

SEÑALES Y SISTEMAS

UNIDAD 3

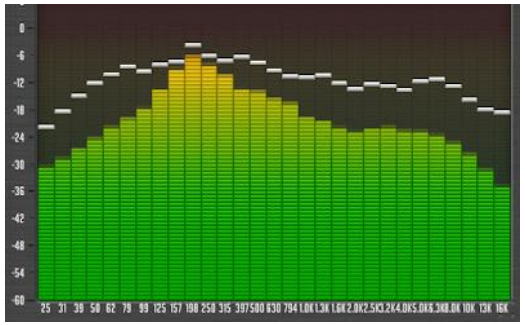
ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES PERIÓDICAS DE TIEMPO CONTINUO

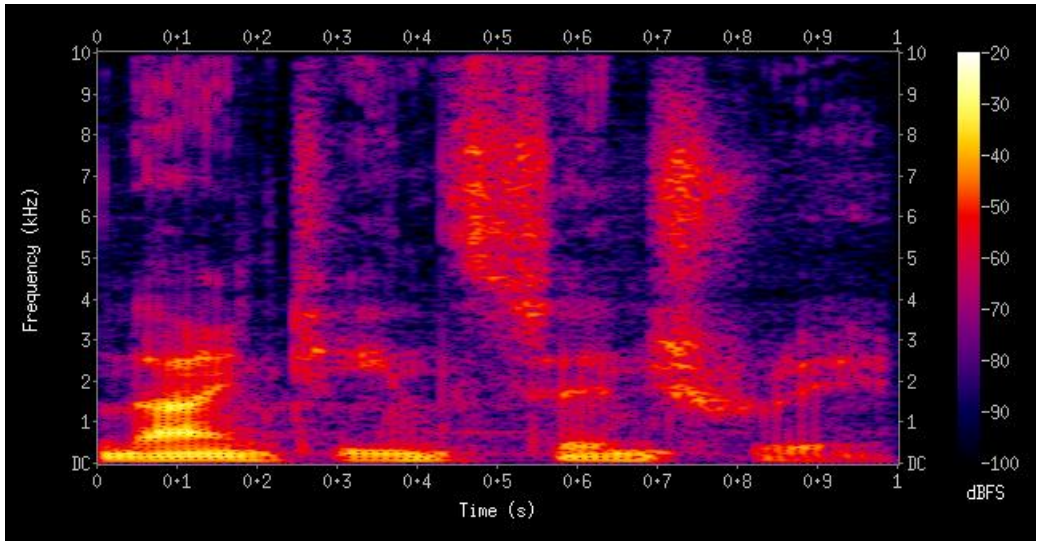


ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES

El análisis espectral o frecuencial de señales es una de las ramas del procesamiento de señales más importante y útil para todo tipo de tareas.









¿POR QUÉ ES TAN ÚTIL?

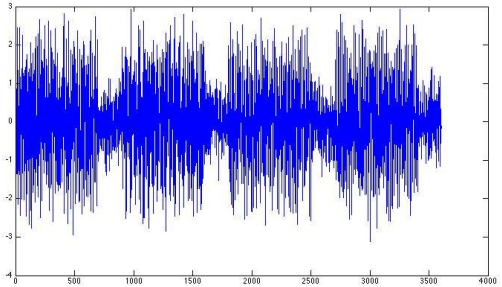
El análisis espectral nos permite obtener información “invisible” en el dominio del tiempo pero muy “visible” en el dominio frecuencial.



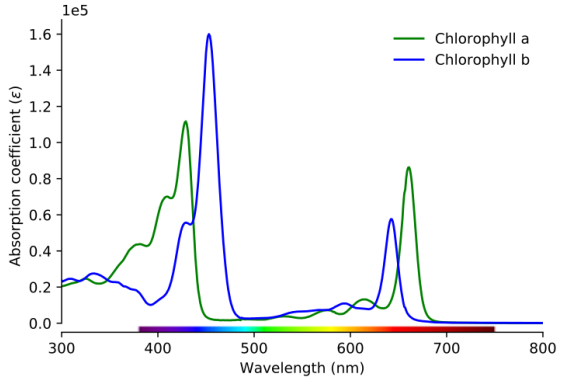
SISTEMA “A”

- Amarillo
- Verde
- Naranja

$a(t)$



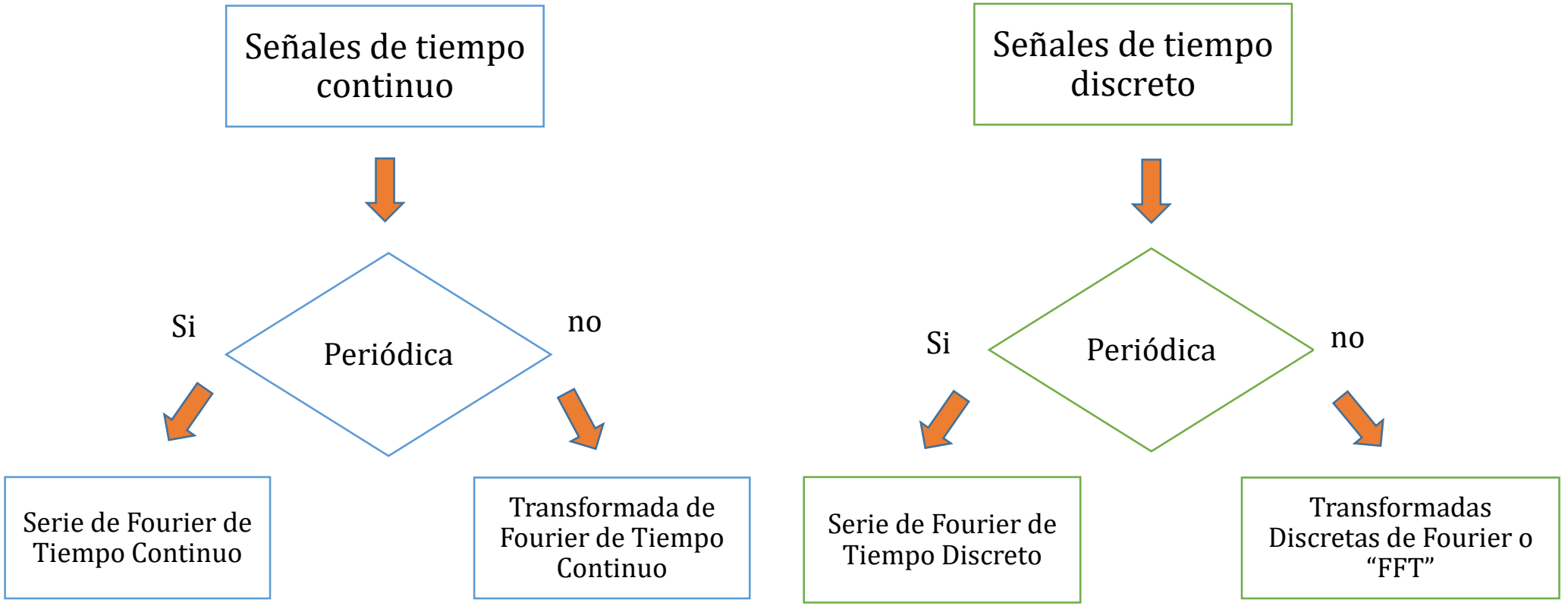
SISTEMA “B”





ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES

Las herramientas de análisis espectral se clasifican en función al tipo de señal a analizar





SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO

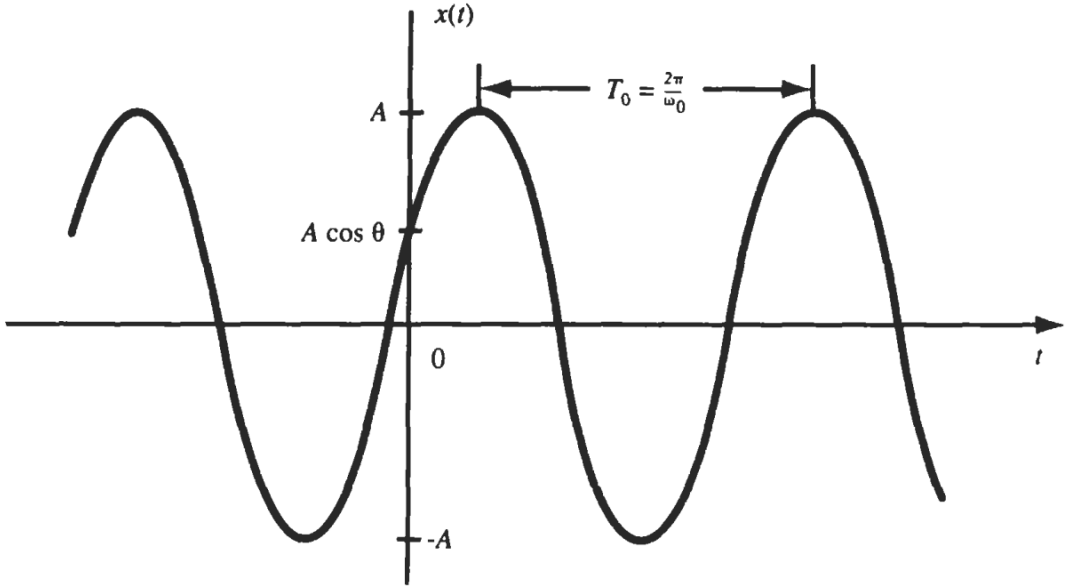
Permite hacer el análisis espectral de señales periódicas de tiempo continuo.

$$x(t) = x(t+T)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad Periodo\ fundamental$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}(Hertz\ -Hz)$$





Serie Trigonométrica de Fourier

Una señal cualquiera puede ser descompuesta en infinitas componentes relacionadas armónicamente unas con otras.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Donde a_k y b_k son los “coeficientes” de la serie de Fourier y se calculan como:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos k\omega_0 t \, dt \qquad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin k\omega_0 t \, dt$$

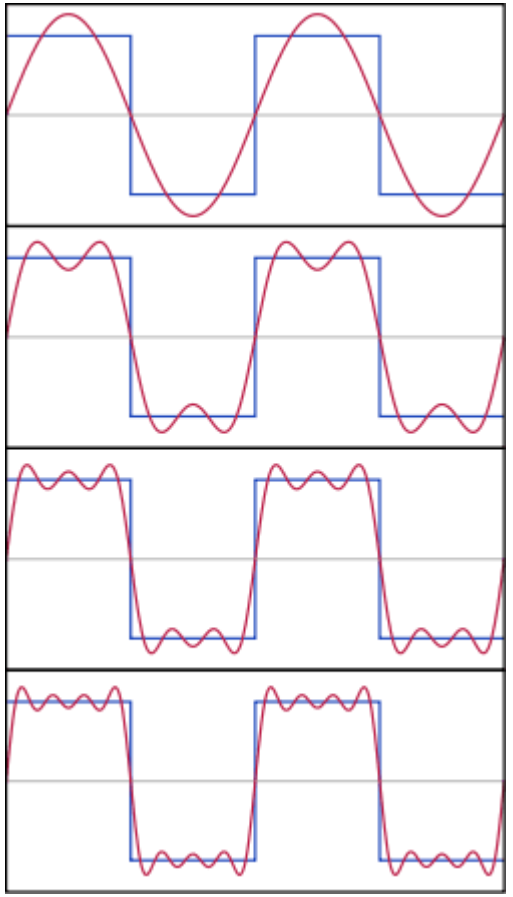


Cada coeficiente de la serie está asociado a un armónico de la señal. Por lo que su valor (generalmente complejo) nos indica cuanta energía contiene la señal en esa frecuencia.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t \right)$$

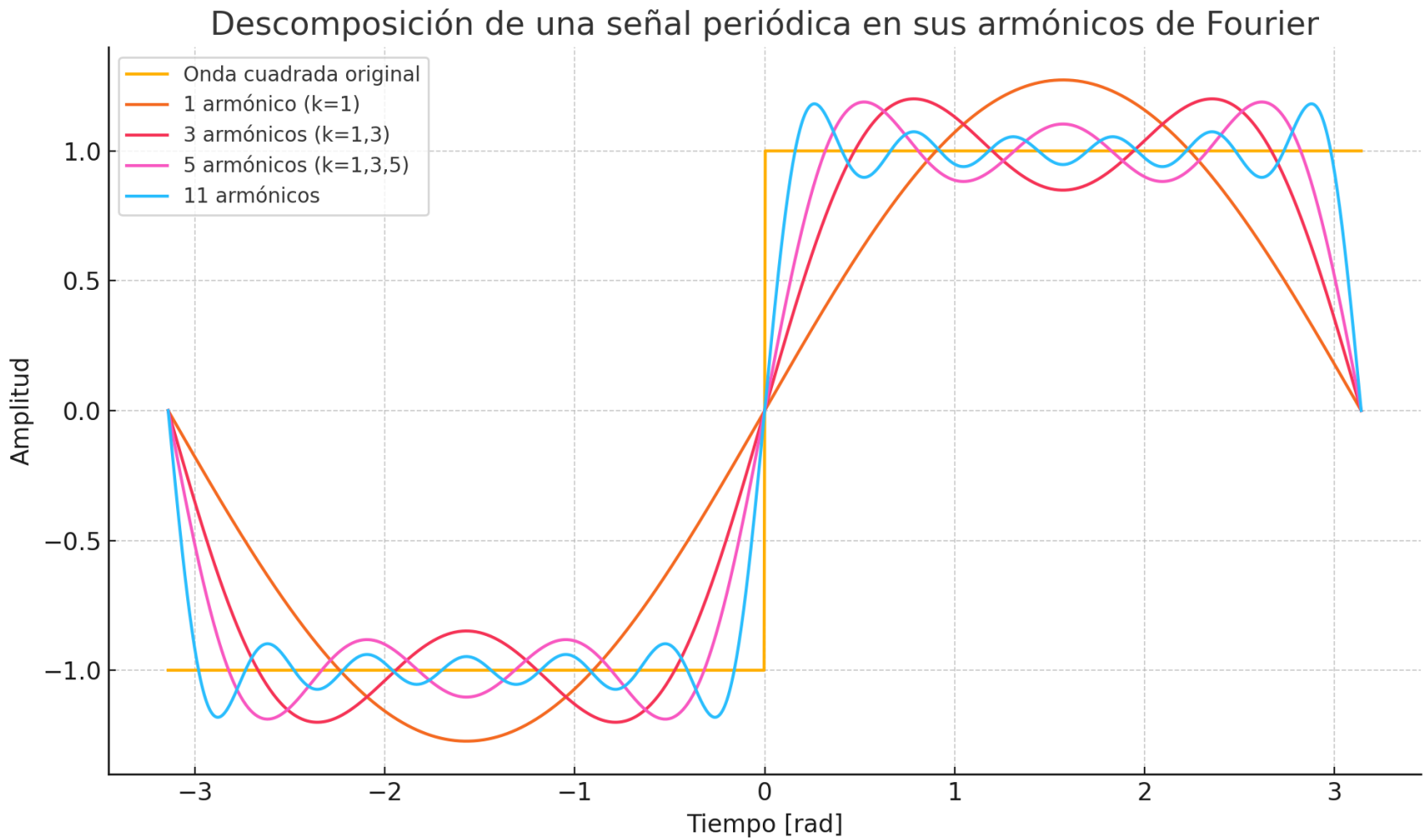
¿Cuántos coeficientes puede tener una serie?

