SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería en Computación

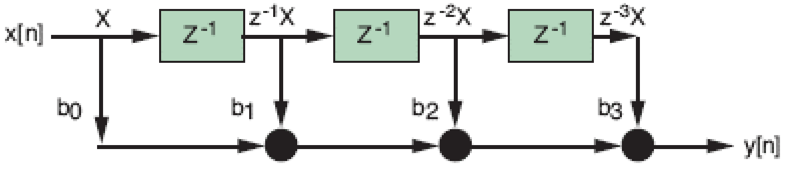
UNIDAD 7

TRANSFORMADA "Z" Y SISTEMAS DIGITALES

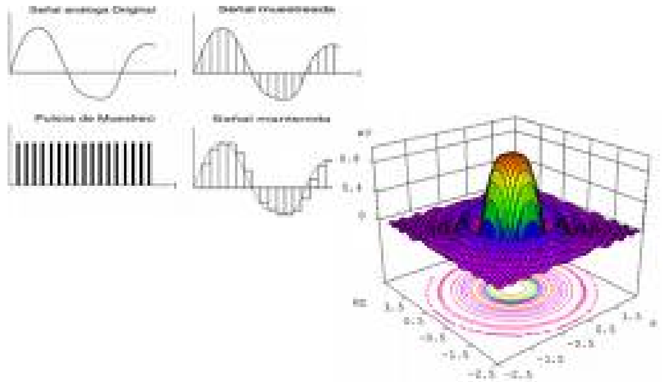
TRANSFORMADA Z

¿Para que nos sirve la Transformada Z?

Nos permite diseñar y analizar sistemas digitales de manera eficiente. Del mismo modo que la Transformada de Laplace nos simplificaba el análisis de ecuaciones diferenciales, la Transformada Z nos simplifica el análisis de ecuaciones a diferencias.



Síntesis



Análisis

TRANSFORMADA Z

La Transformada Z de una señal discreta se escribe como $X(z) = Z\{x[n]\}$ y se calcula de la siguiente manera:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \qquad\qquad z = re^{j\omega}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

Frecuentemente se trabaja con señales “causales”, y la TZ bilateral, se convierte en la TZ unilateral:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}}$$

La transformada Z de una señal es una función de variable compleja, y normalmente tiene polos y ceros que definen el comportamiento de esta función.
Veamos esto con un ejemplo:

La transformada **Z** de una señal *x*[*n*] está dada por la expresión:

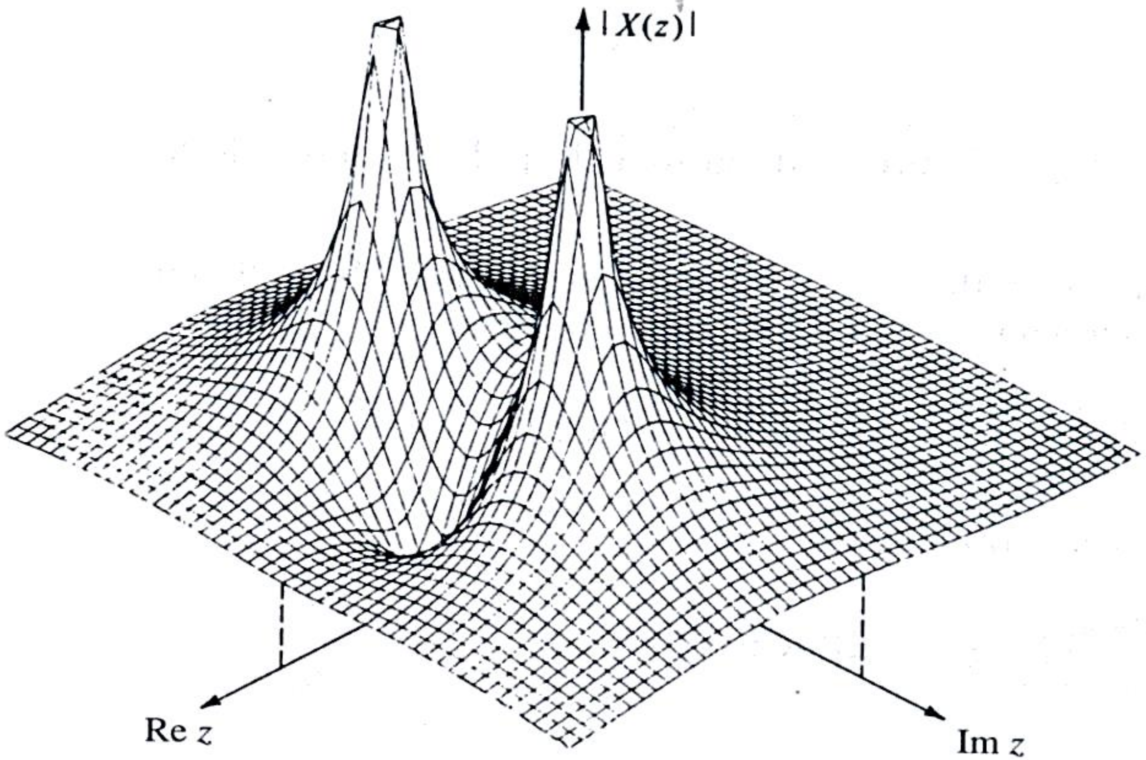
$$X(z)=\frac{z^{-1}-z^{-2}}{1+1{,}2732\,z^{-1}+0{,}81\,z^{-2}}$$

