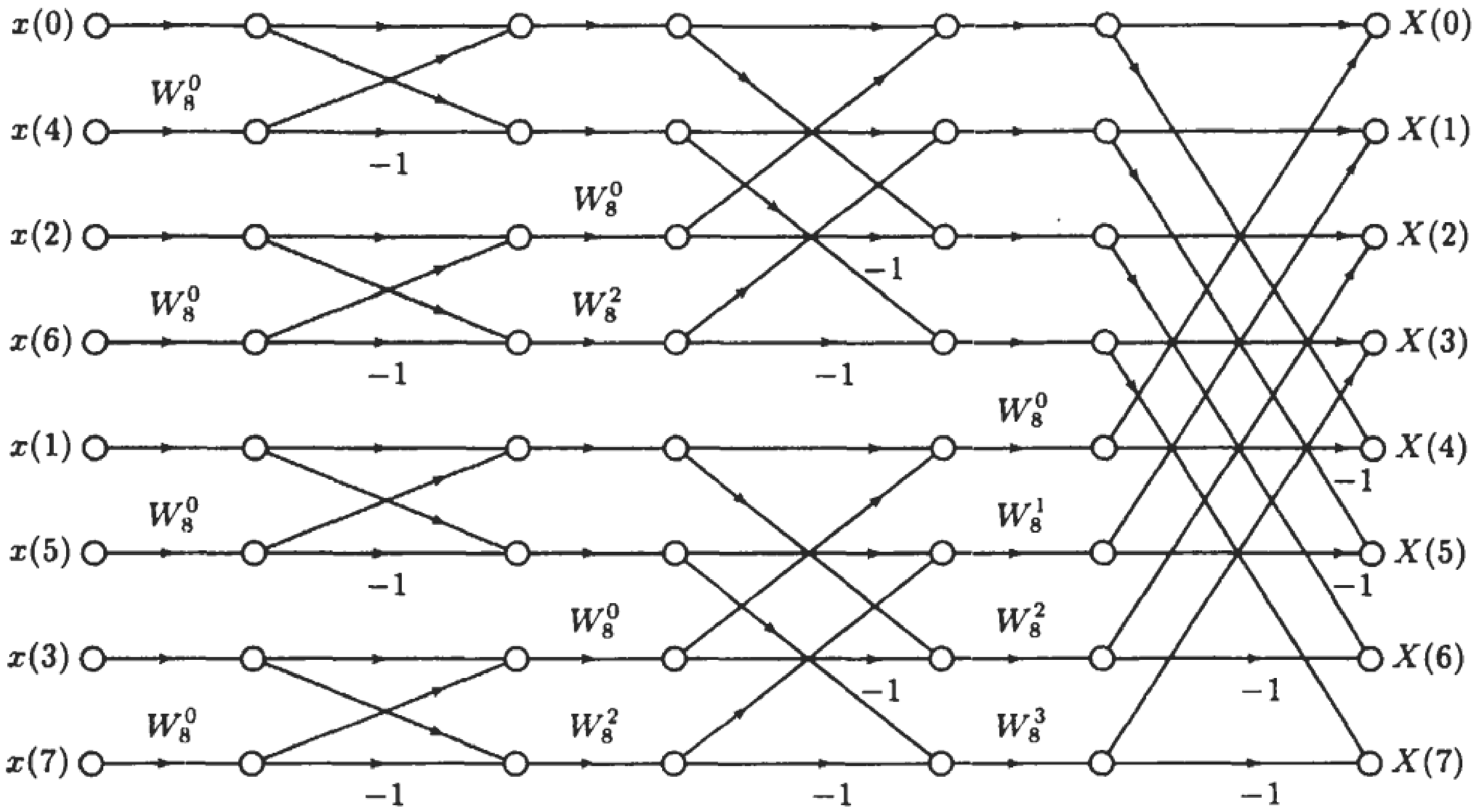
$$W_N^k = e^{-2\pi ik/N}$$





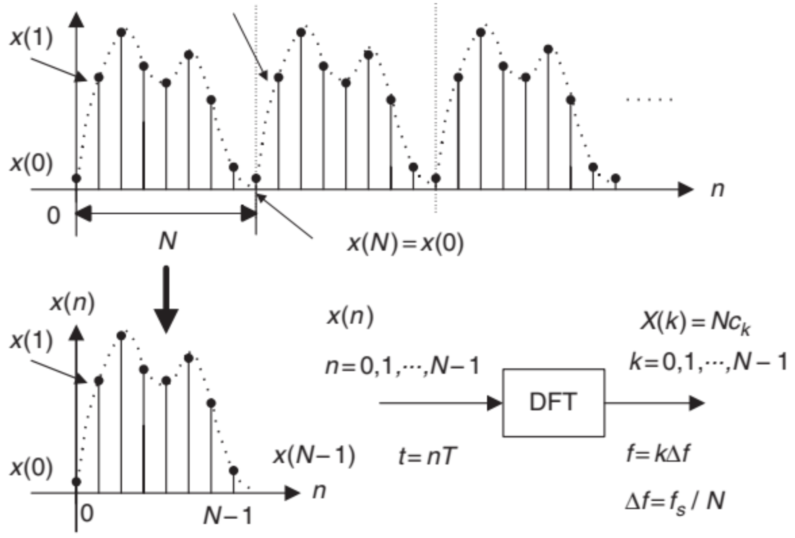
TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER – FFT

Desde el punto de vista matemático, una FFT (*Fast Fourier Transform*) se calcula solamente mediante multiplicaciones y sumas complejas.



