SEÑALES Y SISTEMAS

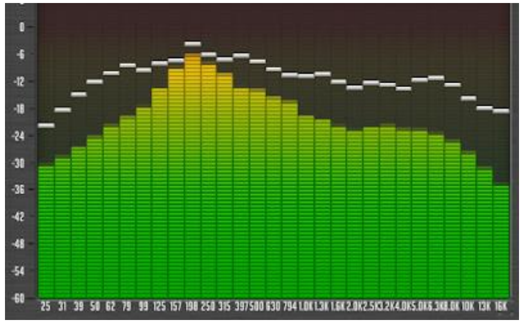
Ingeniería en Computación

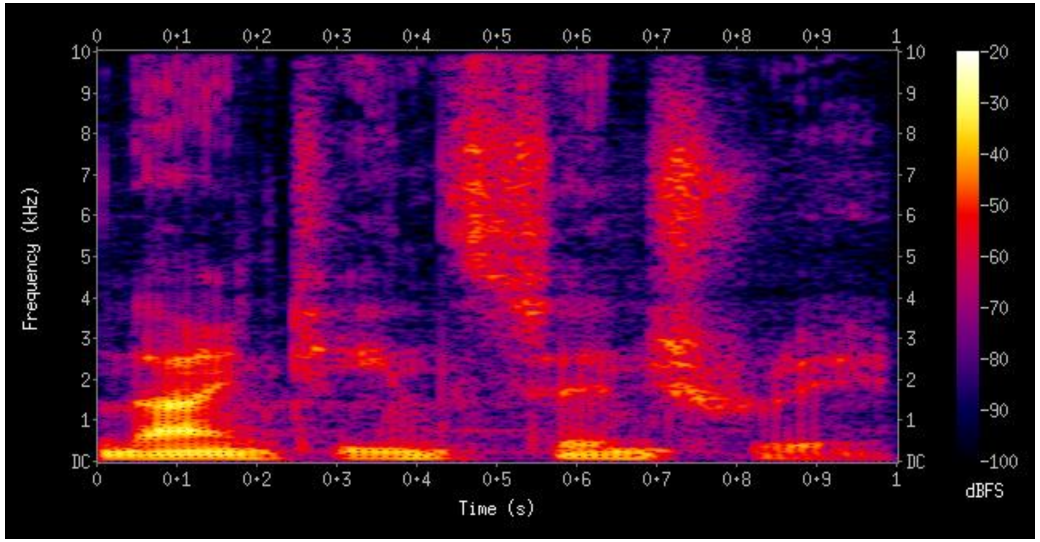
UNIDAD 3

ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES PERIÓDICAS DE TIEMPO CONTINUO

ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES

El análisis espectral o frecuencial de señales es una de las ramas del procesamiento de señales más importante y útil para todo tipo de tareas.





¿POR QUÉ ES TAN ÚTIL?

El análisis espectral nos permite obtener información “invisible” en el dominio del tiempo pero muy “visible” en el dominio frecuencial.

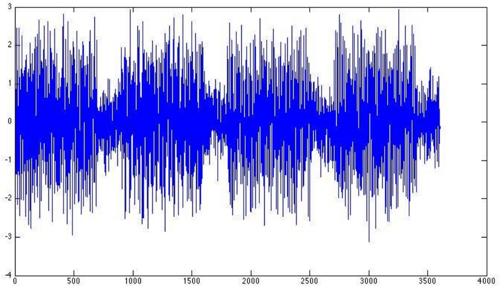
SISTEMA “A”

Amarillo

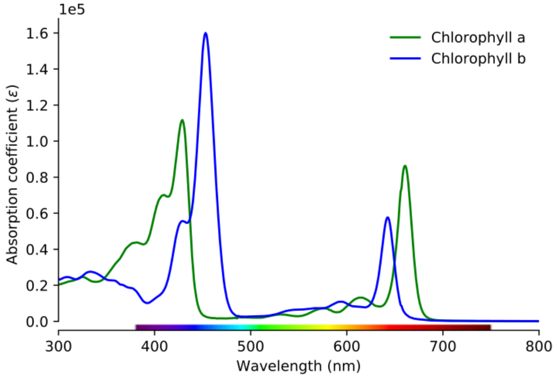
Verde

Naranja

$a(t)$

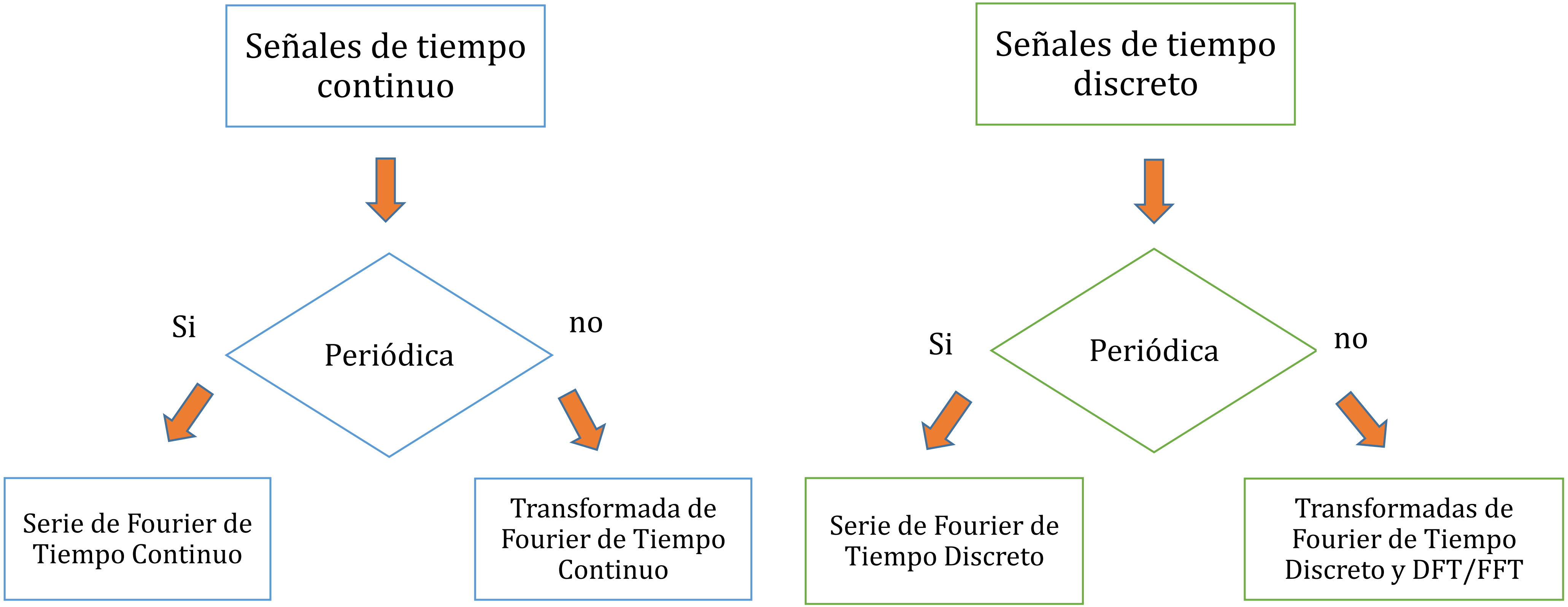


SISTEMA “B”



ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES

Las herramientas de análisis espectral se clasifican en función al tipo de señal a analizar



SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO

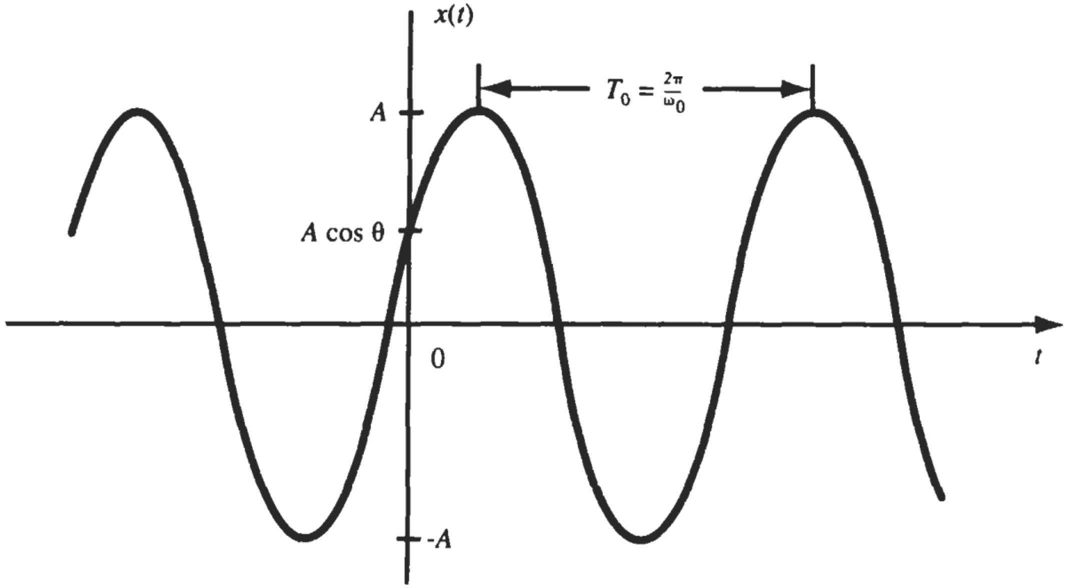
Permite hacer el análisis espectral de señales periódicas de tiempo continuo.

$$x(t) = x(t + T)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \;\; Periodo\ fundamental$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} (Hertz\ - Hz)$$



Serie Trigonométrica de Fourier

Una señal cualquiera puede ser descompuesta en infinitas componentes relacionadas armónicamente unas con otras.

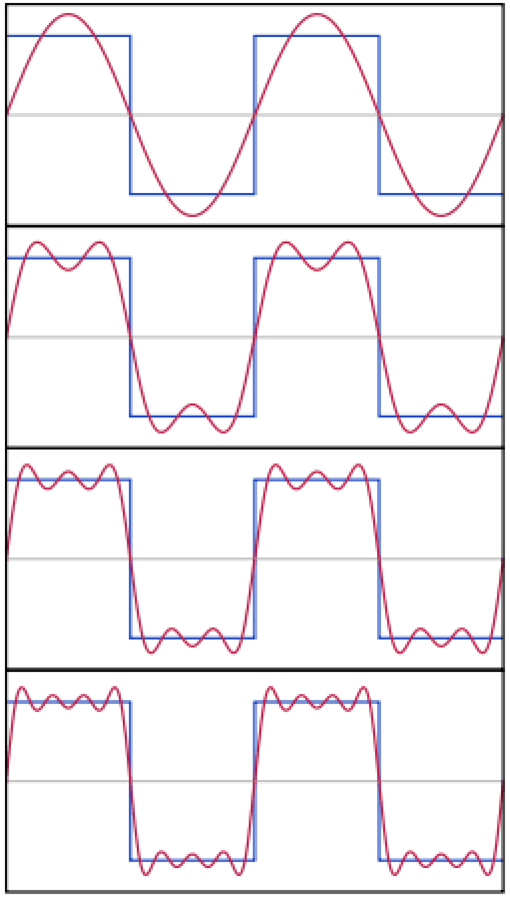
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t\right) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Donde a_k y b_k son los “coeficientes” de la serie de Fourier y se calculan como:

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos k\omega_0 t\, dt \qquad b_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin k\omega_0 t\, dt$$

Cada coeficiente de la serie está asociado a un armónico de la señal. Por lo que su valor (generalmente complejo) nos indica cuanta energía contiene la señal en esa frecuencia.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t \right)$$



¿Cuántos coeficientes puede tener una serie?

¿De qué dependerá ese número?

Serie Exponencial de Fourier

Debido a la relación de Euler, que vincula ecuaciones trigonométricas con exponenciales, podemos llegar a una forma más general de la serie:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Donde c_k son los coeficientes complejos de la serie de Fourier

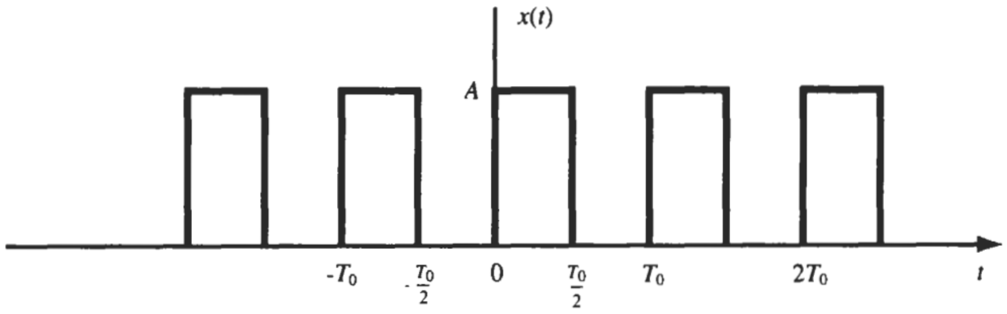
$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Ejemplo de Serie Exponencial de Fourier

Calcular la serie exponencial de Fourier de la siguiente señal:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$



Primer paso, calculamos los coeficientes:

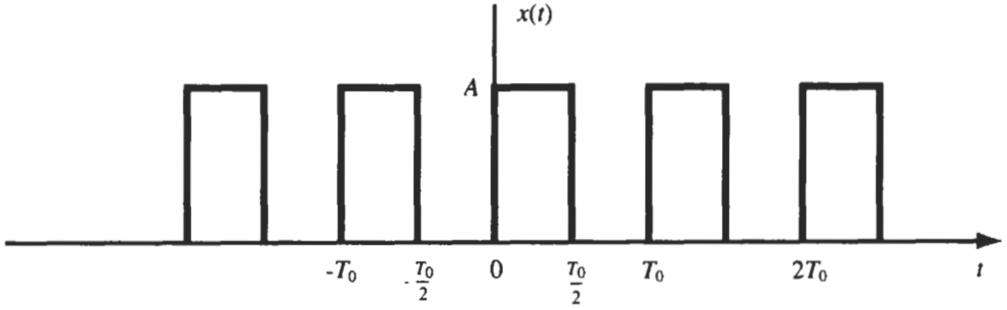
$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Ejemplo de Serie Exponencial de Fourier

