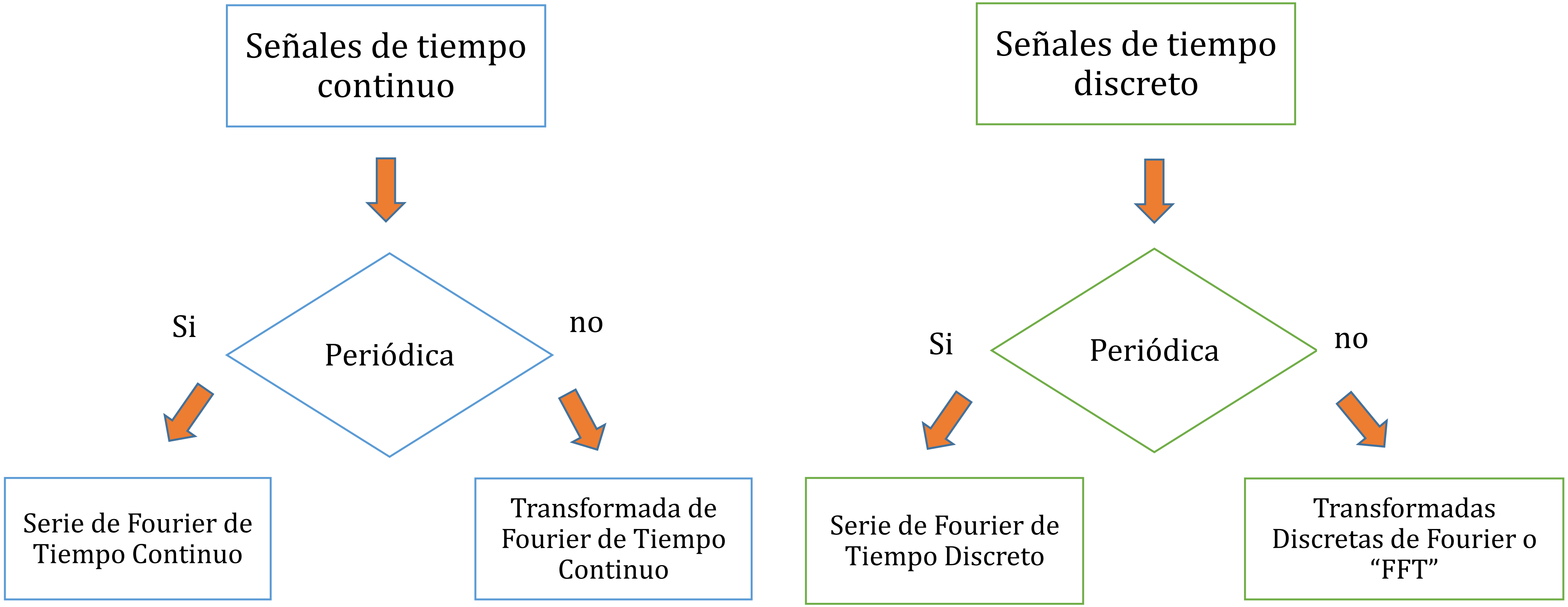
SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería en Computación

UNIDAD 6

ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS ESPECTRAL



TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Aplicamos la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) cuando debemos realizar un análisis espectral de una señal discreta y no periódica.

Ecuación de análisis

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

Ecuación de Síntesis

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Diferencias entre la Serie de Fourier de Tiempo Discreto y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO	TRANSFORMADA FOURIER DE TIEMPO DISCRETO
$C_k = \dfrac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$
$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} C_k\, e^{jk\Omega t}$	$x[n] = \dfrac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

La cantidad $X(\Omega)$ se conoce como espectro de la señal y posee algunas propiedades muy importantes:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)}$$

Se trata de un espectro continuo y que al igual que los espectros que se estudiaron antes, en este caso es un espectro complejo, con módulo y fase.

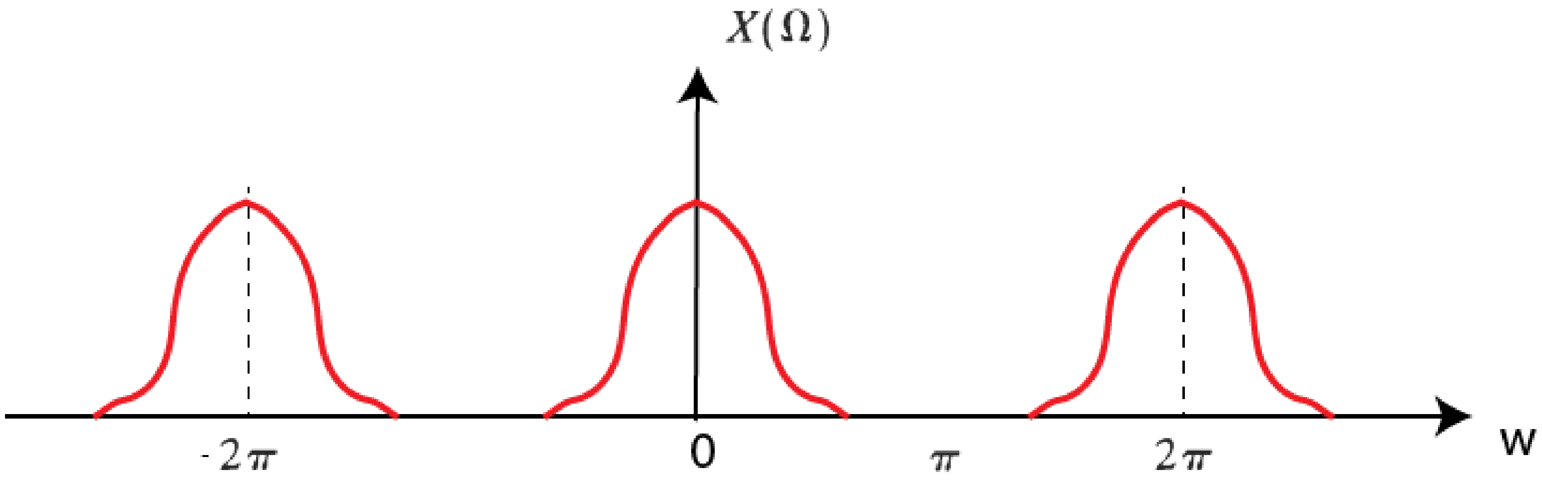
Si la señal $x[n]$ es real, la cantidad $|X(\Omega)|$ posee simetría par y la fase de $X(\Omega)$ simetría impar.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Otra propiedad fundamental de $X(\Omega)$, y que comparte con todos los espectros de señales discretas, es su periodicidad:

