SEÑALES Y SISTEMAS

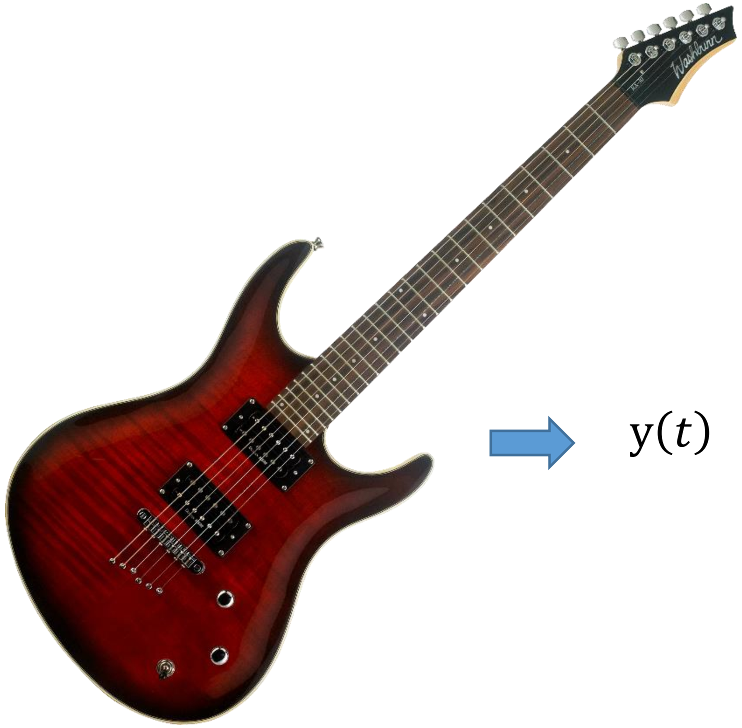
Ingeniería en Computación

UNIDAD 2

SISTEMAS

¿QUÉ ES UN SISTEMA?

$\mathrm{r}(t)$  $\mathrm{y}(t)$

$\mathrm{r}(t)$  $\mathrm{y}(t)$

¿QUÉ ES UN SISTEMA?

Un sistema puede ser considerado como un proceso o dispositivo que al ser excitado con señales de entrada, responde en su salida (o salidas) con señales perceptibles.

Sistema SISO

(Single imput, Single output)

$x(t)$ → SISTEMA → $y(t)$

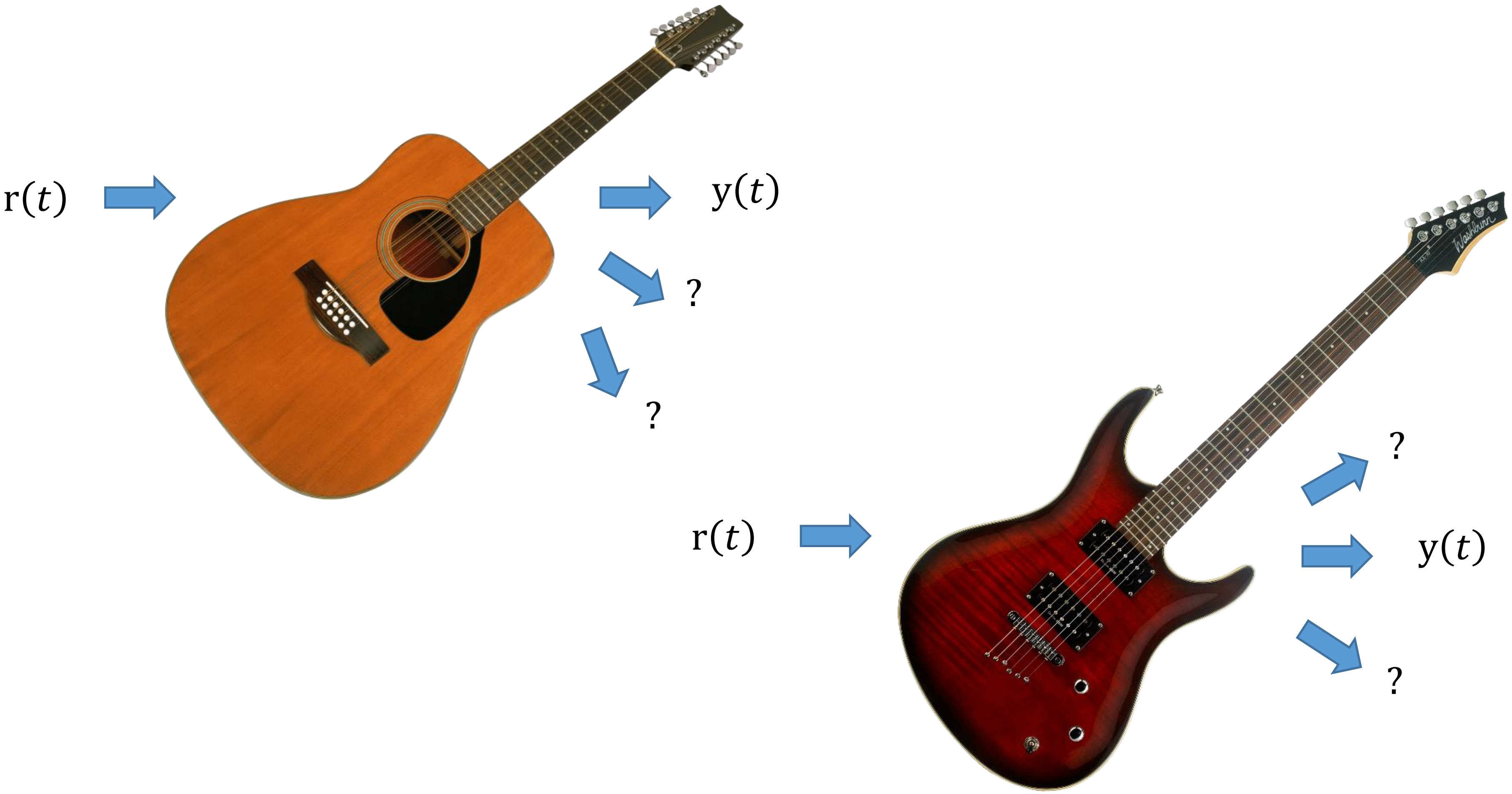
¿QUÉ ES UN SISTEMA?

Un sistema puede ser considerado como un proceso o dispositivo que al ser excitado con señales de entrada, responde en su salida (o salidas) con señales perceptibles.

Sistema MIMO

(Multiple imput, Multiple output)

¿QUÉ ES UN SISTEMA?



En esta materia trabajaremos con sistemas SISO, en donde típicamente la entrada será x(t) y la salida y(t)

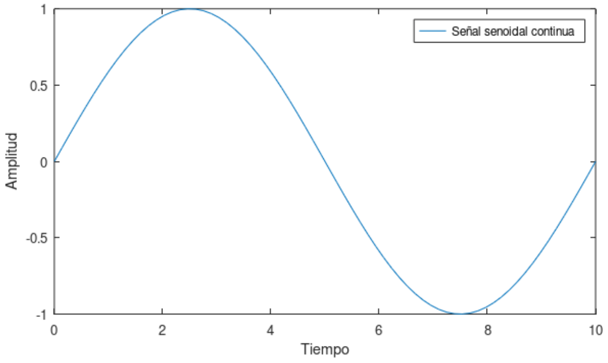
$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \rightarrow y(t)$$

La forma en que interactúa con las señales entrada/salida, caracteriza por completo el sistema.