¿De qué dependerá ese número?





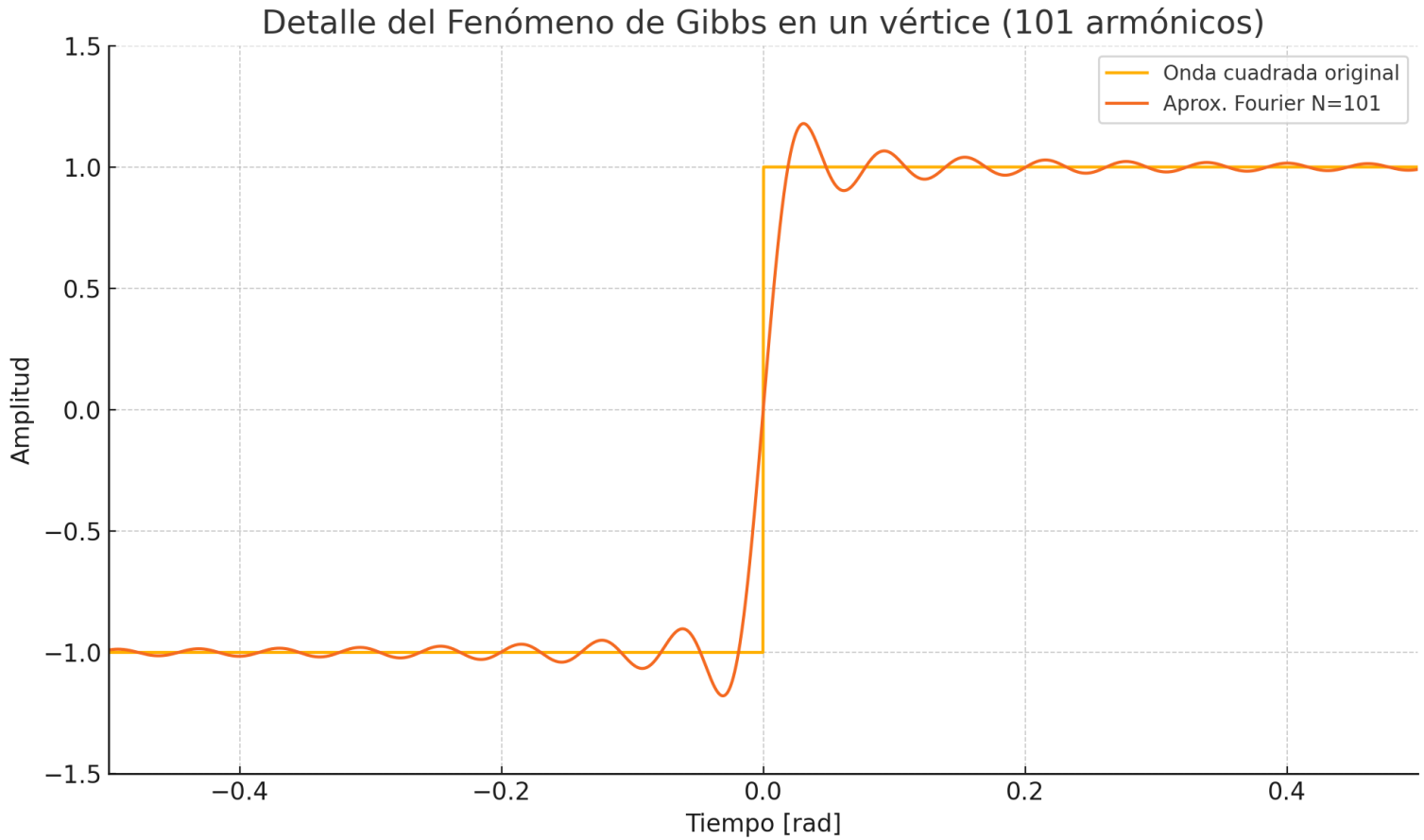
Las señales con vértices abruptos en el dominio del tiempo requieren de gran cantidad de armónicos para su síntesis.





El Fenómeno de Gibbs imposibilita la síntesis perfecta de éstas señales, dando como resultado aproximaciones a la señal cuadrada.

¿Esto es lógico a nivel físico y real?





Serie Exponencial de Fourier

Debido a la relación de Euler, que vincula ecuaciones trigonométricas con exponenciales, podemos llegar a una forma más general de la serie:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ecuación de síntesis

Donde c_k son los coeficientes complejos de la serie de Fourier

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Ecuación de cálculo

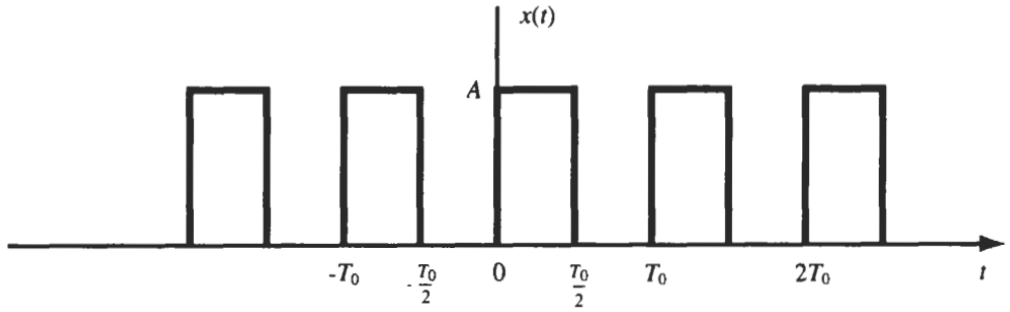


Ejemplo de Serie Exponencial de Fourier

Calcular la serie exponencial de Fourier de la siguiente señal:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$



Primer paso, calculamos los coeficientes:

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

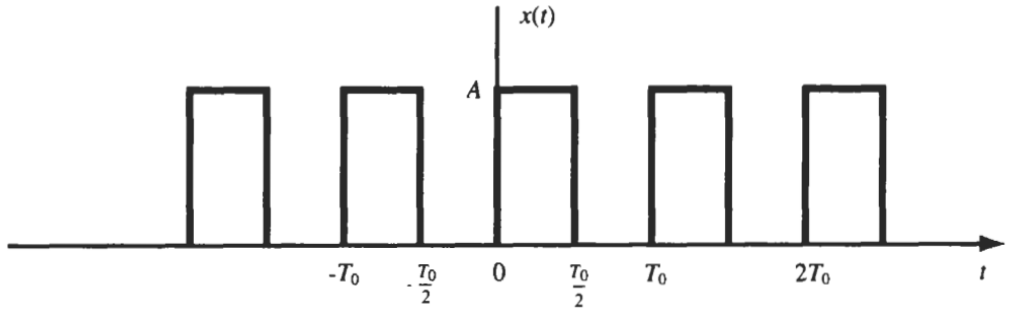


Ejemplo de Serie Exponencial de Fourier

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{T_0/2} = \frac{A}{-jk\omega_0 T_0}\left(e^{-jk\omega_0 T_0/2} - 1\right)$$

$$= \frac{A}{jk2\pi}\left(1 - e^{-jk\pi}\right) = \frac{A}{jk2\pi}\left[1 - (-1)^k\right]$$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