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega)$$

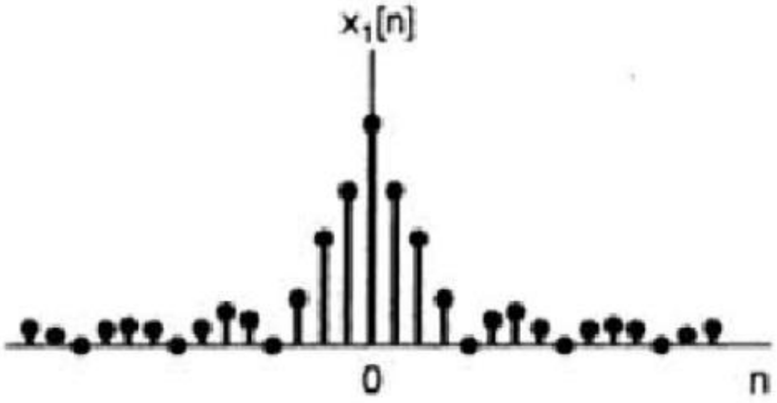
Se trata de un espectro periódico <u>con periodo 2π, y dentro de este rango se distribuyen todas las frecuencias posibles de la señal $x[n]$</u>

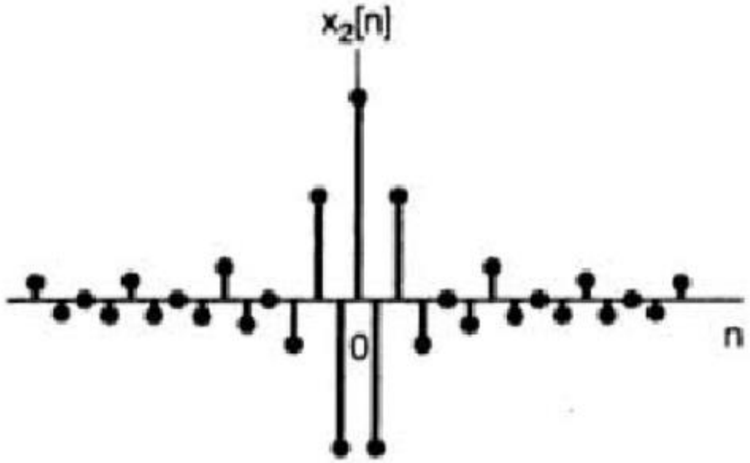


Espectro periódico y distribución de frecuencias:

La periodicidad de $X(\Omega)$ hace que todas las frecuencias que podamos analizar se encuentren limitadas al intervalo - π y + π.

Vamos a analizar dos señales temporales con distinto comportamiento frecuencial:

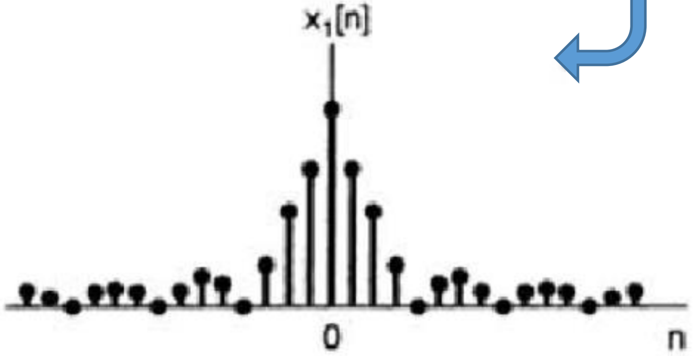


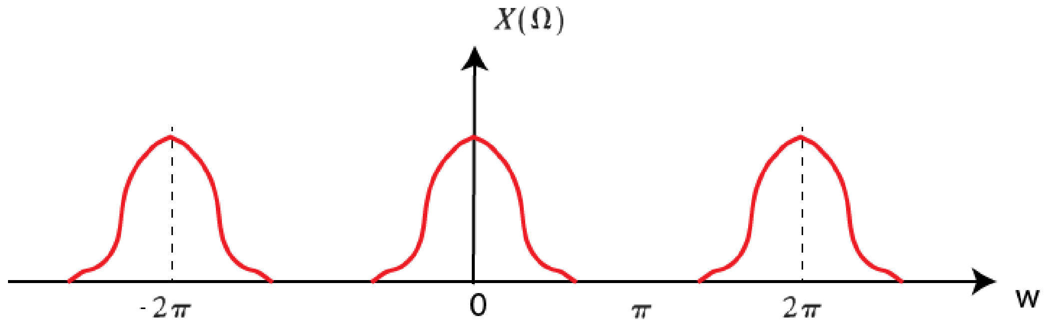


¿Cuál de las dos señales tiene componentes de mayor frecuencia?