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{T_0/2} = \frac{A}{-jk\omega_0 T_0}\left(e^{-jk\omega_0 T_0/2} - 1\right)$$

$$= \frac{A}{jk2\pi}\left(1 - e^{-jk\pi}\right) = \frac{A}{jk2\pi}\left[1 - (-1)^k\right]$$



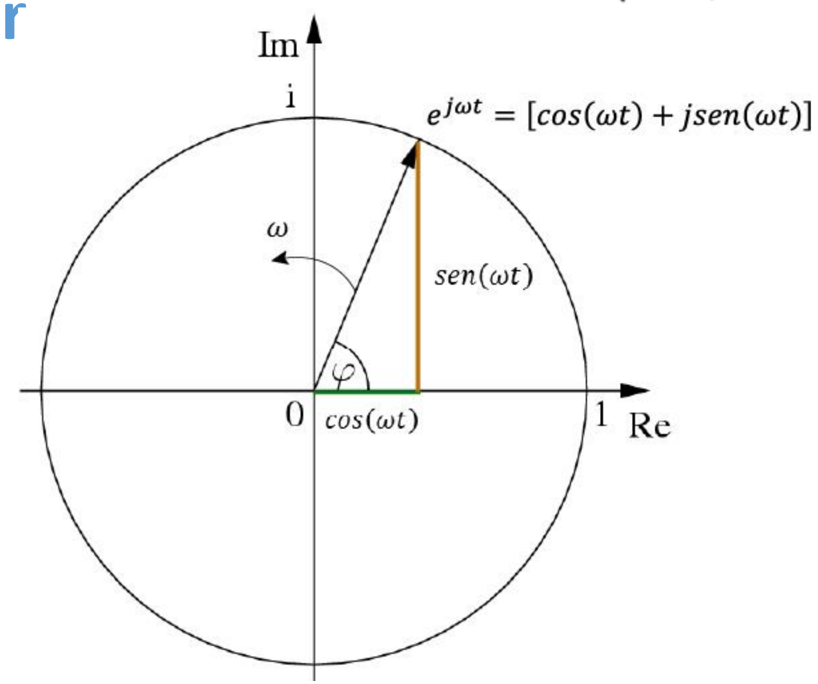
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Joseph Fourier viendo como no logran descifrar por qué

$$e^{-jk\pi} = (-1)^k$$

Ejemplo de Serie Exponencial de Fourier

$$e^{-jk\pi} = (-1)^k$$



$$c_k = \frac{A}{jk2\pi}\left[1 - (-1)^k\right]$$

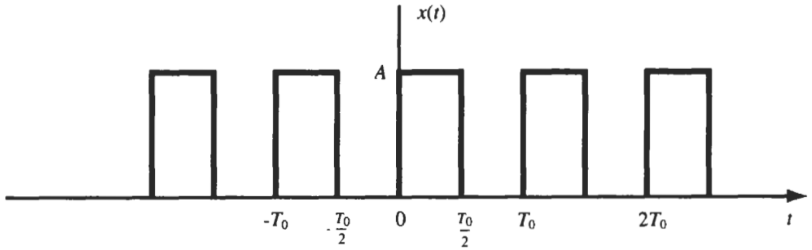
$$c_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

$$c_k = \frac{A}{jk\pi} \qquad k = 2m + 1$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\,dt = \frac{A}{2}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2m+1}e^{j(2m+1)\omega_0 t}}$$



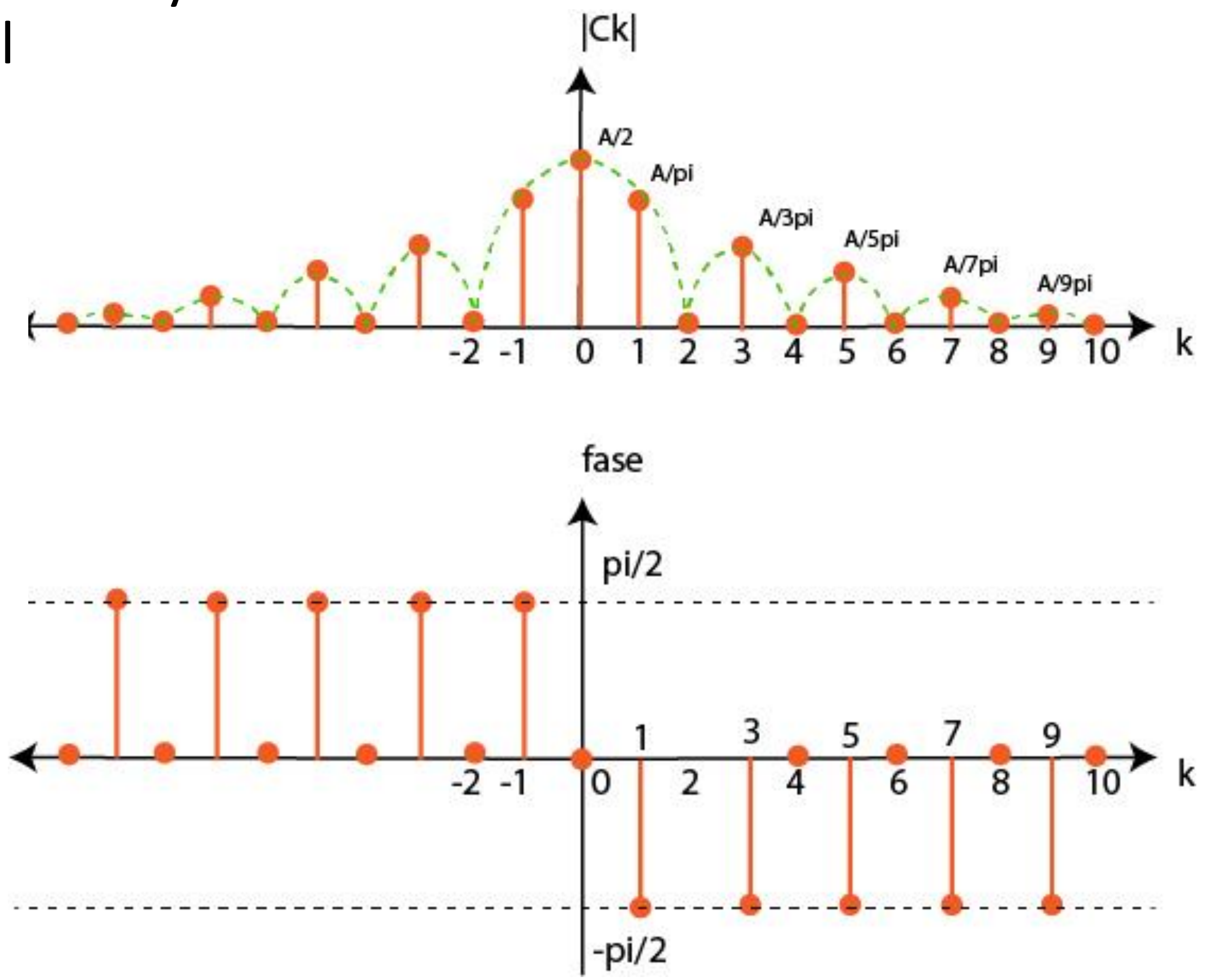
Gráfica de los coeficientes: espectro

Una vez que hemos calculado los coeficientes C_k, podemos graficarlos y obtener el espectro de la señal periódica.