$$W_N^k = e^{-2\pi ik/N}$$

VENTANEO DE SEÑALES

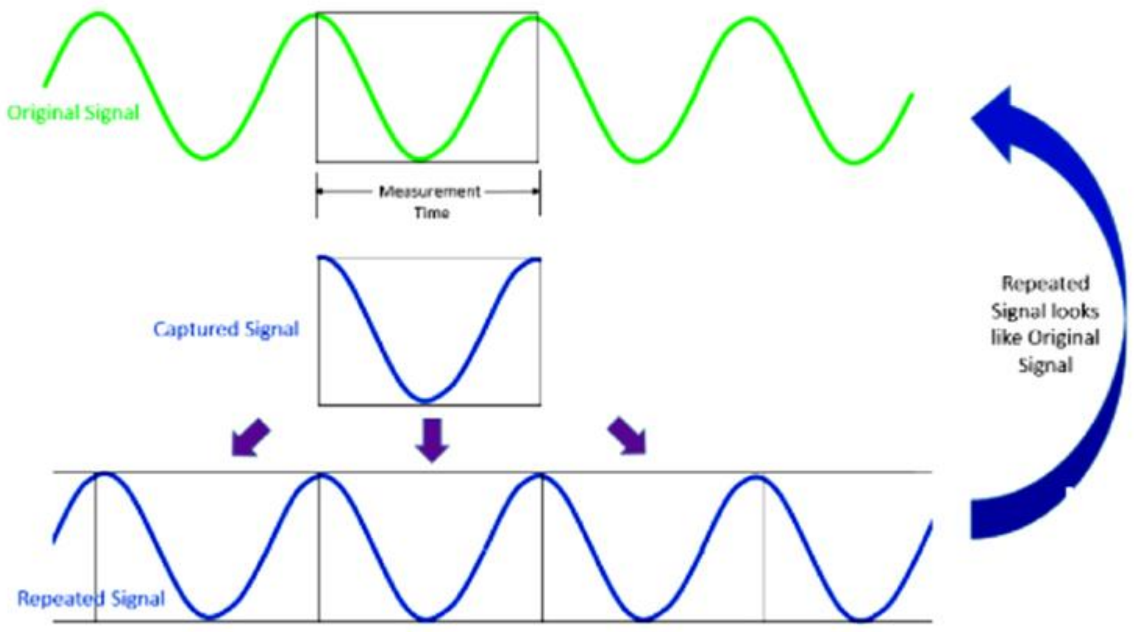


El análisis por FFT requiere volver periódica señales que no lo son, y para eso se debe "ventanear" a las mismas.

Además, N **debe ser potencia de 2**, por ejemplo:

N= 256, 2048, etc.