Tiene un cero en $z_1=1$

y dos polos en $p_1\; y\; p_2 = 0{,}9\; e^{\mp\frac{3}{4}\pi}$

Polos y Ceros de la función:

$$X(z)=\frac{z^{-1}-z^{-2}}{1+1{,}2732\,z^{-1}+0{,}81\,z^{-2}}$$



(a)

Pueden existir zonas del plano complejo “z” en donde la función sea nula o infinita. Estos puntos, conocidos como polos y ceros, son muy importantes.

Región de Convergencia de la Transformada Z “ROC”

Para que la expresión matemática de la TZ sea absolutamente sumable, es necesario definir una región de valores de “z”, es decir: ¿Para qué valores de “z” la sumatoria tiende a un valor finito?

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

El conjunto de valores de Z para los cuales existe la TZ es llamado Región de Convergencia o ROC

Región de Convergencia de la Transformada Z "ROC"

Veamos un ejemplo para aclarar el concepto de la ROC:

Calcular la TZ de la siguiente señal: $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty \Rightarrow |az^{-1}| < 1 \Rightarrow \boxed{|z| > |a|.}$$

Región de Convergencia de la Transformada Z “ROC”

Veamos un ejemplo para aclarar el concepto de la ROC:

Calcular la TZ de la siguiente señal: $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{(az^{-1})^0 - (az^{-1})^\infty}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

Expresión matemática de la TZ

ROC

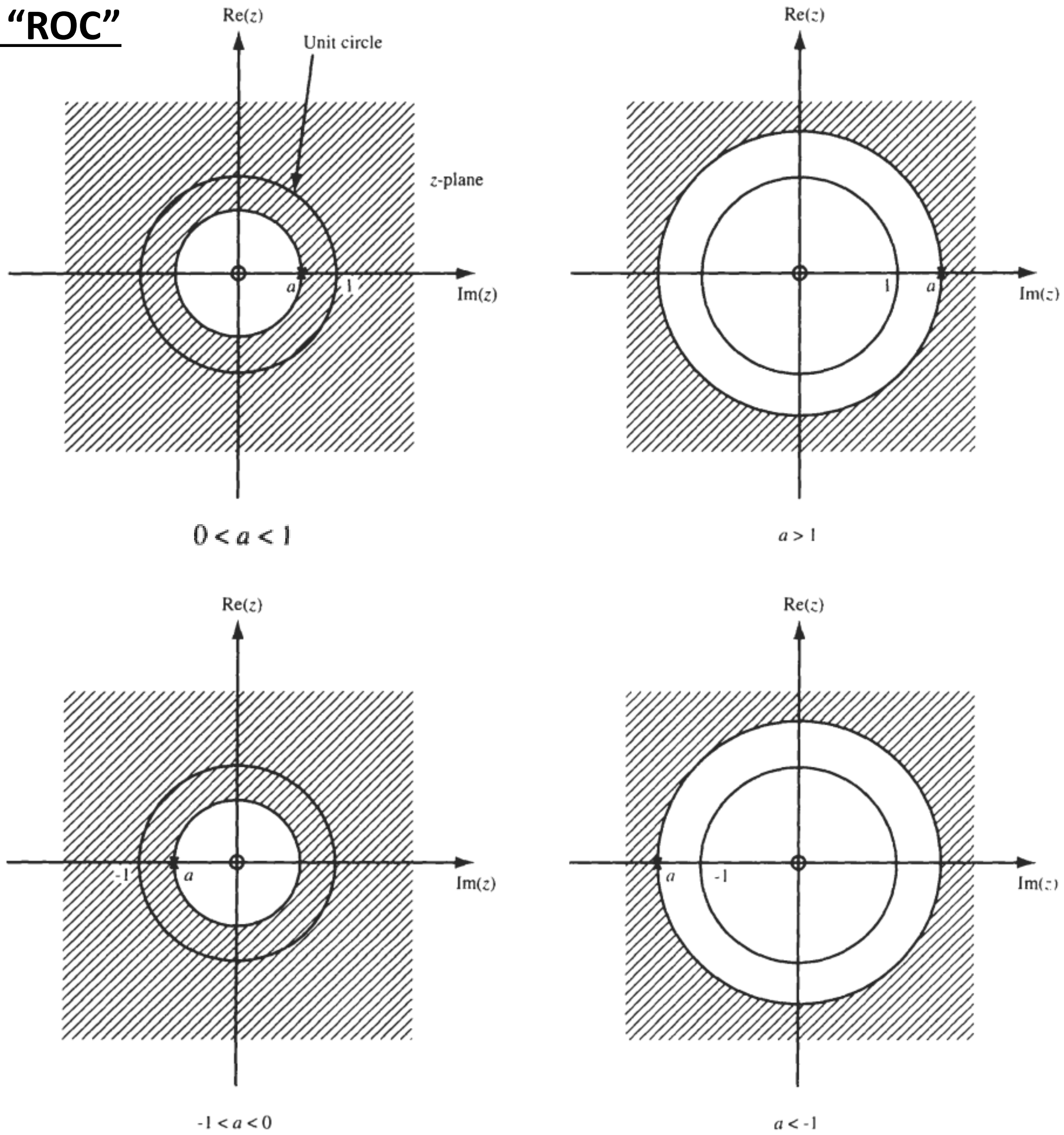
Región de Convergencia de la Transformada Z "ROC"