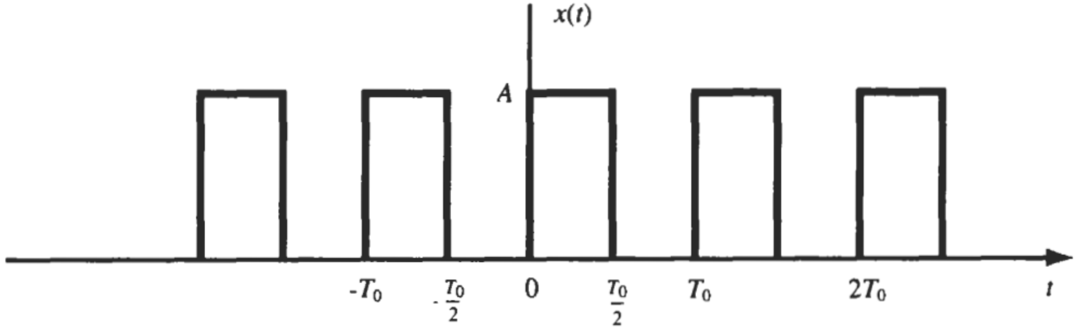
$$c_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

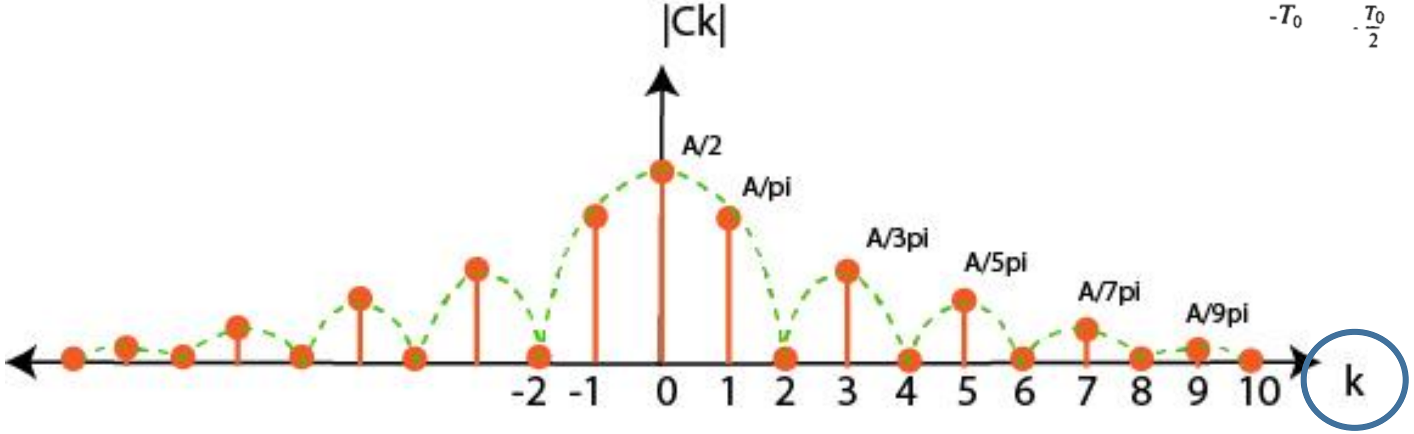
$$c_k = \frac{A}{jk\pi} \qquad k = 2m + 1$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\, dt = \frac{A}{2}$$

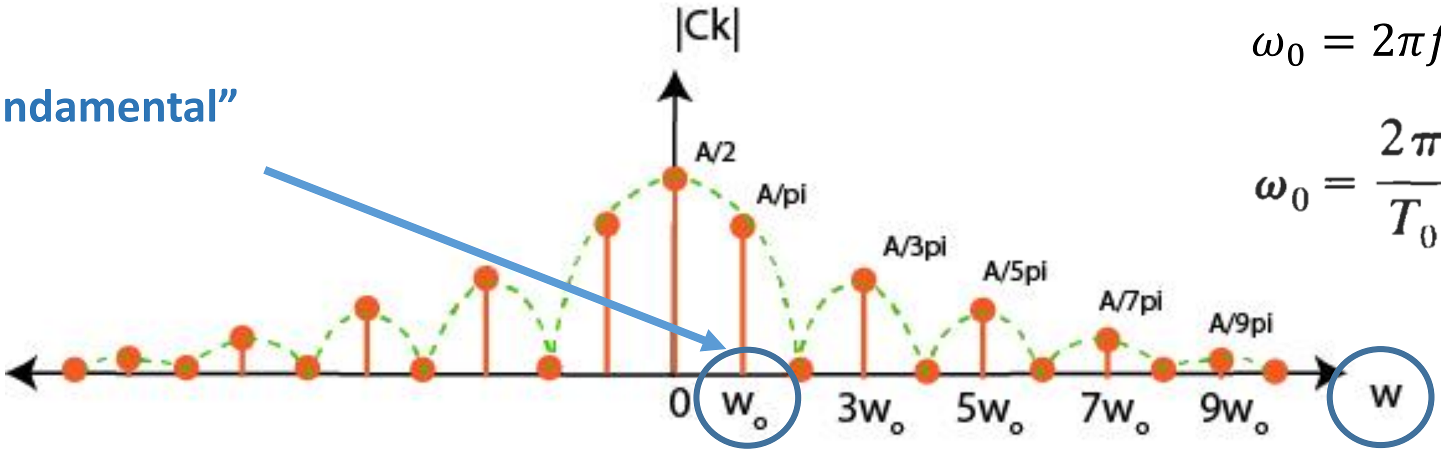


Espectro de una onda cuadrada





Primer armónico o “fundamental”



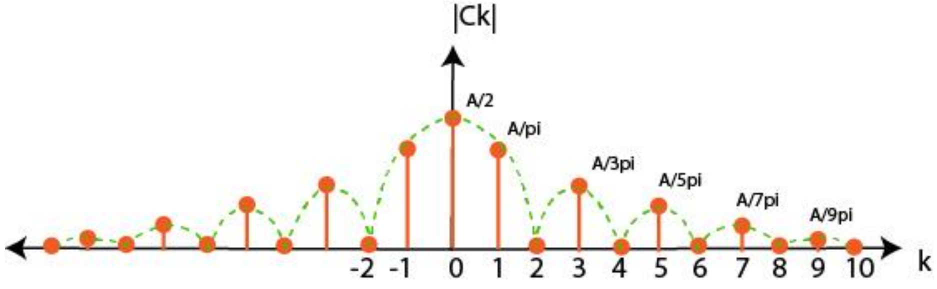
$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

