SEÑALES Y SISTEMAS

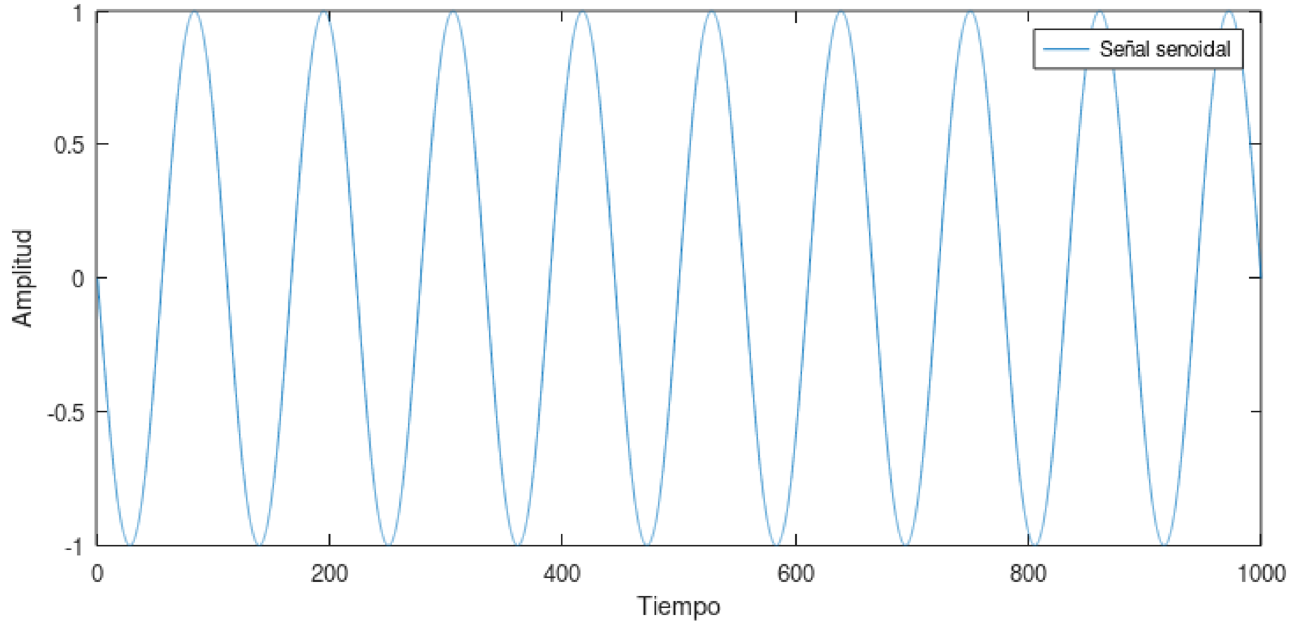
Ingeniería en Computación

UNIDAD 1

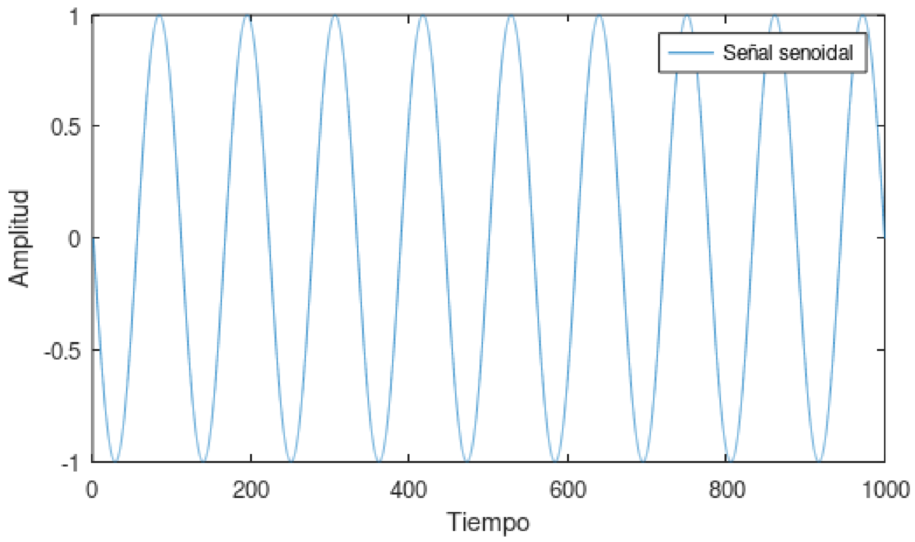
SEÑALES

¿QUÉ ES UNA SEÑAL?