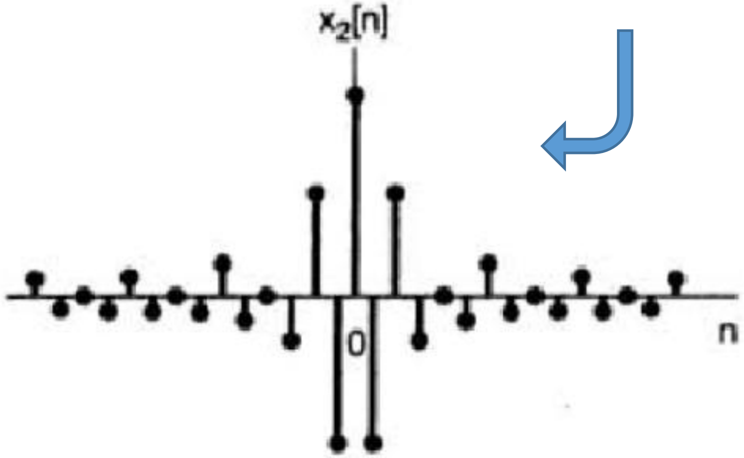
Espectro periódico y distribución de frecuencias:

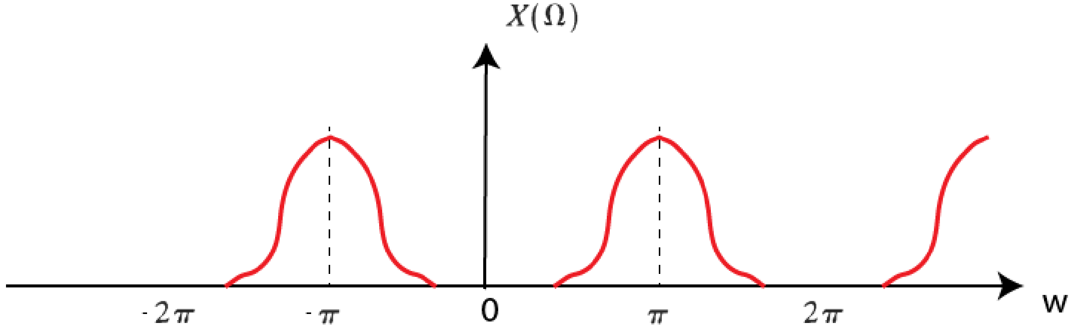
Señal suave, con frecuencias bajas





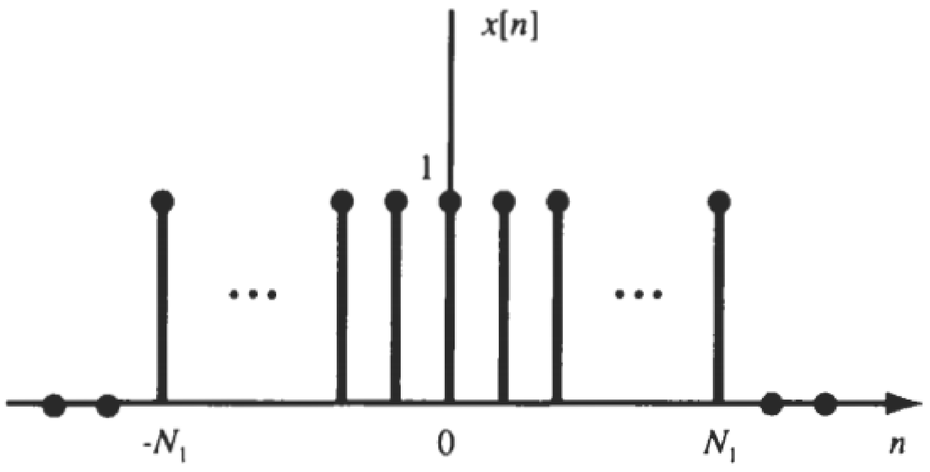
Señal rápida, con frecuencias altas





Ejemplo de TFTD:

Obtener la representación espectral de un pulso discreto para N1= 4 y N1=8:



¿Qué características tendrá el espectro?

¿De qué manera podemos obtener su expresión matemática?

Ejemplo de TFTD:

Las señales más comunes siempre están en tabla, es bueno empezar por ahí!

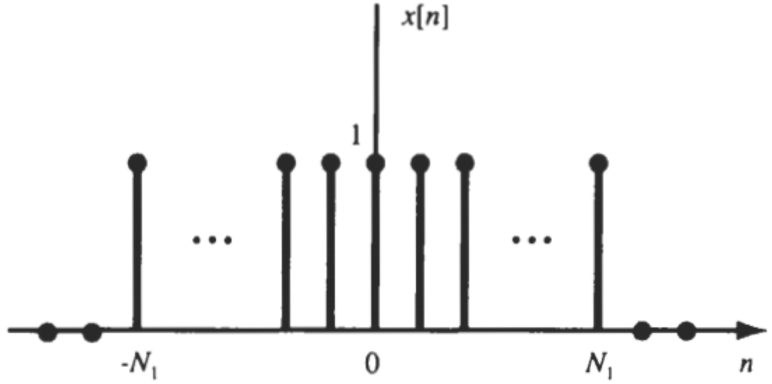


Table 6-2. Common Fourier Transform Pairs

$x[n]$	$X(\Omega)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$x[n]=1$	$2\pi\delta(\Omega), \lvert\Omega\rvert \le \pi$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0), \lvert\Omega\rvert, \lvert\Omega_0\rvert \le \pi$
$\cos \Omega_0 n$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)], \lvert\Omega\rvert, \lvert\Omega_0\rvert \le \pi$
$\sin \Omega_0 n$	$-j\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)], \lvert\Omega\rvert, \lvert\Omega_0\rvert \le \pi$
$u[n]$	$\pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}, \lvert\Omega\rvert \le \pi$
$-u[-n-1]$	$-\pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}, \lvert\Omega\rvert \le \pi$
$a^n u[n], \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$-a^n u[-n-1], \lvert a\rvert > 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$(n+1)a^n u[n], \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$
$a^{\lvert n\rvert}, \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega+a^2}$
$x[n]=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0 & \lvert n\rvert > N_1\end{cases}$	$\dfrac{\sin\left[\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\Omega/2)}$
$\dfrac{\sin Wn}{\pi n}, 0 < W < \pi$	$X(\Omega)=\begin{cases}1 & 0 \le \lvert\Omega\rvert \le W \\ 0 & W < \lvert\Omega\rvert \le \pi\end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN_0]$	$\Omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0), \Omega_0=\dfrac{2\pi}{N_0}$

Ejemplo de TFTD:

Las señales más comunes siempre están en tabla, es bueno empezar por ahí!