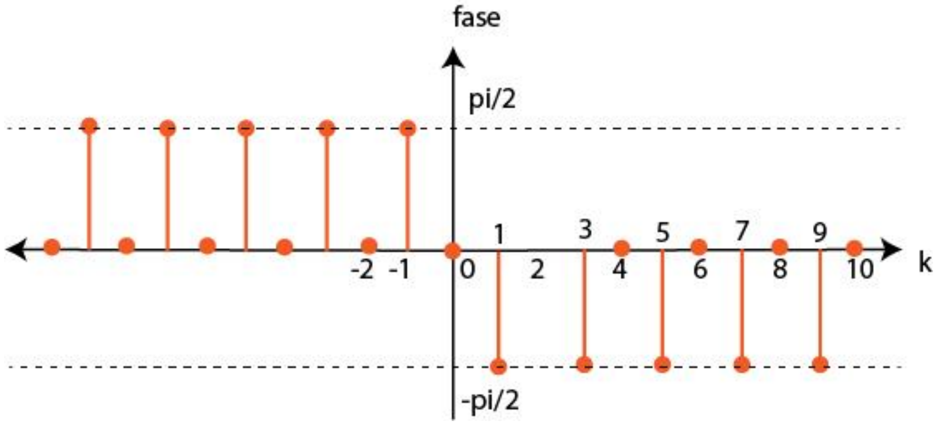
Resumen del espectro de una señal periódica

Coeficientes complejos

$$\boxed{C_k = |C_k| e^{j\emptyset k}}$$



- Al graficar los coeficientes, es un **<u>espectro discreto.</u>**



- Para una señal real, se cumple que:

$$|C_{-k}| = |C_k|$$
$$\emptyset_k = -\emptyset_k$$

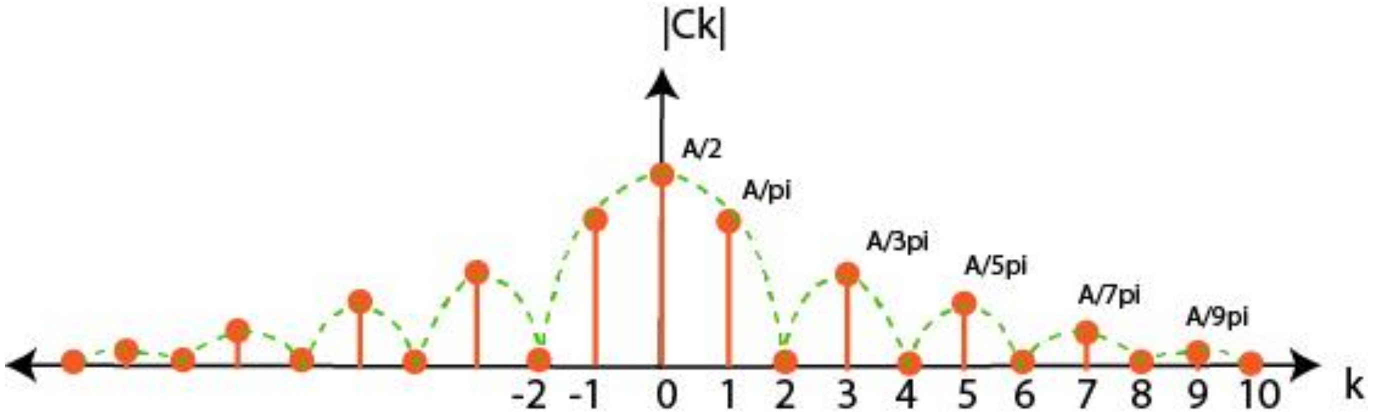
El espectro de <u>amplitud es par</u> y el espectro de <u>fase es impar</u>.

TEOREMA O IDENTIDAD DE PARSEVAL

Para series de tiempo continuo

Relaciona la potencia media de una señal periódica con los aportes de cada armónico que compone dicha señal

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt$$



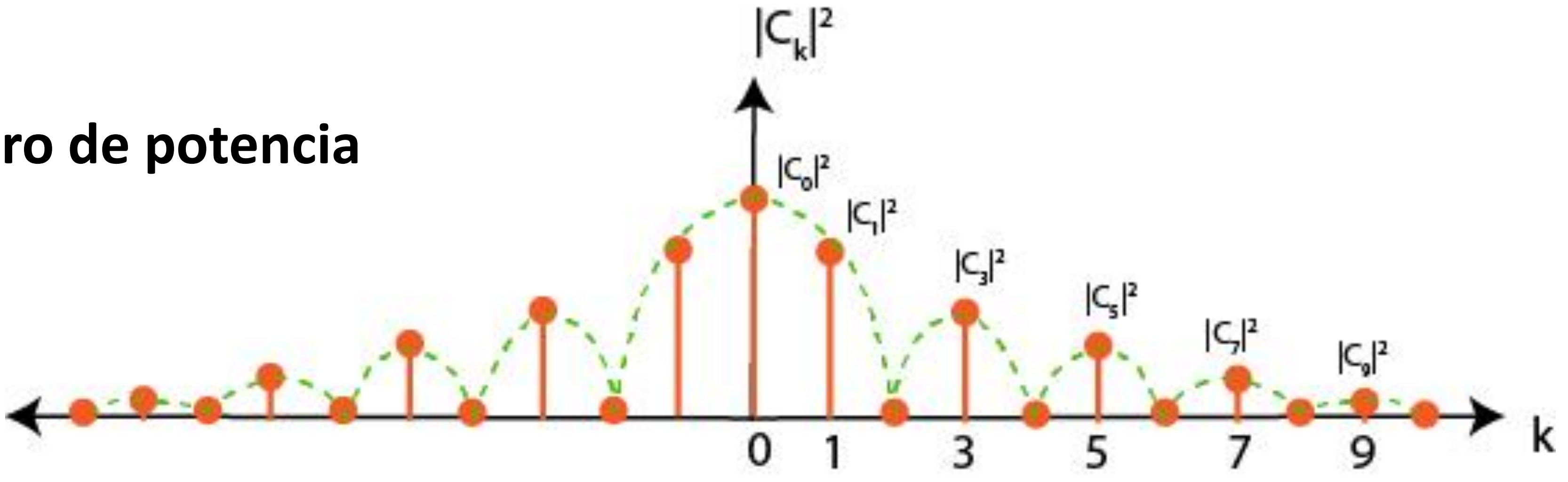
TEOREMA O IDENTIDAD DE PARSEVAL

Para series de tiempo continuo

Establece que la potencia total de una señal periódica es igual a la suma de las potencias de sus componentes armónicos

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Espectro de potencia



Ejemplo práctico/conceptual

Calcule y grafique el espectro de potencia de la siguiente señal:

$$x(t) = 8 + \sin(\omega t)$$

A modo de recordatorio, tenga en cuenta las siguientes expresiones:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jk\omega t} dt \qquad \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

El cálculo de la integral directa es complejo, por lo que la mejor alternativa es obtener los coeficientes directamente de la representación exponencial del seno.