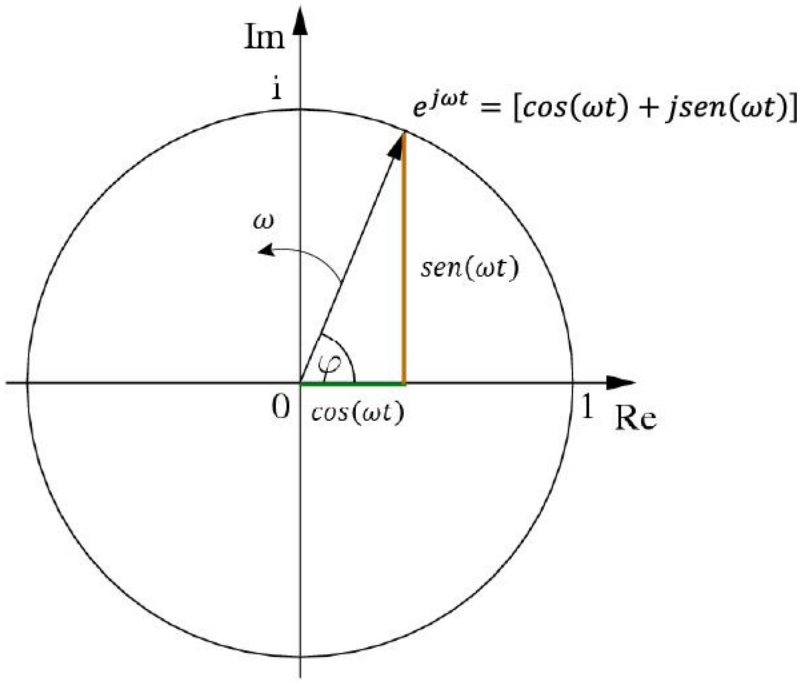
El Sr. Fourier viendo cómo nadie pasa al pizarrón a explicar por qué:

$$e^{-jk\pi} = (-1)^k$$



Ejemplo de Serie Exponencial de Fourier

$$e^{-jk\pi} = (-1)^k$$



$$\frac{A}{jk2\pi}\left[1-(-1)^k\right]$$

$$c_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

$$c_k = \frac{A}{jk\pi} \qquad k = 2m+1$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\,dt = \frac{A}{2}$$



Ejemplo de Serie Exponencial de Fourier

$$c_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

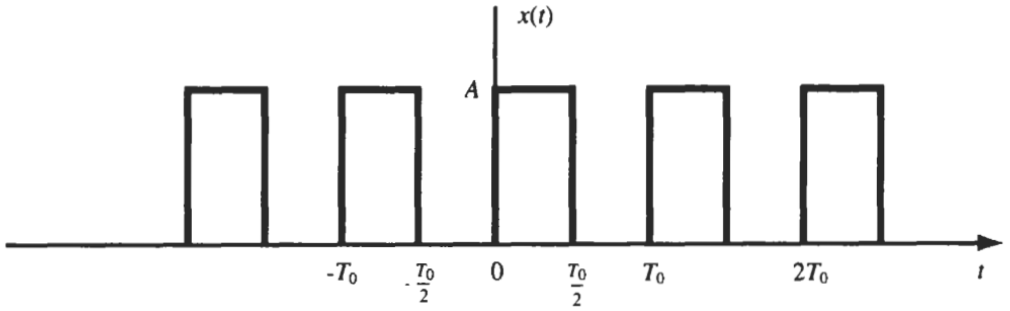
$$c_k = \frac{A}{jk\pi} \qquad k = 2m + 1$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\,dt = \frac{A}{2}$$

Síntesis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t}$$





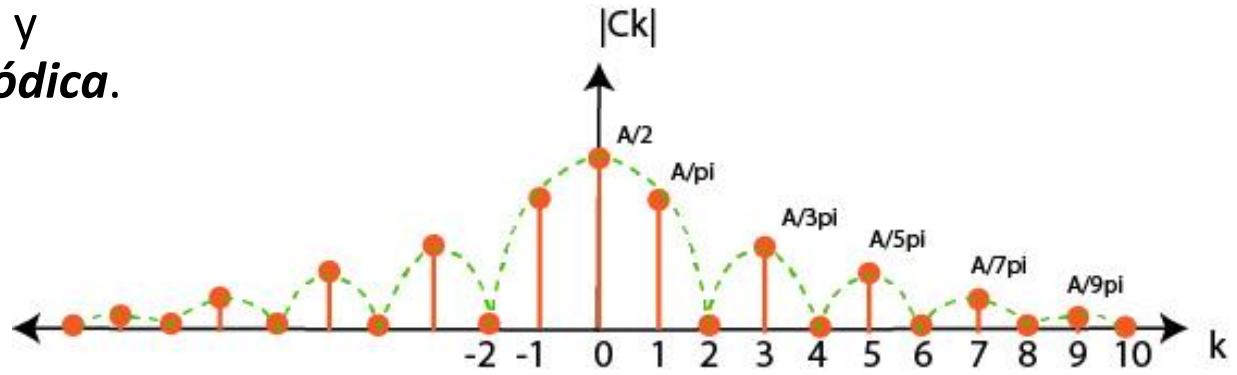
Gráfica de los coeficientes: espectro

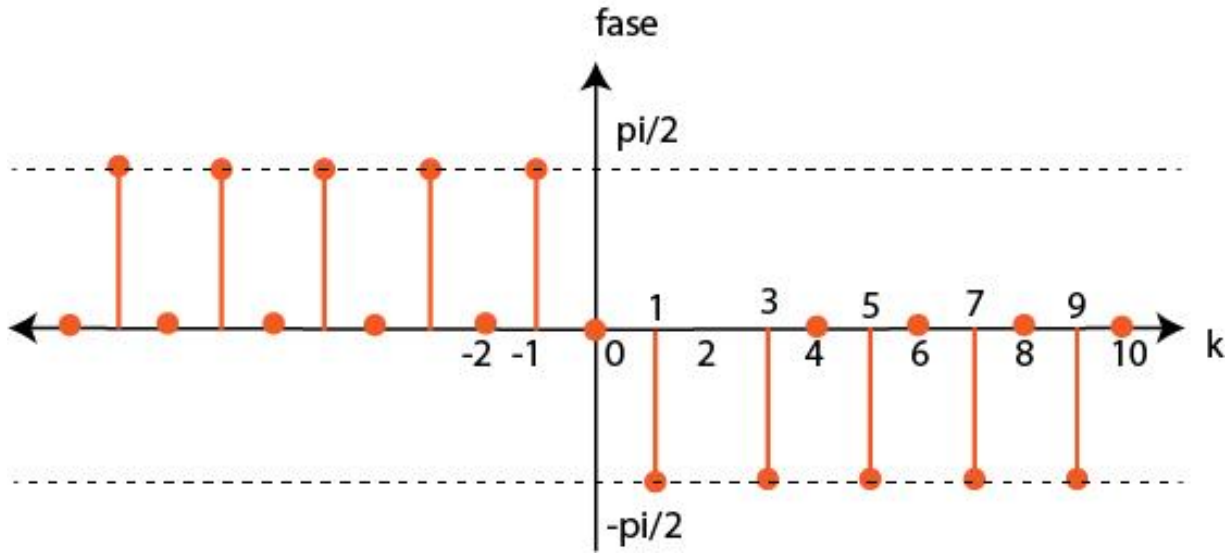
Una vez que hemos calculado los coeficientes Ck, podemos graficarlos y obtener el ***espectro de la señal periódica***.