TIPOS DE SISTEMAS

Sistemas de tiempo continuo

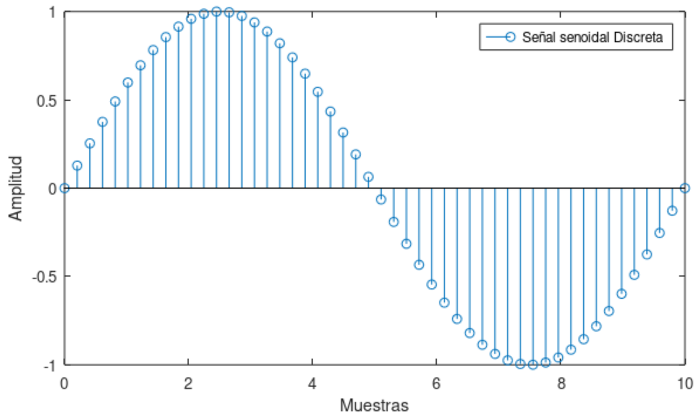
$x(t)$ → SISTEMA → $y(t)$



Señales analógicas

Sistemas de tiempo discreto

$x[n]$ → SISTEMA → $y[n]$



Señales digitales

TIPOS DE SISTEMAS

Sistemas Variantes e Invariantes en el tiempo

- Los **sistemas variantes en el tiempo** modifican sus parámetros durante el funcionamiento.

- Los **sistemas invariantes en el tiempo** permanecen iguales durante el funcionamiento y todo el tiempo.

TIPOS DE SISTEMAS

Sistemas <u>Invariantes</u> en el tiempo

$$\mathrm{x}(t) \Rightarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \Rightarrow \mathrm{y}(t)$$

En esta materia trataremos únicamente sistemas invariantes en el tiempo o invariantes al corrimiento.

Matemáticamente los podemos definir como:

Si *x(t)* es la entrada, e *y(t)* la salida, en un sistema invariante en el tiempo se cumple que la salida a *x(t-to)* será *y(t-to)*

$$\mathrm{x}(t - t_0) \Rightarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \Rightarrow \mathrm{y}(t - t_0)$$

<u>Ejemplo</u>: Pagina 9 de “Digital Signal Processing - Schaum - Monson Hayes”

TIPOS DE SISTEMAS

Sistemas <u>Lineales</u> y <u>No Lineales</u>

Un sistema es lineal si ante una entrada compuesta por la <u>suma ponderada</u> de varias señales, su respuesta es la <u>superposición de las respuestas</u> individuales a cada una de estas señales

Matemáticamente:

$$H[Ax_1(t) + Bx_2(t)] = AH[x_1(t)] + BH[x_2(t)] = Ay_1(t) + By_2(t)$$

Donde $H[x_n(t)] = y_n(t)$

$$Ax_1(t) + Bx_2(t) \Rightarrow \boxed{H} \Rightarrow Ay_1(t) + By_2(t)$$

TIPOS DE SISTEMAS

Sistemas Lineales

Un sistema es Lineal si cumple que ante una entrada x(t), que es la combinación lineal de varias entradas:

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) \ldots = \sum_{k=1}^{K} a_k x_k(t)$$

La salida también será la combinación lineal de las salidas individuales para cada entrada

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + a_3 y_3(t) \ldots = \sum_{k=1}^{K} a_k y_k(t)$$

Donde $y_k(t)$ es la salida para $x_k(t)$

TIPOS DE SISTEMAS

Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo

“LTI”

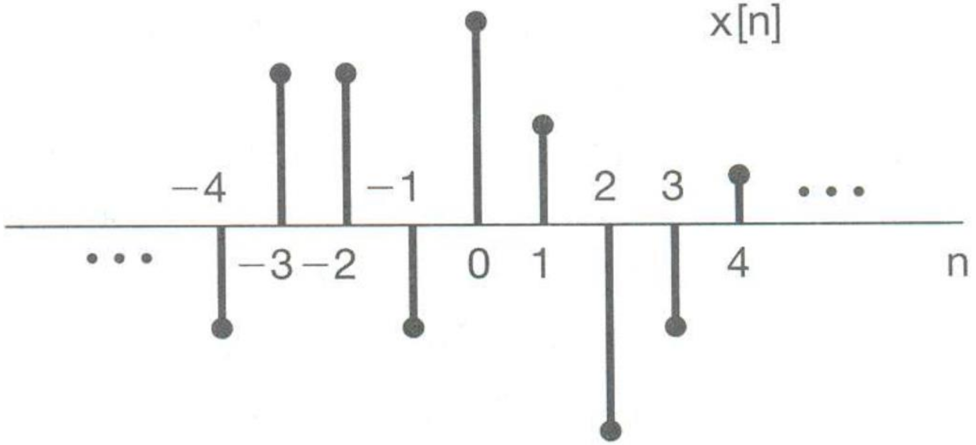
(Linear time-invariant)

El estudio de los sistemas LTI son aproximaciones a los sistemas reales, pero nos brindan herramientas matemáticas muy útiles para todo el análisis de sistemas en general.

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow y(t)$$

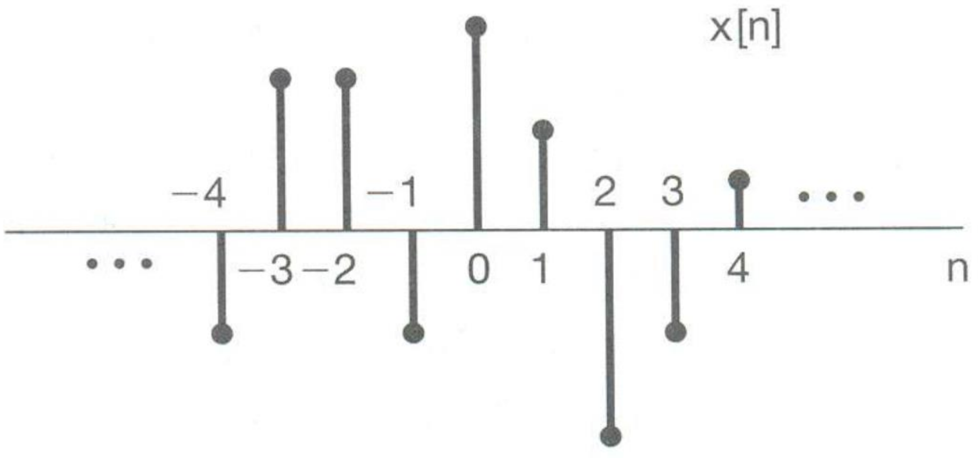
Sistemas LTI – Propiedad de superposición

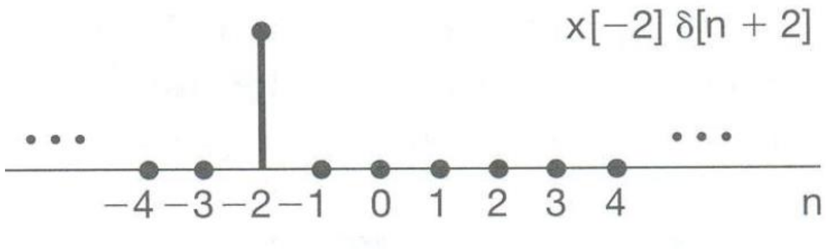
Dado que cualquier señal discreta se puede representar como la combinación lineal de impulsos retardados, la salida de un sistema LTI para cualquier señal puede obtenerse como la combinación lineal de la respuesta a cada uno de esos impulsos.

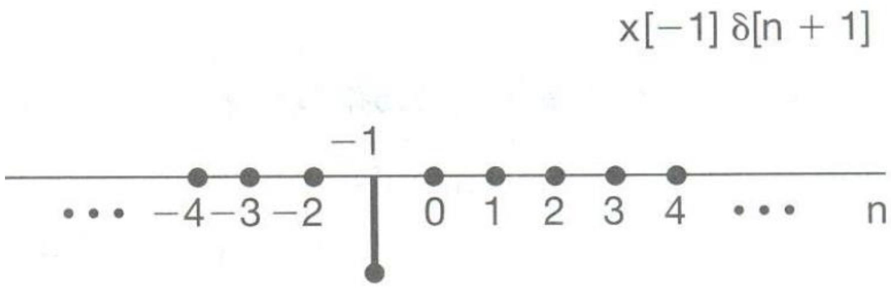


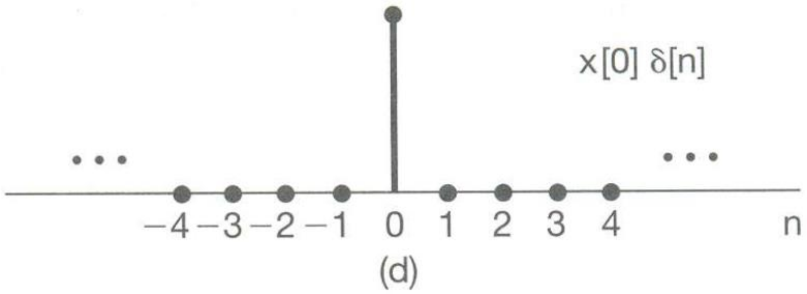
¿Cómo representaríamos esta secuencia (o cualquiera) mediante combinaciones lineales de impulsos unitarios?