$$x(t) = 8 + \sin(\omega t) = 8 + \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

La expansión de x(t) en sus armónicos es:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{jk\omega t} = \cdots + C_{-1}e^{-j1\omega t} + C_0 e^{j0\omega t} + C_1\, e^{j1\omega t} + C_2 e^{j2\omega t} + \cdots$$

$$x(t) = 8 + \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

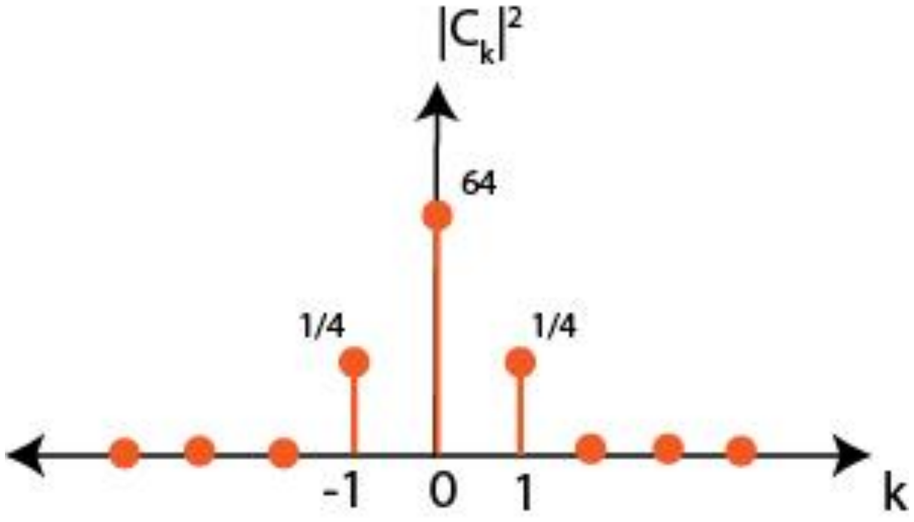
Por lo que…

De manera directa podemos obtener los coeficientes de la serie:

$$x(t) = 8 + \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

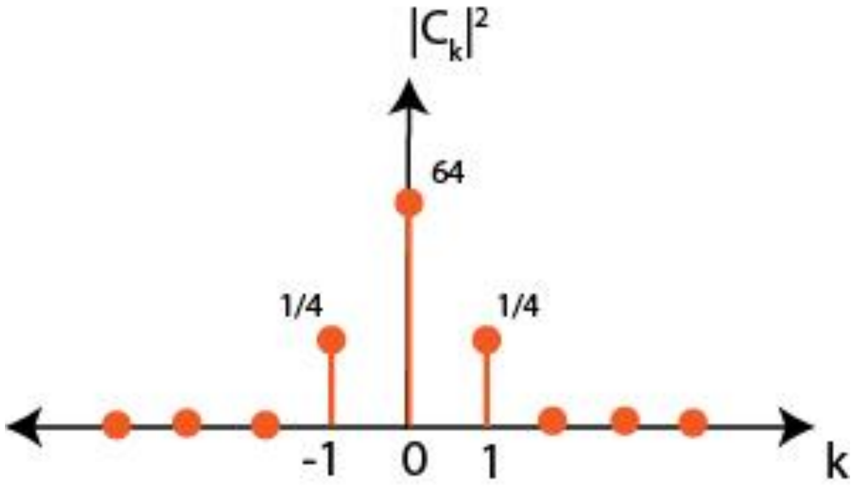
$$c_0 = 8 \qquad c_1 = \frac{1}{2j} \qquad c_{-1} = \frac{-1}{2j}$$

Su espectro de potencia es:



$$x(t) = 8 + \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

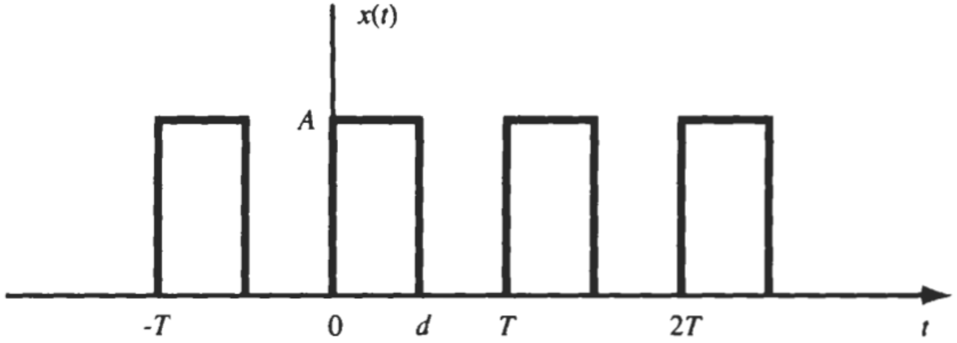
$$c_{-1} = \frac{-1}{2j} \qquad c_0 = 8 \qquad c_1 = \frac{1}{2j}$$



- **¿Cuántos coeficientes tiene?**
- **¿Cuántas componentes armónicas tiene?**
- **¿Cuántos de ellos aportan potencia?**
- **¿Qué frecuencia contiene mayor energía?**

Ejemplo 2: Ondas cuadradas, fase y su espectro en casos extremos

Vamos a analizar el espectro de una onda cuadrada cuando se modifica su ciclo útil, es decir, los tiempos de alto y bajo:

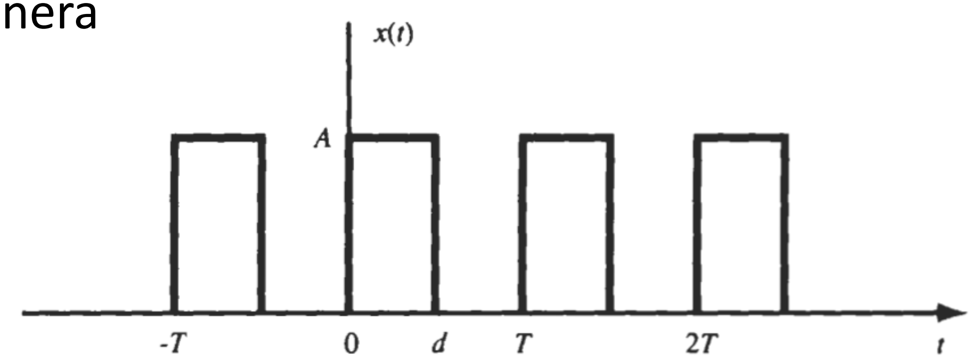


Calcule la serie de Fourier para $(a)\ d = T_0/4$ y $(b)\ d = T_0/8.$

Ejemplo obtenido de “Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu” pag: 243

Ejemplo 2: Ondas cuadradas, fase y su espectro en casos extremos

Primer paso, calculamos los coeficientes de manera genérica:



$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{d} e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

