SEÑALES Y SISTEMAS

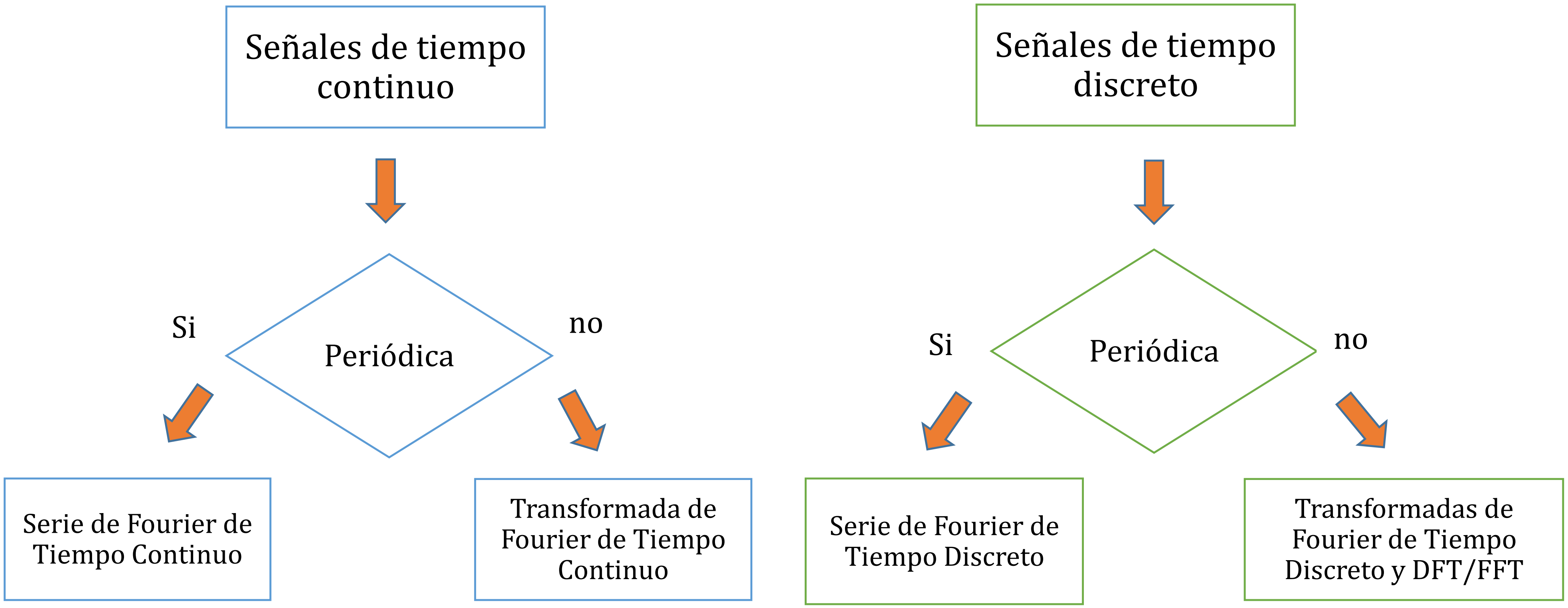
Ingeniería en Computación

UNIDAD 4

ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES Y SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO

ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES

Las herramientas de análisis espectral se clasifican en función al tipo de señal a analizar



TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO

Cuando la señal a analizar no es periódica, debemos aplicar la Transformada de Fourier de Tiempo Continuo para obtener su representación espectral.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

Expresión de cálculo del espectro $X(j\omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

Expresión de síntesis de $x(t)$

$$X(j\omega) \leftrightarrow x(t)$$

Diferencias entre ambas herramientas de cálculo espectral:

SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO	TRANSFORMADA FOURIER DE TIEMPO CONTINUO
$C_k = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{<T>} x(t)e^{-jk\omega t}\, dt$	$X(j\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt$
$x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{jk\omega t}$	$x(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\, d\omega$

Principales características del espectro de la Transformada de Fourier de Tiempo Continuo:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

- *Es un espectro continuo (no discreto)*
- *Es un espectro complejo (jw)*
- *No es un espectro periódico*

Ejemplo de cálculo:

Obtener el espectro de la TFTC (Transformada de Fourier de Tiempo Continuo) de x(t):

$$x(t) = e^{-at}u(t), \text{ para } a > 0$$

Graficar x(t) para todo “t”:

Ejemplo de cálculo:

Obtener el espectro de la TFTC (Transformada de Fourier de Tiempo Continuo) de x(t):

$$x(t) = e^{-at}u(t), \text{ para } a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt$$

$$X(j\omega) = \left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{e^{-(a+j\omega)\infty}}{-(a+j\omega)} - \frac{e^{-(a+j\omega)0}}{-(a+j\omega)} = \frac{1}{a+j\omega}$$

Ejemplo de cálculo:

Obtener el espectro de la TFTC (Transformada de Fourier de Tiempo Continuo) de x(t):

$$x(t) = e^{-at}u(t), \text{ para } a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt$$

$$X(j\omega) = \left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{e^{-(a+j\omega)\infty}}{-(a+j\omega)} - \frac{e^{-(a+j\omega)0}}{-(a+j\omega)} = \boxed{\frac{1}{a+j\omega}}$$

¿Puedo graficar esto?

¿Qué me indicaría?

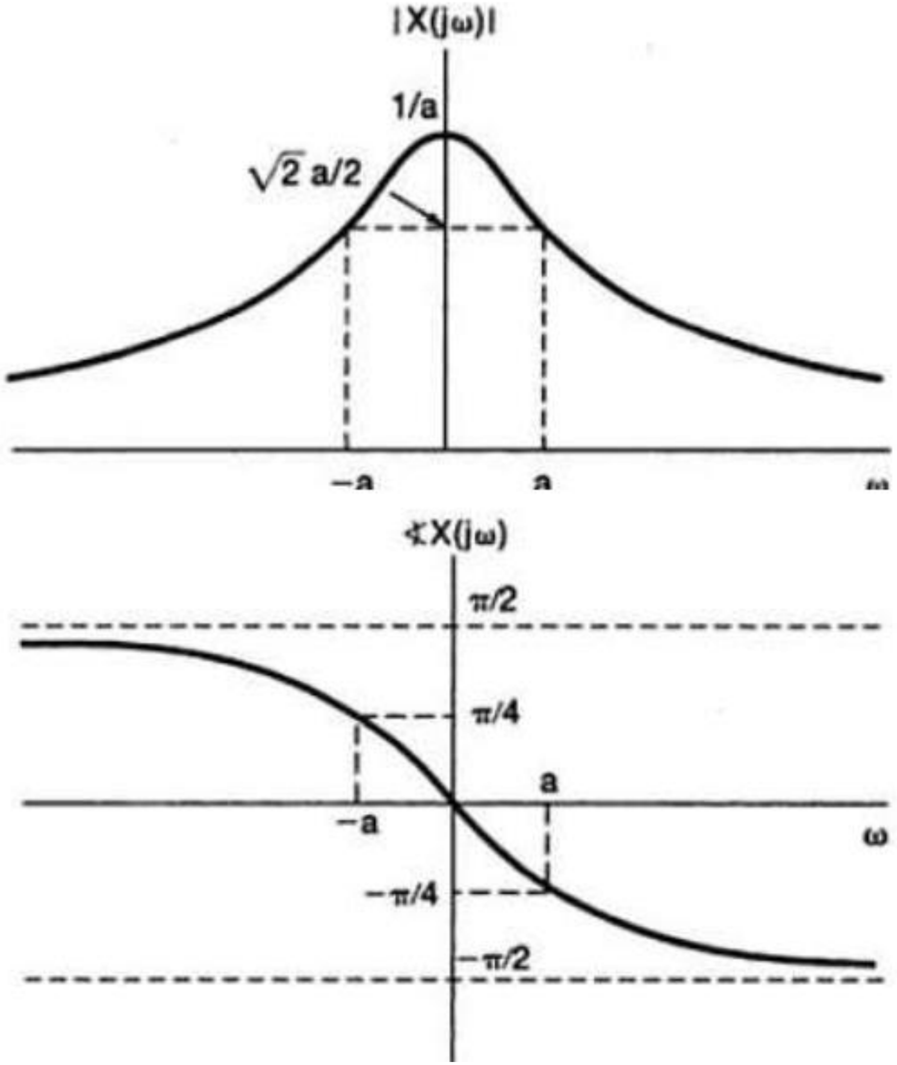
Ejemplo de cálculo:

Espectro de la TFTC:

$$X(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}=\frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$$

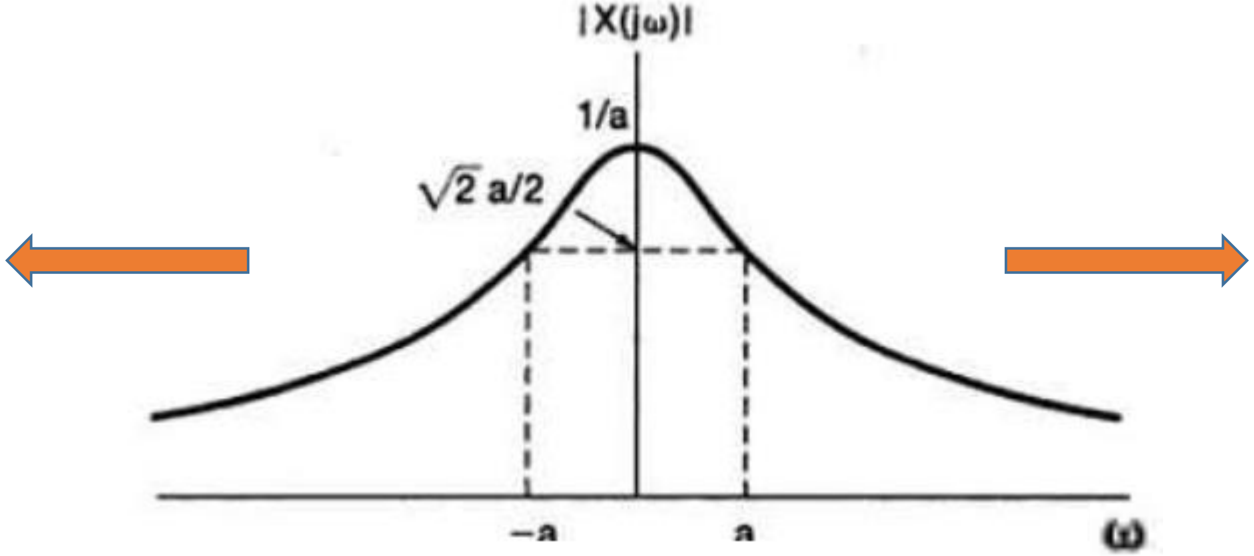
$$|X(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

$$\measuredangle X(j\omega)=-\text{arcotg}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