Podríamos representar cada muestra usando la función impulso!









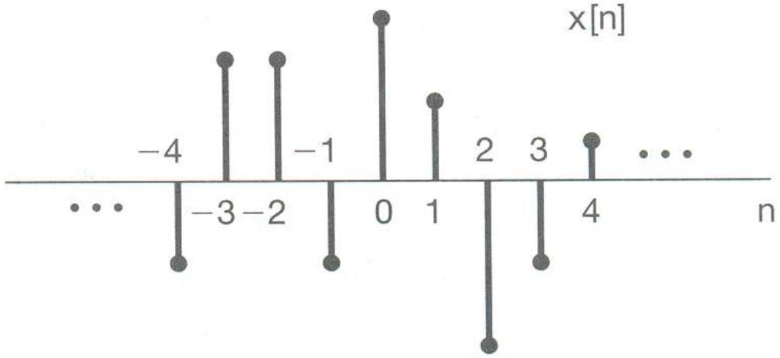
Sumando todas las expresiones matemáticas tenemos:

$$x[n] = \ldots x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] \\ + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1]\ldots$$

Notar que para cada valor de "n" solamente un término es distinto de cero.

De manera más compacta queda:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad \Longleftrightarrow$$



RESPUESTA AL IMPULSO

Quizá la principal propiedad de los sistemas LTI viene dada por la respuesta al impulso unitario.

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

Cuando ingresamos a un sistema LTI con un impulso unitario, su respuesta se conoce como “respuesta al impulso” y se denota matemáticamente como $h(t)$ en el caso continuo o $h[n]$ para los sistemas discretos.

Si el sistemas es invariante en el tiempo: $\delta[n-n_0] \rightarrow h[n-n_0]$

RESPUESTA AL IMPULSO

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

¿Qué duración tiene $h[n]$?

¿Qué representa?

¿Ejemplos?

SUMA DE CONVOLUCIÓN

Considerando que una señal puede expresarse como sumatoria de impulsos desplazados y escalados:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

La salida de un sistema LTI ante una entrada $x[n]$ es:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

SUMA DE CONVOLUCIÓN

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Esta expresión es conocida como “Suma de Convolución” y la operación entre señales es la “convolución”

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

SUMA DE CONVOLUCIÓN

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad \Longleftrightarrow \quad y[n] = x[n] * h[n]$$

¿Qué tipo de operación es la convolución ?

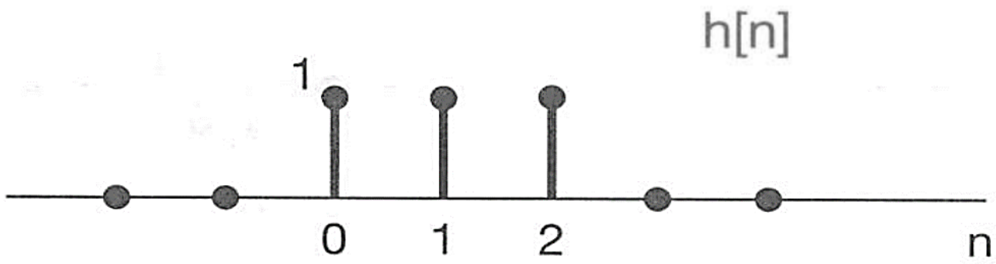
¿Para qué nos serviría?

¿Cómo se calcula?

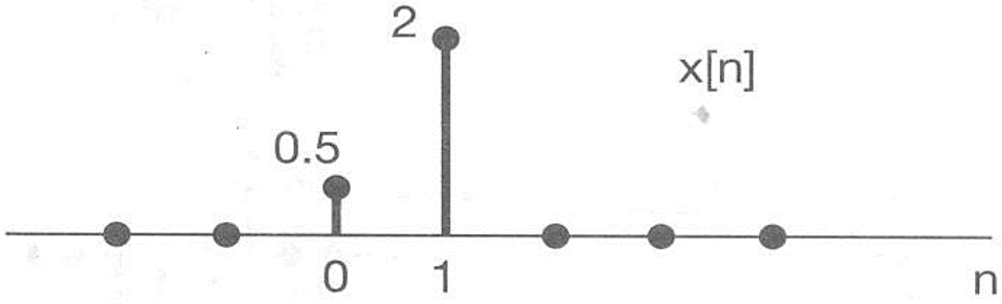
Ejemplo de Convolución discreta:

Considere un sistema LTI con respuesta al impulso y entrada como se muestra a continuación. Determinar la salida del sistema.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