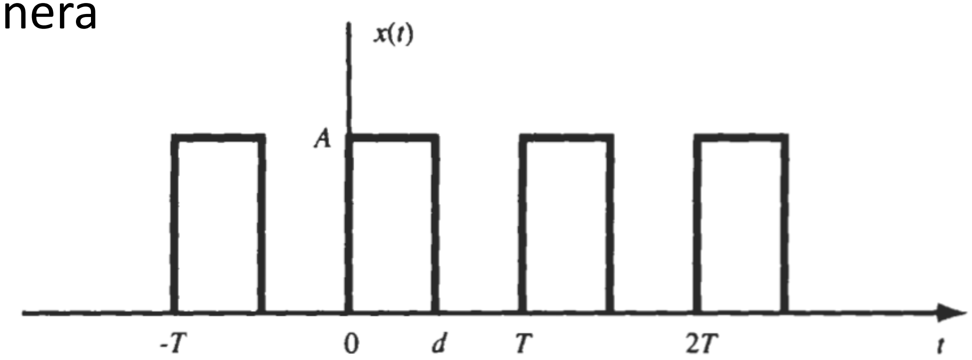
$$= \frac{A}{T_0}\frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^d = \frac{A}{T_0}\frac{1}{jk\omega_0}\left(1 - e^{-jk\omega_0 d}\right)$$

$$= \frac{A}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 d/2}\left(e^{jk\omega_0 d/2} - e^{-jk\omega_0 d/2}\right)$$

Ejemplo obtenido de “Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu” pag: 243

Ejemplo 2: Ondas cuadradas, fase y su espectro en casos extremos

Primer paso, calculamos los coeficientes de manera genérica:



$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{d} e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{T_0}\frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^d = \frac{A}{T_0}\frac{1}{jk\omega_0}\left(1 - e^{-jk\omega_0 d}\right)$$

Se corrige el corrimiento temporal que genera asimetría en el cálculo

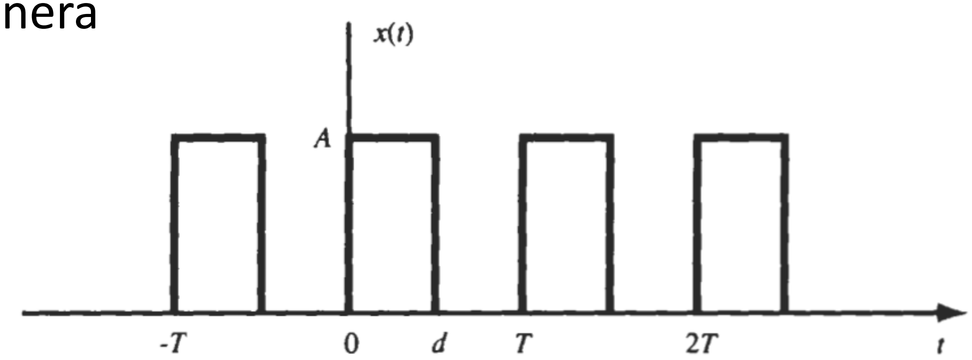
$$= \frac{A}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 d/2}\left(e^{jk\omega_0 d/2} - e^{-jk\omega_0 d/2}\right)$$

Aporte de fase

Ejemplo obtenido de “Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu” pág: 243

Ejemplo 2: Ondas cuadradas, fase y su espectro en casos extremos

Primer paso, calculamos los coeficientes de manera genérica:



$$c_k = \frac{A}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 d/2}\left(e^{jk\omega_0 d/2} - e^{-jk\omega_0 d/2}\right)$$

$$c_k = A\frac{d}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0 d/2)}{k\omega_0 d/2} e^{-jk\omega_0 d/2}$$

Notar que $c_k = 0$ siempre que $k\omega_0 d/2 = m\pi$ por lo que si quiero saber a qué frecuencia "$k\omega_0$" el espectro se hacer cero, despejo:

$$C_k = 0 \overset{si}{\rightarrow} k\omega_0 = \frac{2m\pi}{d} \quad con\ m = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

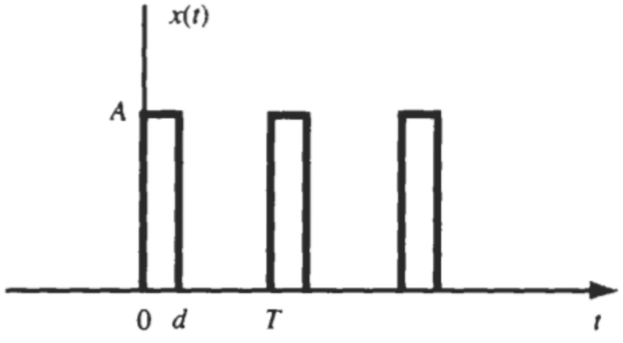
Ejemplo obtenido de "Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu" pag: 243

$$= A\frac{d}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0 d/2)}{k\omega_0 d/2}e^{-jk\omega_0 d/2}$$

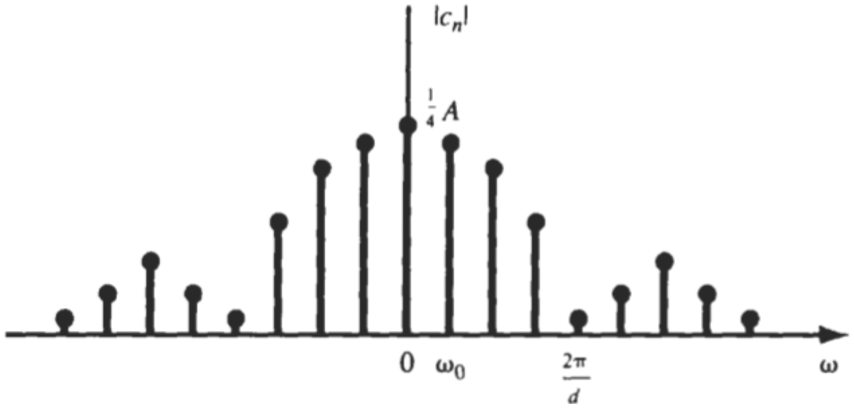
$$d = T_0/4, k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/4,$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$|c_k| = \frac{A}{4}\left|\frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4}\right|$$



$d=\frac{T}{4}$



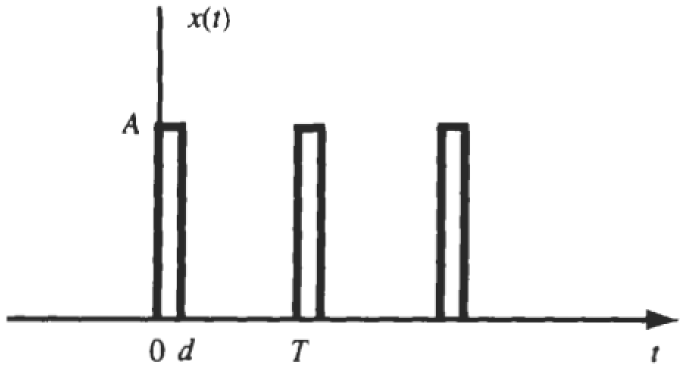
Para k=4 se produce el primer cruce por cero del espectro

Ejemplo obtenido de “Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu” pag: 243