$$c_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

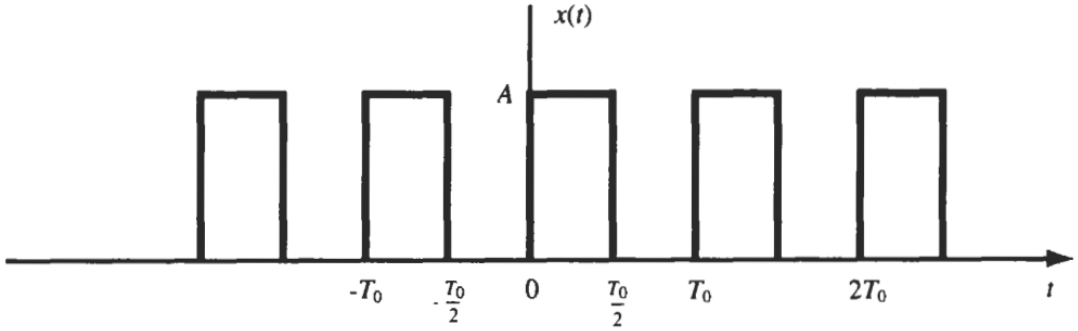
$$c_k = \frac{A}{jk\pi} \qquad k = 2m + 1$$

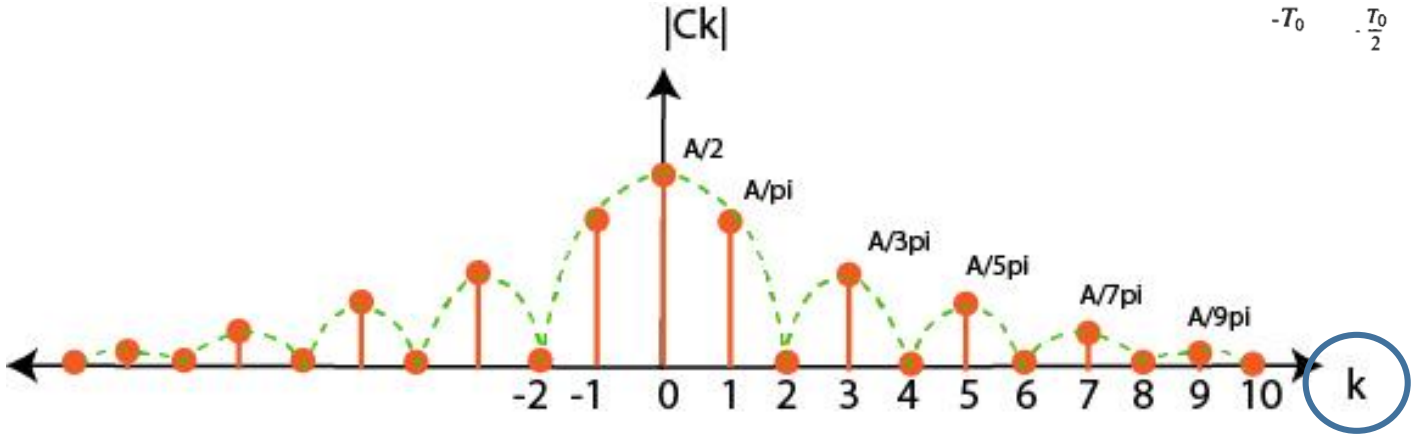
$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\,dt = \frac{A}{2}$$

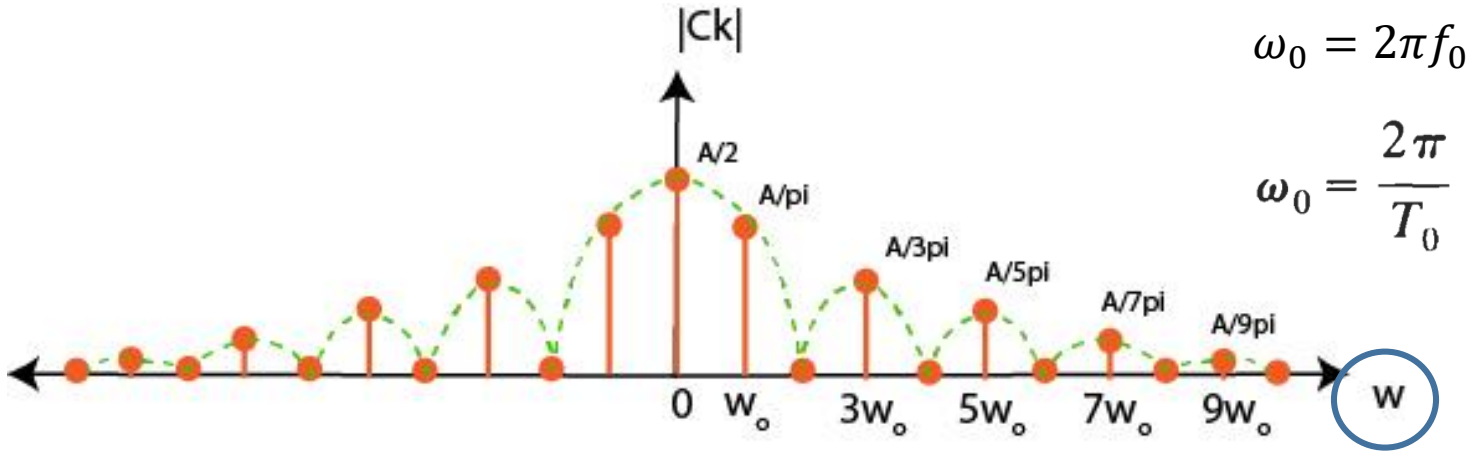




Espectro de una onda cuadrada







$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

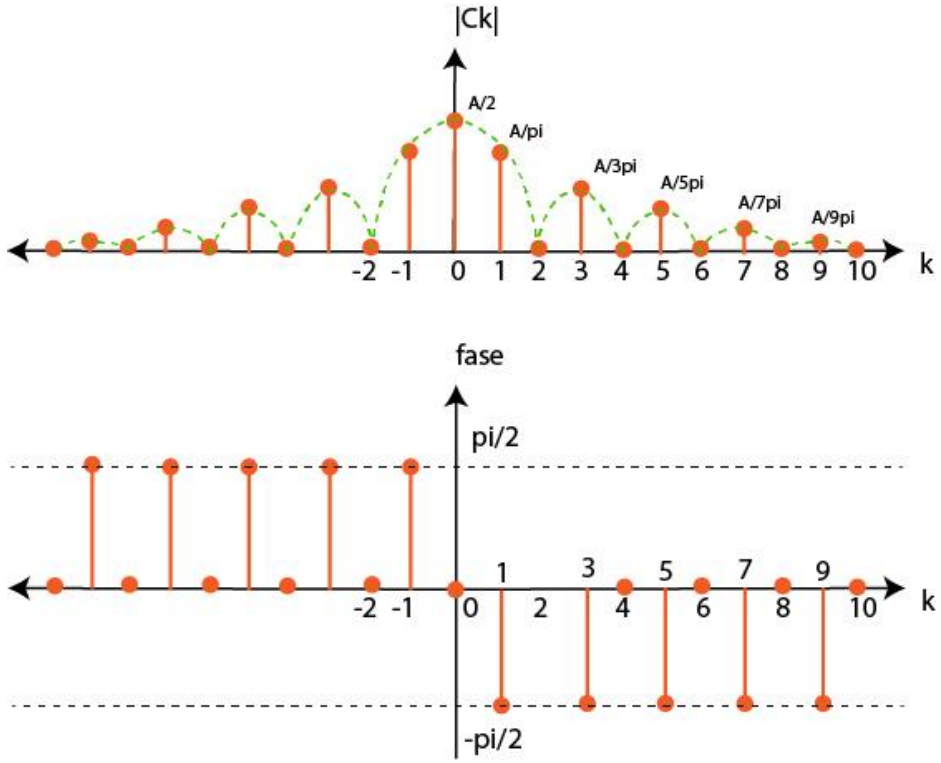
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



Resumen del espectro de una señal periódica

Coeficientes complejos

$$C_k = |C_k|e^{j\emptyset k}$$



- Al graficar los coeficientes, es un **espectro discreto.**

- Para una señal real, se cumple que:

$$|C_{-k}| = |C_k|$$
$$\emptyset_k = -\emptyset_k$$

El espectro de amplitud es par y el espectro de fase es impar.