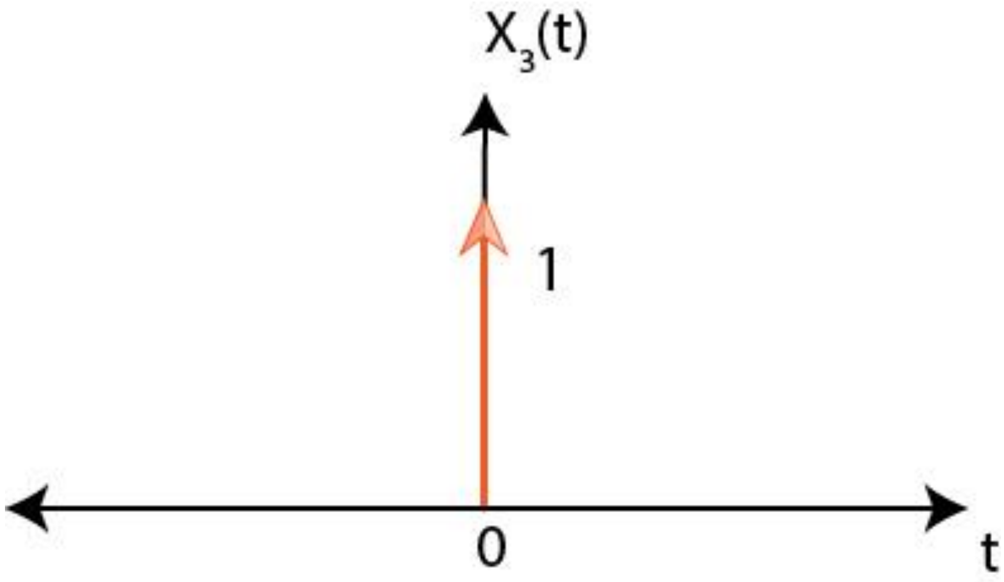
Espectro de la TFTC

- *Es un espectro continuo (no discreto)*
- *Es un espectro complejo (jw)*
- *<u>No es</u> un espectro periódico*



Ejemplo de cálculo 2:

¿Cuál es la expresión matemática y forma del espectro de la siguiente señal?

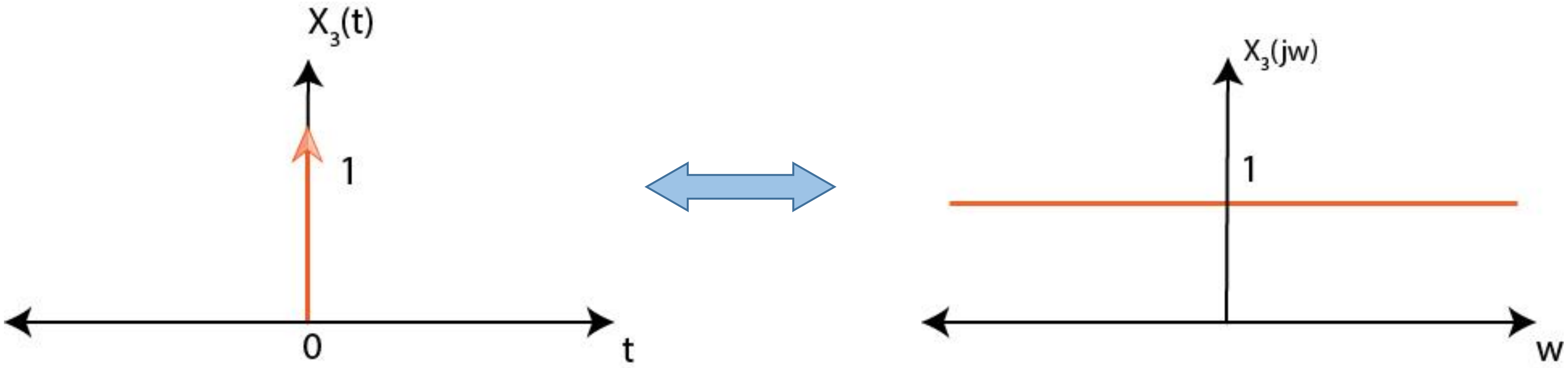


Ejemplo de cálculo 2:

Obtener el espectro de la TFTC de x(t):

$$x_3(t) = \delta(t)$$

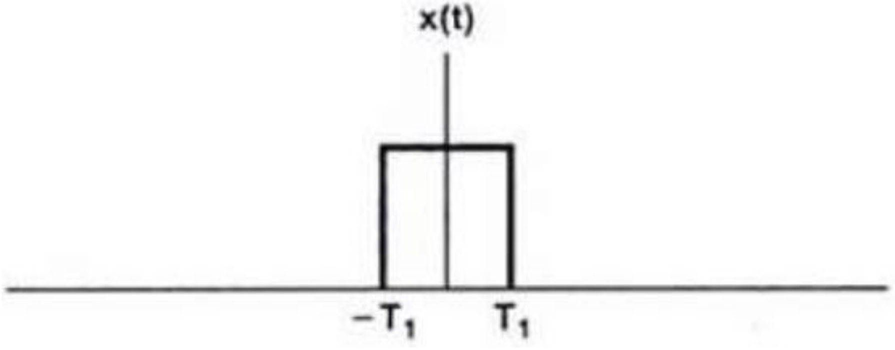
$$X_3(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_3(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$



Ejemplo de cálculo 3:

Calcular la TFTC de un pulso rectangular:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

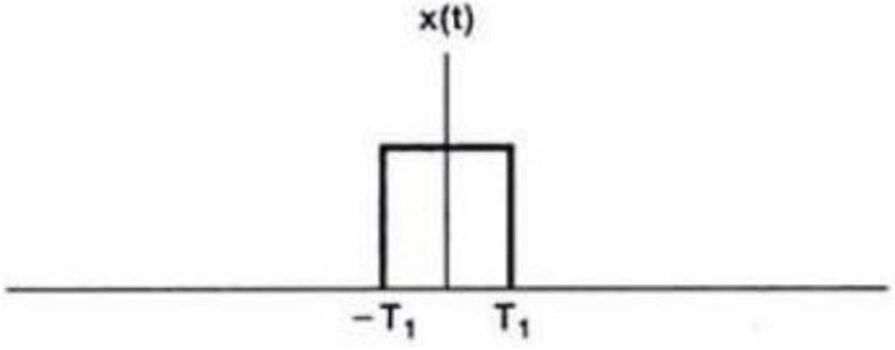


$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ejemplo de cálculo 3:

Calcular la TFTC de un pulso rectangular:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

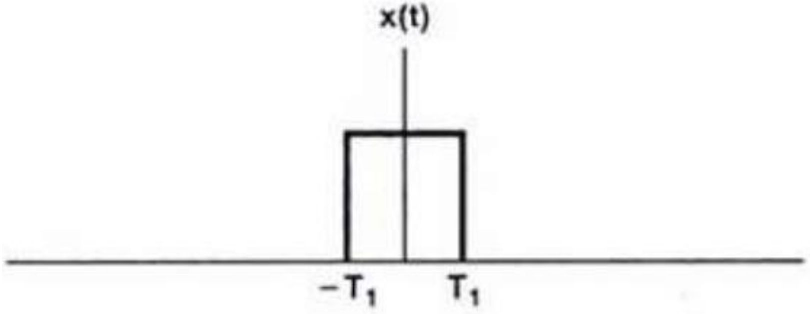


$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-T_1}^{T_1} = \frac{e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}}{-j\omega}$$

$$X(j\omega) = \frac{2sen(\omega T_1)}{\omega}$$

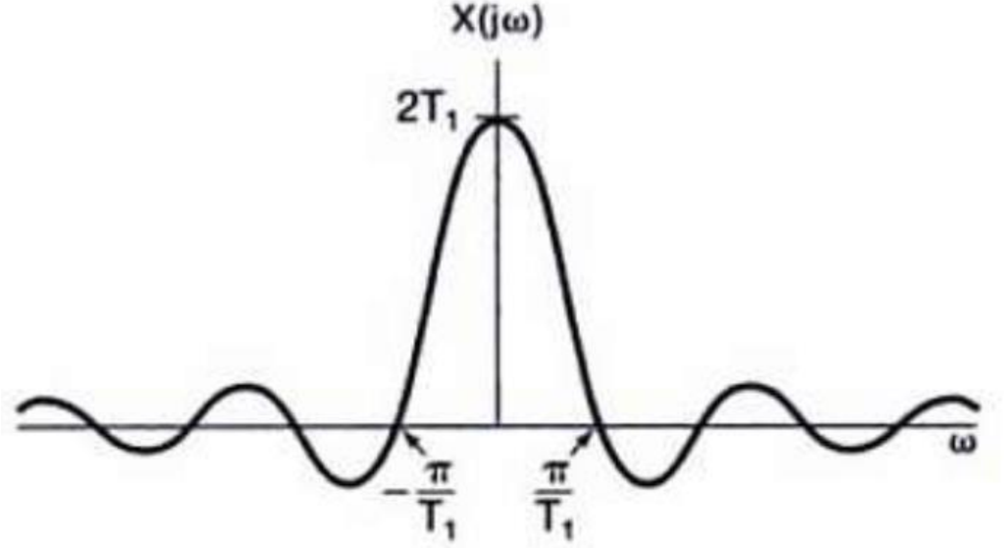
Ejemplo de cálculo 3:

Calcular la TFTC de un pulso rectangular:



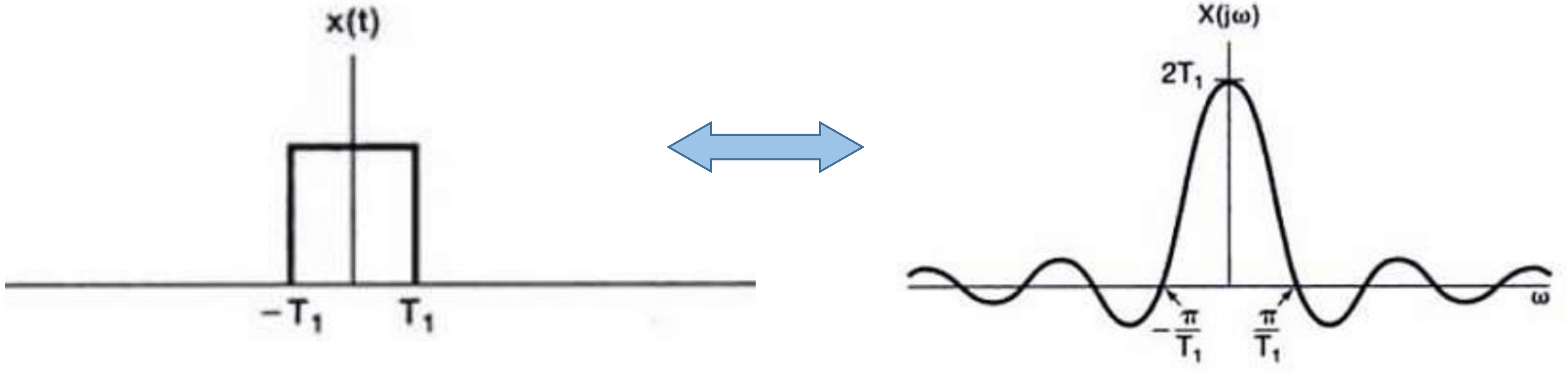
$$X(j\omega) = \frac{2sen(\omega T_1)}{\omega} = \frac{2T_1 sen(\omega T_1)}{\omega T_1} = 2T_1 \operatorname{sinc}(\omega T_1)$$

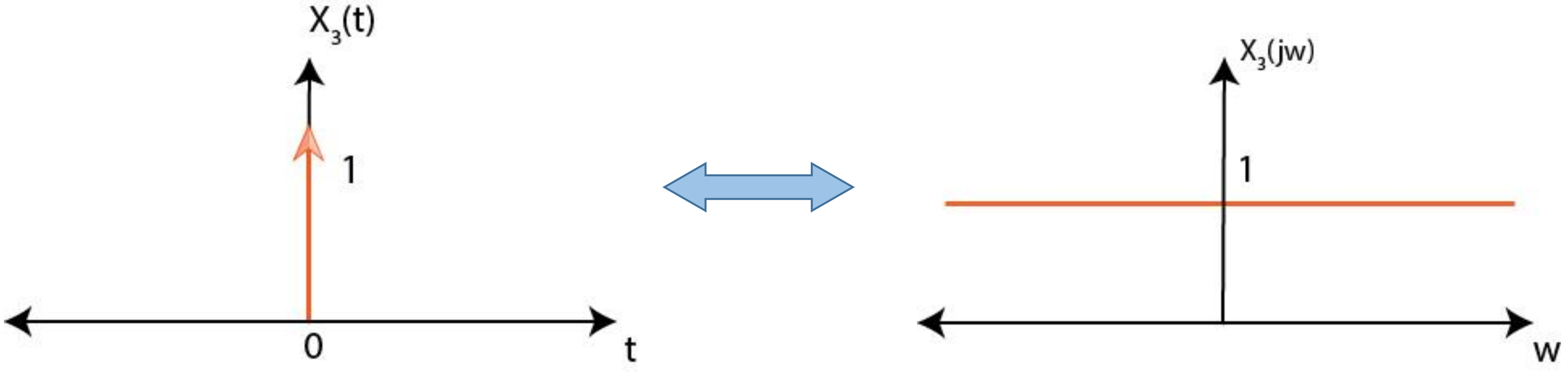
$$\left(\operatorname{sinc}(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\alpha}\right)$$



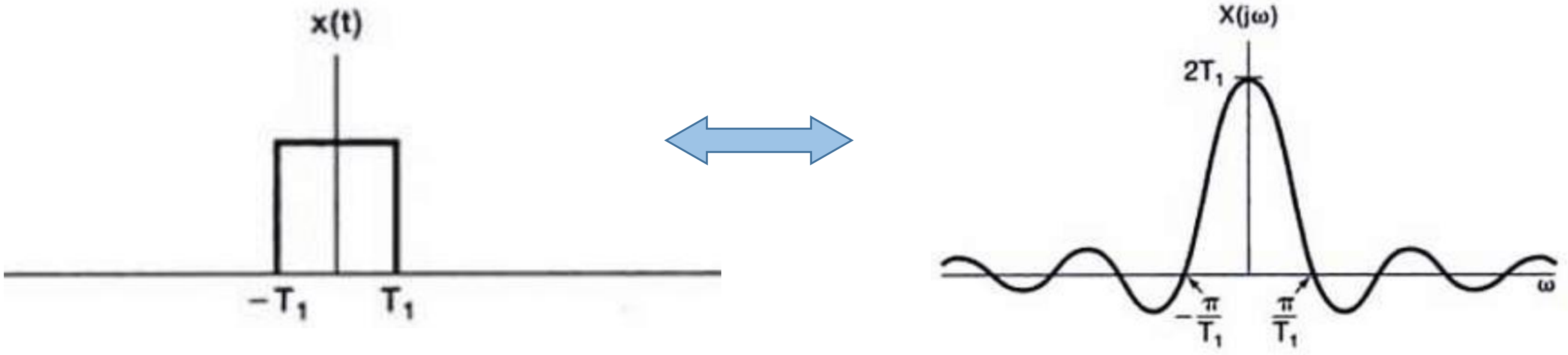
Ejemplo de cálculo 3:

La Transformada de Fourier de Tiempo Continuo de un pulso rectangular es una “Sinc” cuyos cruces por cero dependen del ancho del pulso.





¿Que podemos concluír con estos gráficos?



Tablas de Transformadas de Fourier

Muchas de los ejercicios se resuelven con tablas, pero para entender bien las tablas, necesitamos conocer las propiedades de la TFTC.

Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu (Pág: 223)

Table 5-2. Common Fourier Transforms Pairs

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$
$u(-t)$	$\pi\delta(\omega)-\dfrac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t),\ a>0$	$\dfrac{1}{j\omega+a}$
$te^{-at}u(t),\ a>0$	$\dfrac{1}{(j\omega+a)^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert},\ a>0$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\dfrac{1}{a^2+t^2}$	$e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$e^{-at^2},\ a>0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-\omega^2/4a}$
$p_a(t)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<a\\ 0 & \lvert t\rvert>a\end{cases}$	$2a\dfrac{\sin\omega a}{\omega a}$
$\dfrac{\sin at}{\pi t}$	$p_a(\omega)=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert<a\\ 0 & \lvert\omega\rvert>a\end{cases}$
$\operatorname{sgn} t$	$\dfrac{2}{j\omega}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$	$\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0),\ \omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$

PROPIEDADES DE LA “TFTC”

Conocer las propiedades de esta herramienta nos permite entender fenómenos y resolver problemáticas muy eficientemente

Linealidad:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \longleftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$$

Escalamiento en el tiempo:

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

PROPIEDADES DE LA "TFTC"

Conocer las propiedades de esta herramienta nos permite entender fenómenos y resolver problemáticas muy eficientemente

<u>Corrimiento en el tiempo:</u>

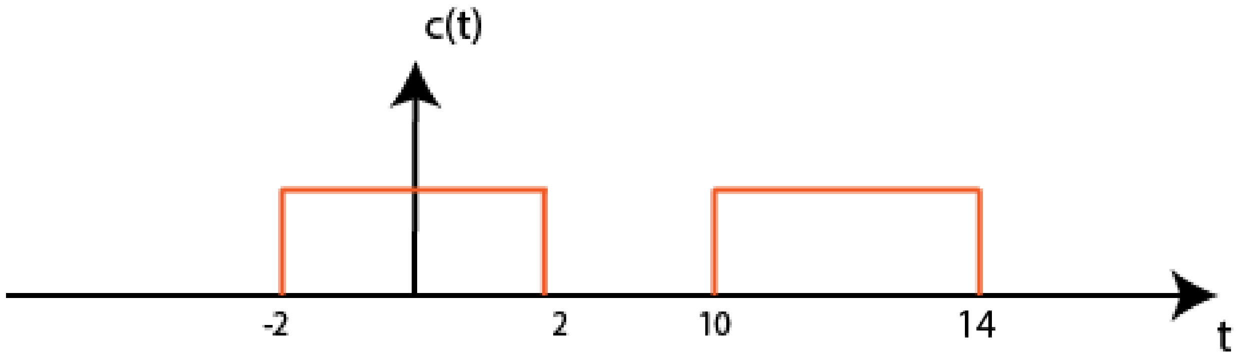
$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

Corrimientos en el tiempo generan aportes de fase lineal y proporcionales al desplazamiento temporal. <u>Notar que el módulo del espectro permanece igual.</u>

<u>Ejemplo de propiedad de corrimiento en el tiempo:</u>

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

¿Cuánto vale el espectro de c(t)?



PROPIEDADES DE LA “TFTC”

Conocer las propiedades de esta herramienta nos permite entender fenómenos y resolver problemáticas muy eficientemente

Corrimiento en la frecuencia:

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \longleftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

Multiplicar una señal en el tiempo por una exponencial genera un corrimiento espectral

VER PROBLEMA 5.26 Signal and Systems - Schawm - Hwei P. Hsu (Pág: 252)

PROPIEDADES DE LA “TFTC”

Conocer las propiedades de esta herramienta nos permite entender fenómenos y resolver problemáticas muy eficientemente

<u>Dualidad</u>

$$X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

Atender la nomenclatura de la propiedad. Nos dice que conociendo $x(t)$ o $X(\omega)$ puedo obtener su par transformado/antitransformado cambiando variables.