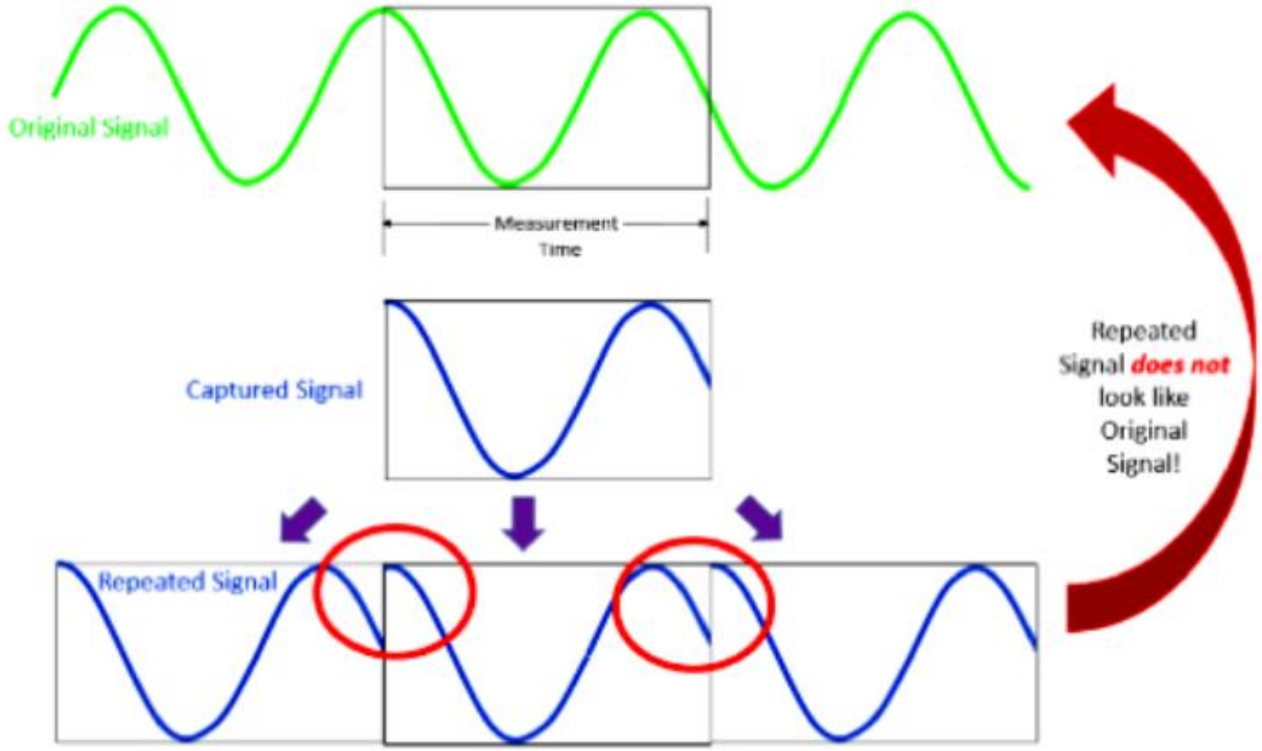
Señal periódica



VENTANEO DE SEÑALES

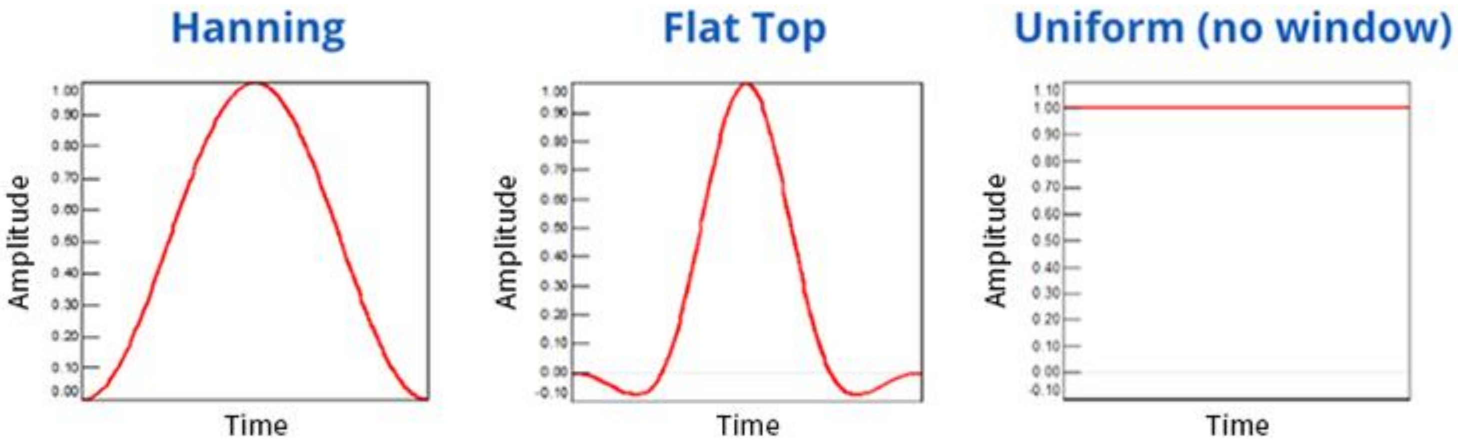
El problema del ventaneo es que en los límites de la ventana, generalmente ocurren discontinuidades que modifican la señal analizada.

Señal periódica diferente a la original!

