



SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería en Computación

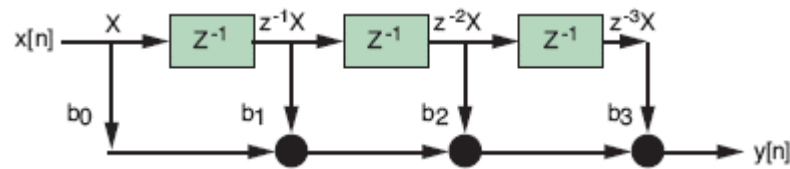
UNIDAD 7

TRANSFORMADA "Z" Y SISTEMAS
DIGITALES

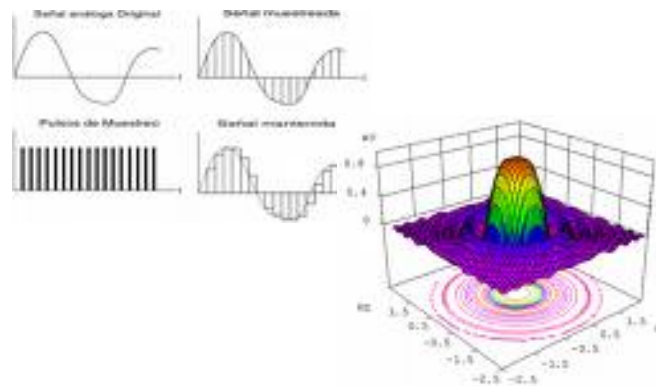
TRANSFORMADA Z

¿Para que nos sirve la Transformada Z?

Nos permite diseñar y analizar sistemas digitales de manera eficiente. Del mismo modo que la Transformada de Laplace nos simplificaba el análisis de ecuaciones diferenciales, la Transformada Z nos simplifica el análisis de ecuaciones a diferencias.



Síntesis



Análisis



TRANSFORMADA Z

La Transformada Z de una señal discreta se escribe como $X(z) = Z\{x[n]\}$ y se calcula de la siguiente manera:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad z = re^{j\omega}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

Frecuentemente se trabaja con señales “causales”, y la TZ bilateral, se convierte en la TZ unilateral:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

La transformada Z de una señal es una función de variable compleja, y normalmente tiene polos y ceros que definen el comportamiento de esta función.

Veamos esto con un ejemplo:



La transformada Z de una señal $x[n]$ está dada por la expresión:

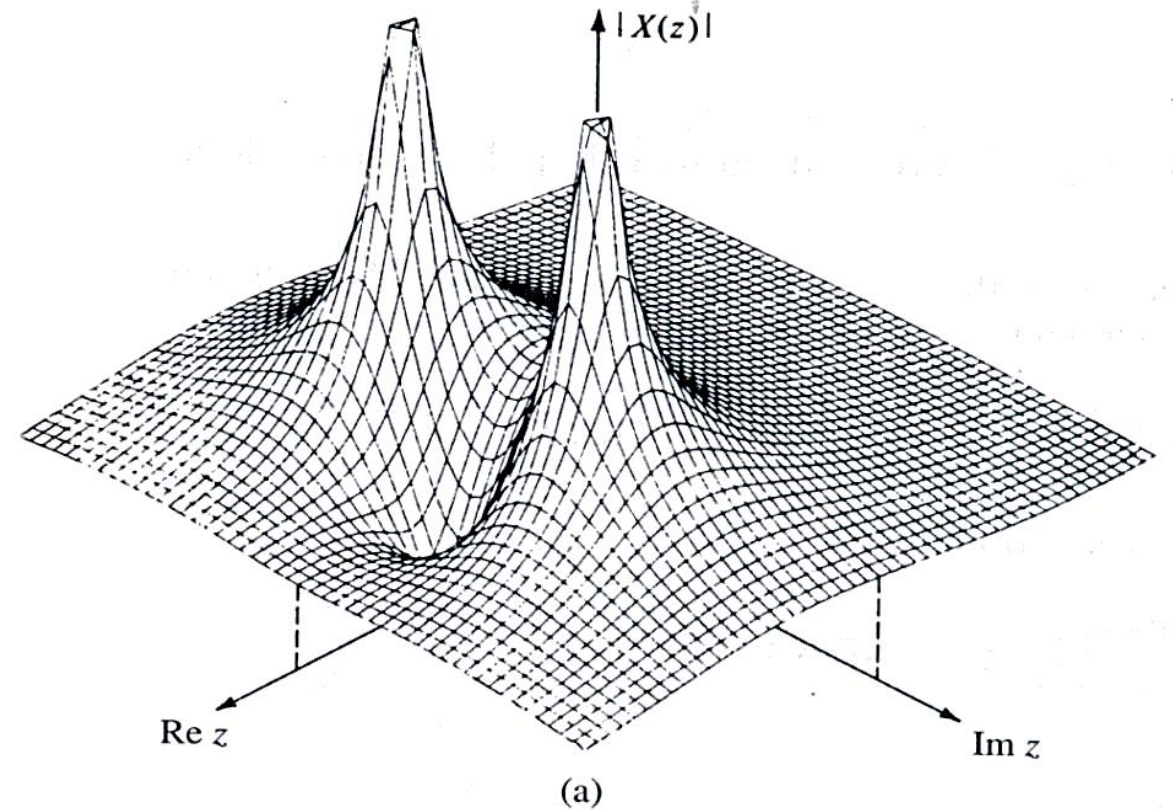
$$X(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 + 1,2732 z^{-1} + 0,81 z^{-2}}$$