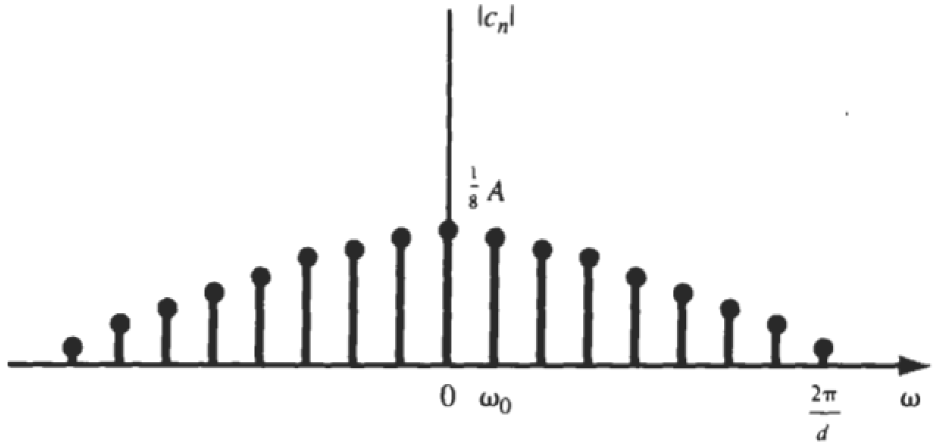
$$= A \frac{d}{T_0} \frac{\sin(k\omega_0 d/2)}{k\omega_0 d/2} e^{-jk\omega_0 d/2}$$

$$d = T_0/8, \; k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/8,$$

$$|c_k| = \frac{A}{8} \left| \frac{\sin(k\pi/8)}{k\pi/8} \right|$$

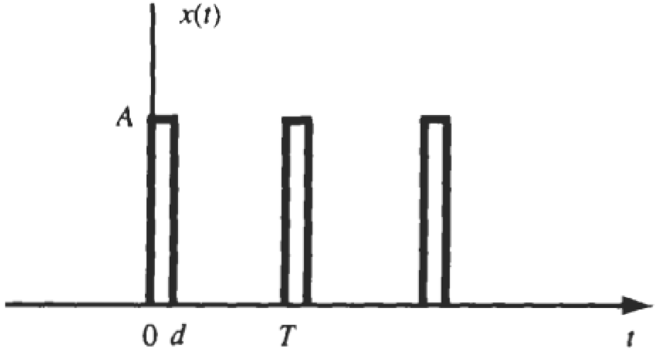


$d = \frac{T}{8}$

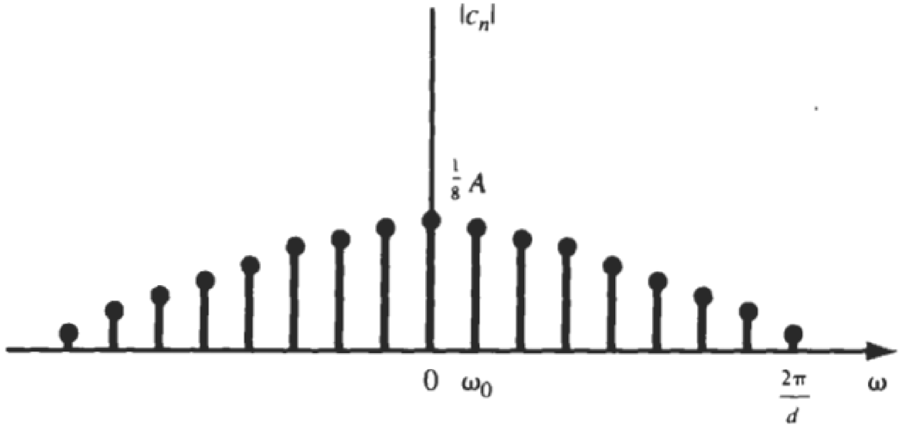


Para k=8 se produce el primer cruce por cero del espectro

Ejemplo obtenido de “Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu” pag: 243

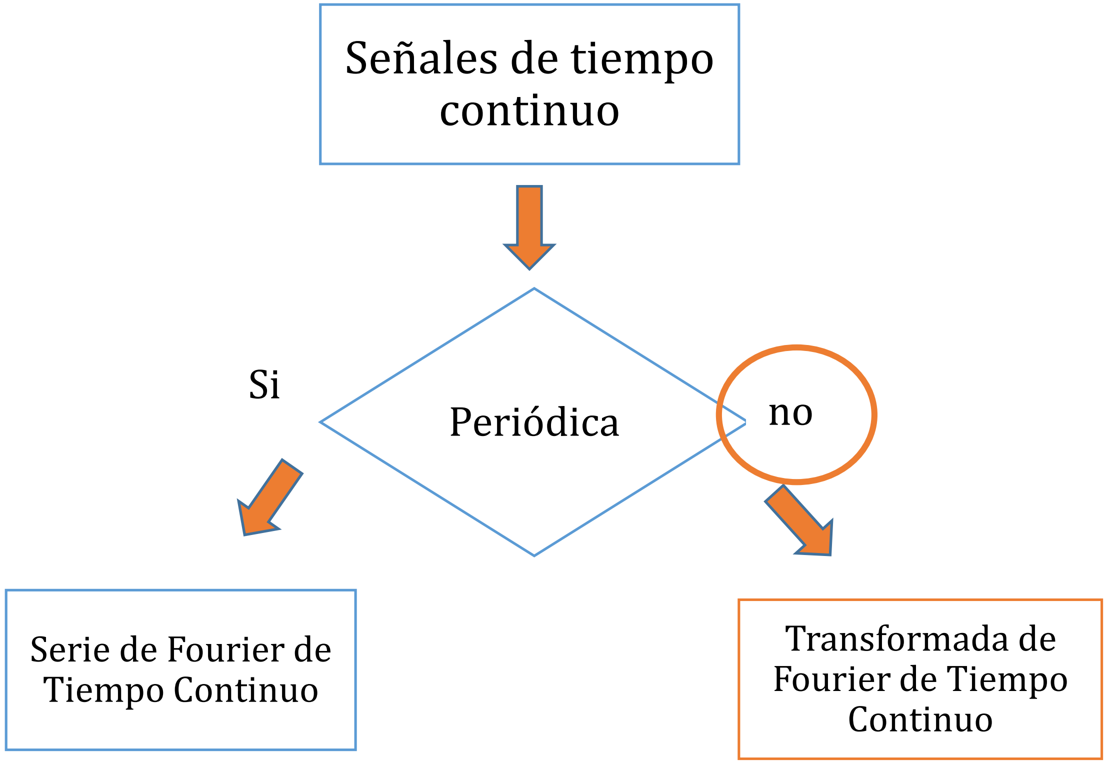


$d=\frac{T}{8}$



¿Qué pasa cuando "d" se hace muy pequeño y "T" muy grande?


Transient
Attack
Hold
Auto
HQ
Release
Adapt
Hyst
Noise
LF gain
Pump
Toneboosters


Señales de tiempo continuo
Si
Periódica
no
Serie de Fourier de Tiempo Continuo
Transformada de Fourier de Tiempo Continuo