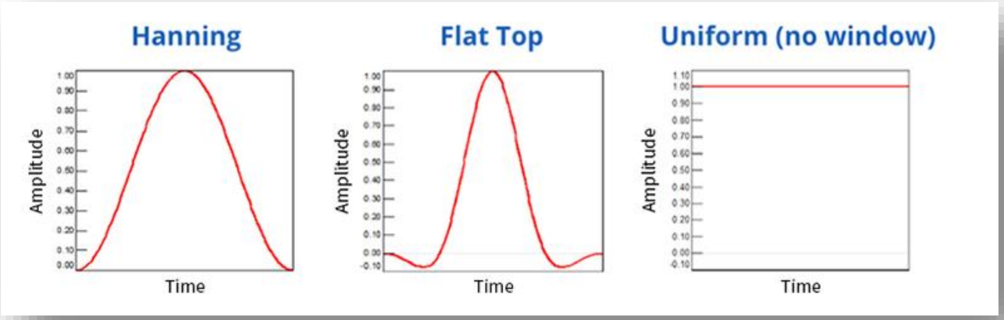


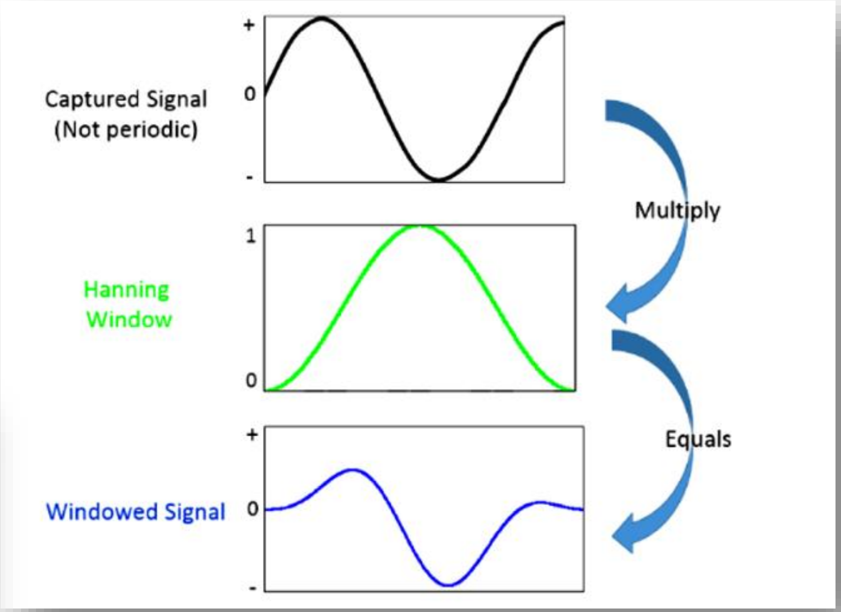
VENTANEO DE SEÑALES

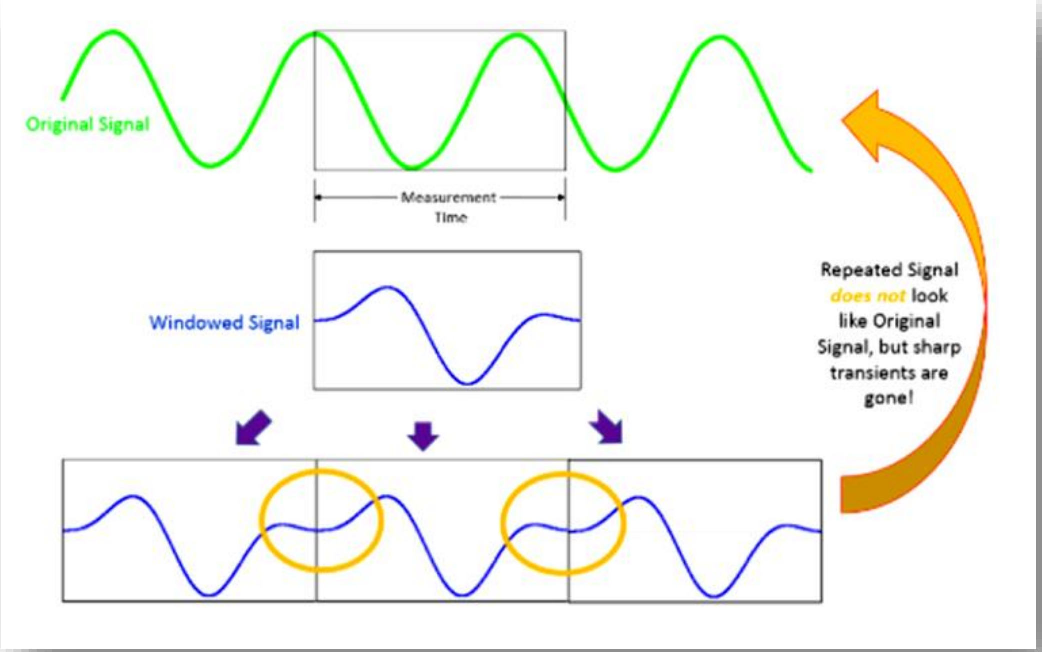
Para esto, se definen diferentes tipos de ventanas, que minimizan estos efectos en los vértices.