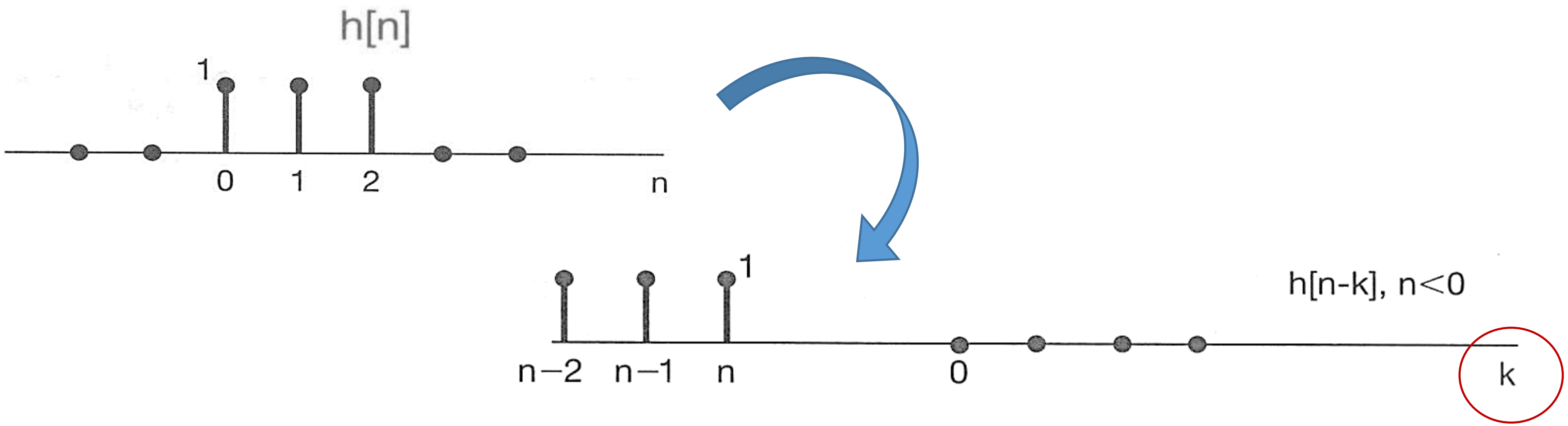


1 PASO: Se realiza un cambio de variable: $x[n] \rightarrow x[k]$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

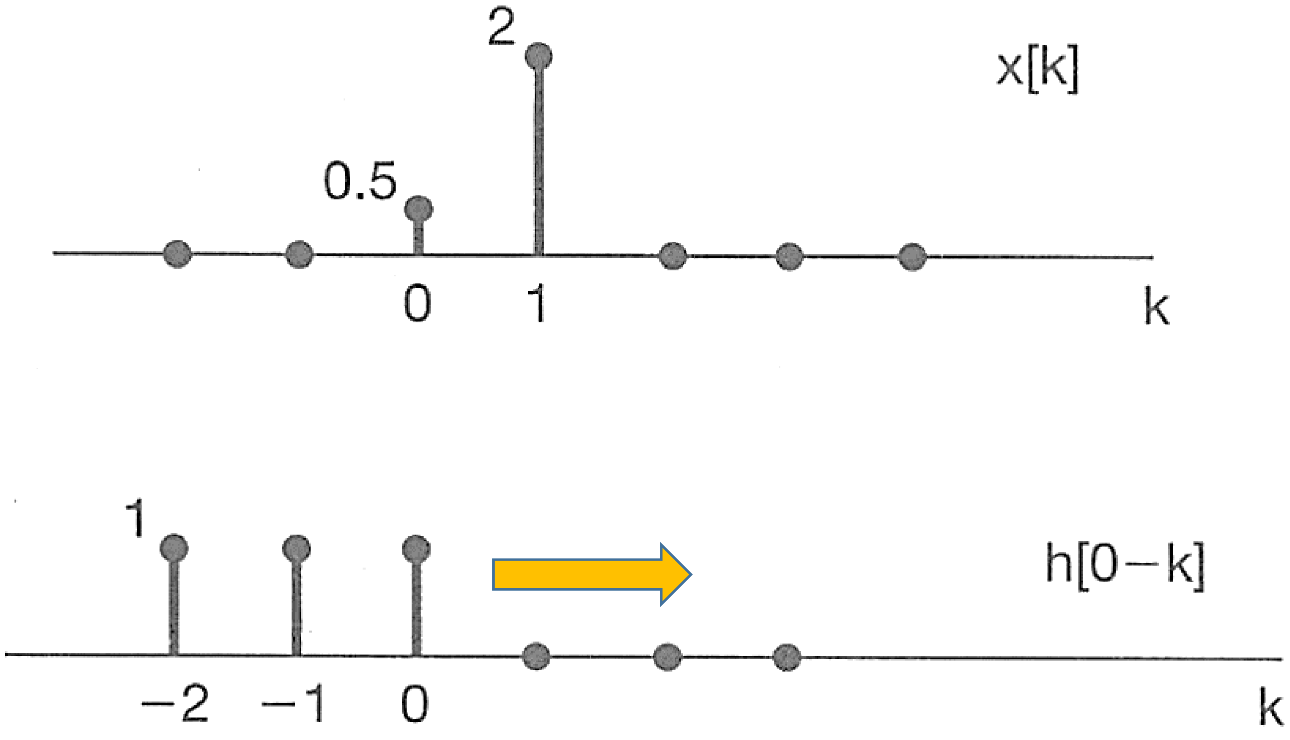
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

2 PASO: Se aplica la transformación de variable independiente a $h[n]$



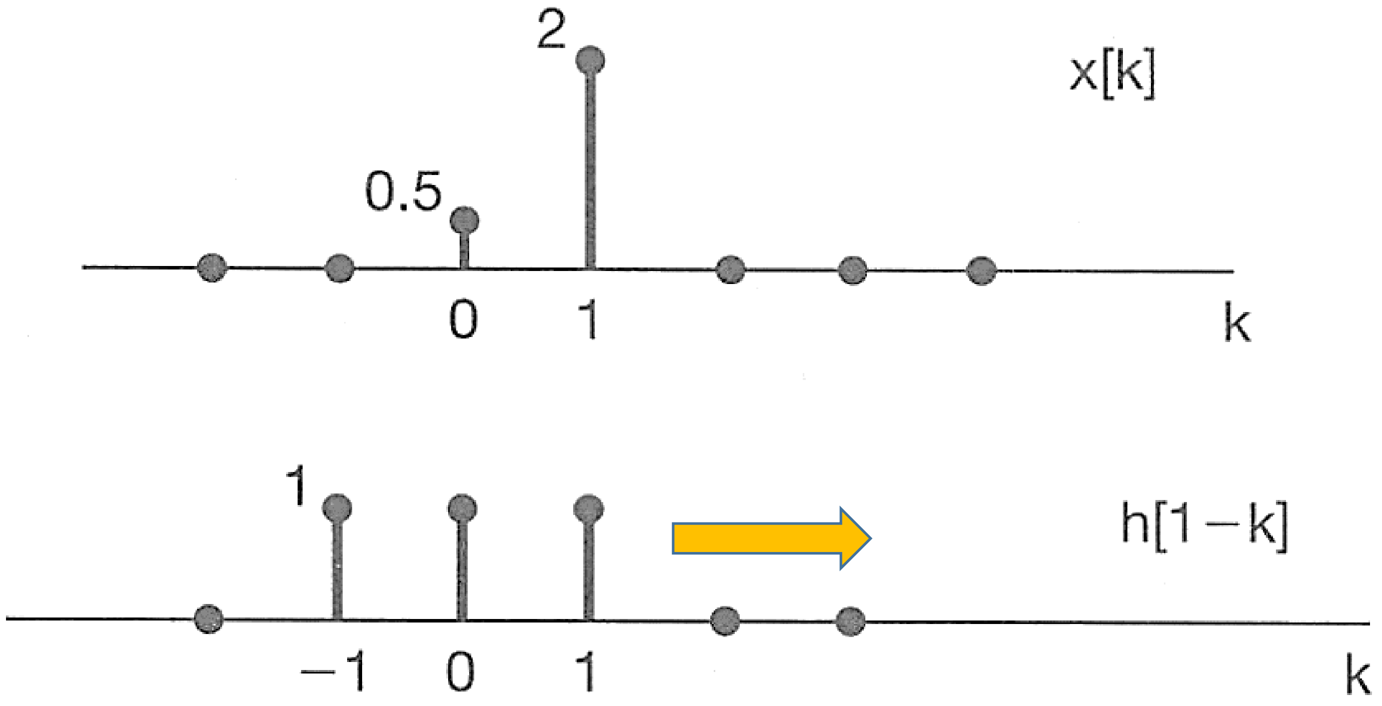
<u>3 PASO</u>: Se desplaza $\mathrm{h}[k]$ en una cantidad definida por "n" hasta que se produzca solapamiento. Para n=0 queda:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