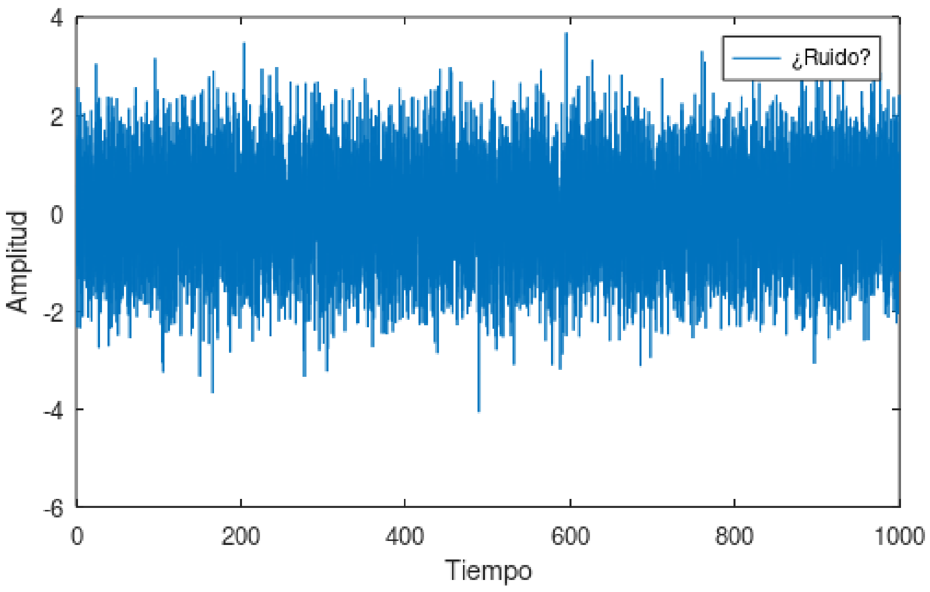
Una señal es una función que representa una variable o cantidad física que contiene algún tipo información acerca del comportamiento o naturaleza de un fenómeno.



¿QUÉ NOS DICE UNA SEÑAL?
¿EN QUÉ FORMA NOS LO DICE?
¿PARA QUÉ NOS SIRVE?

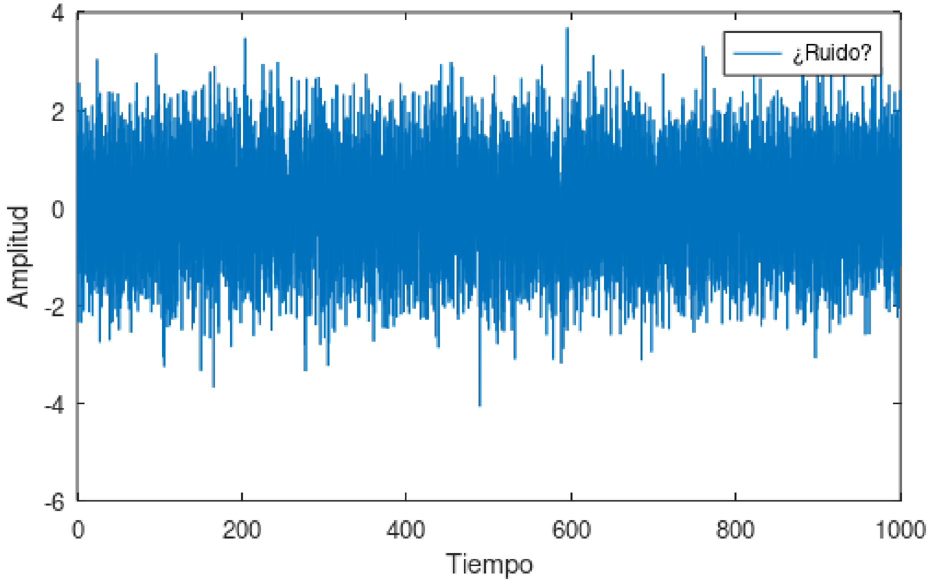


¿Cuál de las dos es una señal?



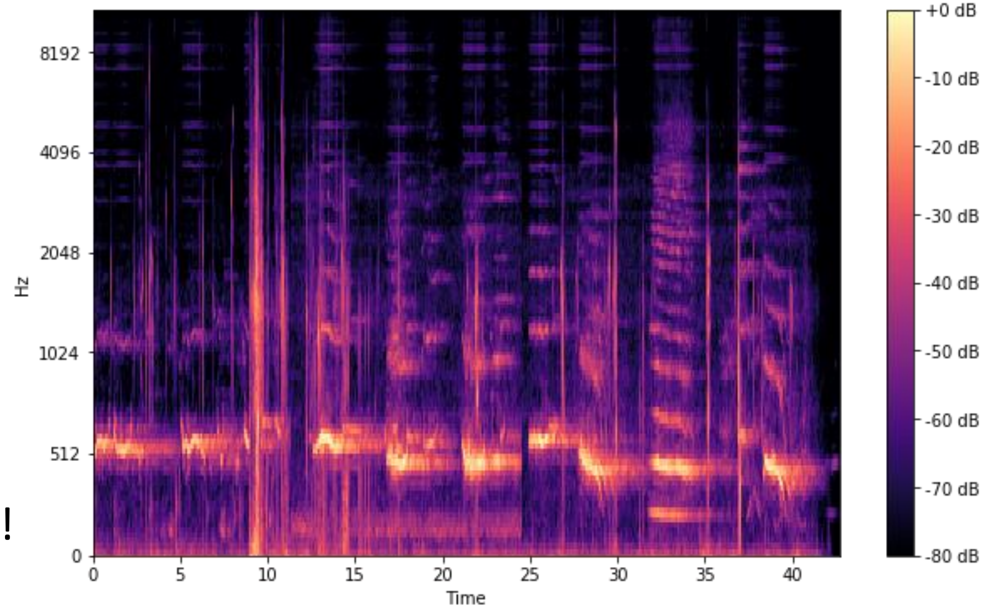
¿Cuál de las dos contiene información?