Gráficamente, la ROC y los Polos y Ceros en el plano Z son:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{(az^{-1})^0 - (az^{-1})^\infty}{1 - az^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad |z| > |a|$$

El área rayada es la ROC, y representa los valores de "z" para los cuales existe X(z)



Ejemplo 2:

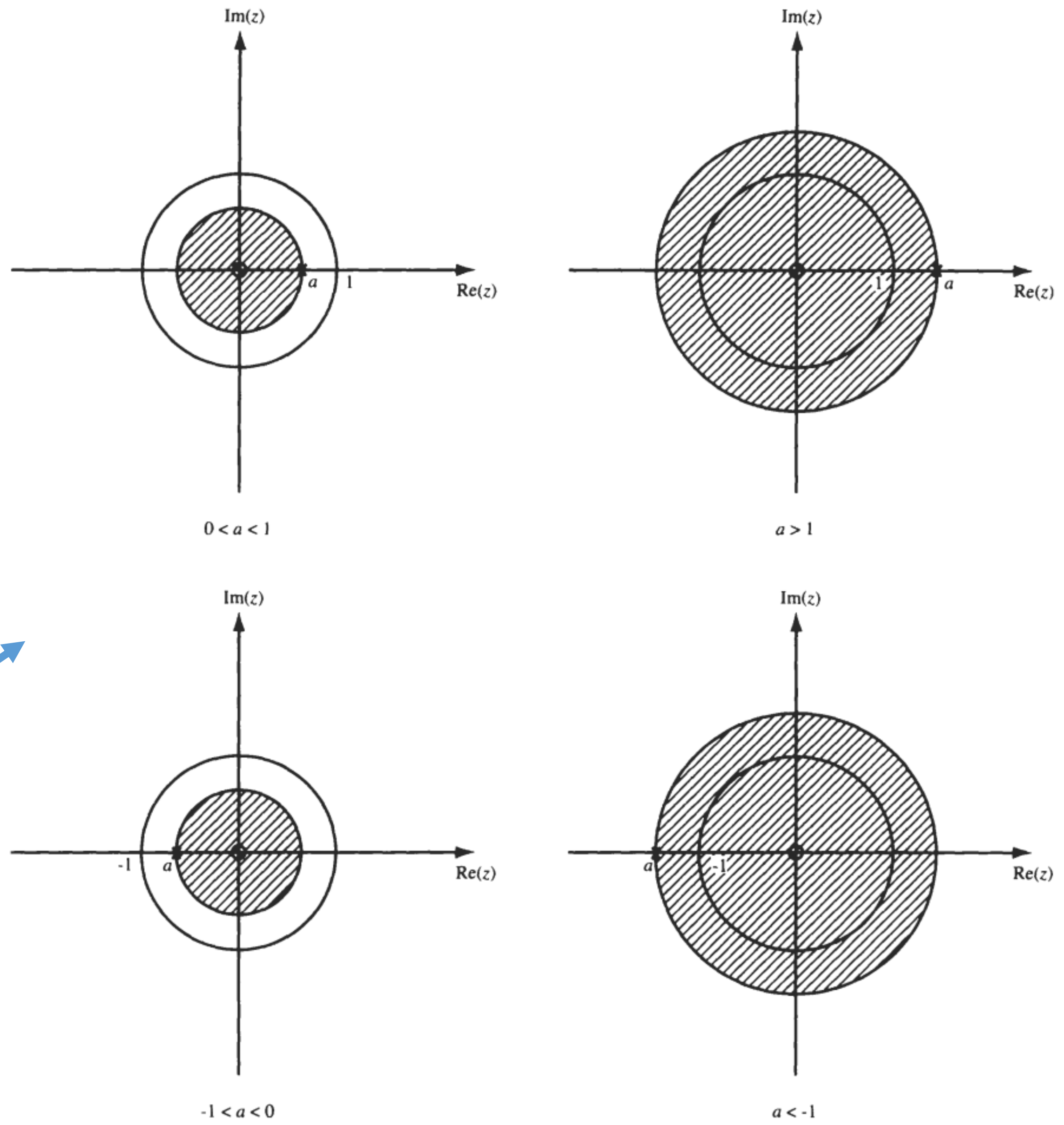
Calcular la TZ de la siguiente señal:

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

Resolviendo la transformada para esta señal, se obtiene:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z-a} \qquad |z| < |a|$$



$$x[n] = a^n u[n] \quad \Rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \quad \Rightarrow \quad X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| < |a|$$

Comparando las expresiones matemáticas de la TZ, vemos que las dos transformadas son idénticas para distintas señales, pero no así la ROC, por lo tanto:

La especificación de la TZ de una señal requiere tanto de la expresión matemática como de la ROC

Propiedades más importantes de la ROC

Propiedad 1: La ROC consiste en un anillo en el plano z centrado en el origen.