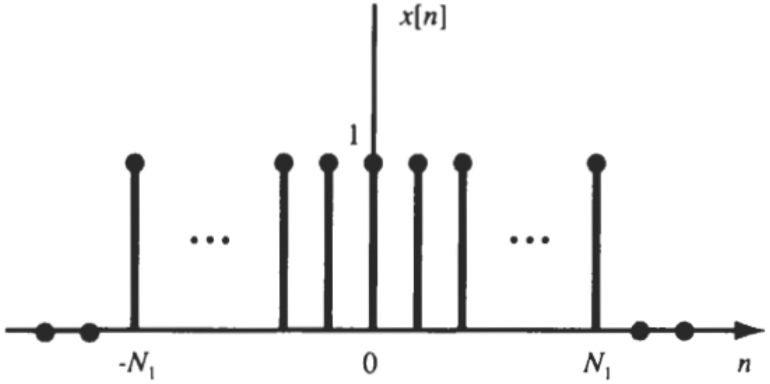
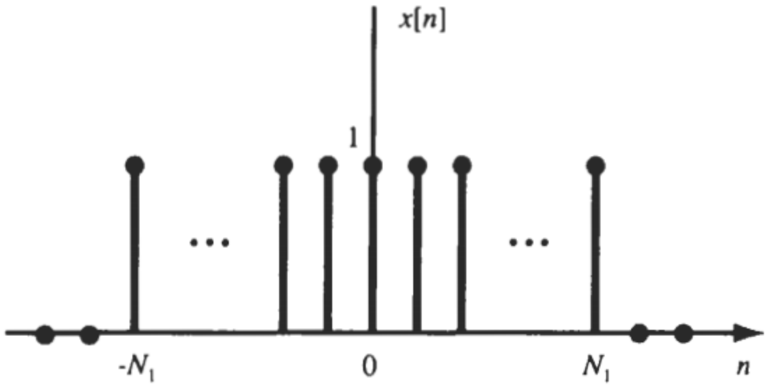


Table 6-2. Common Fourier Transform Pairs

$x[n]$	$X(\Omega)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$x[n]=1$	$2\pi\delta(\Omega), \lvert\Omega\rvert \le \pi$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0), \lvert\Omega\rvert, \lvert\Omega_0\rvert \le \pi$
$\cos \Omega_0 n$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)], \lvert\Omega\rvert, \lvert\Omega_0\rvert \le \pi$
$\sin \Omega_0 n$	$-j\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)], \lvert\Omega\rvert, \lvert\Omega_0\rvert \le \pi$
$u[n]$	$\pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}, \lvert\Omega\rvert \le \pi$
$-u[-n-1]$	$-\pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}, \lvert\Omega\rvert \le \pi$
$a^n u[n], \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$-a^n u[-n-1], \lvert a\rvert > 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$(n+1)a^n u[n], \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$
$a^{\lvert n\rvert}, \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega+a^2}$
$x[n]=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0 & \lvert n\rvert > N_1\end{cases}$	$\dfrac{\sin\left[\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\Omega/2)}$
$\dfrac{\sin Wn}{\pi n}, 0 < W < \pi$	$X(\Omega)=\begin{cases}1 & 0 \le \lvert\Omega\rvert \le W \\ 0 & W < \lvert\Omega\rvert \le \pi\end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN_0]$	$\Omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-k\Omega_0), \Omega_0=\dfrac{2\pi}{N_0}$

Ejemplo de TFTD:

De esta forma, el espectro de un pulso es una sinc cuyo “ancho” es proporcional a N1:



$$X(\Omega) = \frac{\sin\left[\Omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\Omega/2)}$$