PROPIEDADES DE LA "TFTC"

Conocer las propiedades de esta herramienta nos permite entender fenómenos y resolver problemáticas muy eficientemente

Propiedad de Convolución

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$$

Una de las propiedades más importantes de Señales y Sistemas por sus enormes implicancias. La convolución en el tiempo es el producto de los espectros en la frecuencia.

PROPIEDADES DE LA “TFTC”

Conocer las propiedades de esta herramienta nos permite entender fenómenos y resolver problemáticas muy eficientemente

<u>Propiedad de multiplicación:</u>

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Es la propiedad dual de la convolución, muy útil en el proceso de muestreo

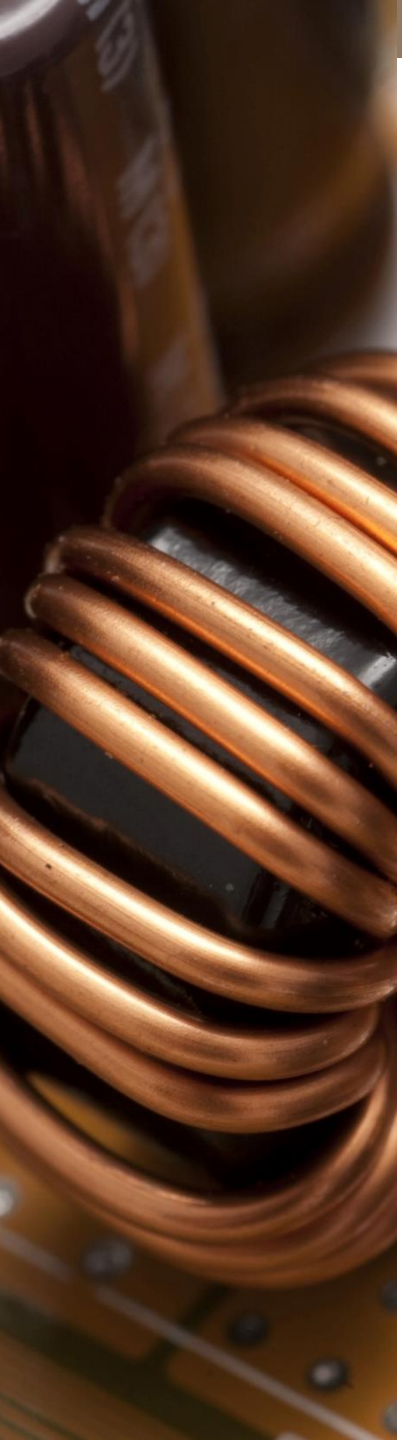
<u>Teorema de Parseval en la TFTC:</u>

Al igual que en la serie de Fourier, la conservación de la energía se debe cumplir y en este caso tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

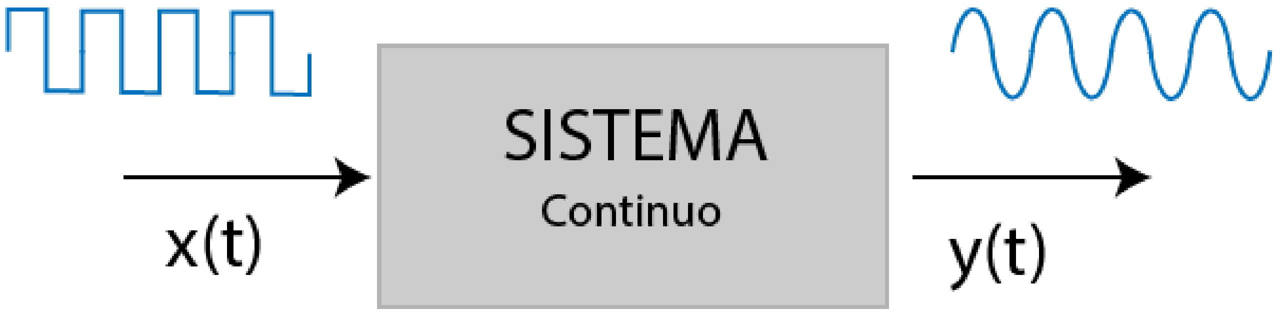
La energía normalizada de la señal es igual al área bajo el módulo al cuadrado del espectro.

Por esto, a la cantidad $|X(\omega)|^2$ se la conoce como **espectro de energía**:

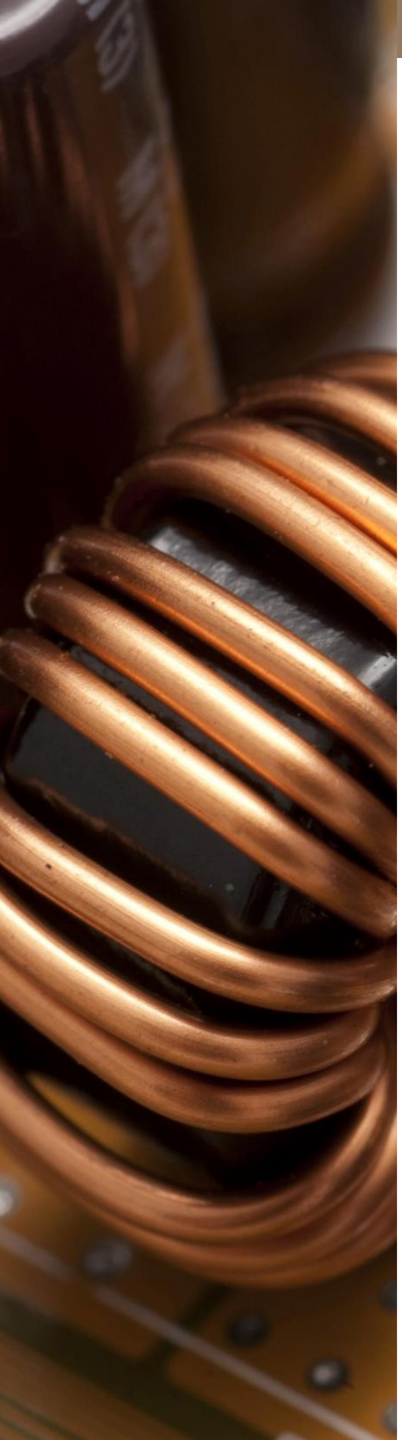


RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS CONTINUOS

La propiedad de convolución de la TFTC nos permite conocer como responde un sistema en el dominio de la frecuencia.

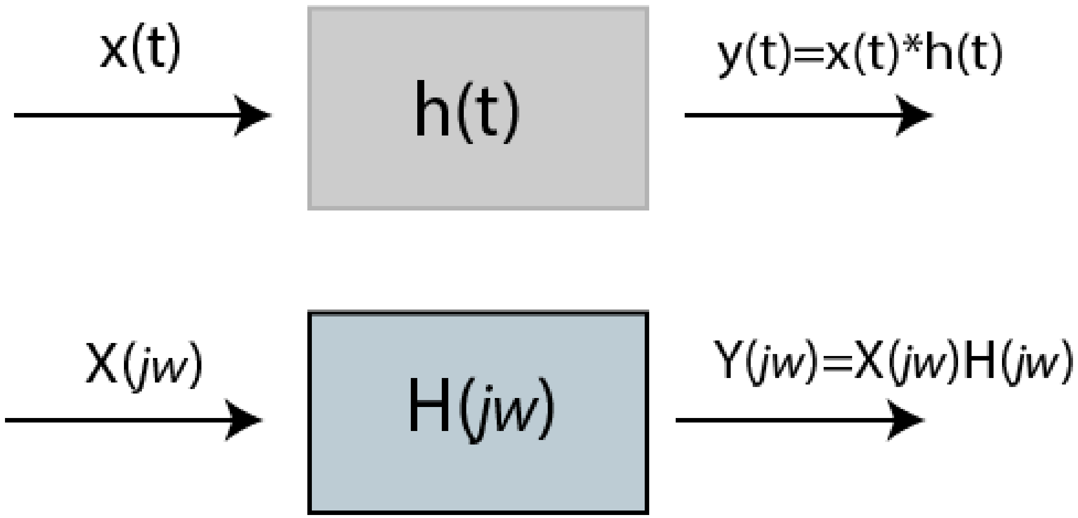


¿Qué característica debe tener el "SISTEMA" para que podamos obtener su respuesta en frecuencia permanente?

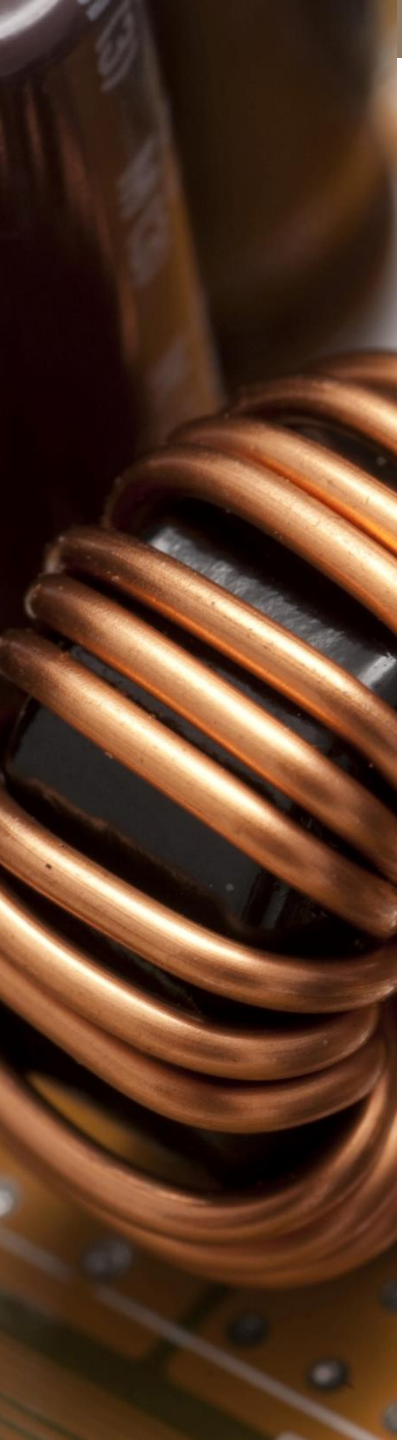


RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS CONTINUOS

Analizando en tiempo y frecuencia un sistema LTI tenemos:

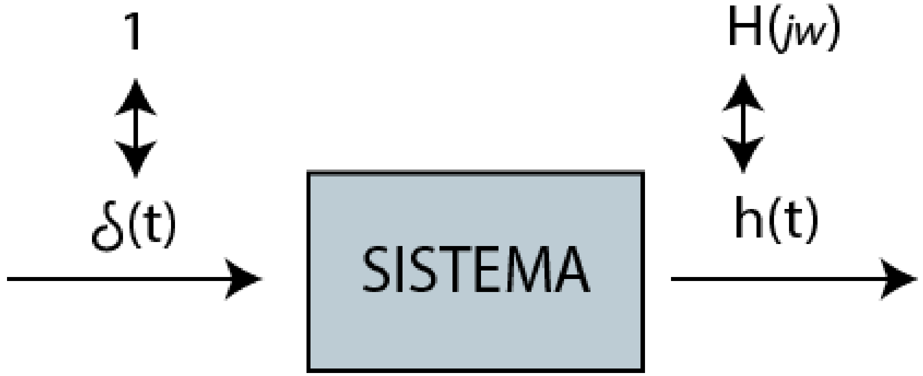


$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

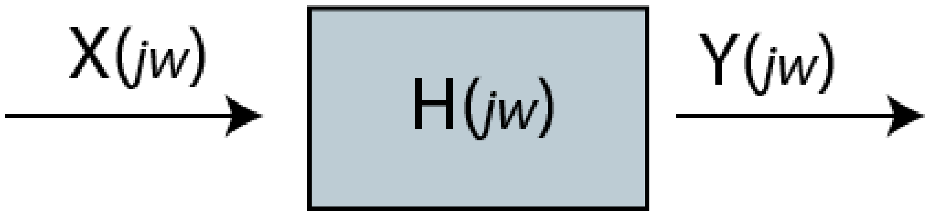


RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS CONTINUOS

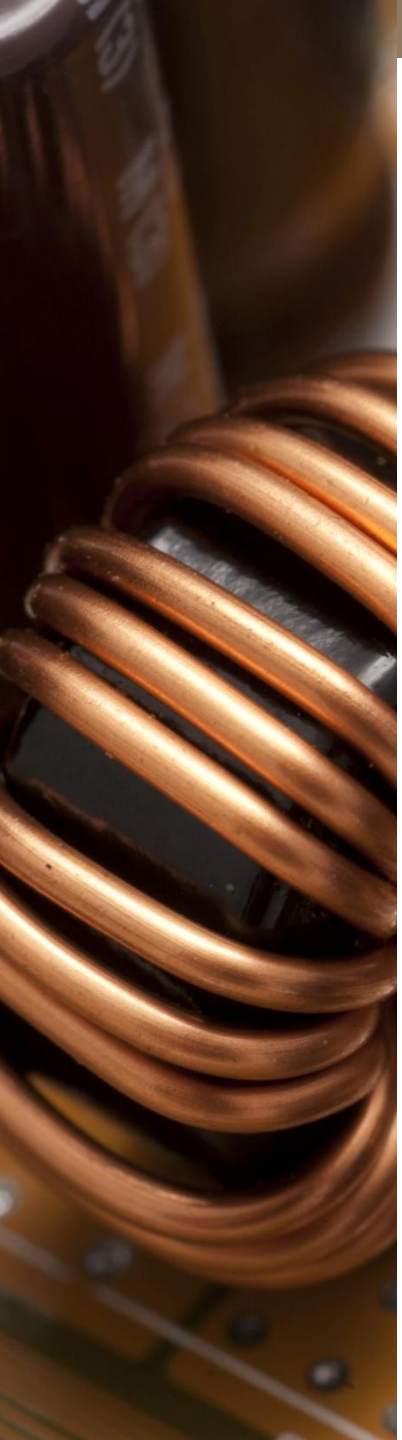
La respuesta en frecuencia de un sistema LIT se expresa como $H(j\omega)$ y se puede obtener de la siguiente manera:



$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

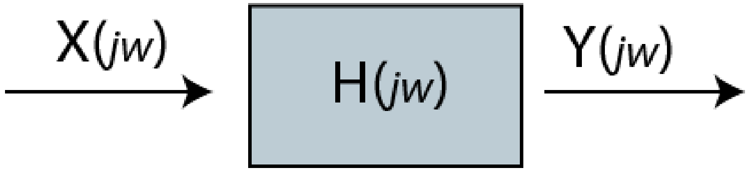


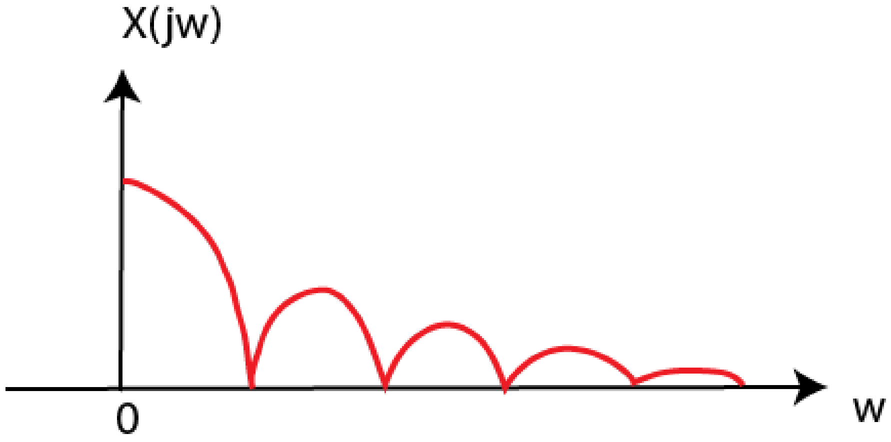
$$\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}}$$

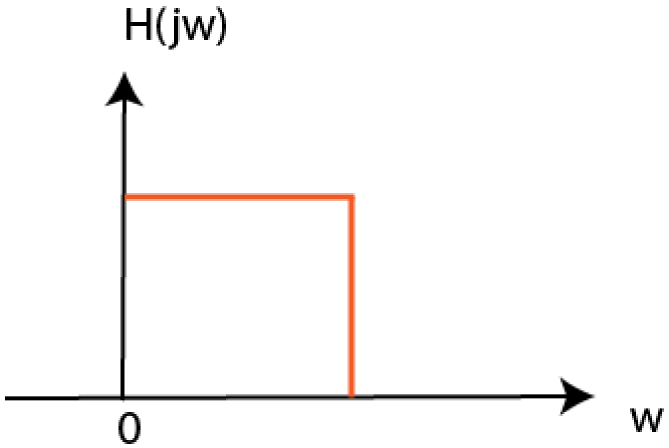


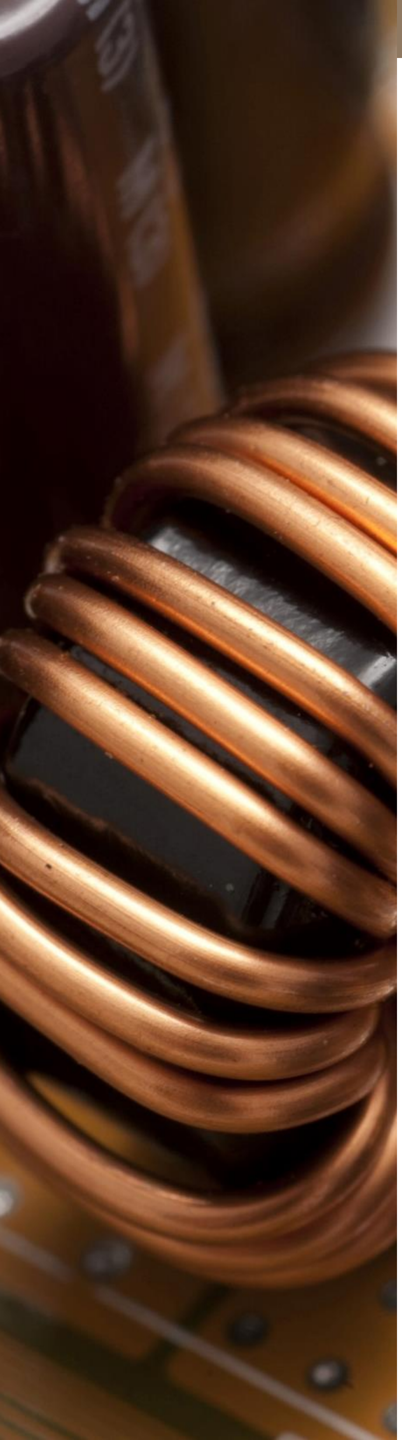
La salida de un sistema, visto como la multiplicación de los espectros de la entrada por la respuesta en frecuencia del sistema, nos dice muchas cosas:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