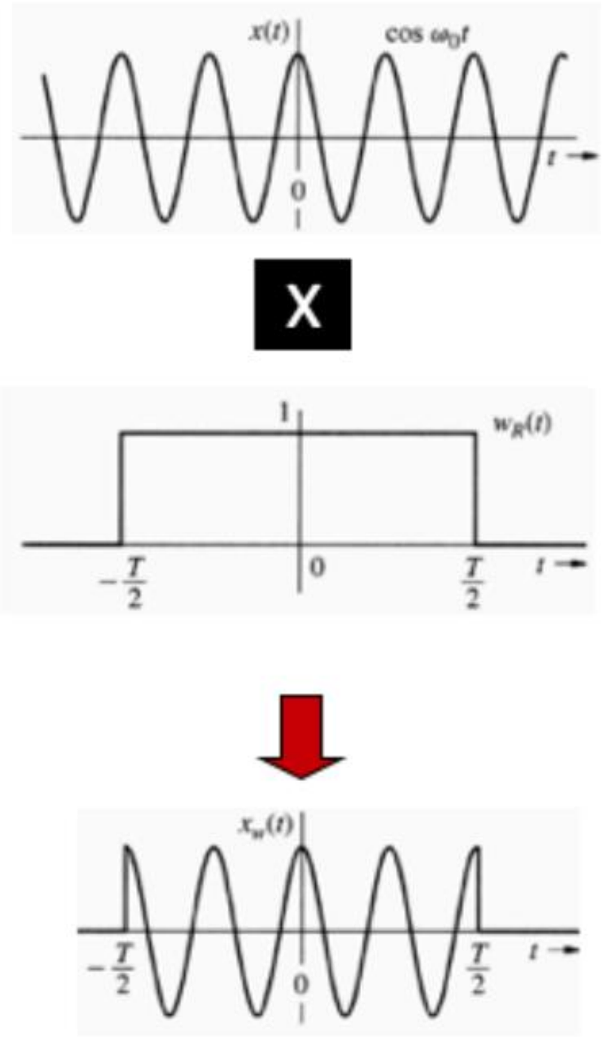
Proceso de ventaneo





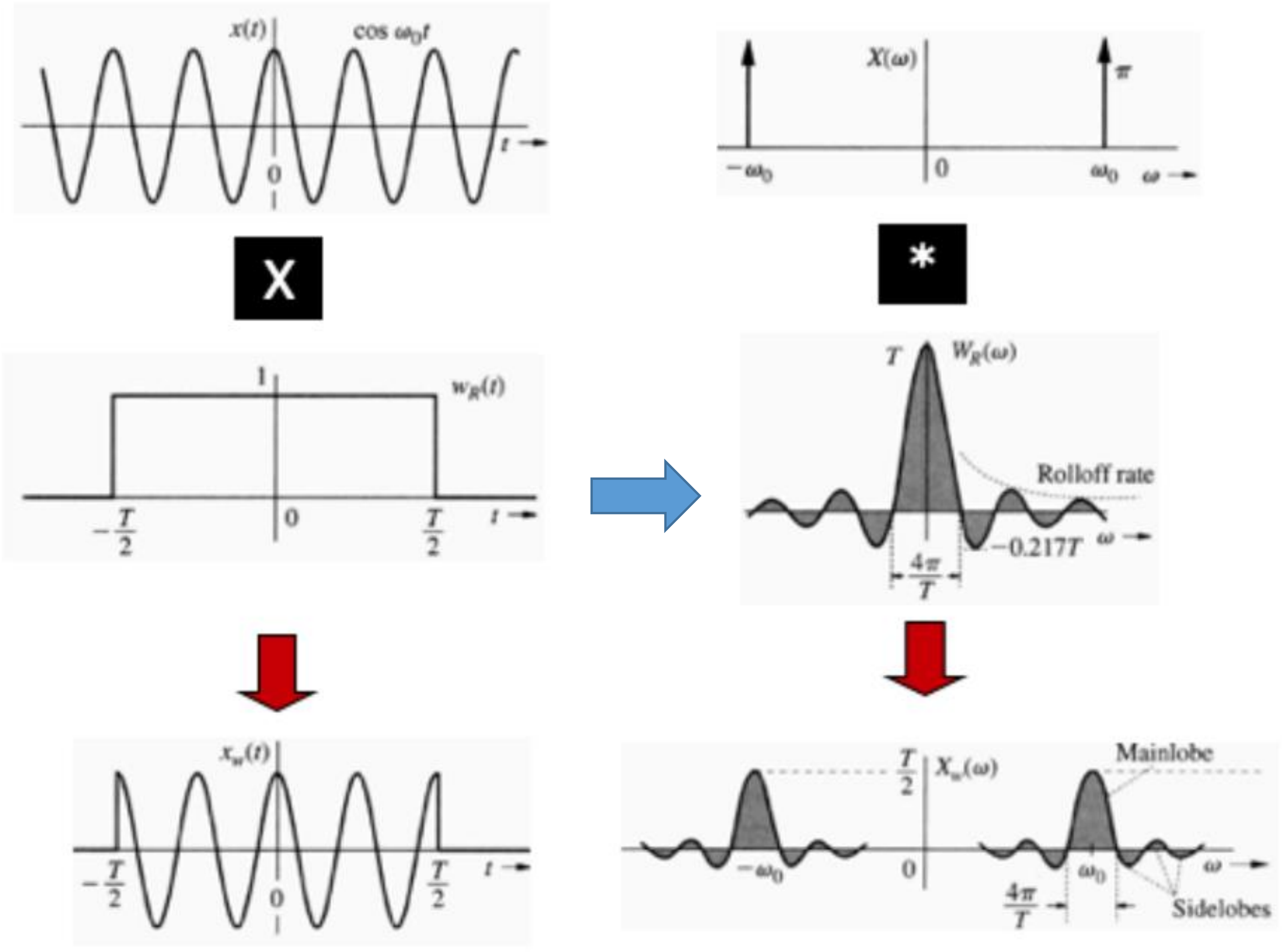


¿Qué otro efecto introduce el ventaneo en el análisis espectral?



¿Cómo se ve ese procesamiento en la frecuencia?

¿Qué otro efecto introduce el ventaneo en el análisis espectral?



TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER – FFT

La FFT nos permite entonces procesar un bloque de datos y obtener su transformada:

$$\mathbf{x} = \left[x[0] \quad x[1] \quad \ldots \quad x[N-1] \right]$$

$$\downarrow$$

DFT (FFT)

$$\downarrow$$

$$\mathbf{X} = \left[X[0] \quad X[1] \quad \ldots \quad X[N-1] \right]$$

TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER - FFT

El vector de salida de la FFT es un espectro discreto que representa los coeficientes **desde 0 Hz. hasta Fs Hz**, y tiene una **resolución** dada por:

1) **La frecuencia de muestreo utilizada.**
2) **El orden "N" de la FFT (n° de muestras a procesar)**

Es decir, cada valor del vector de salida representa una muestra del espectro. Ante una Fs fija, cuanto mayor sea el vector (mayor orden "N" de la FFT) mayor resolución espectral.

$$\mathbf{x} = [x[0] \quad x[1] \quad \ldots \quad x[N-1]]$$

$$\downarrow$$

DFT (FFT)