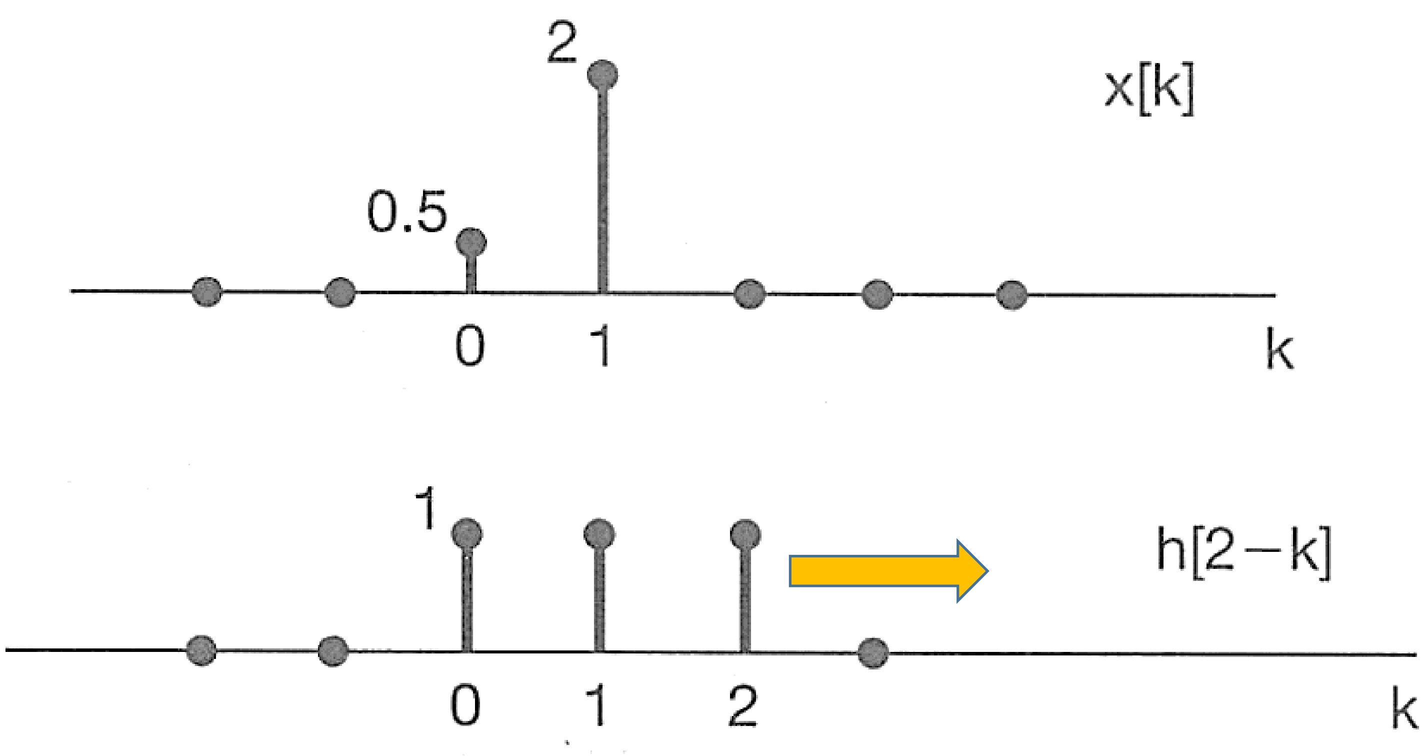
4 PASO: Se continua desplazando $h[k]$ y evaluando la sumatoria. Para n=1 es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



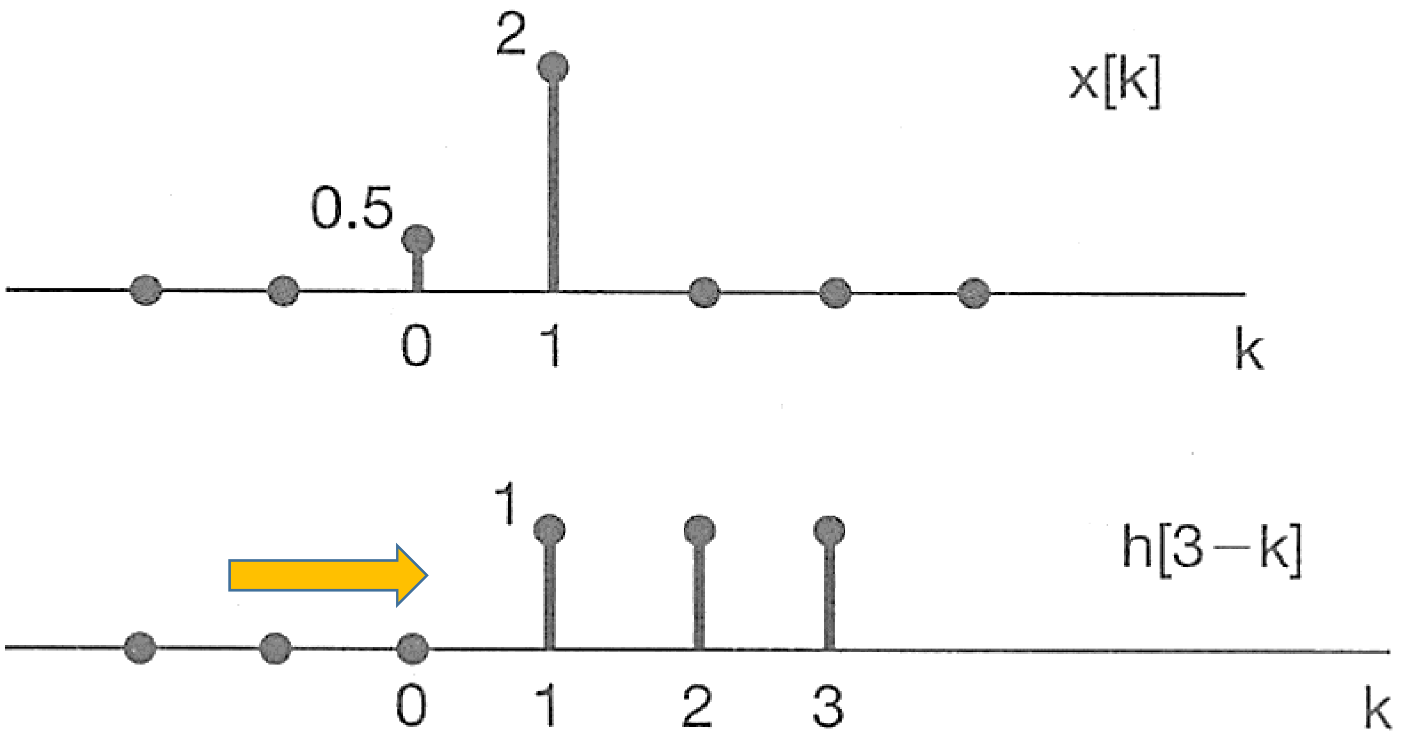
4 PASO: Se continua desplazando $\mathrm{h}[k]$ y evaluando la sumatoria. Para n=2 es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



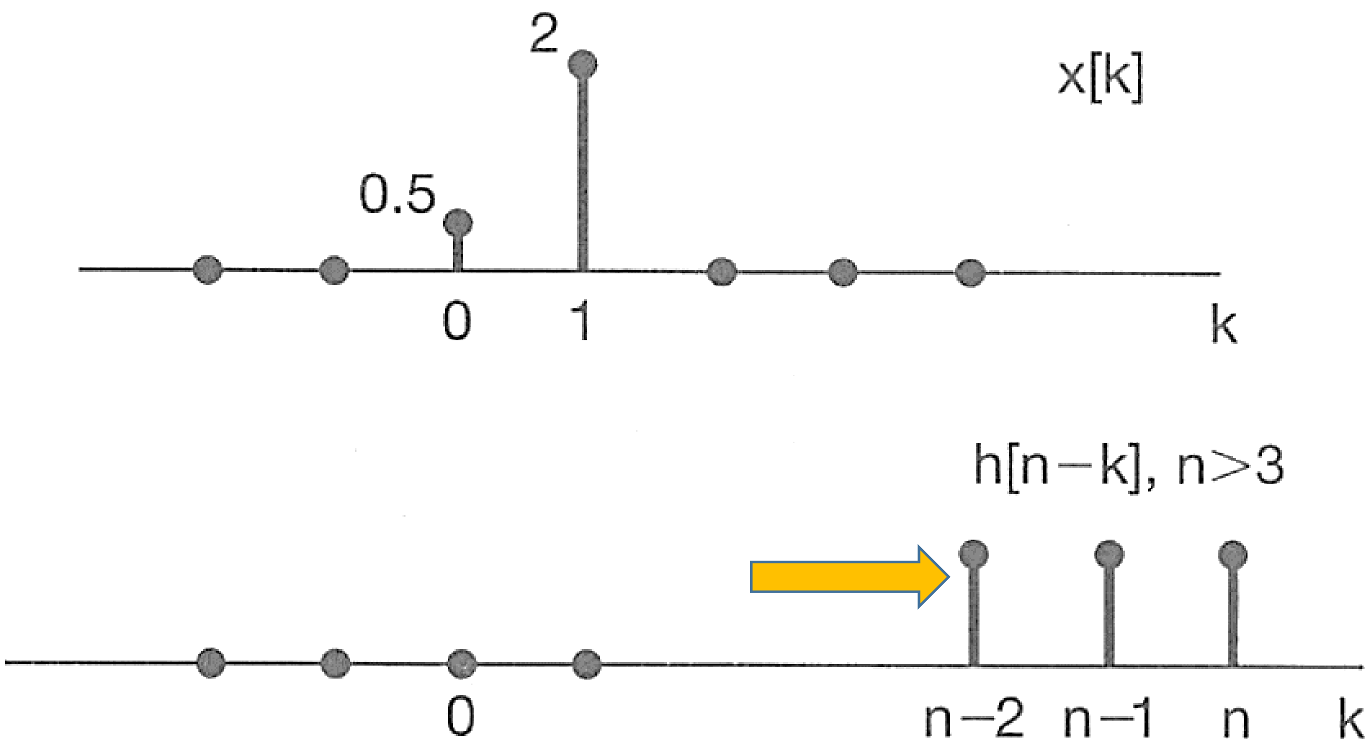
<u>4 PASO</u>: Se continua desplazando $\mathrm{h}[k]$ y evaluando la sumatoria. Para n=3 es:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