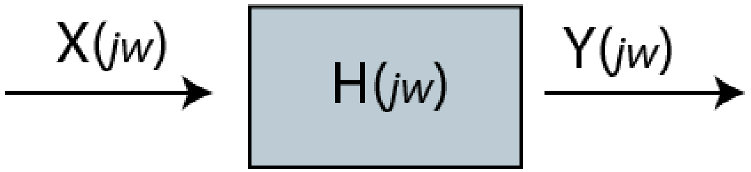


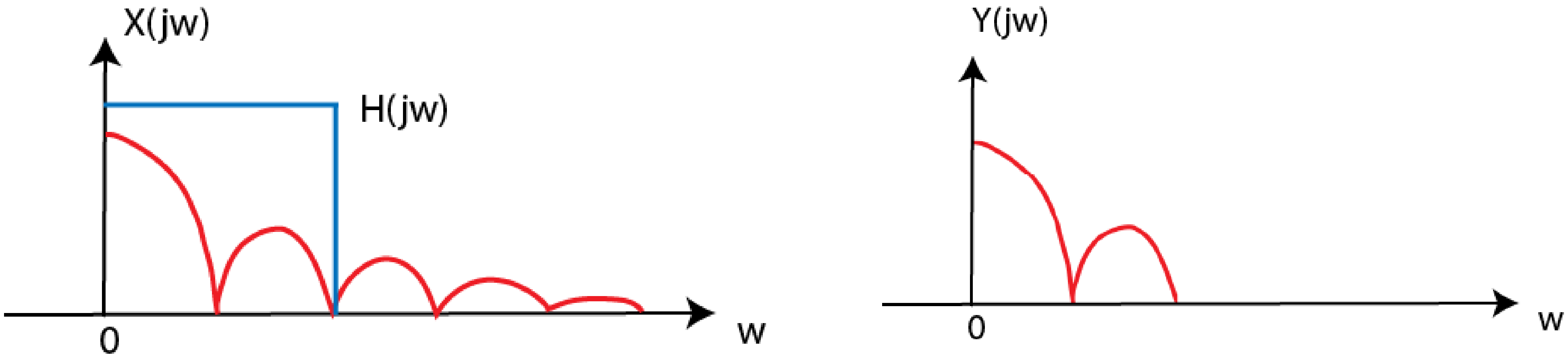






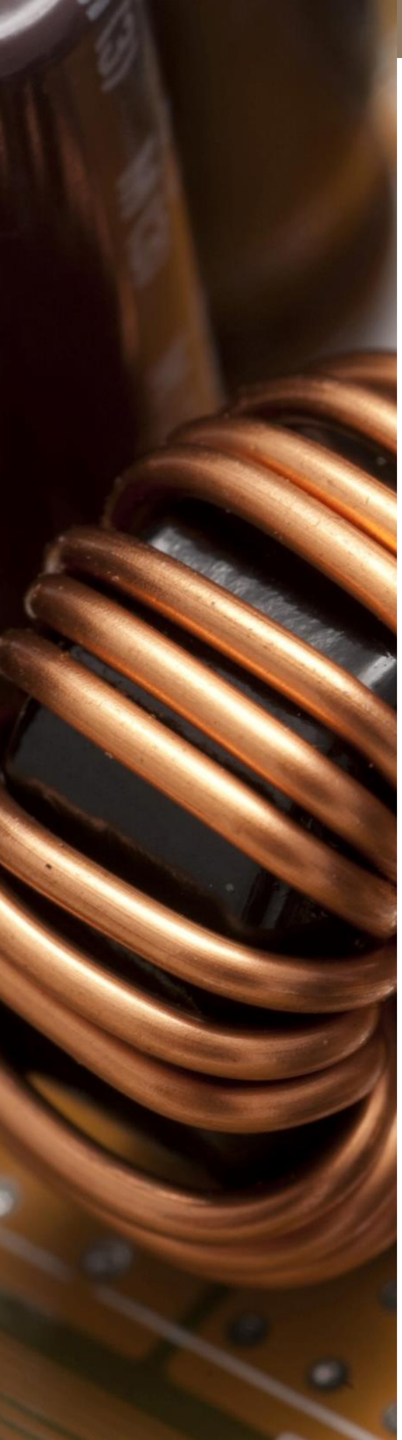
$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$



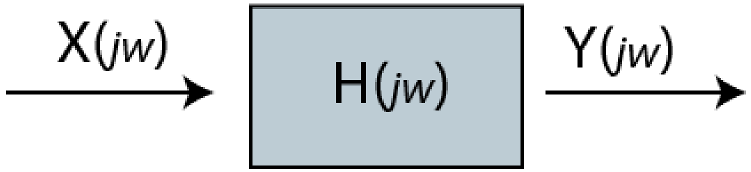


¿Qué efecto produce el sistema sobre la señal de entrada?

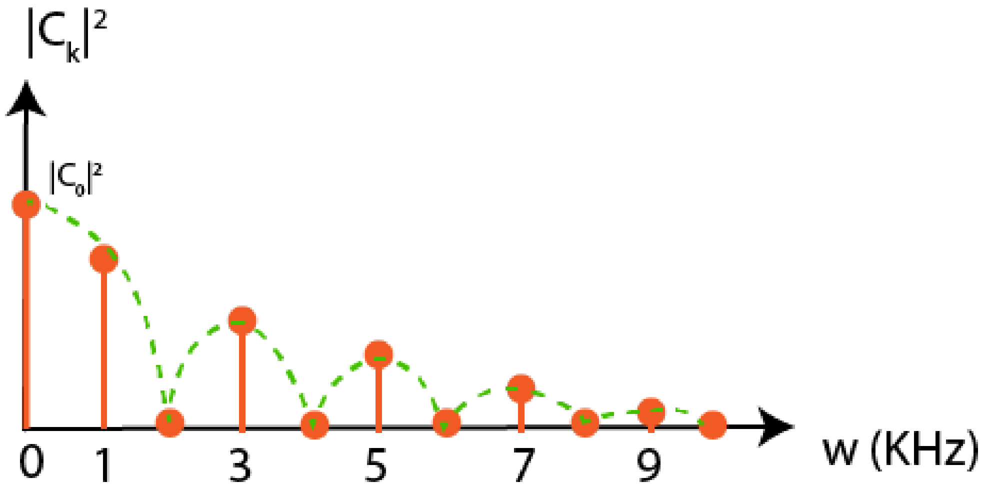
¿Cómo sería este análisis en el dominio temporal?

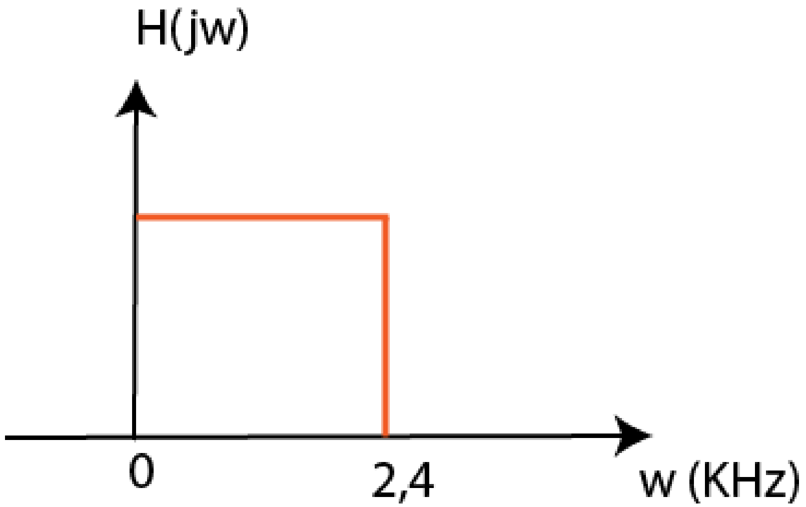


Todo esto también es válido con señales periódicas, analicemos un caso:

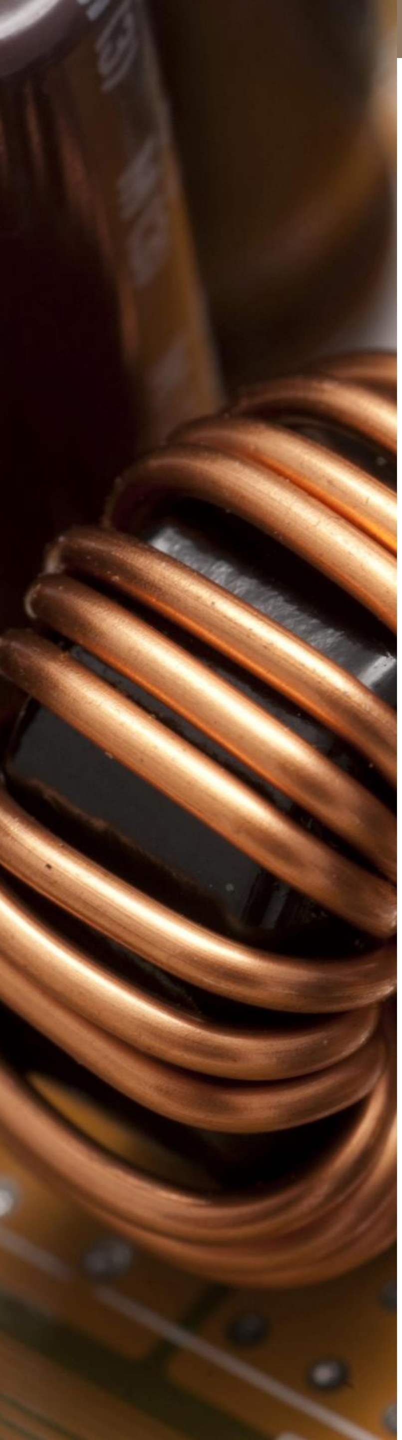


$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$





¿Qué forma de onda tendrá la salida del sistema?



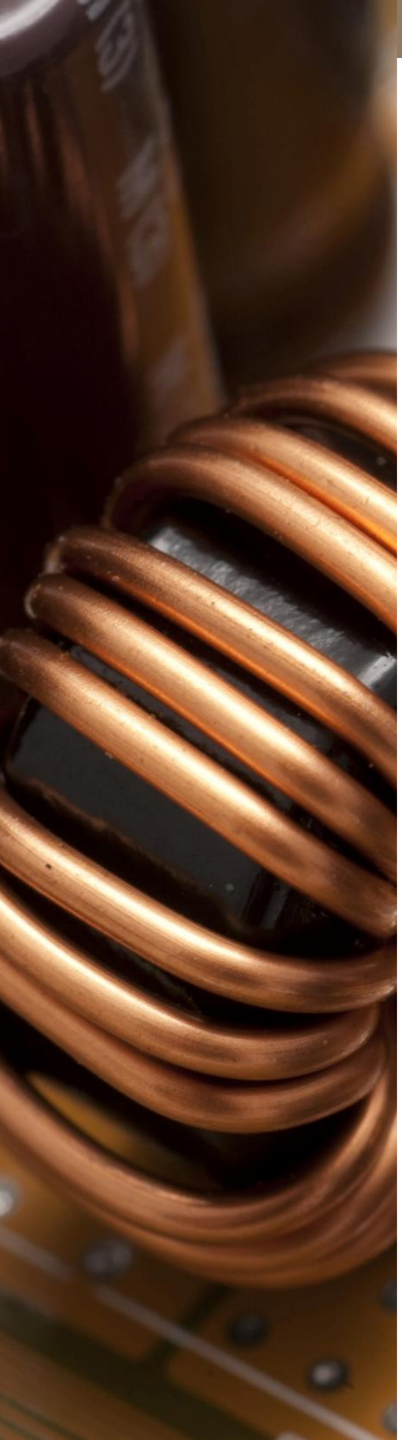
FILTROS

Todos los sistemas se comportan como filtros, pero en algunos casos, sus respuestas en frecuencia de sistemas son particulares y reciben nombres específicos:

Filtros ideales:

Un filtro ideal es aquel que permite el paso sin ningún tipo de distorsión (en magnitud y fase) de un rango de frecuencias mientras que anula por completo otro rango de frecuencias.