Tiene un cero en $z_1 = 1$

y dos polos en p_1 y $p_2 = 0,9 e^{\pm j \frac{\pi}{4}}$

Polos y Ceros de la función:

$$X(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 + 1,2732z^{-1} + 0,81z^{-2}}$$



Pueden existir zonas del plano complejo “z” en donde la función sea nula o infinita. Estos puntos, conocidos como polos y ceros, son muy importantes.

Región de Convergencia de la Transformada Z “ROC”

Para que la expresión matemática de la TZ sea absolutamente sumable, es necesario definir una región de valores de “z”, es decir: ¿Para qué valores de “z” la sumatoria tiende a un valor finito?

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

El conjunto de valores de Z para los cuales existe la TZ es llamado Región de Convergencia o ROC

Región de Convergencia de la Transformada Z “ROC”

Veamos un ejemplo para aclarar el concepto de la ROC:

Calcular la TZ de la siguiente señal: $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty \quad \longrightarrow \quad |az^{-1}| < 1 \quad \longrightarrow \quad |z| > |a|.$$

Región de Convergencia de la Transformada Z “ROC”

Veamos un ejemplo para aclarar el concepto de la ROC:

Calcular la TZ de la siguiente señal: $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{(az^{-1})^0 - (az^{-1})^{\infty}}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

Expresión matemática de la TZ

ROC

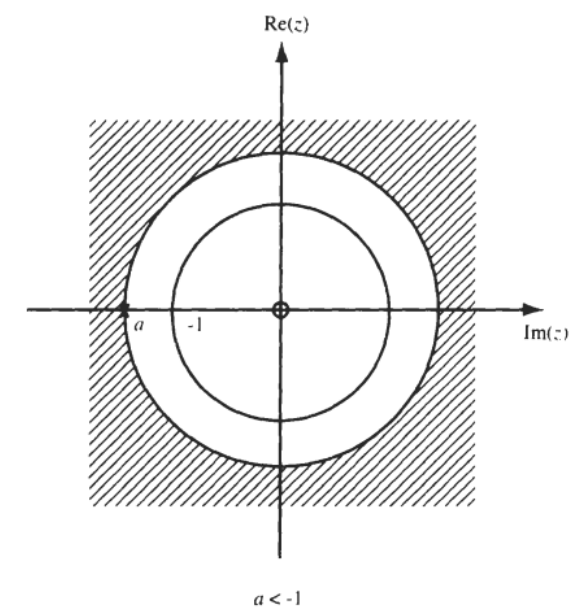
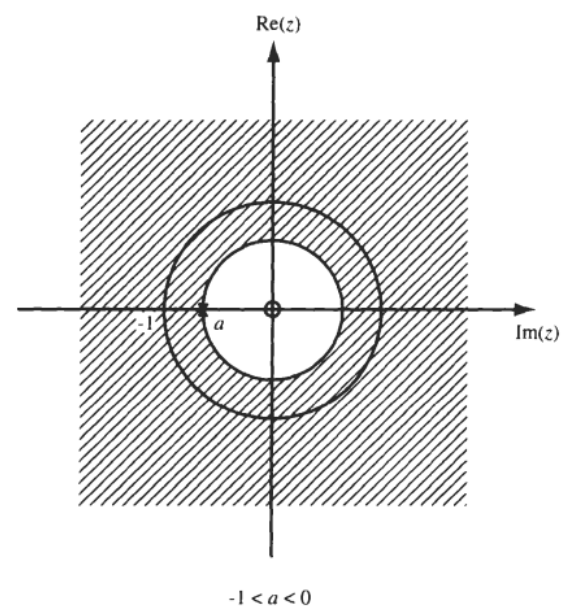
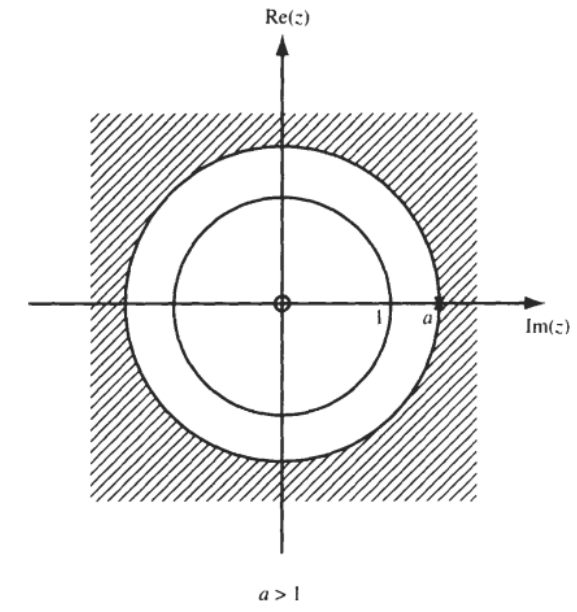
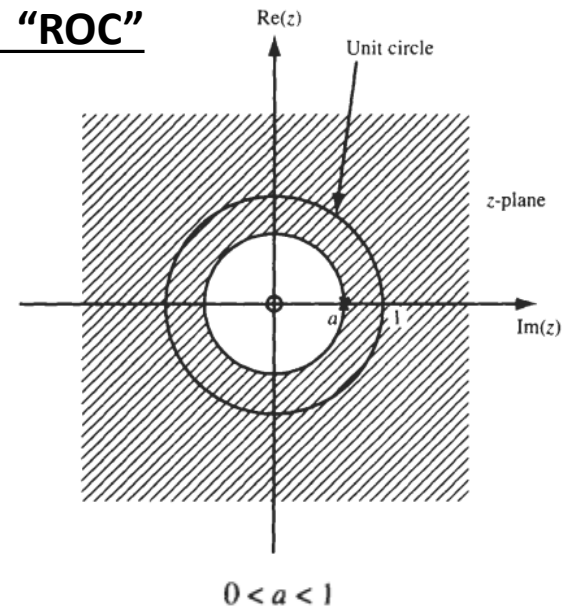
Región de Convergencia de la Transformada Z “ROC”