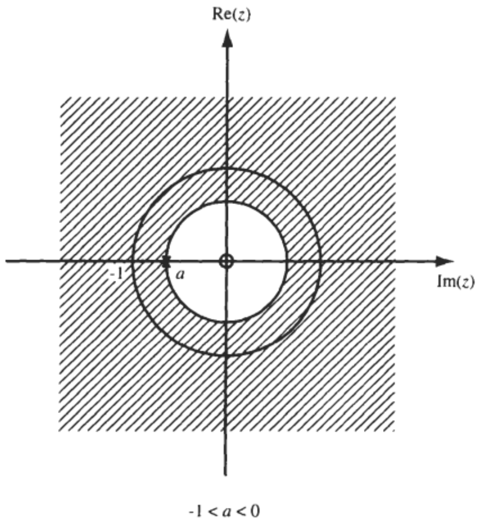
Propiedad 2: La ROC no contiene ningún polo.

Propiedad 3: Si $x[n]$ es una señal de derecha, la ROC es el exterior de un círculo de radio $|x| = r_{max}$

Propiedad 4: Si $x[n]$ es una señal de izquierda, la ROC es el interior de un círculo de radio $|x| = r_{min}$

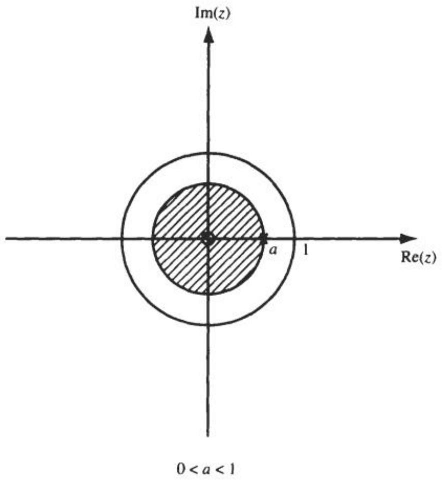
Señal de derecha

$x[n] = a^n u[n]$



Señal de izquierda

$x[n] = -a^n u[-n-1]$



Transformadas Z por tabla:

Notar que hay varias idénticas, pero con distintas ROC!

Table 4-1. Some Common z-Transform Pairs

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}, \dfrac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}, \dfrac{z}{z-1}$	$\|z\|<1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 if $(m>0)$ or ∞ if $(m<0)$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}, \dfrac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}, \dfrac{z}{z-a}$	$\|z<\|a\|$
$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\|<\|a\|$
$(n+1)a^n u[n]$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}, \left[\dfrac{z}{z-a}\right]^2$	$\|z\|>\|a\|$
$(\cos \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z^2-(\cos \Omega_0)z}{z^2-(2\cos \Omega_0)z+1}$	$\|z\|>1$
$(\sin \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{(\sin \Omega_0)z}{z^2-(2\cos \Omega_0)z+1}$	$\|z\|>1$
$(r^n \cos \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z^2-(r\cos \Omega_0)z}{z^2-(2r\cos \Omega_0)z+r^2}$	$\|z\|>r$
$(r^n \sin \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{(r\sin \Omega_0)z}{z^2-(2r\cos \Omega_0)z+r^2}$	$\|z\|>r$
$\begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>0$

Estas transformadas son las más frecuentes y útiles en el análisis de sistemas y señales discretas:

Table 4-1. Some Common z-Transform Pairs

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}, \dfrac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}, \dfrac{z}{z-1}$	$\|z\|<1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 if $(m>0)$ or ∞ if $(m<0)$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}, \dfrac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}, \dfrac{z}{z-a}$	$\|z<\|a\|$
$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$

Análisis y caracterización de sistemas LTI mediante la TZ

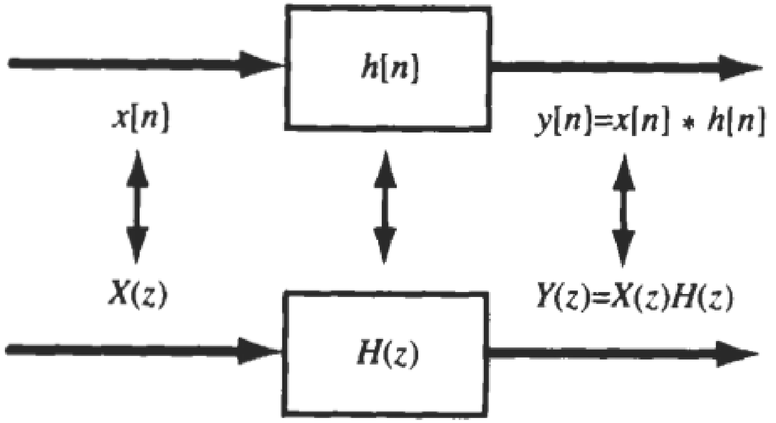
Causalidad:

Un sistema es causal si, ante una entrada, sus salida se produce en intervalos de tiempo posteriores a dicha entrada. Son sistemas reales, no anticipativos.