4 PASO: Se continua desplazando $h[k]$ y evaluando la sumatoria. Para n>3 es el resultado es siempre nulo:

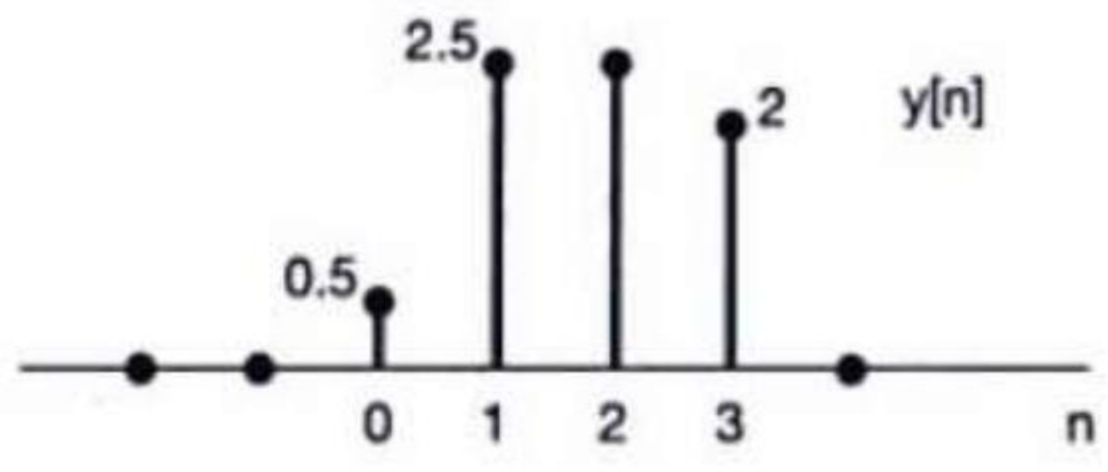
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



5 PASO: Se grafica el resultado final, la variable independiente vuelve a ser “n”!

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

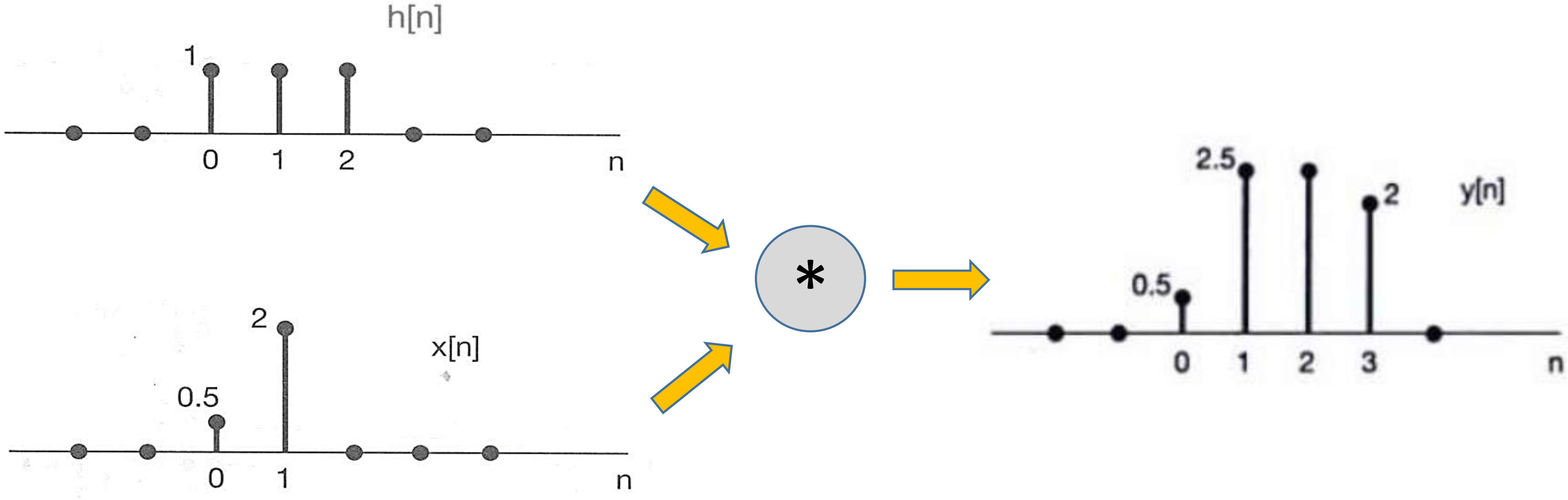
$$y[n] = x[n] * h[n]$$



¿Qué implica la convolución?

¿Por qué es tan útil?

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$



Ejemplo de resolución analítico:

Calcular la suma de convolución entre las siguiente señales:

$$x[n] = a^n u[n], \text{ con } 0 < a < 1.$$

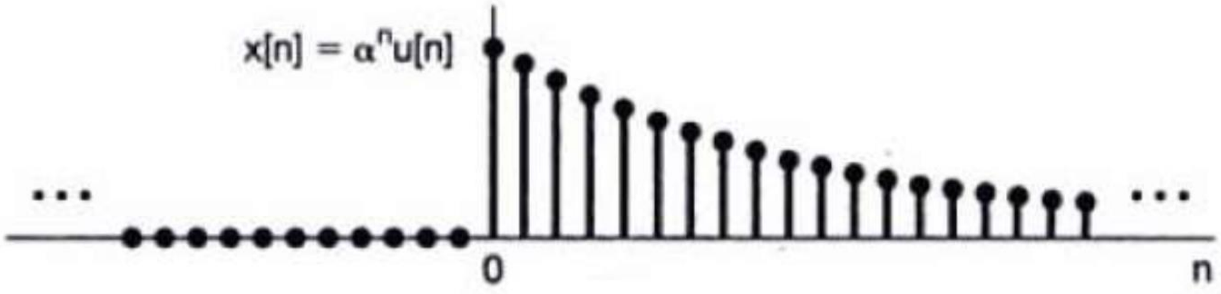
$$h[n] = u[n]$$

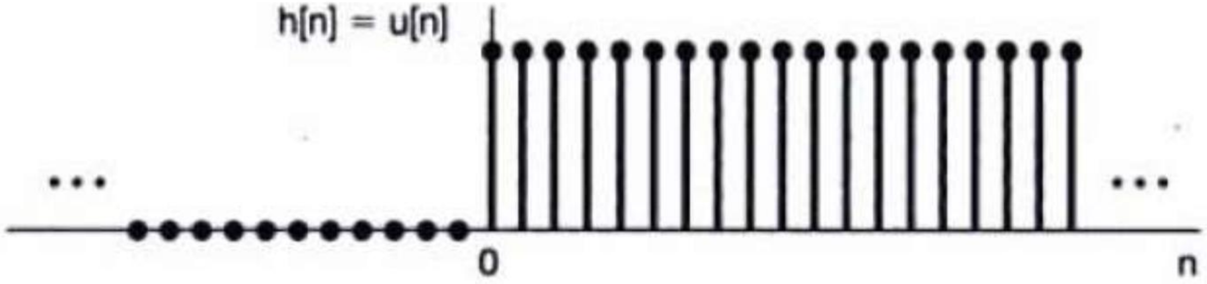
Como primer paso, reemplazamos las señales en la definición:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k]u[n-k]$$