Gráficamente, la ROC y los Polos y Ceros en el plano Z son:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{(az^{-1})^0 - (az^{-1})^{\infty}}{1 - az^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a|$$

El área rayada es la ROC, y representa los valores de “z” para los cuales existe X(z)



Ejemplo 2:

Calcular la TZ de la siguiente señal:

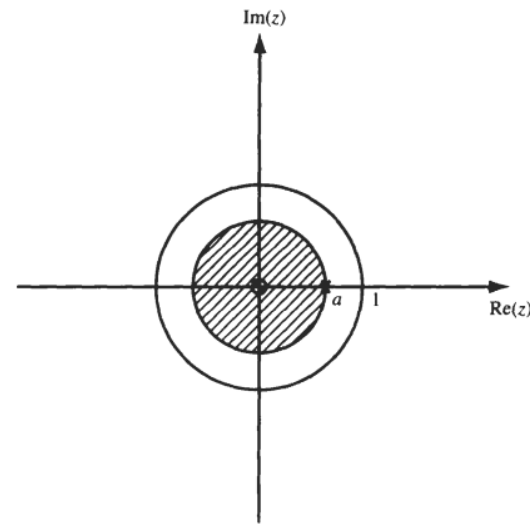
$$x[n] = -a^n u[-n - 1]$$

Resolviendo la transformada para esta señal, se obtiene:

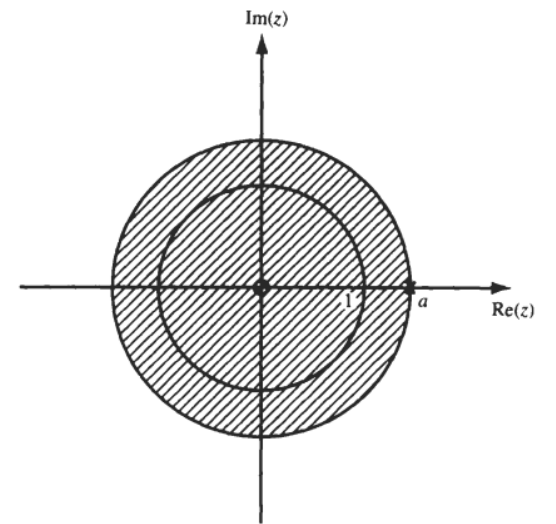
$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z - a}$$