Un sistema LTI es causal si, y solo si:

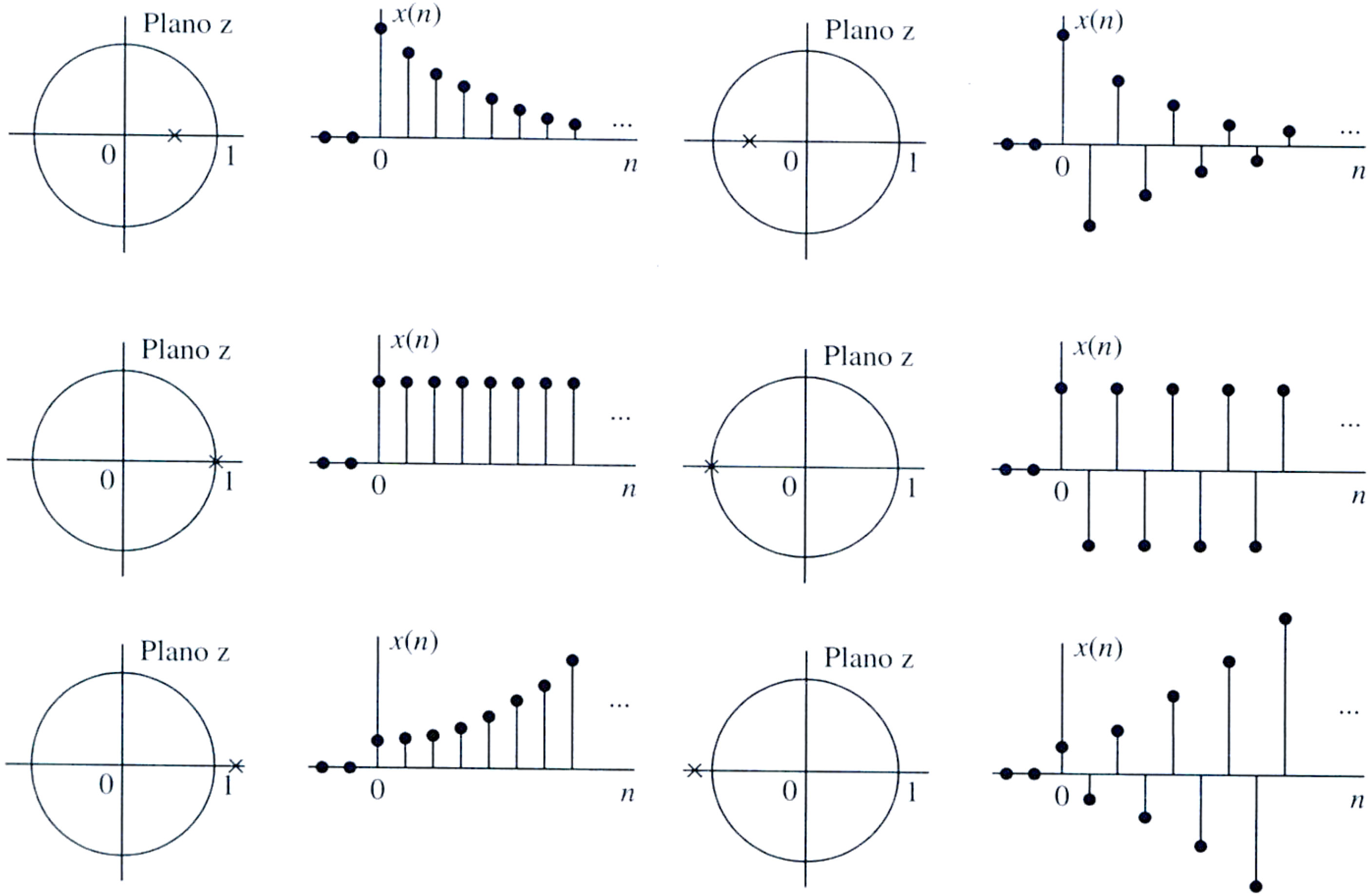
(a) La ROC es externa al circulo que contiene el polo más externo.

(b) El orden del numerador es menor que el del denominador



Ejemplo de ROC para sistemas causales:

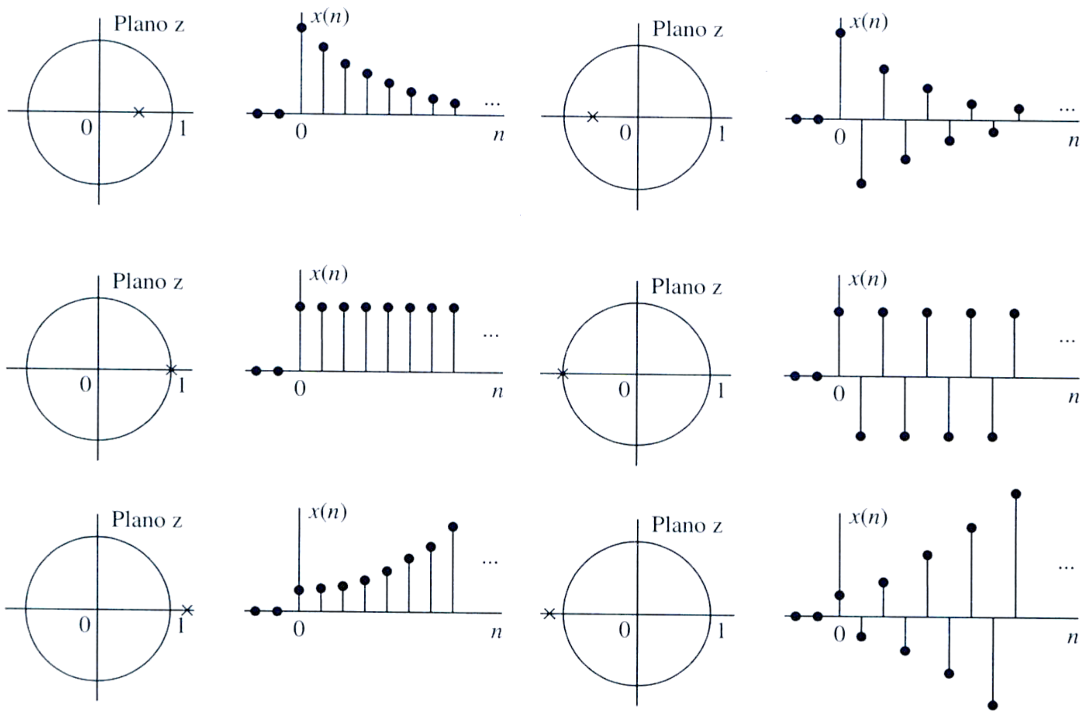
$$x[n] = a^n u[n] \quad \Rightarrow \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad |z| > |a|$$



Estable

Marginalmente Estable

Inestable



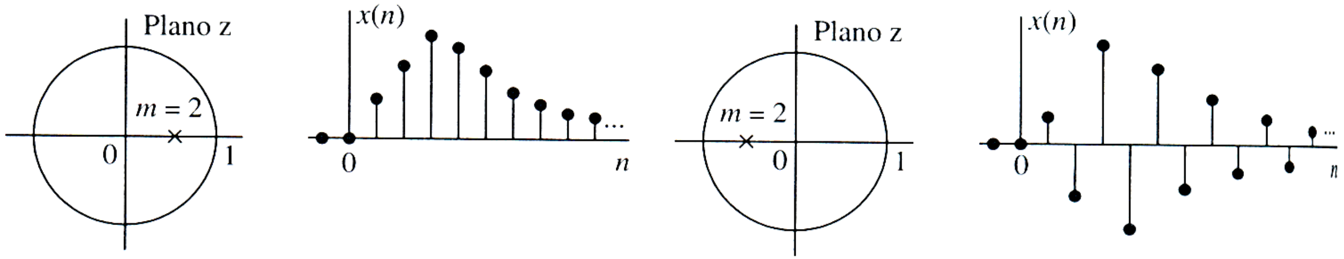
- Si la ROC contiene el circulo unitario es un sistema o señal estable.

- Si la ROC no contiene el círculo unitario, es un sistema o señal inestable o marginalmente estable.

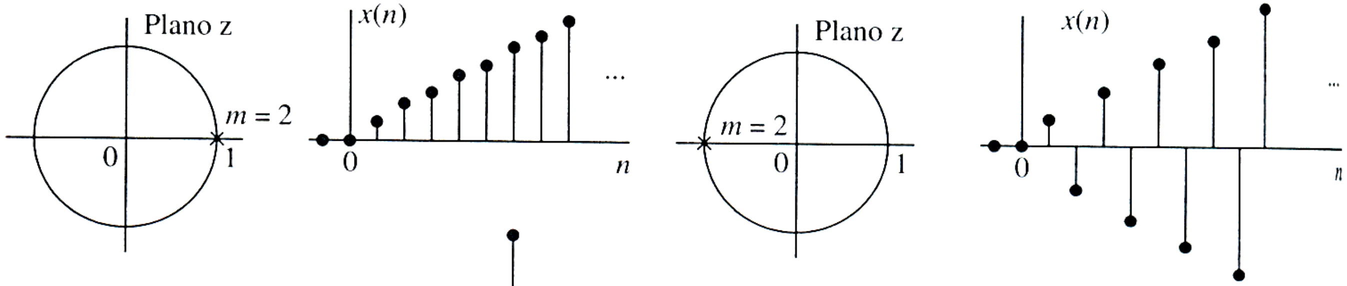
Considerando polos dobles:

$$x[n] = na^n u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

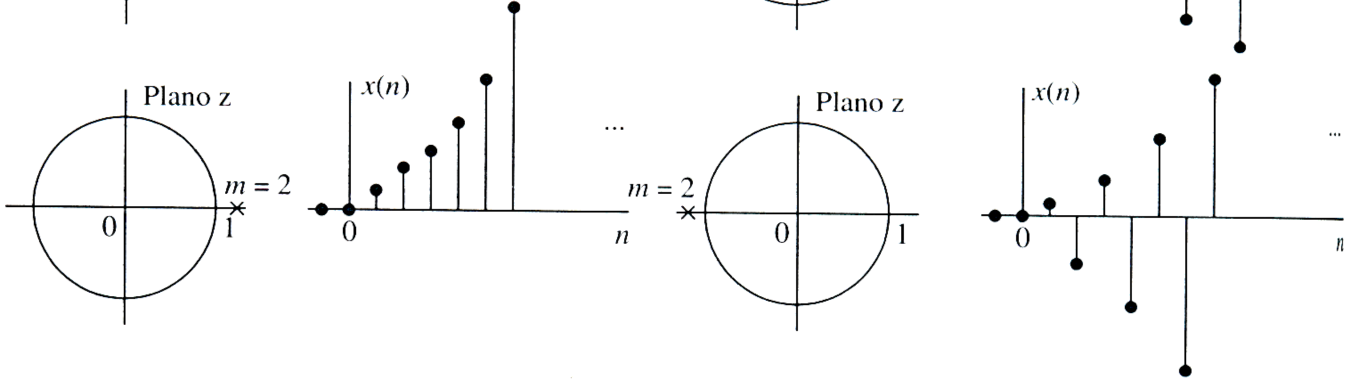
Estable



Inestable



Inestable



Considerando polos Complejos Conjugados:

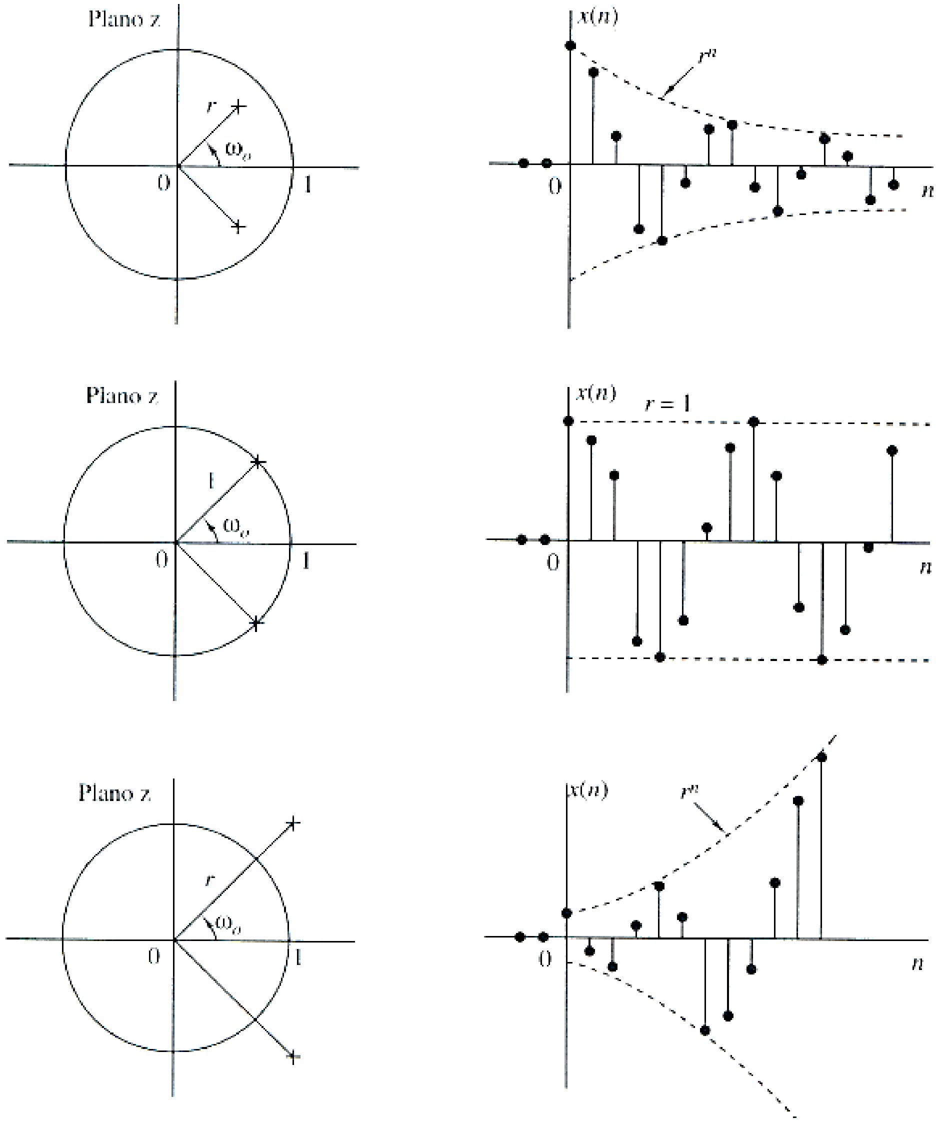
$$x[n] = na^n cos(\omega_0 n)u[n]$$

$$X(z) = \frac{1 - az^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2 z^{-2}}$$

Estable

Marginalmente Estable

Inestable



Conclusiones sobre estabilidad en sistemas LTI causales mediante la TZ

- Un sistema es estable si, y solo si, la ROC incluye el círculo unitario.
- Un sistema es estable y causal si, y solamente si, todos los polos están dentro del circulo unitario.