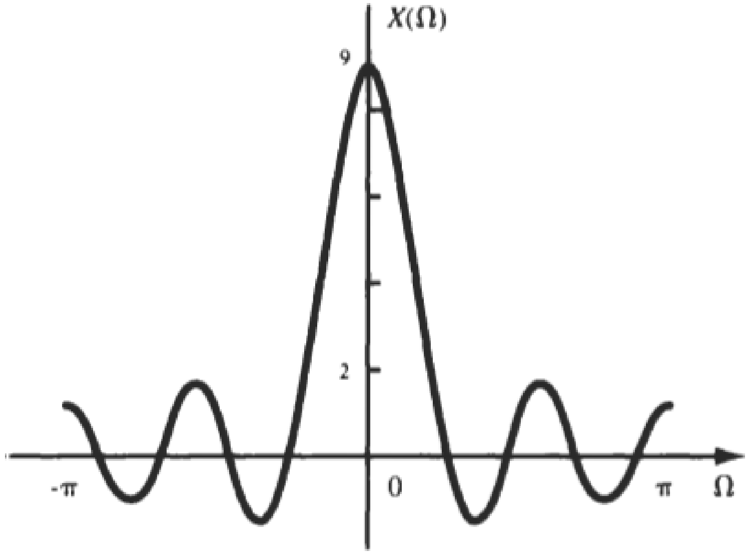
N1=4

$$X(\Omega) = \frac{\sin(4.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

N1=8

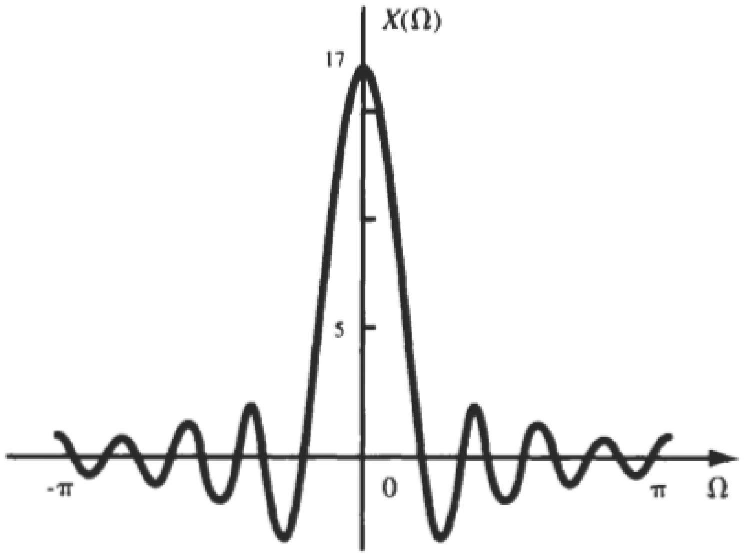
$$X(\Omega) = \frac{\sin(8.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

Ejemplo de TFTD:



N1=4

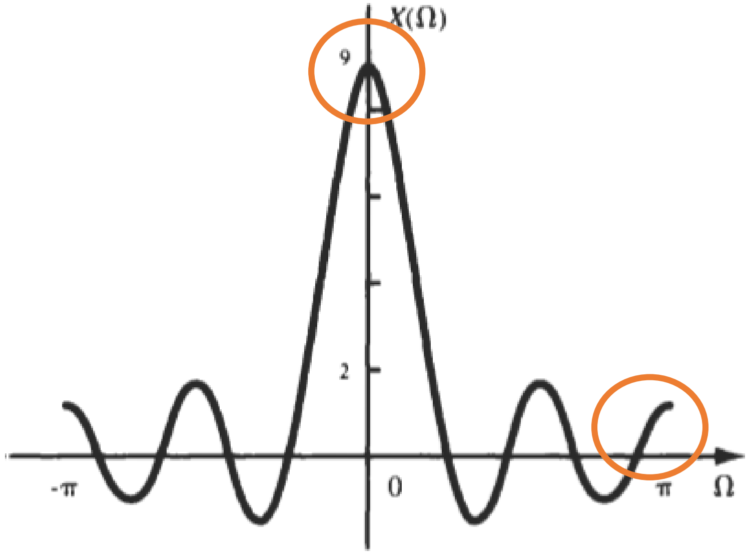
$$X(\Omega) = \frac{\sin(4.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$



N1=8

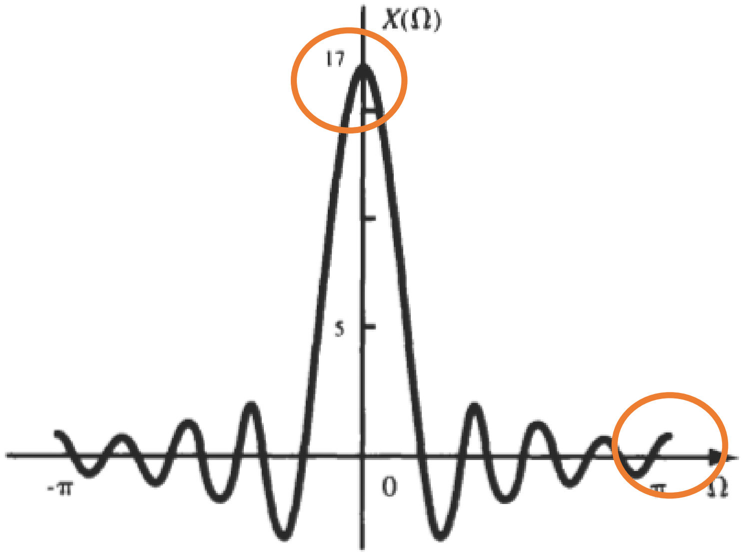
$$X(\Omega) = \frac{\sin(8.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

Ejemplo de TFTD:



N1=4

$$X(\Omega) = \frac{\sin(4.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$



N1=8

$$X(\Omega) = \frac{\sin(8.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

Propiedades de la TFTD

Periodicidad espectral: El espectro resultante de la TFTD es continuo y tiene una periodicidad de 2π. Los rangos de frecuencia útiles o reales van desde - π a π

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega)$$

Desplazamiento en el tiempo: Al igual que otras técnicas de análisis espectral, corrimientos en el tiempo implican aportes de fase en la frecuencia, mientras que el módulo del espectro resulta igual.

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

Propiedades de la TFTD

Desplazamiento en la frecuencia: Si deseamos generar un corrimiento frecuencial en el espectro, debemos multiplicar la señal en el tiempo por una exponencial.

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

Convolución: Equivalente al caso de tiempo continuo, la convolución en el tiempo es el producto en la frecuencia:

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega)$$

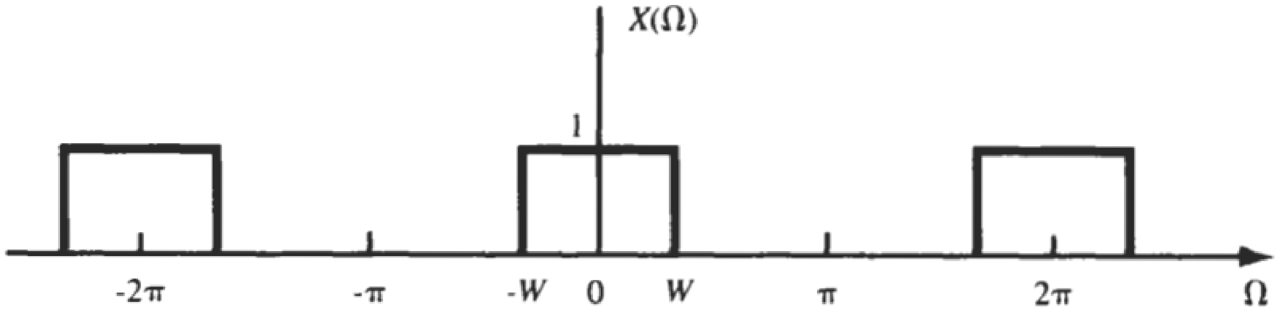
Propiedades de la TFTD

Multiplicación: Lo inverso de lo anterior. Multiplicaciones en el tiempo implican convoluciones en el espectro; tener en cuenta el factor de escala.