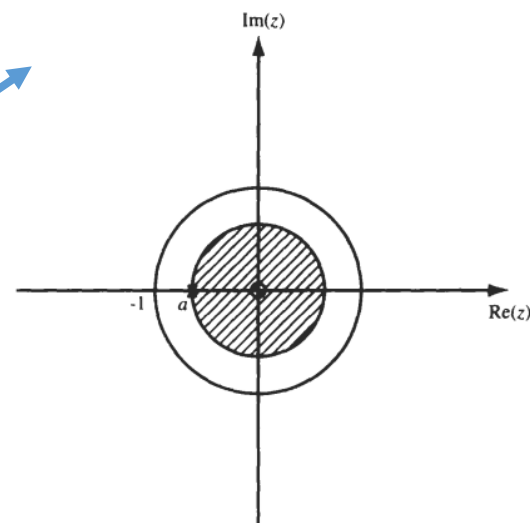
$$|z| < |a|$$



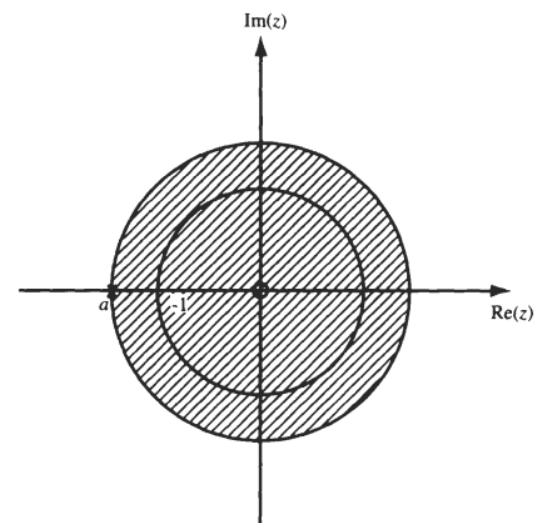
$0 < a < 1$



$a > 1$



$-1 < a < 0$



$a < -1$

$$x[n] = a^n u[n] \quad \longrightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \quad \longrightarrow \quad X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad |z| < |a|$$

Comparando las expresiones matemáticas de la TZ, vemos que las dos transformadas son idénticas para distintas señales, pero no así la ROC, por lo tanto:



La especificación de la TZ de una señal requiere tanto de la expresión matemática como de la ROC

Propiedades más importantes de la ROC

Propiedad 1: La ROC consiste en un anillo en el plano z centrado en el origen.

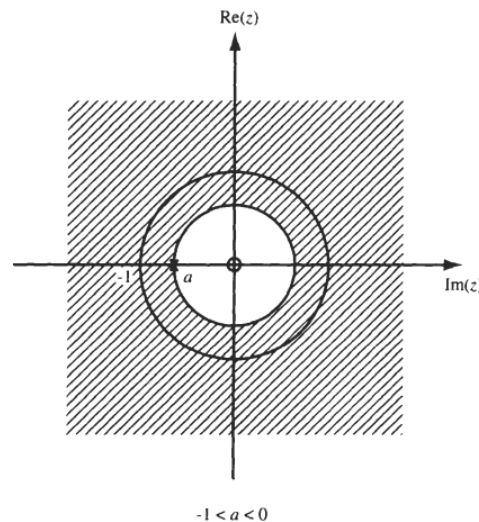
Propiedad 2: La ROC no contiene ningún polo.

Propiedad 3: Si $x[n]$ es una señal de derecha, la ROC es el exterior de un círculo de radio $|x| = r_{max}$

Propiedad 4: Si $x[n]$ es una señal de izquierda, la ROC es el interior de un círculo de radio $|x| = r_{min}$

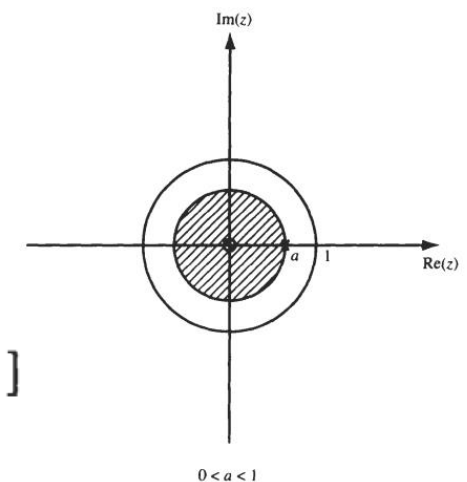
Señal de derecha

$$x[n] = a^n u[n]$$



Señal de izquierda

$$x[n] = -a^n u[-n - 1]$$



Transformadas Z por tabla:

Notar que hay varias idénticas, pero con distintas ROC!