Propiedades de la TZ:

Table 4-2. Some Properties of the *z*-Transform

Property	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linearity	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Time shifting	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R' \supset R \cap \{0 < \lvert z\rvert < \infty\}$
Multiplication by z_0^n	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$R' = \lvert z_0\rvert R$
Multiplication by $e^{j\Omega_0 n}$	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0}z)$	$R' = R$
Time reversal	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$R' = \frac{1}{R}$
Multiplication by n	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$R' = R$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R' \supset R \cap \{\lvert z\rvert > 1\}$
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

Propiedades de la TZ:

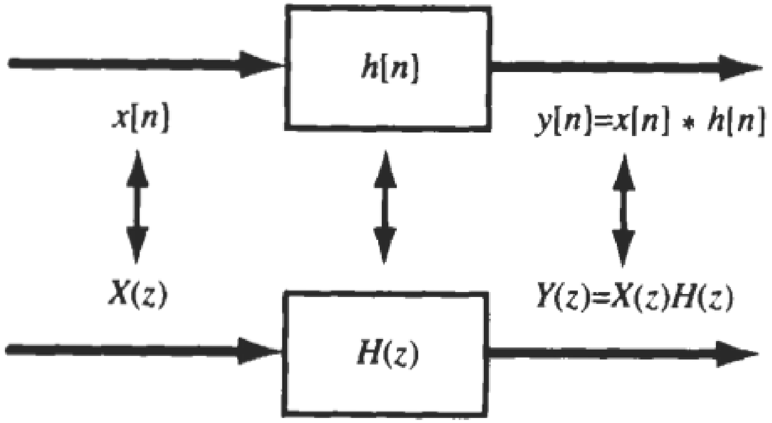
Table 4-2. Some Properties of the z-Transform

Property	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linearity	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Time shifting	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R' \supset R \cap \{0<\lvert z\rvert<\infty\}$
Multiplication by z_0^n	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$R' = \lvert z_0\rvert R$
Multiplication by $e^{j\Omega_0 n}$	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0}z)$	$R' = R$
Time reversal	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$R' = \frac{1}{R}$
Multiplication by n	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$R' = R$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R' \supset R \cap \{\lvert z\rvert>1\}$
Convolution	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

Función de transferencia de un sistema H(Z)

Un sistema puede ser totalmente descripto por la transformada de su respuesta al impulso. Esta transformada se denomina Función de Transferencia del sistema y es:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



Ejemplo:

Obtenga la función de transferencia del sistema descripto por la siguiente ecuación a diferencias:

$$y[n] = x[n] + 3x[n-1] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

El primer paso consiste en aplicar la transformada Z a la expresión:

$$Y(z) = X(z) + 3z^{-1}X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z)$$

Ejemplo:

Trabajando algebraicamente en la expresión:

$$Y(z) = X(z) + 3z^{-1}X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z)$$

$$Y(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) = X(z)\left(1 + 3z^{-1}\right)$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}}$$

De esta forma se puede obtener la función de transferencia y analizando la distribución de polos y ceros de H(z) es posible inferir la estabilidad del sistema y su dinámica.

Antitransformada Z – Ejemplo práctico.

¿Cómo puedo calcular la salida del sistema ante cualquier entrada conociendo H(z)?

$$H(z) = \frac{1}{(z-0.8)(z+0.3)}$$

El proceso de "simulación" temporal que hacemos por tabla es tedioso, pero utilizando las propiedades de la TZ podemos optimizar y **evaluar salidas para entradas de dinámica compleja.**

Supongamos que necesitamos calcular la salida del sistema H(z) ante la entrada del tipo escalón unitario.

Antitransformada Z – Ejemplo práctico.

La salida del sistema por propiedad de convolución es:

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{(z-0.8)(z+0.3)}$$

Si antitransformamos Y(z) tendremos la secuencia de salida ante la entrada X(z). Para eso, podemos aplicar fracciones simples, quedando de la siguiente forma:

$$Y(z) = \frac{3.84z}{(z-1)} - \frac{4.54z}{(z-0.8)} + \frac{0.699z}{(z+0.3)}$$

$$TZ^{-1}\left\{\frac{3.84z}{(z-1)}\right\} = 3.84u[n]$$

$$TZ^{-1}\left\{\frac{-4.54z}{(z-0.8)}\right\} = -4.54(0.8)^{n}u[n]$$

$$TZ^{-1}\left\{\frac{0.66z}{(z+0.3)}\right\} = 0.699(-0.3)^{n}u[n]$$

Antitransformada Z – Ejemplo práctico.

Como resultado, la salida del sistema ante una entrada escalón es:

$$y[n]=\left[3.84-4.54(0.8)^{n}+0.699(-0.3)^{n}\right]u[n]$$

Aquí podemos evaluar la salida del sistema para diferentes valores de “n” y verificar resultados de simulación, ver estabilidad, etc.

Preguntas:

1) ¿Es un sistema estable para la entrada analizada?
2) ¿Cómo es la ROC de este sistema?
3) La estabilidad ¿Depende de la señal de entrada?