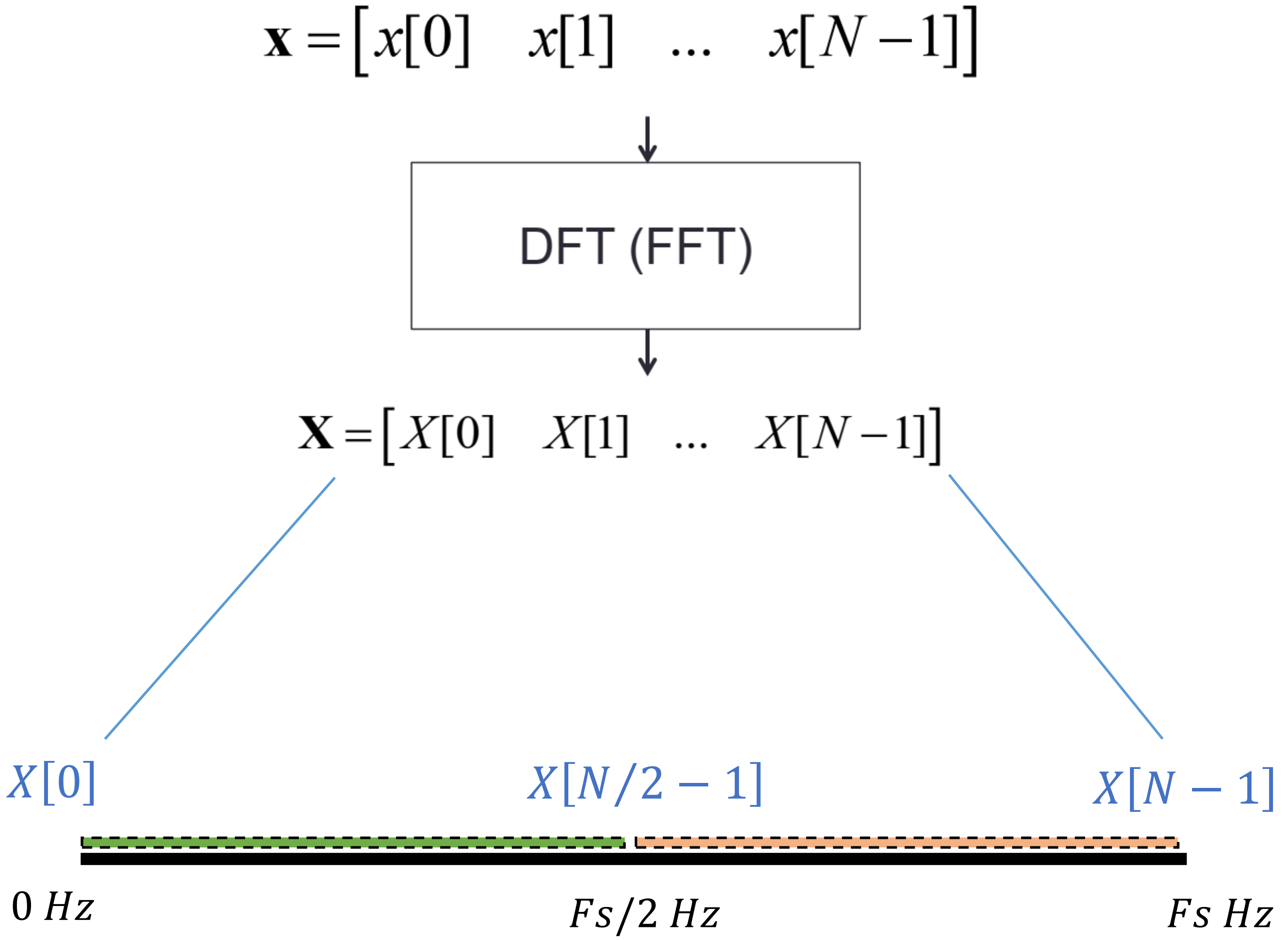
$$\downarrow$$

$$\mathbf{X} = [X[0] \quad X[1] \quad \ldots \quad X[N-1]]$$

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} \text{ (Hz).}$$ → Resolución espectral

$$f = \frac{k f_s}{N} \text{ (Hz),}$$ → Frecuencia de cada banda

El vector de salida de una FFT mapea de 0 a Fs Hertz, por lo que solamente utilizamos la mitad del mismo para fines prácticos.