Table 4-1. Some Common z-Transform Pairs

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 if ($m > 0$) or ∞ if ($m < 0$)
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$ z < a $
$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \left[\frac{z}{z-a} \right]^2$	$ z > a $
$(\cos \Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - (\cos \Omega_0) z}{z^2 - (2 \cos \Omega_0) z + 1}$	$ z > 1$
$(\sin \Omega_0 n) u[n]$	$\frac{(\sin \Omega_0) z}{z^2 - (2 \cos \Omega_0) z + 1}$	$ z > 1$
$(r^n \cos \Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - (r \cos \Omega_0) z}{z^2 - (2r \cos \Omega_0) z + r^2}$	$ z > r$
$(r^n \sin \Omega_0 n) u[n]$	$\frac{(r \sin \Omega_0) z}{z^2 - (2r \cos \Omega_0) z + r^2}$	$ z > r$
$\begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

Estas transformadas son las más frecuentes y útiles en el análisis de sistemas y señales discretas:

Table 4-1. Some Common z-Transform Pairs

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 if ($m > 0$) or ∞ if ($m < 0$)
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $

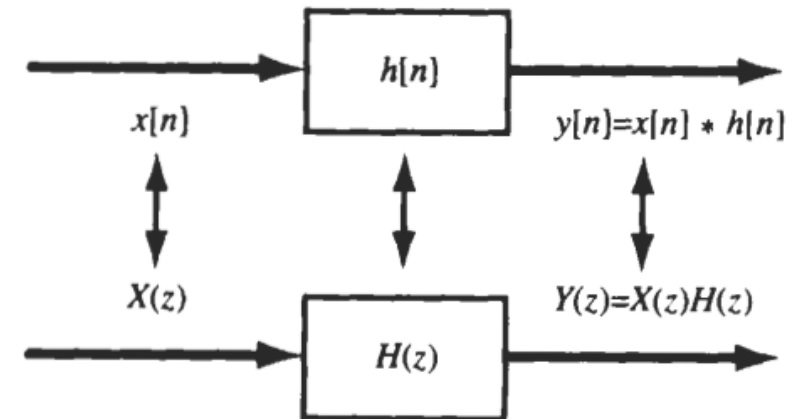
Análisis y caracterización de sistemas LTI mediante la TZ

Causalidad:

Un sistema es causal si, ante una entrada, sus salida se produce en intervalos de tiempo posteriores a dicha entrada. Son sistemas reales, no anticipativos.

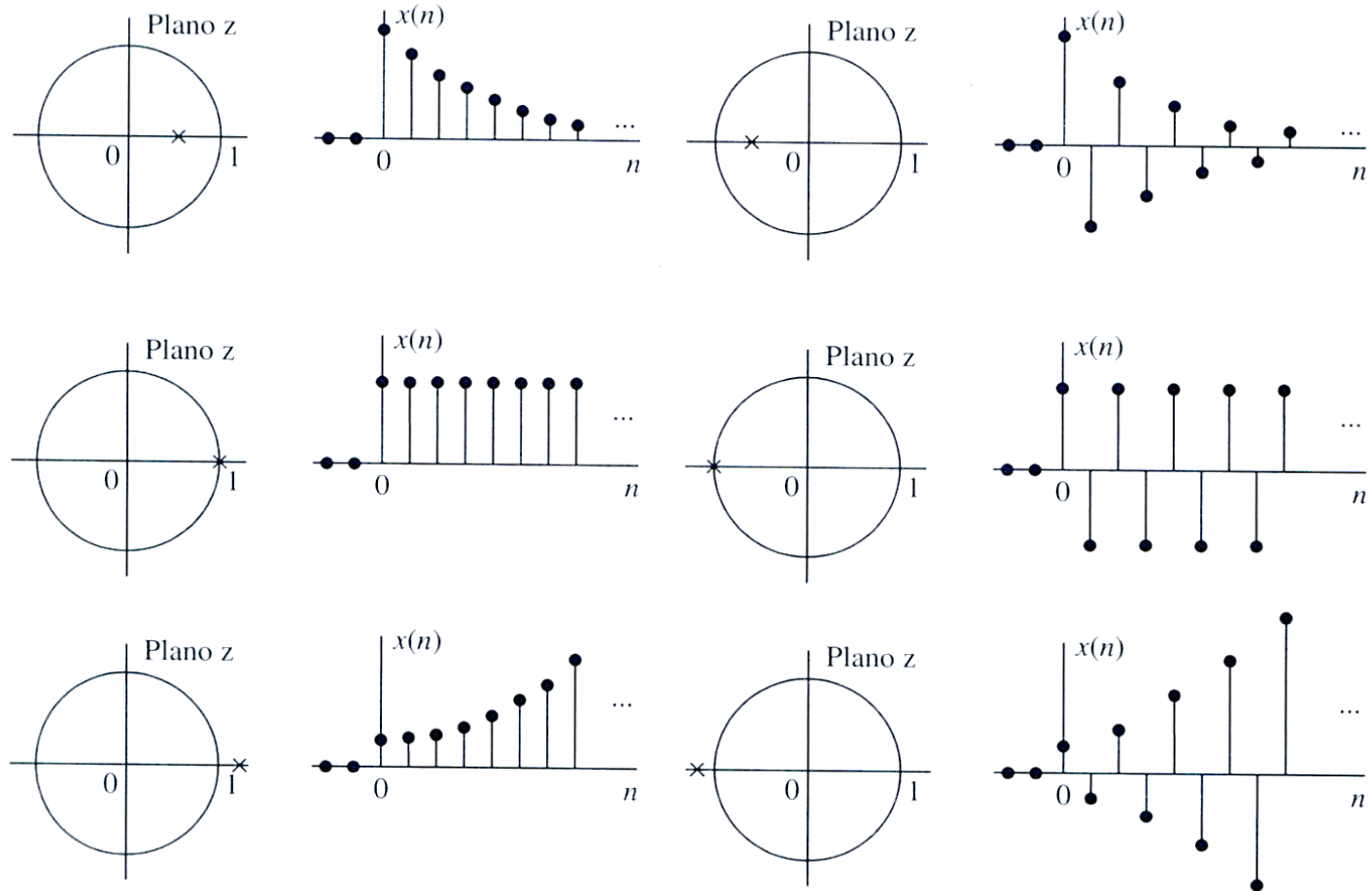
Un sistema LTI es causal si, y solo si:

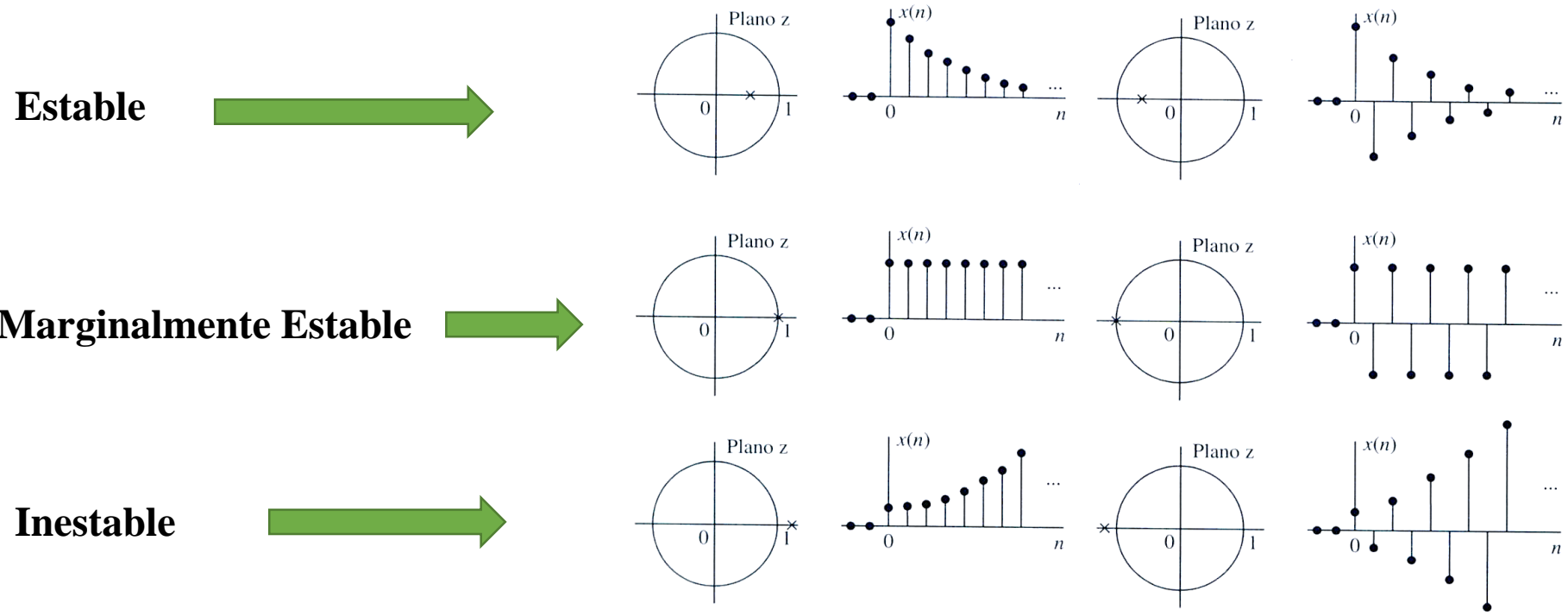
- La ROC es externa al círculo que contiene el polo más externo.
- El orden del numerador es menor que el del denominador



Ejemplo de ROC para sistemas causales:

$$x(n) = a^n u(n) \quad \longrightarrow \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a|$$



