Teoría de Colas

El modelo se utiliza para procesos en que los clientes van llegando, esperan su turno para recibir el servicio, lo reciben y luego se marchan. Se describen mediante 5 componentes:

- La función de densidad de probabilidad del tiempo entre llegadas.
- La función de densidad de probabilidad del tiempo de servicio.
- El número de servidores.
- La disciplina de ordenamiento de las colas.
- El tamaño máximo de las colas.

Se considera un número infinito de clientes, tal que no varía la velocidad de entrada de los mismos. Para estos sistemas se utiliza la notación A/B/m, dónde:

A: Densidad de probabilidad del tiempo entre llegadas.
B: Densidad de probabilidad del tiempo de servicio.
m: Número de servidores.
A su vez A y B pueden ser:
M. Exponencial (Markov)
D. Determinístico (Todos los clientes tienen el mismo valor)
G. General (Probabilidad arbitraria).

Los sistemas típicos son M/M/1 y G/G/m. Nosotros vamos a considerar un sistema M/M/1.

La probabilidad de que lleguen n clientes durante un intervalo de longitud t, está dada por la ley de Poisson:

$$P_n(t) = \frac{(l\,t)^n}{n!} e^{-lt} donde\, l \text{ es el promedio de llegadas}$$

Se puede demostrar que esta distribución de Poisson genera una densidad de probabilidad de tiempo entre llegadas de tipo exponencial.

La probabilidad $a(t)\Delta t$ de que un intervalo entre llegadas se encuentre entre $t \text{ y } t+\Delta t$ es la probabilidad que no ocurran llegadas durante el tiempo t por la probabilidad que ocurra una llegada en el intervalo Δt:

$$a(t)\Delta t = P_0(t)P_1(\Delta t)$$

$$a(t)\Delta t = e^{-lt}\, l\Delta t e^{-l\Delta t}$$

$$\Delta t \to 0$$

$$a(t)d(t) = le^{-lt}dt \Rightarrow \text{la distribución es exponencial.}$$

Lo mismo ocurre para el tiempo de servicio con un promedio de μ segundos/cliente.

Si consideramos al sistema en equilibrio, donde p_k es la probabilidad que existan k clientes en la cola (estrictamente cola+servidor), entonces tendremos:

$$l p_0 = m p_1$$
$$l p_1 = m p_2$$
$$\vdots$$
$$l p_k = m p_{k+1}$$

$$p_1 = \frac{l}{m} p_0$$
$$p_2 = \frac{l}{m} p_1 = (\frac{l}{m})^2 p_0$$
$$p_k = (\frac{l}{m})^k p_0 = r^k p_0 \text{, donde } r \text{ es la intensidad de tráfico.}$$

Por otra parte por tratarse de probabilidades:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k p_0 = 1$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \text{, considerando que si el sistema está en equilibrio entonces, } r < 1$$
$$\Rightarrow p_o = 1 - r$$
$$p_k = r^k (1-r)$$

El número promedio N de clientes en el sistema será entonces:

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} k r^k$$
$$como \quad \sum r^k = \frac{1}{1-r}; \frac{d \sum r^k}{dk} = \sum k r^{k-1}$$
$$entonces \sum k r^k = \frac{r}{1-r}$$
$$retomando \quad N = (1-r) \sum k r^k = \frac{r}{1-r}$$

El tiempo total T de permanencia en el sistema será entonces tal que:

$$N = l T \Rightarrow T = \frac{1}{m - l}$$

A modo de ejemplo consideremos un controlador de 4 líneas de netrada de 4800bps c/u y una salida de 9600bps. El tamaño promedio de los mensajes es de 1000 bits por mensaje y el tráfico es de 2 mensajes por segundo. Calculemos entonces el retardo promedio de los mensajes y la cantidad de mensajes en espera que habrá en el sistema como para poder diseñar el buffer necesario.

Si la velocidad de salida del controlador es de 9600bps y el tamaño de mensaje de 1000 bits, entonces μ=9,6 mensajes/segundo y λ= 8 mensajes/segundo (tener en cuenta que hay 4 entradas). Con estos datos tenemos:

$$T = \frac{1}{m - l} = \frac{1}{9{,}6 - 8} = 625 mseg$$

$$N = \frac{l}{m - l} = 5 mensajes$$