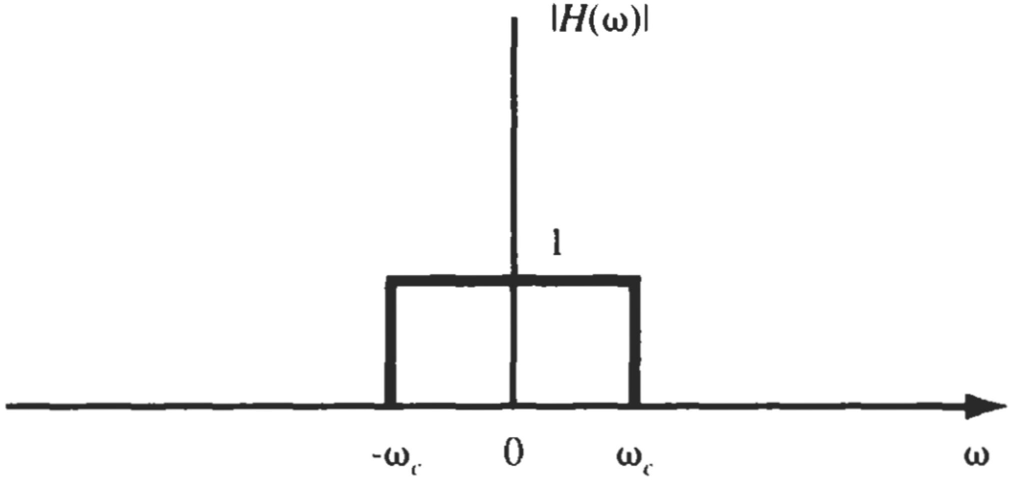
Las banda de frecuencias que pasan el filtro se denominan "banda de paso" y las que se atenúan "banda de atenuación".

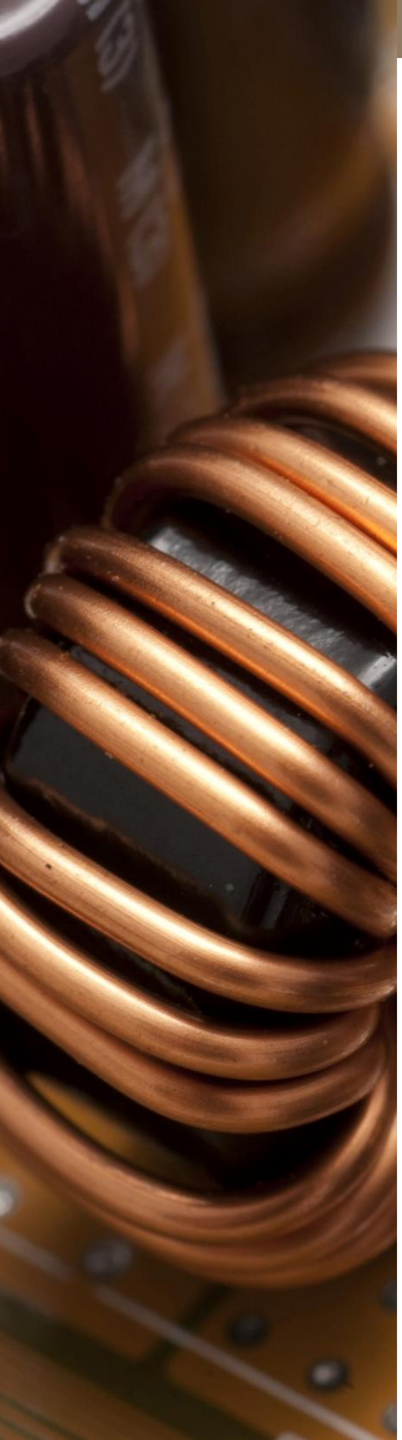


Filtro Pasa Bajos ideal:

Permite pasar frecuencias por debajo de "ω_c" y anular por completo frecuencias mayores a "ω_c", la cual se llama "Frecuencia de Corte"

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

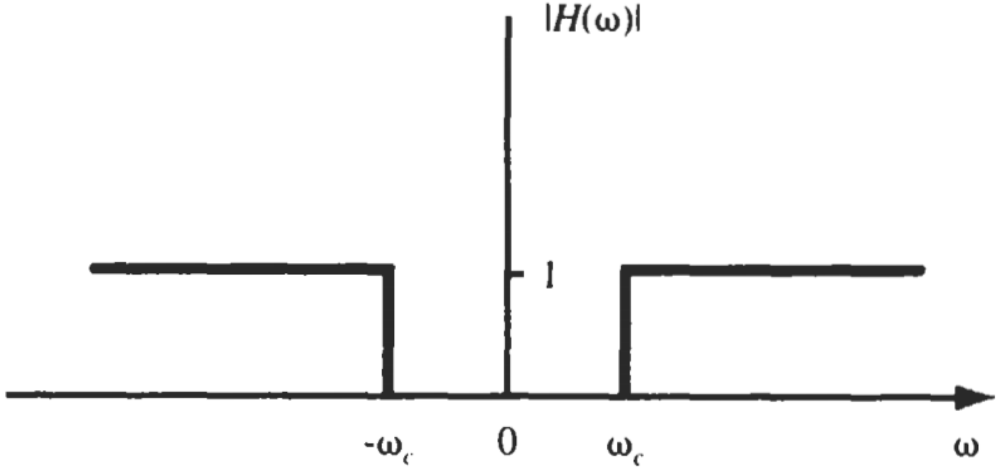


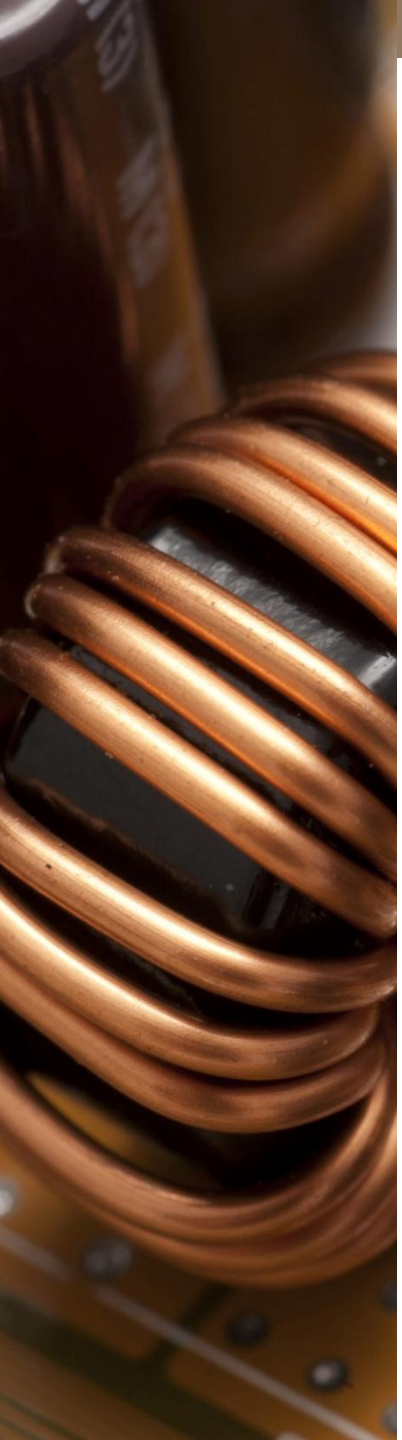


Filtro Pasa Altos ideal:

Es lo inverso al pasa bajos, eliminando frecuencias inferiores a "ω_c" y dejando intactas a frecuencias mayores a la frecuencia de corte.

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_c \\ 1 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