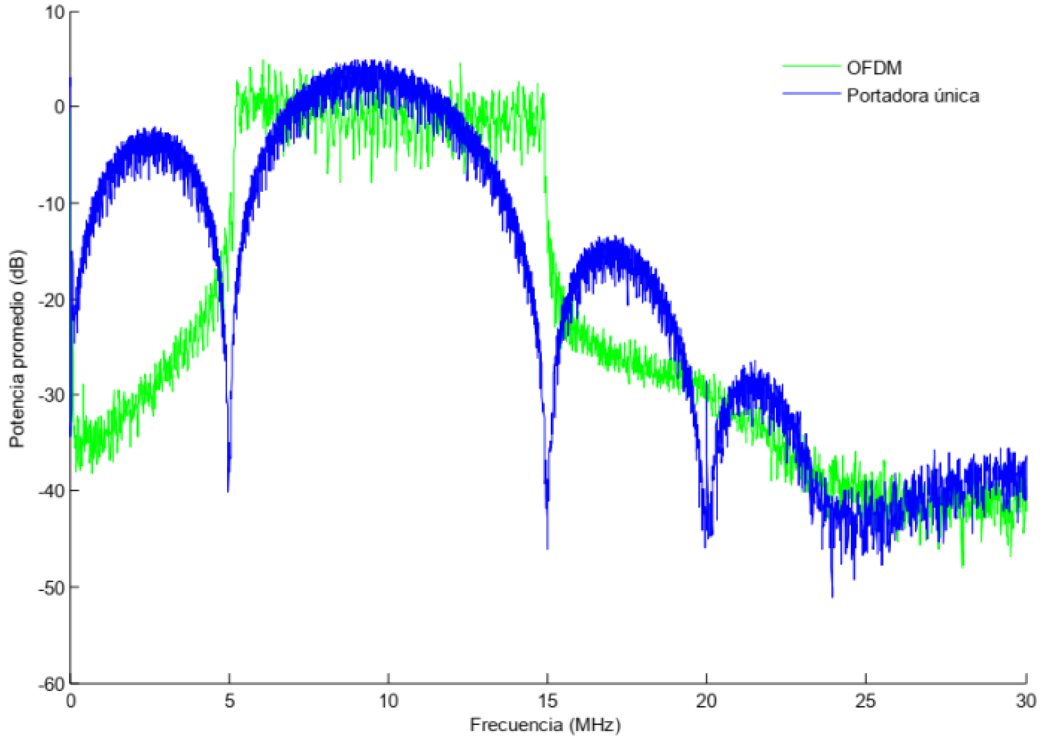


Ejemplo: La siguiente figura representa la visualización en un osciloscopio digital del espectro de esquemas de comunicación OFDM y Portadora Única.

1) ¿A qué frecuencia de muestreo se adquirieron los datos para procesarlos con la FFT?

2) ¿De qué orden es la FFT?

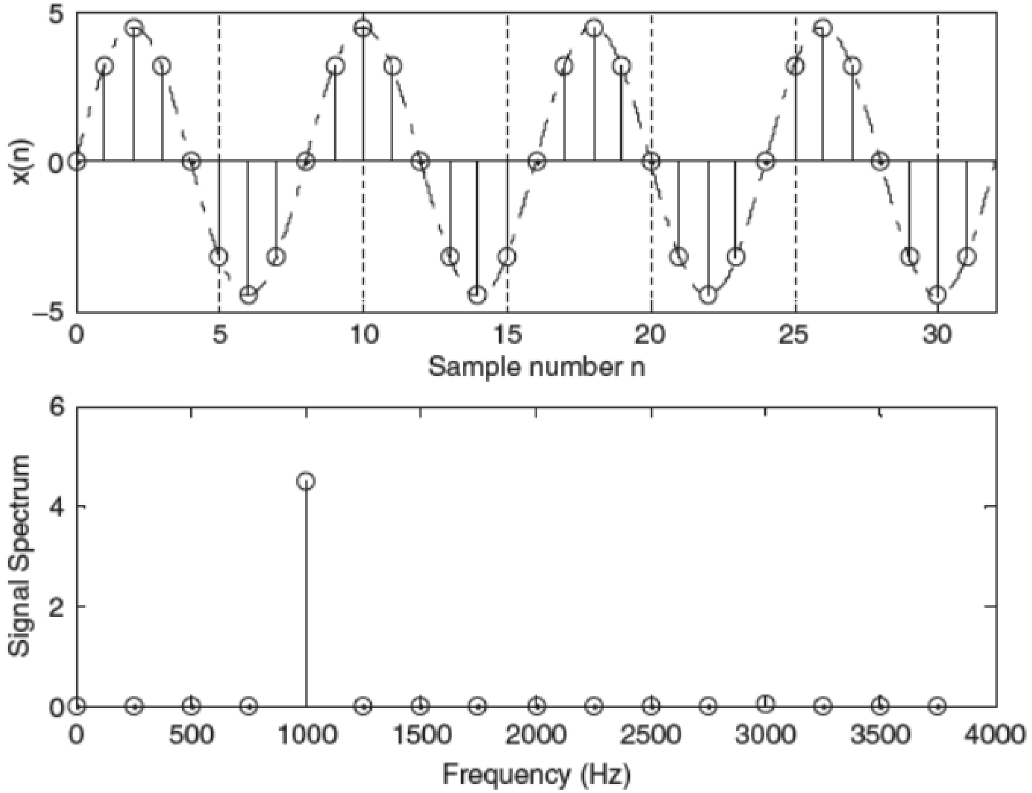
3) Si supone una FFT de N=512 ¿Qué resolución tiene el espectro?



Senoidal muestreada a 8 KHz.

2) ¿De qué orden es la FFT?

3) ¿Qué ocurre si se agrega una componente de 1518 Hz?



$$f = \frac{kf_s}{N} \text{ (Hz)},$$

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} \text{ (Hz)}.$$