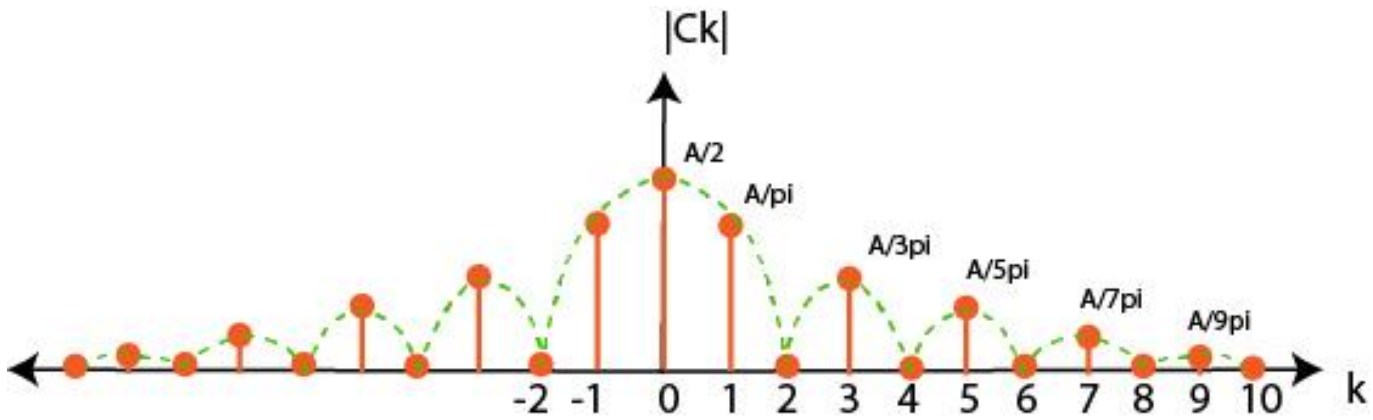


TEOREMA O IDENTIDAD DE PARSEVAL

Para series de tiempo continuo

Relaciona la potencia media de una señal periódica con los aportes de cada armónico que compone dicha señal

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt$$





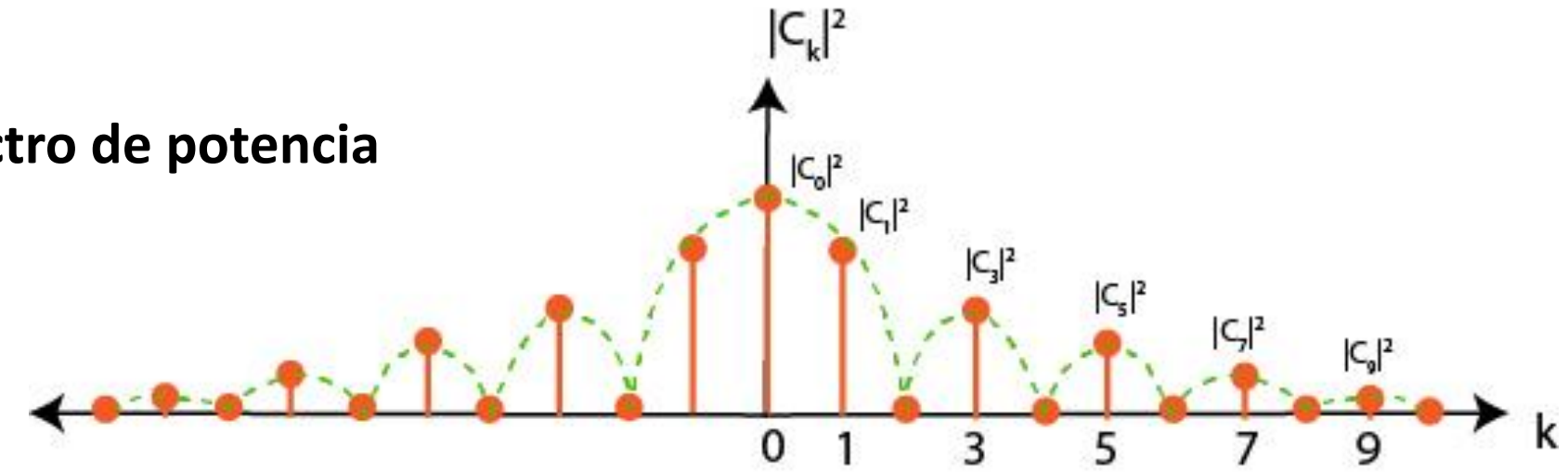
TEOREMA O IDENTIDAD DE PARSEVAL

Para series de tiempo continuo

Establece que la potencia total de una señal periódica es igual a la suma de las potencias de sus componentes armónicos

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2\,dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2$$

Espectro de potencia





Ejemplo práctico/conceptual

Calcule y grafique el espectro de potencia de la siguiente señal:

$$x(t) = 8 + \sin(\omega t)$$

A modo de recordatorio, tenga en cuenta las siguientes expresiones:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega t}dt \qquad \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$



El cálculo de la integral directa es complejo, por lo que la mejor alternativa es obtener los coeficientes directamente de la representación exponencial del seno.

$$x(t) = 8 + \sin(\omega t) = 8 + \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = 8 + \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

La expansión de una x(t) genérica en sus armónicos es:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{jk\omega t} = \cdots + C_{-1}e^{-j1\omega t} + C_0 e^{j0\omega t} + C_1\, e^{j1\omega t} + C_2 e^{j2\omega t} + \cdots$$

Por lo que…

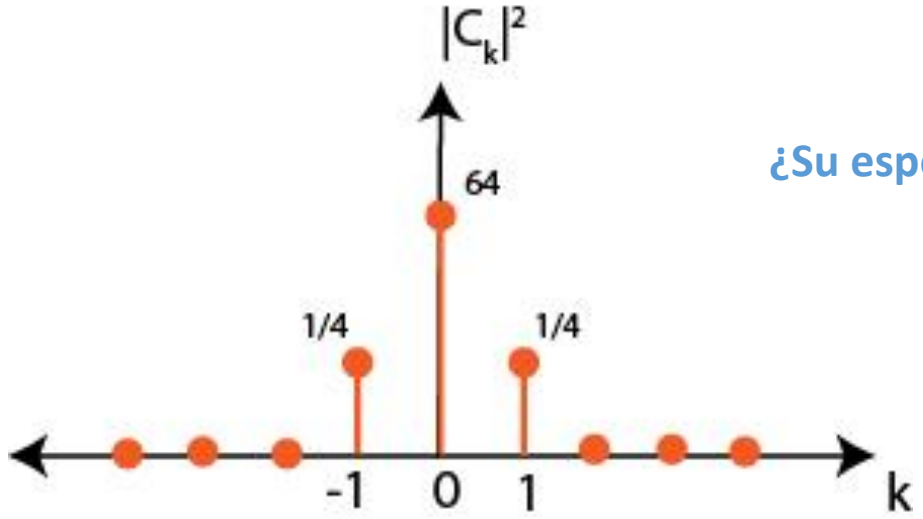


De manera directa podemos obtener los coeficientes de la serie:

$$x(t) = 8 + \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$c_0 = 8 \qquad c_1 = \frac{1}{2j} \qquad c_{-1} = \frac{-1}{2j}$$