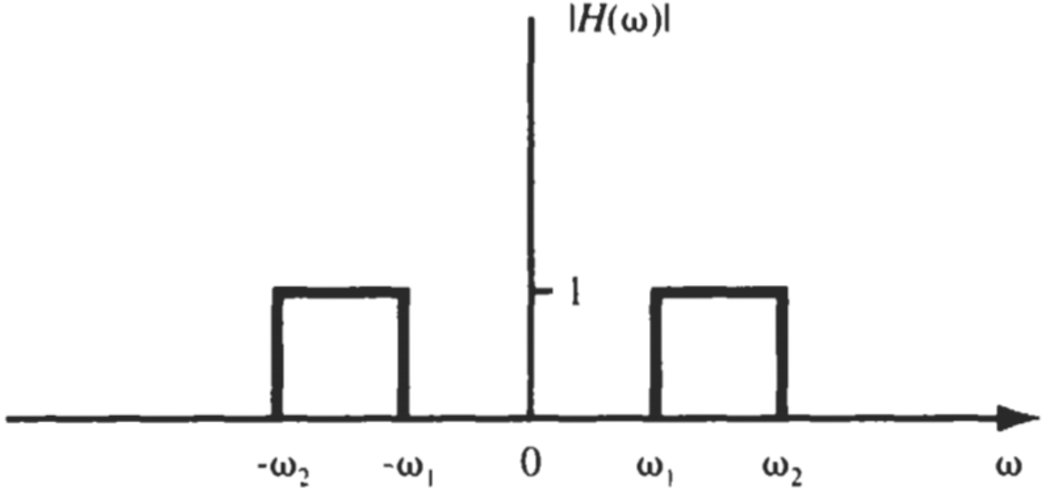


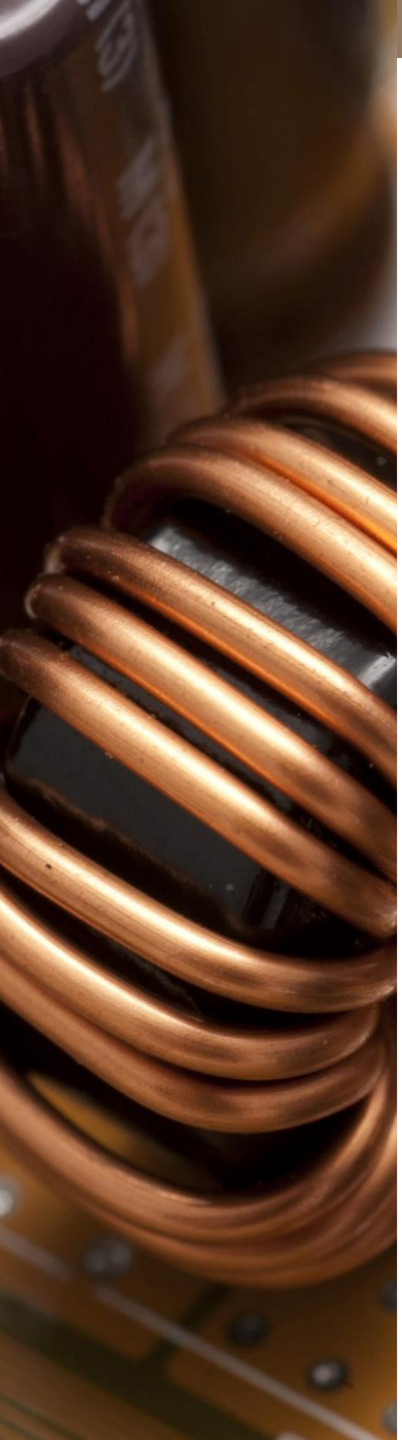


Filtro Pasabanda ideal:

Este filtro permite pasar solamente una “banda” de frecuencias, limitada por una frecuencia de corte inferior ω_1 y superior ω_2

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

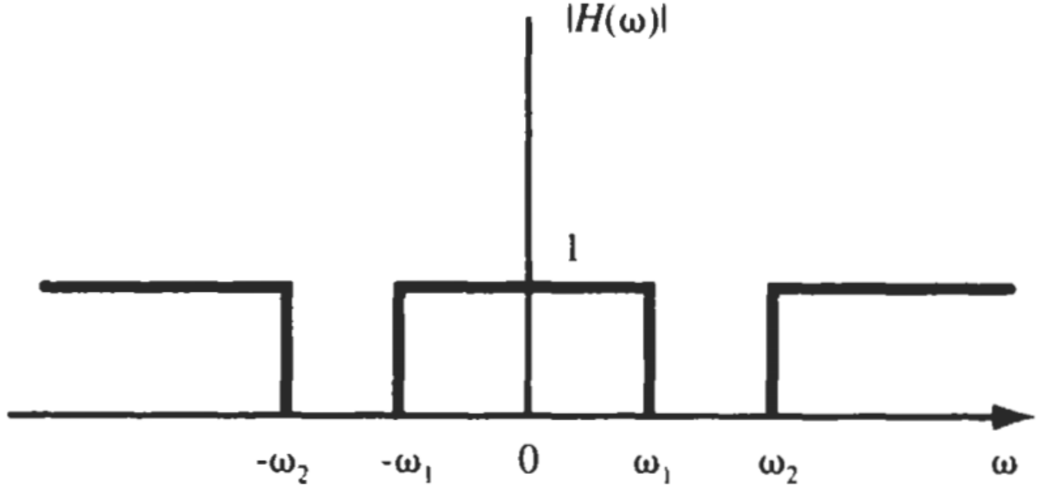


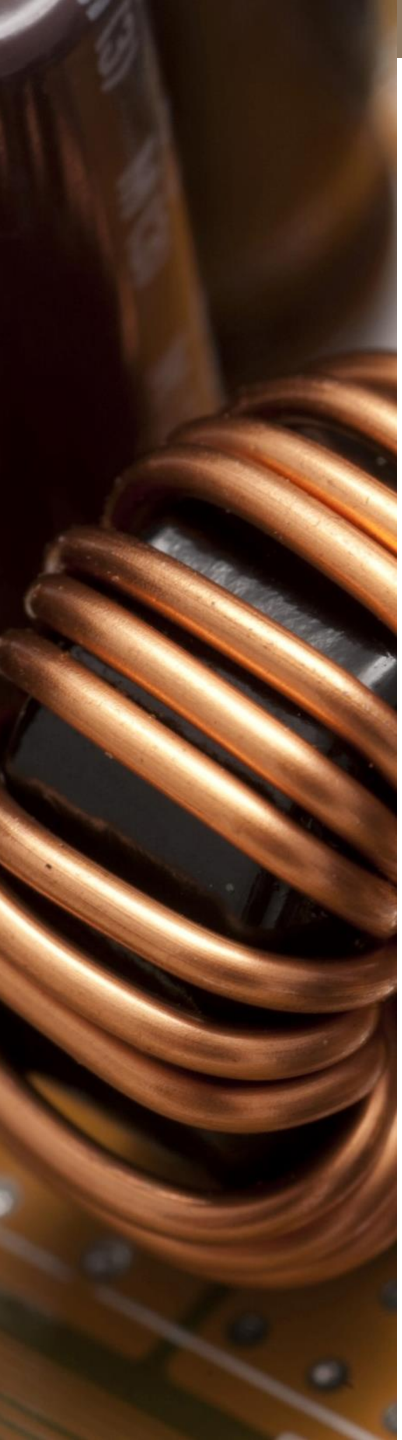


Filtro Elimina banda ideal:

Es un filtro que elimina una banda de frecuencias particular, limitada por una frecuencia de corte inferior ω_1 y superior ω_2

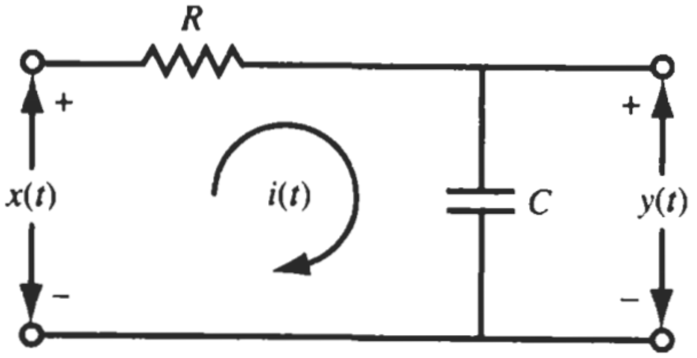
$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$





Filtros reales (no ideales):

Las transiciones perfectas entre banda de paso y atenuación no son posibles de llevar a la práctica, y en todos los filtros se definen "bandas de transición". Analicemos un circuito real y veamos que tipo de filtro es:



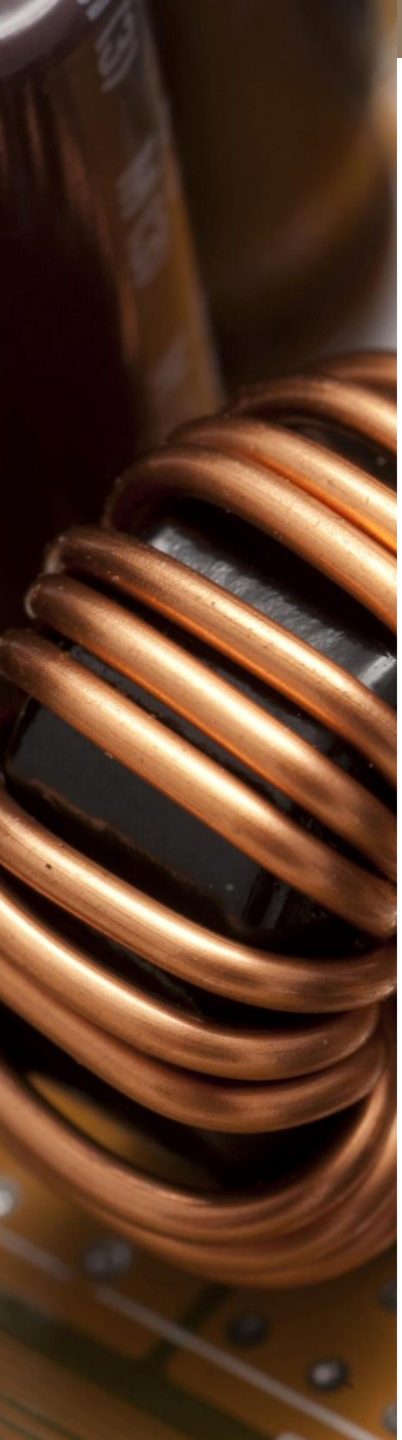
$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0}$$

$$\omega_0 = 1/RC.$$

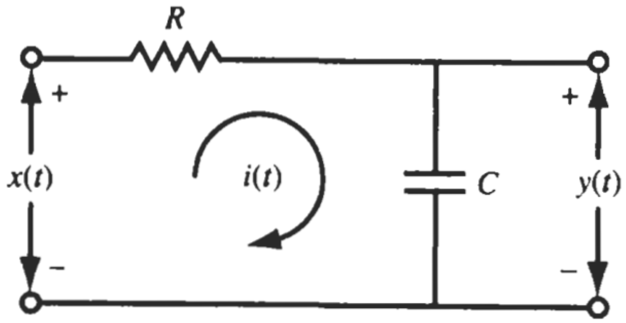
<u>Propiedad de diferenciación en el tiempo</u>

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(\omega)$$



Filtros reales (no ideales):

$$\omega_0 = 1/RC.$$



$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega/\omega_0|} = \frac{1}{\left[1 + (\omega/\omega_0)^2\right]^{1/2}}$$

¿Qué tipo de filtro es?