$$x_1[n]\,x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega)$$

Ejemplo 2: Encuentre la respuesta temporal de un sistema cuya respuesta en frecuencia esta dada por:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq W \\ 0 & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$



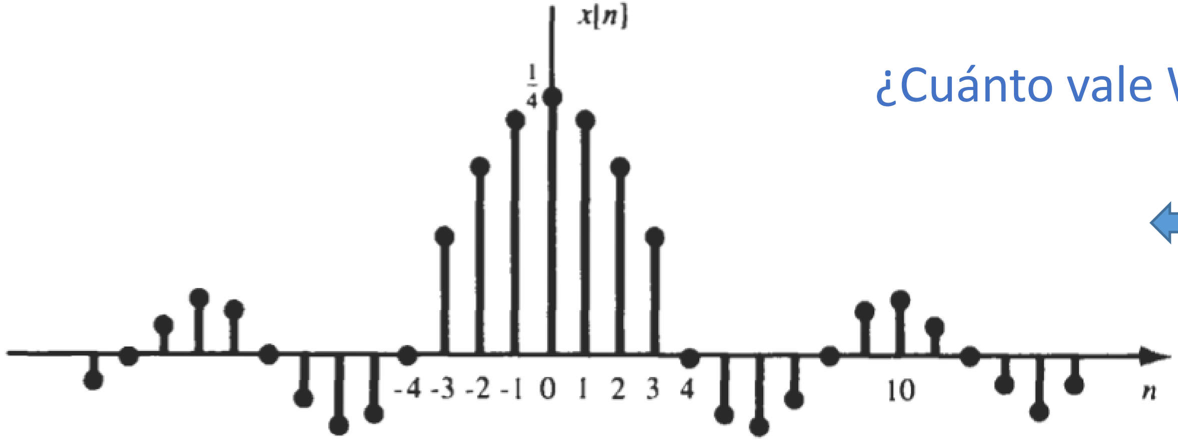
¿Qué tipo de sistema es?

¿Qué forma tiene su respuesta temporal?

Para obtener la respuesta al impulso debemos antitransformar la respuesta en frecuencia, es decir, utilizamos la ecuación de síntesis:

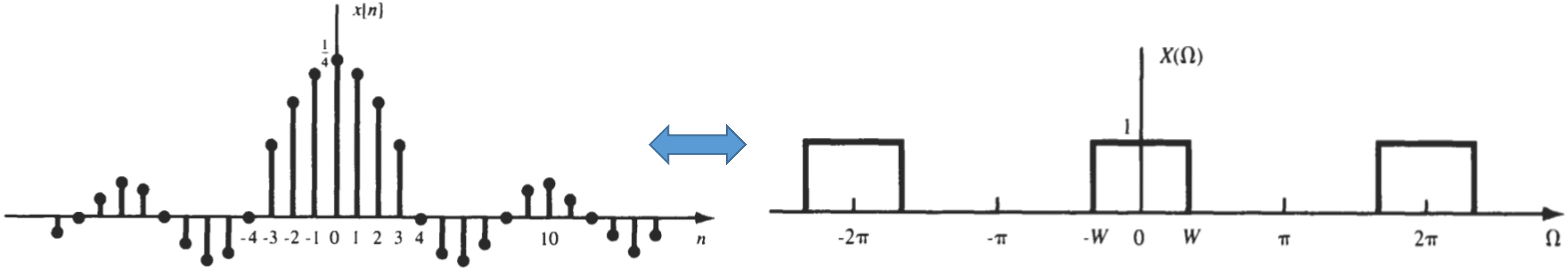
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

$$\frac{\sin Wn}{\pi n} \longleftrightarrow X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \le W \\ 0 & W < |\Omega| \le \pi \end{cases}$$



¿Cuánto vale W para este caso?

La secuencia $\mathrm{x}[n]$ es una secuencia discreta infinita y representa la respuesta temporal de un sistema cuya respuesta en frecuencial es del tipo pasabajos ideal.



¿Qué otros tipos de filtro conoce?

TAREA

Obtenga la respuesta al impulso de un filtro pasabanda

Señales periódicas:

Es posible (y de hecho se utiliza mucho) usar la TFTD para analizar señales periódicas. El resultado, por supuesto, será compatible con la serie de Fourier de Tiempo Discreto.

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k \delta(\omega - \omega_0 k)$$

Donde C_k representa a los coeficientes de la serie de Fourier de tiempo discreto.

Ejemplo señal periódica:

Obtener el espectro de la señal mediante la TFTD:

$$x[n] = \cos(\Omega_0 \text{n})$$

Los coeficientes de la serie salen directamente de la representación exponencial del coseno:

$$\cos(\Omega_0 \text{n}) = \frac{1}{2}\left(e^{j\Omega_0 \text{n}} + e^{-j\Omega_0 \text{n}}\right) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 \text{n}} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 \text{n}}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} = C_{-1}$$

Ejemplo señal periódica:

Por lo tanto, teniendo únicamente dos coeficientes, el espectro resulta: $C_1 = \frac{1}{2} = C_{-1}$

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k \delta(\omega - \omega_0 k)$$