$$x[n] = a^n u[n], \text{ con } 0 < a < 1.$$

$$h[n] = u[n]$$



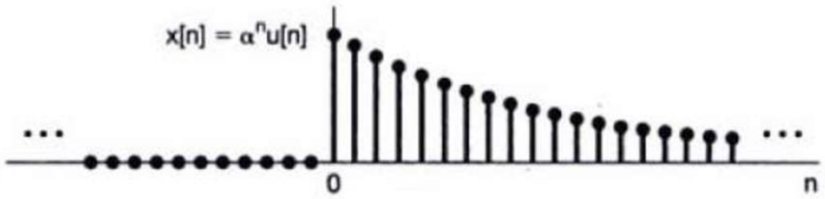


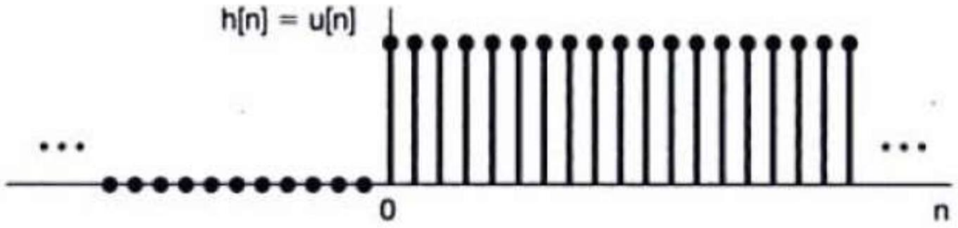
Si consideramos el efecto del escalón en la sumatoria, podemos simplificarla como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^k$$

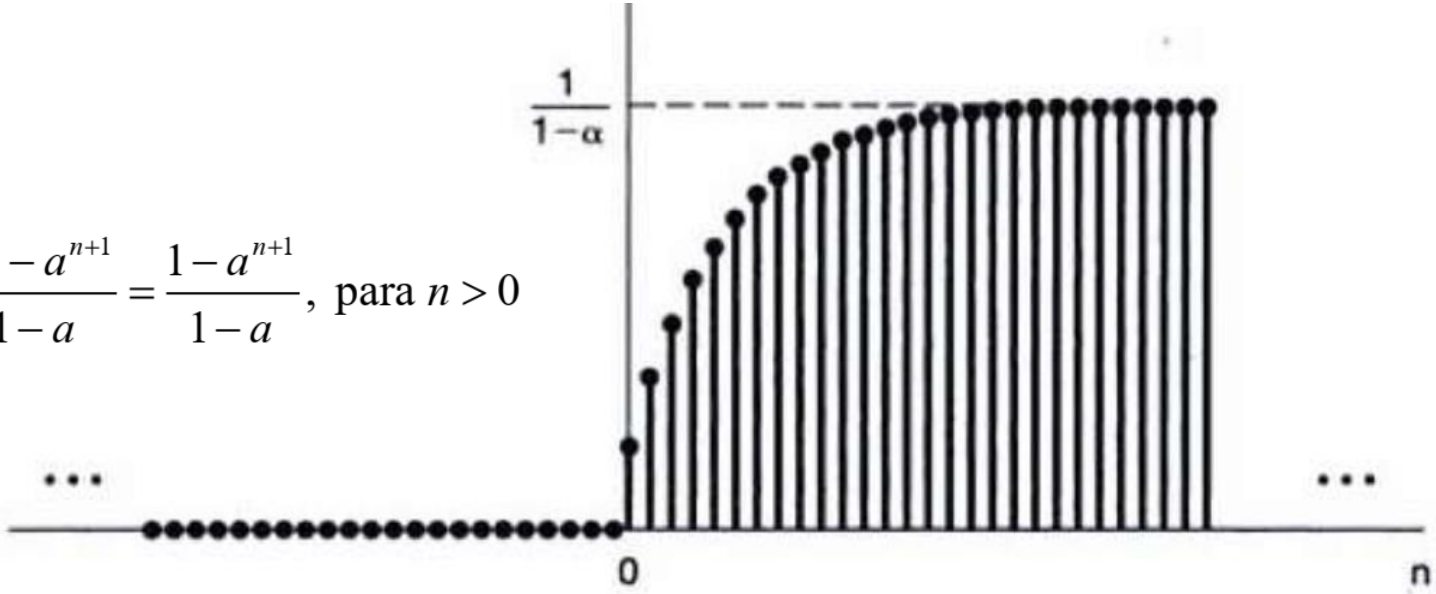
Teniendo en cuenta la expresión de convergencia de una serie geométrica:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^0 - a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \text{ para } n > 0}$$





$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^0 - a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \text{ para } n > 0$$



INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

Convolución de Tiempo Continuo

De manera similar a sistemas discretos, un sistema de tiempo continuo LTI está totalmente caracterizado por su respuesta al impulso.

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

¿Qué información nos da h(t)?

¿Cómo podemos obtener h(t)?

Convolución de Tiempo Continuo

En sistemas continuos llamamos h(t) a la respuesta al impulso.

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow \mathrm{h}(t)$$

Y la salida de un sistema continuo LTI para una entrada x(t) es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\mathrm{x}(t) \longrightarrow \boxed{\text{h(t)}} \longrightarrow \mathrm{y}(t)$$

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

Ejemplo de Convolución de Tiempo Continuo

Resolver la convolución de las siguientes señales de tiempo continuo:

$$x(t) = e^{-at}u(t) \;\; para \;\; a > 0$$

$$h(t) = u(t)$$

$$x(t) \Rightarrow \boxed{h(t)} \Rightarrow y(t)$$

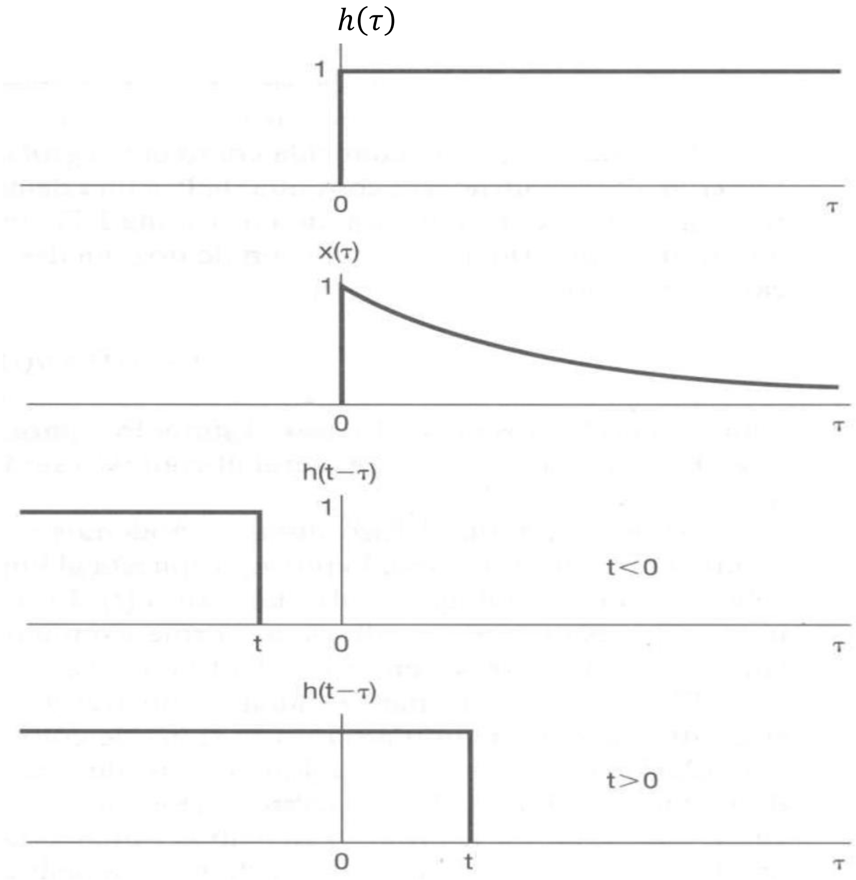
Ejemplo de Convolución de Tiempo Continuo

$$x(t) = e^{-at}u(t) \;\; para \;\; a > 0$$

$$h(t) = u(t)$$

$$y\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,(\tau)\,h\,(t-\tau)\,d\tau$$

¿Qué representa físicamente la convolución de x(t) con h(t)?