Su espectro de potencia es:

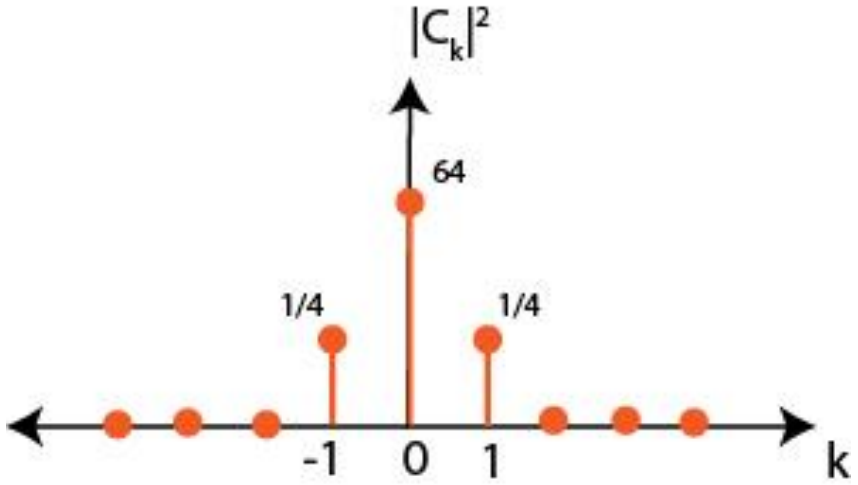


¿Su espectro de módulo y fase?



$$x(t) = 8 + \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$c_{-1} = \frac{-1}{2j} \qquad c_0 = 8 \qquad c_1 = \frac{1}{2j}$$

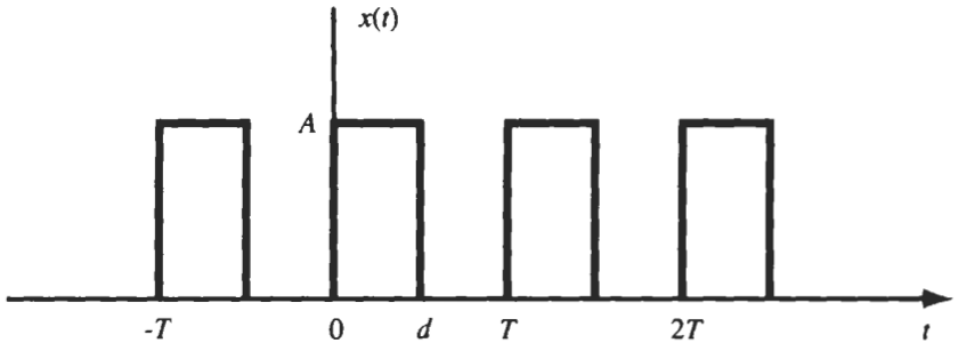


- ¿Cuántos coeficientes tiene?
- ¿Cuántas componentes armónicas tiene?
- ¿Cuántos de ellos aportan energía?
- ¿Qué frecuencia contiene mayor energía?



Ejemplo 2: Ondas cuadradas, fase y su espectro en casos extremos

Vamos a analizar el espectro de una onda cuadrada cuando se modifica su ciclo útil, es decir, los tiempos de alto y bajo:



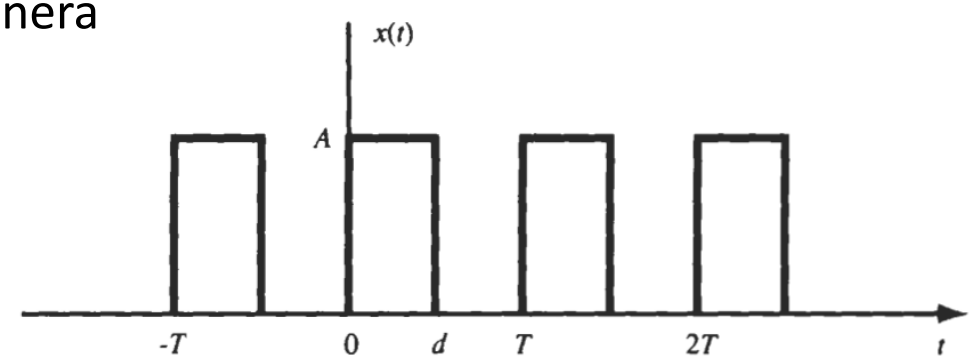
Calcule la serie de Fourier para $(a)\ d = T_0/4$ y $(b)\ d = T_0/8$.

Ejemplo obtenido de “Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu” pag: 243



Ejemplo 2: Ondas cuadradas, fase y su espectro en casos extremos

Primer paso, calculamos los coeficientes de manera genérica:



$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{d} e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{T_0}\,\frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{d} = \frac{A}{T_0}\,\frac{1}{jk\omega_0}\left(1 - e^{-jk\omega_0 d}\right)$$

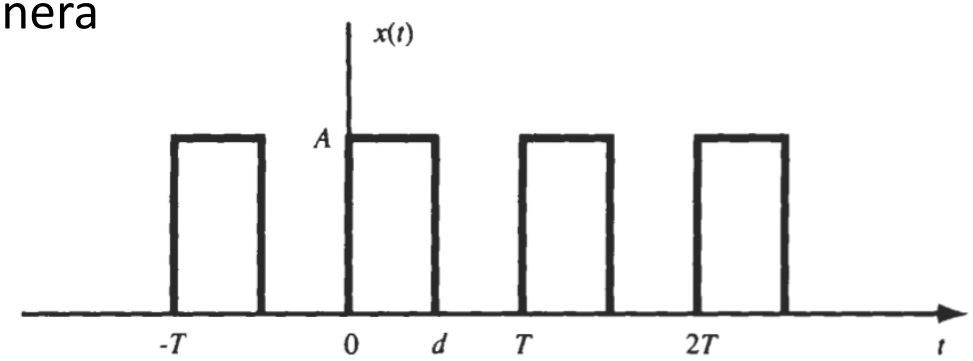
$$= \frac{A}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 d/2}\left(e^{jk\omega_0 d/2} - e^{-jk\omega_0 d/2}\right)$$

Ejemplo obtenido de “Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu” pag: 243



Ejemplo 2: Ondas cuadradas, fase y su espectro en casos extremos

Primer paso, calculamos los coeficientes de manera genérica:



$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{d} e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{T_0}\,\frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{d} = \frac{A}{T_0}\,\frac{1}{jk\omega_0}\left(1 - e^{-jk\omega_0 d}\right)$$

$$= \frac{A}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 d/2}\left(e^{jk\omega_0 d/2} - e^{-jk\omega_0 d/2}\right)$$

Aporte de fase

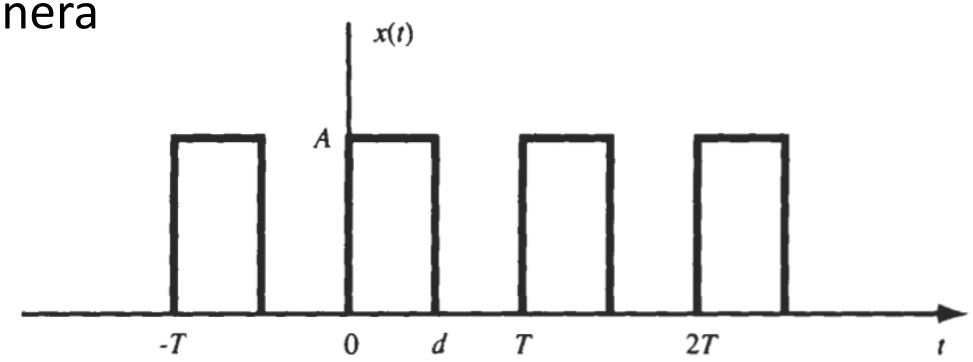
Se corrige el corrimiento temporal que genera asimetría en el cálculo