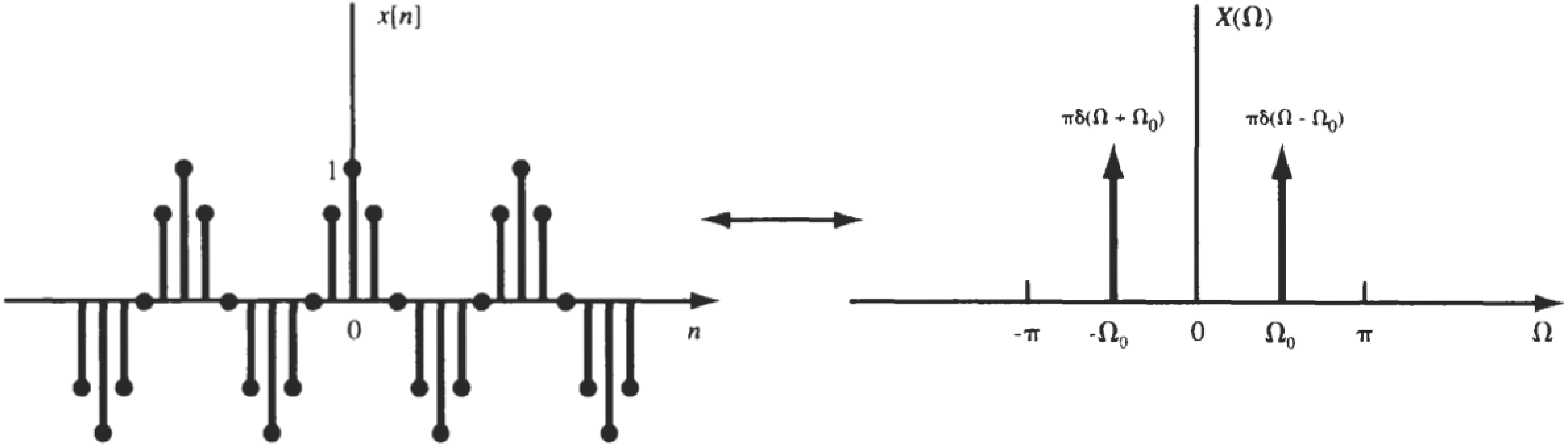
$$X(\Omega) = 2\pi C_1 \delta(\omega - \omega_0 1) + 2\pi C_{-1} \delta(\omega + \omega_0 1)$$

$$X(\Omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$C_1 = \frac{1}{2} = C_{-1}$$

Ejemplo señal periódica:

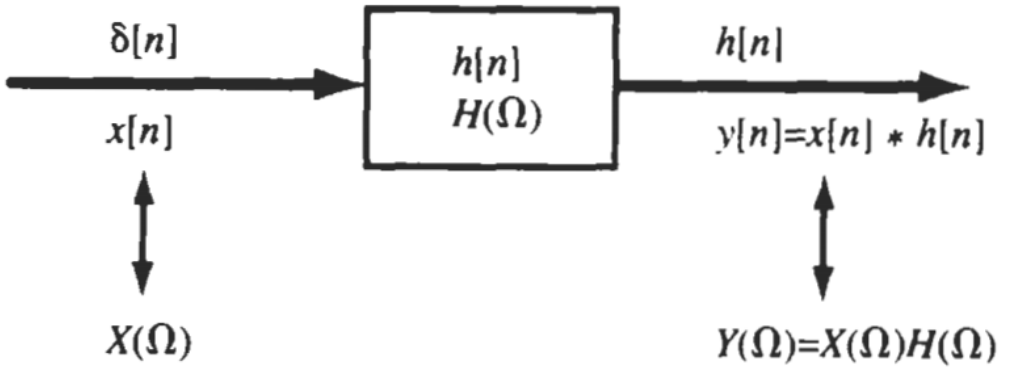
$$X(\Omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS DISCRETOS

La propiedad de convolución de la TFTD nos permite analizar sistemas de manera muy fácil y eficiente.

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad \Longleftrightarrow \quad Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$$

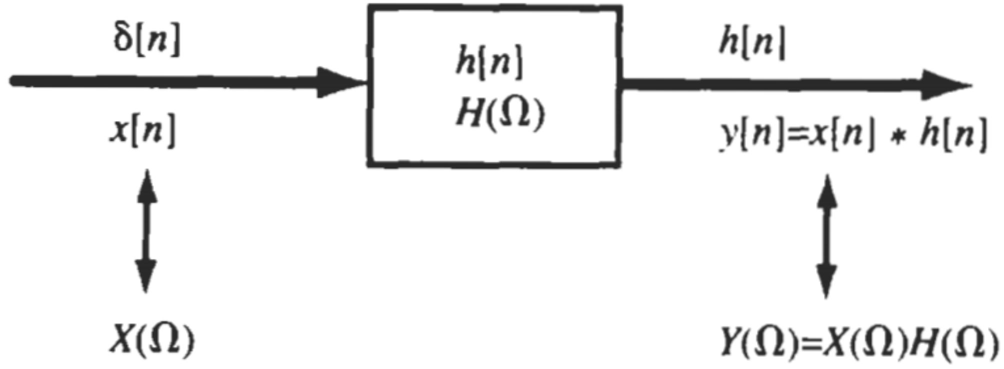


Recordemos que:

$h[n]$ *Es la respuesta al impulso del sistema, en el dominio temporal.*

$H(\Omega)$ *Es la respuesta en frecuencia del sistema.*

$$\boxed{H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}}$$



Propiedades importantes de $H(\Omega)$

Ya que la respuesta en frecuencia de un sistema se obtiene mediante la TFTD, las propiedades de la misma son equivalentes. Lo más importante a recordar es:

La respuesta en frecuencia es un espectro complejo. Tiene módulo y fase

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\theta_H(\Omega)}$$

La respuesta en frecuencia es periódica con periodo 2π

$$H(\Omega) = H(\Omega + 2\pi)$$

El rango de observación de la respuesta en frecuencia debe ser entre

$$0 \leq \Omega < 2\pi \text{ or } -\pi \leq \Omega < \pi.$$

Sistemas expresados por ecuaciones a diferencias

En la práctica, es muy frecuente trabajar con sistemas discretos caracterizados por ecuaciones a diferencias y coeficientes constantes, como ser:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