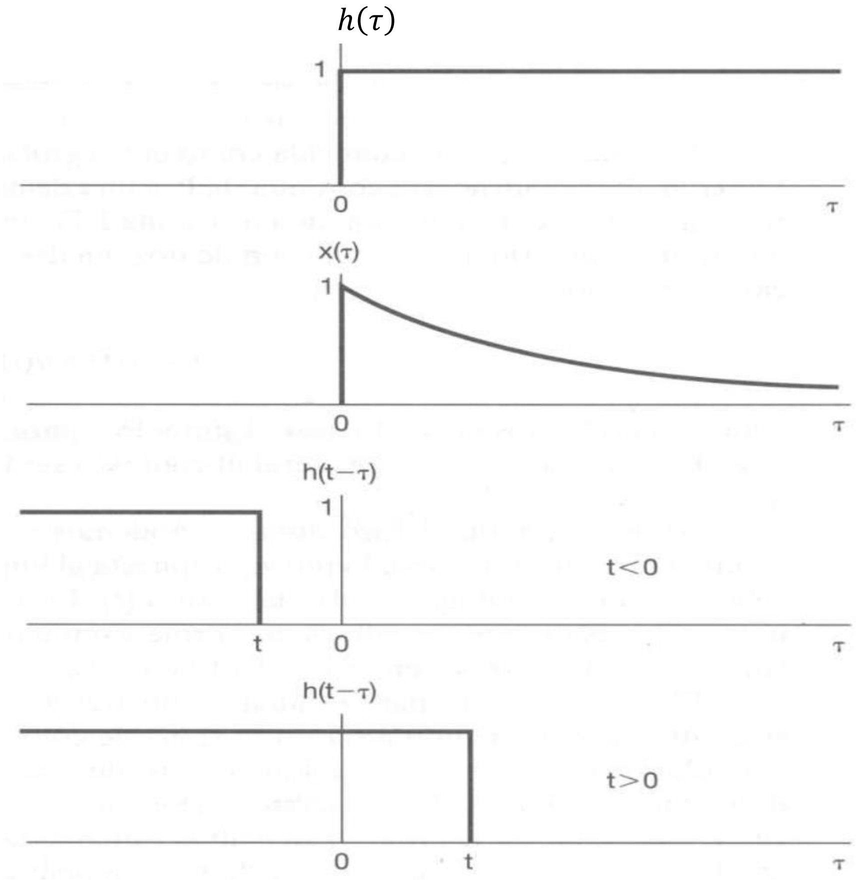
Ejemplo de Convolución de Tiempo Continuo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}\, u(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{-a\tau}\, d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau}\Big|_{0}^{t}$$

$$y(t) = \frac{1-e^{-at}}{a}$$

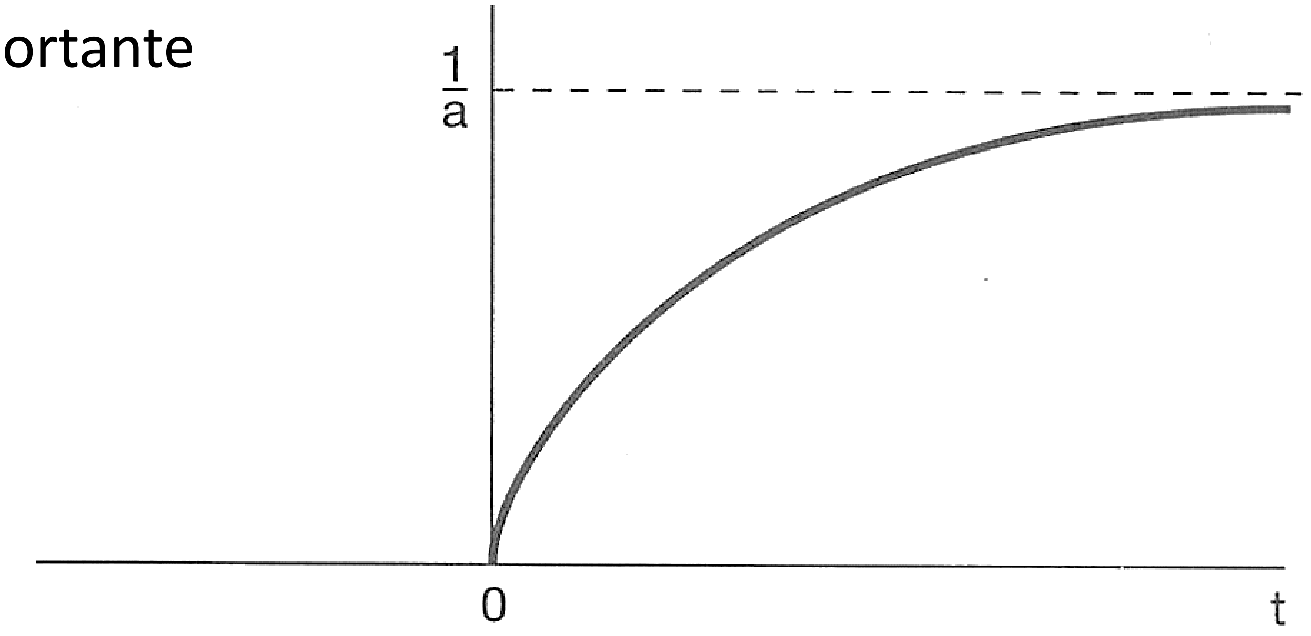


Ejemplo de Convolución de Tiempo Continuo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1-e^{-at}}{a}$$

Y la pregunta más importante es:

¿Tiene lógica el resultado?



Propiedades importantes con señales:

Al igual que cualquier operación matemática, la convolución tiene propiedades muy útiles e importantes.

Esto es igual para sistemas discretos como continuos:

Conmutativa:

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

Distributiva:

$$x(t) * [h1(t) + h2(t)] = x(t) * h1(t) + x(t) * h2(t)$$

Asociativa:

$$x(t) * [h1(t) * h2(t)] = [x(t) * h1(t)] * h2(t)$$

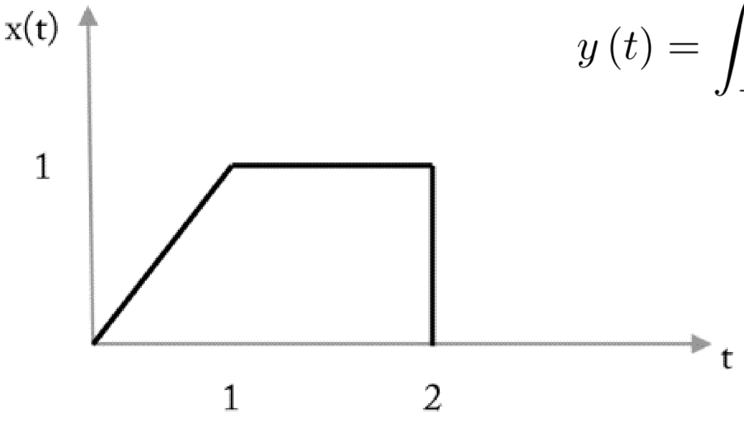
Comprobaciones: "Signal and Systems - Schaum – Hwei P. Hsu" PAG: 66

La convolución con el impulso unitario

El impulso unitario o Delta de Dirac (en el caso continuo) posee la propiedad de “replicar” la señal ante una convolución, esto es:

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$