Ejemplo obtenido de “Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu” pág: 243



Ejemplo 2: Ondas cuadradas, fase y su espectro en casos extremos

Primer paso, calculamos los coeficientes de manera genérica:



$$= \frac{A}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 d/2}\left(e^{jk\omega_0 d/2} - e^{-jk\omega_0 d/2}\right)$$

$$= A\frac{d}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0 d/2)}{k\omega_0 d/2} e^{-jk\omega_0 d/2}$$

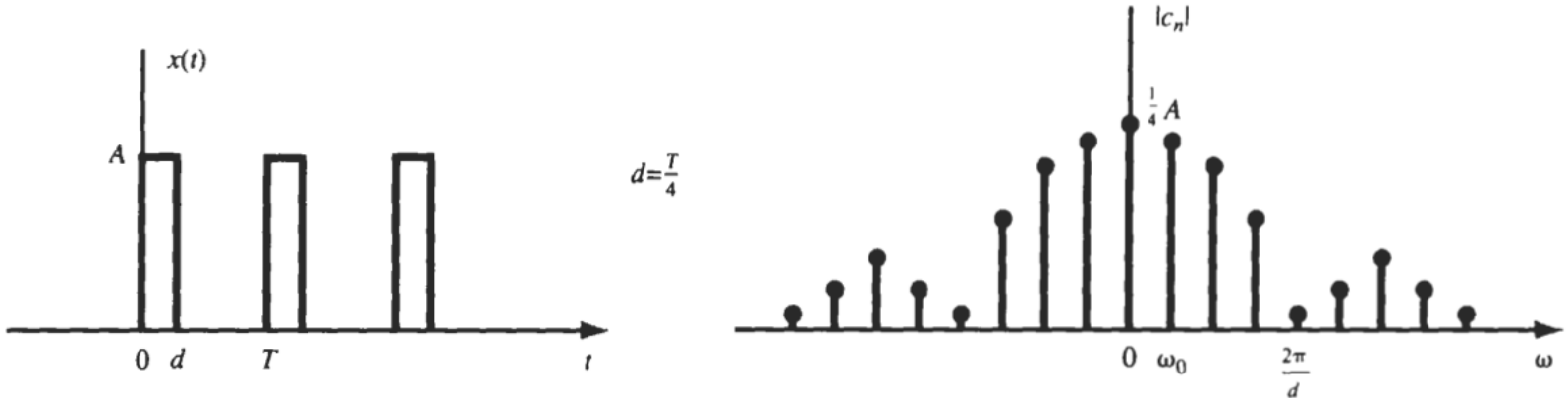
Notar que $c_k = 0$ siempre que $k\omega_0 d/2 = m\pi$ por lo que:

$$C_k = 0 \overset{si}{\rightarrow} k\omega_0 = m\frac{2\pi}{d} \; con\; m = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

Ejemplo obtenido de “Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu” pag: 243

$$= A\frac{d}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0 d/2)}{k\omega_0 d/2}e^{-jk\omega_0 d/2} \qquad d = T_0/4, k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/4, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$|c_k| = \frac{A}{4}\left|\frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4}\right|$$



Para k=4 se produce el primer cruce por cero del espectro

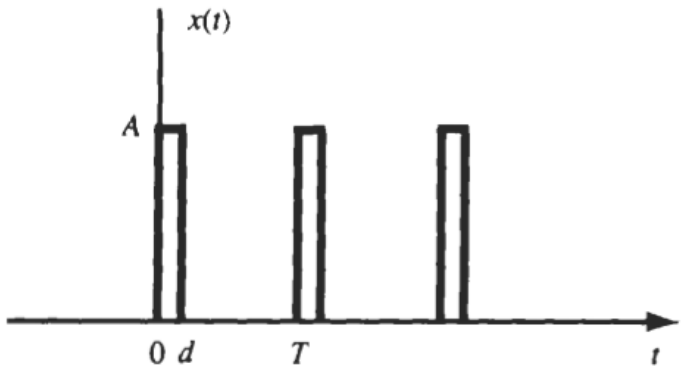
Ejemplo obtenido de “Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu” pag: 243



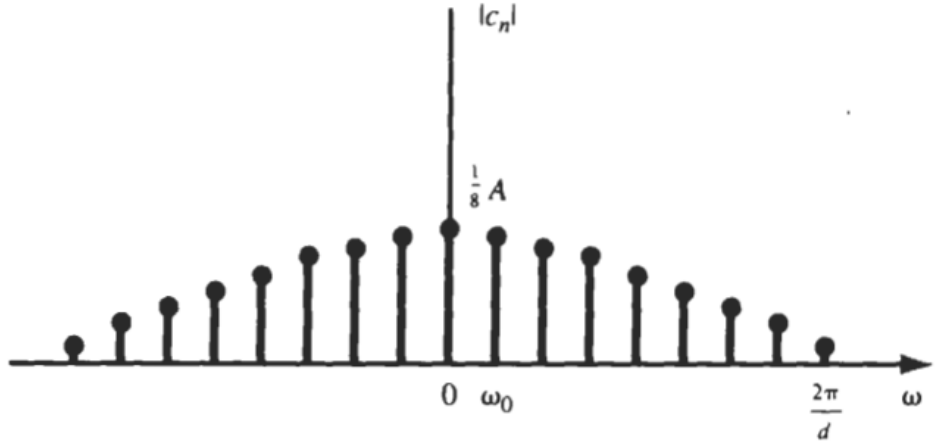
$$= A \frac{d}{T_0} \frac{\sin(k\omega_0 d/2)}{k\omega_0 d/2} e^{-jk\omega_0 d/2}$$

$$d = T_0/8, \quad k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/8,$$

$$|c_k| = \frac{A}{8} \left| \frac{\sin(k\pi/8)}{k\pi/8} \right|$$



$d = \frac{T}{8}$



Para k=8 se produce el primer cruce por cero del espectro

Ejemplo obtenido de “Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu” pag: 243

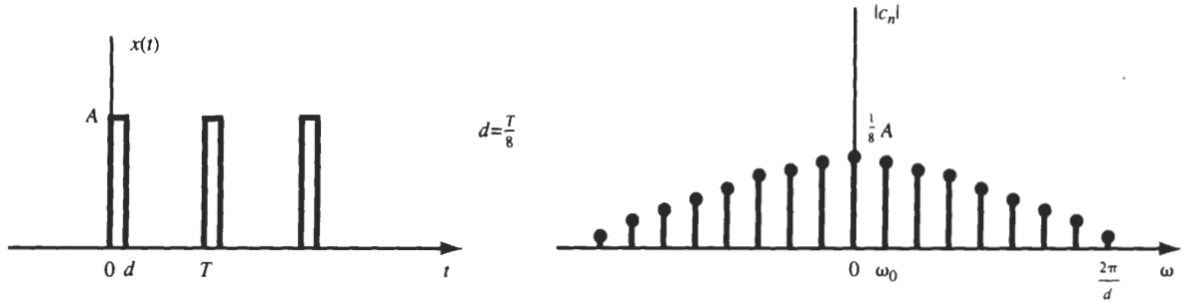


Algunas páginas para simular y verificar series de Fourier:

https://www.mathsisfun.com/calculus/fourier-series-graph.html

Aula virtual, códigos Python!





¿Qué pasa cuando **d** se hace muy pequeño y **T** muy grande?