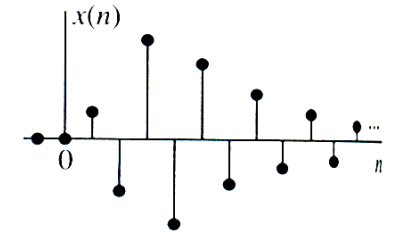
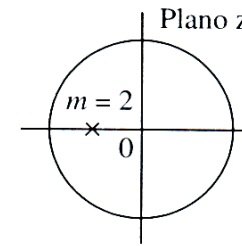
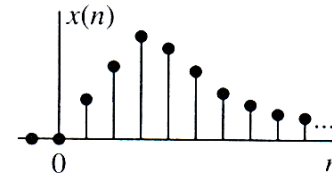
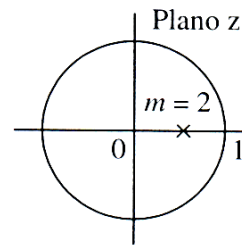


- Si la ROC contiene el círculo unitario es un sistema o señal estable.
- Si la ROC no contiene el círculo unitario, es un sistema o señal inestable o marginalmente estable.

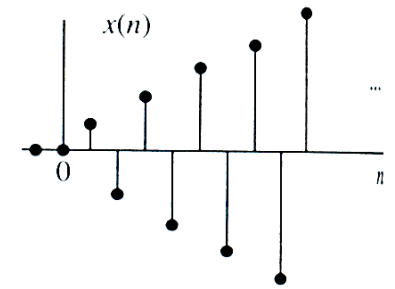
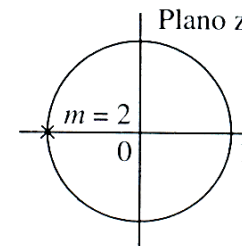
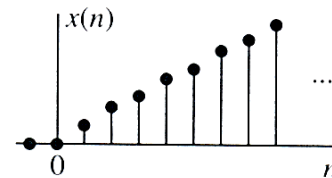
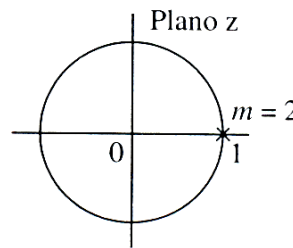
Considerando polos dobles:

$$x(n) = na^n u(n) \leftrightarrow X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$

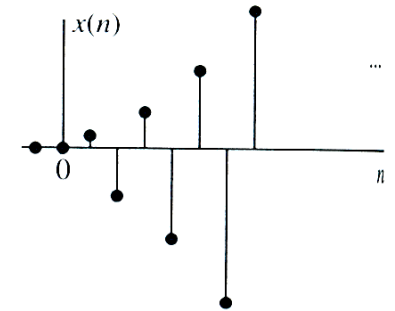
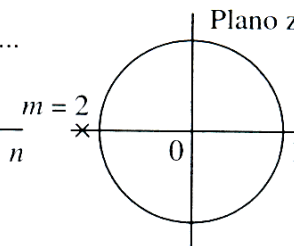
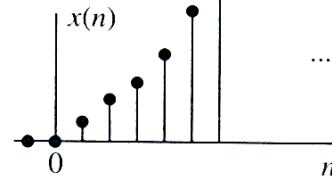
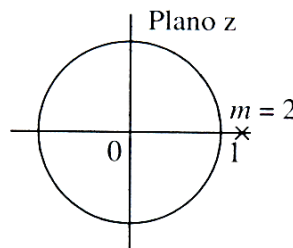
Estable



Inestable



Inestable

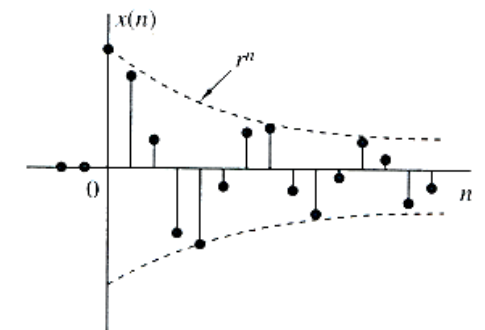
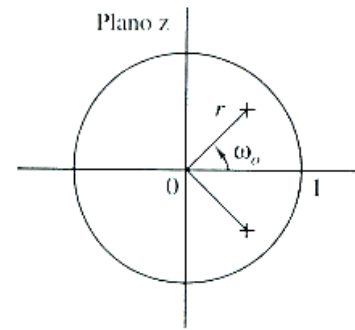
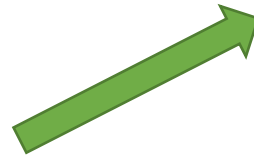


Considerando polos Complejos Conjugados:

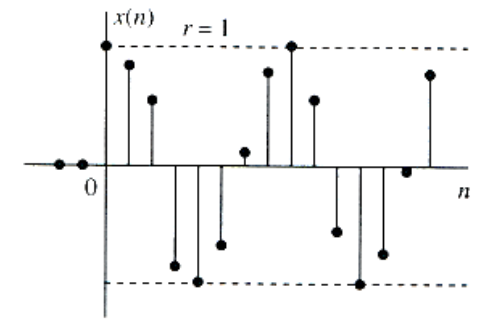
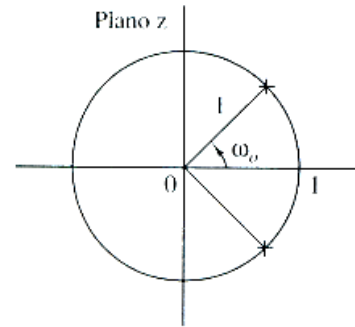
$$x(n) = na^n \cos \omega_0 n u(n)$$

$$X(z) = \frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$$

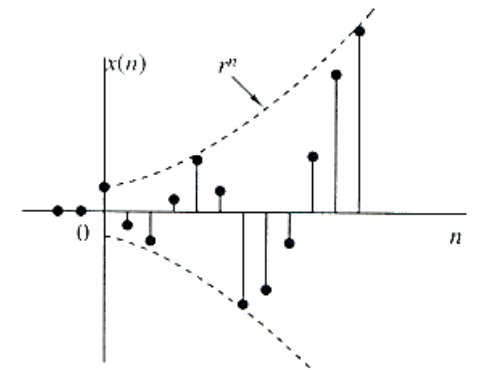
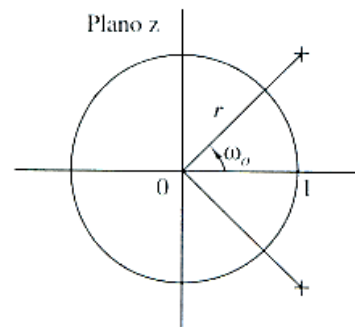
Estable



Marginalmente Estable



Inestable



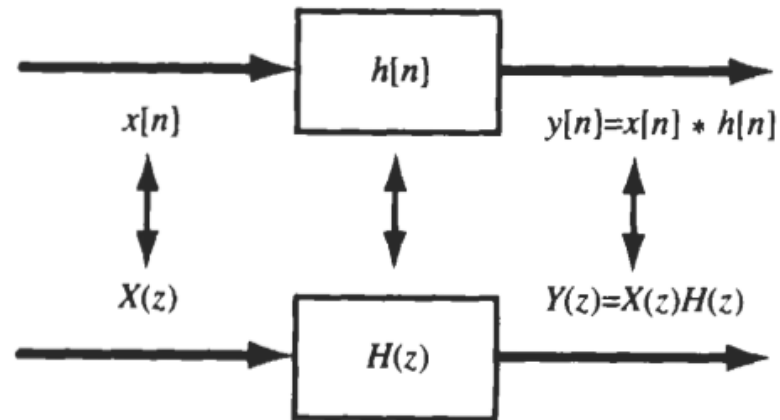
Conclusiones sobre estabilidad en sistemas LTI causales mediante la TZ

- Un sistema es estable si, y solo si, la ROC incluye el círculo unitario.
- Un sistema es estable y causal si, y solamente si, todos los polos están dentro del círculo unitario.

Función de transferencia de un sistema $H(z)$

Un sistema puede ser totalmente descrito por la transformada de su respuesta al impulso. Esta transformada se denomina Función de Transferencia del sistema y es:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



Ejemplo:

Obtenga la función de transferencia del sistema descrito por la siguiente ecuación a diferencias:

$$y[n] = x[n] + 3x[n-1] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

El primer paso consiste en aplicar la transformada Z a la expresión:

$$Y(z) = X(z) + 3z^{-1}X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z)$$

Ejemplo:

Trabajando algebraicamente en la expresión:

$$Y(z) = X(z) + 3z^{-1}X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z)$$

$$Y(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) = X(z)(1 + 3z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

De esta forma se puede obtener la función de transferencia sin conocer la respuesta al impulso, y analizando la distribución de polos y ceros de $H(z)$ es posible inferir la estabilidad del sistema y su dinámica.

Propiedades de la TZ:

Table 4-2. Some Properties of the z-Transform

Property	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linearity	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Time shifting	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R' \supset R \cap \{0 < z < \infty\}$
Multiplication by z_0^n	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$R' = z_0 R$
Multiplication by $e^{j\Omega_0 n}$	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0} z)$	$R' = R$
Time reversal	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$R' = \frac{1}{R}$
Multiplication by n	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R' = R$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R' \supset R \cap \{ z > 1\}$
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

Propiedades de la TZ:

Table 4-2. Some Properties of the z-Transform

Property	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linearity	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Time shifting	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R' \supset R \cap \{0 < z < \infty\}$
Multiplication by z_0^n	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$R' = z_0 R$
Multiplication by $e^{j\Omega_0 n}$	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0} z)$	$R' = R$
Time reversal	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$R' = \frac{1}{R}$
Multiplication by n	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R' = R$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R' \supset R \cap \{ z > 1\}$
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