Recordando la propiedad de desplazamiento en el tiempo, de linealidad y la transformada de un impulso discreto, podemos transformar la anterior expresión como:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, e^{-jk\Omega} Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, e^{-jk\Omega} X(\Omega)$$

$$\boxed{H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, e^{-jk\Omega}}}$$

Ejemplo sistema discreto:

Para el sistema discreto caracterizado por la siguiente ecuación a diferencias, determine:

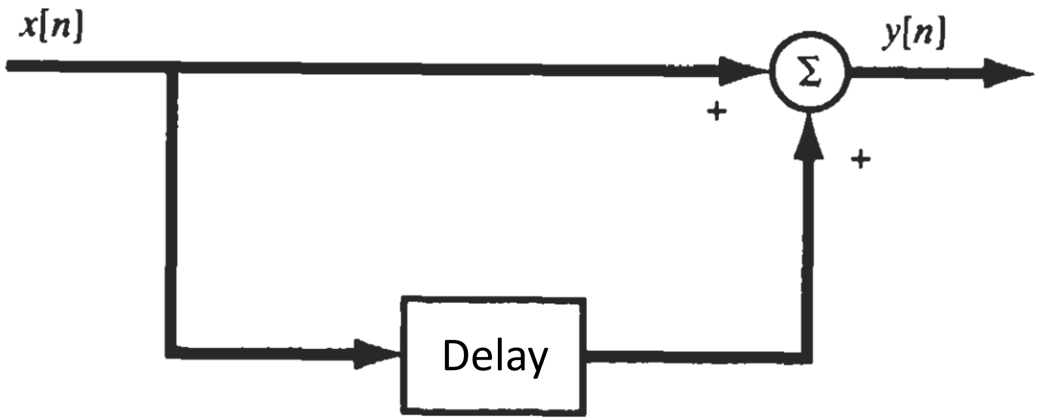
$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

a) Realice un diagrama de simulación del sistema.
b) La respuesta en frecuencia del sistema.
c) Grafique la magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del sistema.
d) La respuesta al impulso del sistema.

Ejemplo sistema discreto:

Diagrama de simulación: Es un esquema gráfico que permite visualizar la interacción matemática de las señales de entrada, salidas e internas. Es una alternativa gráfica de la ecuación a diferencias.

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$



Ejemplo sistema discreto:

La respuesta en frecuencia del sistema: Para obtener la respuesta en frecuencia tomamos la transformada de la ecuación a diferencias y despejamos H.

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

$$\mathcal{F}\{y[n]\} = \mathcal{F}\{x[n] + x[n-1]\ \}$$

$$\mathcal{F}\{y[n]\} = \mathcal{F}\{x[n]\} + \mathcal{F}\{x[n-1]\ \}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega) + X(\Omega)e^{-j\Omega}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)\left[1 + e^{-j\Omega}\right]$$

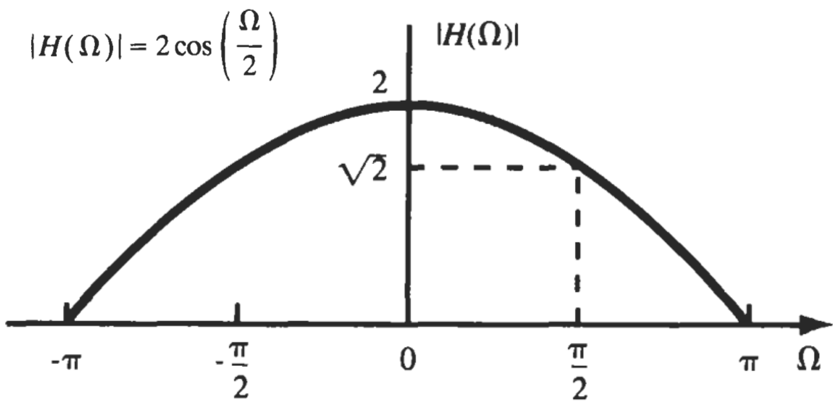
$$\boxed{H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = 1 + e^{-j\Omega}}$$

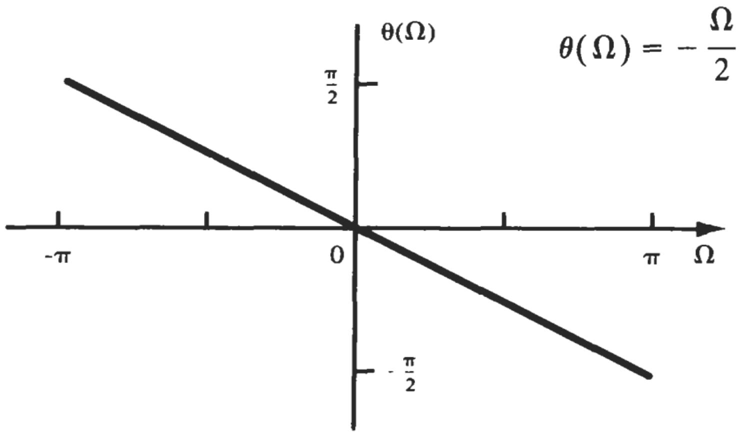
Ejemplo sistema discreto:

Podemos simplificar esta expresión para obtener una forma más fácil de analizar gráficamente:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = 1 + e^{-j\Omega} = e^{-j\Omega/2}\left(e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}\right)$$

$$\boxed{H(\Omega) = 2e^{-j\Omega/2}\cos(\Omega/2)} \qquad |\Omega| \leq \pi$$





Ejemplo sistema discreto:

La respuesta al impulso del sistema se obtiene antitransformando la respuesta en frecuencia, es decir:

$$h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{1 + e^{-j\Omega}\}$$

Que observando en tabla, se obtiene directamente que:

$$\boxed{h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]}$$