¿INFORMACIÓN?



No siempre la información de una señal se ve a simple vista...

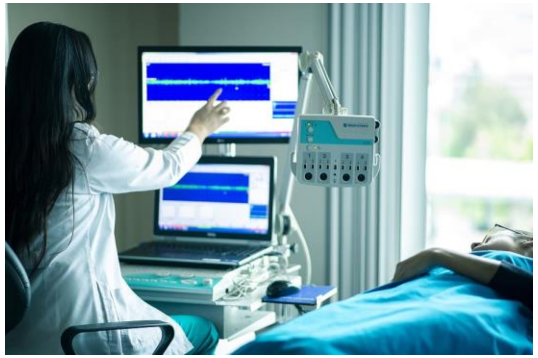
Espectrograma en frecuencia

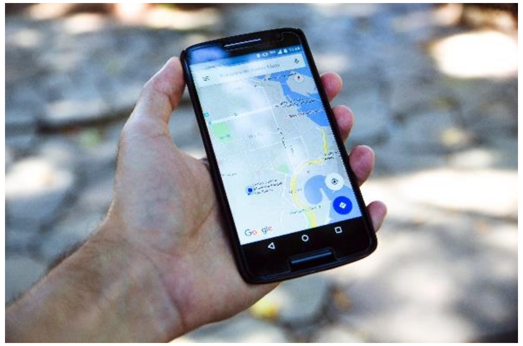


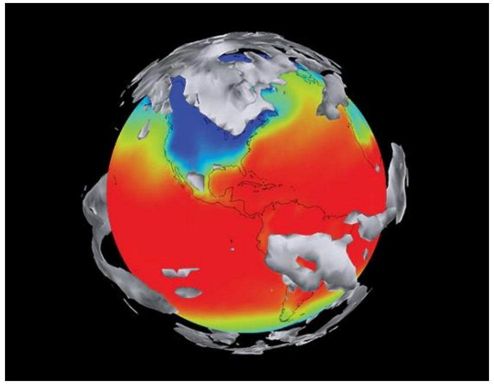
¡Pero siempre está!

¡Pobar app. "Spectroid"!

¿Qué ventajas, o, por qué quisiéramos estudiar las señales, su representación y herramientas de análisis?



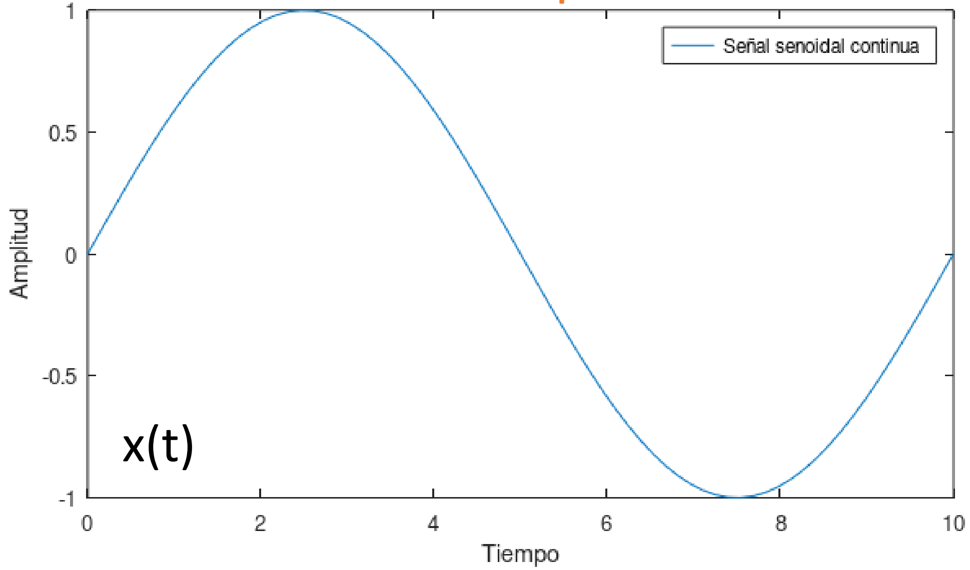




TIPOS DE SEÑALES

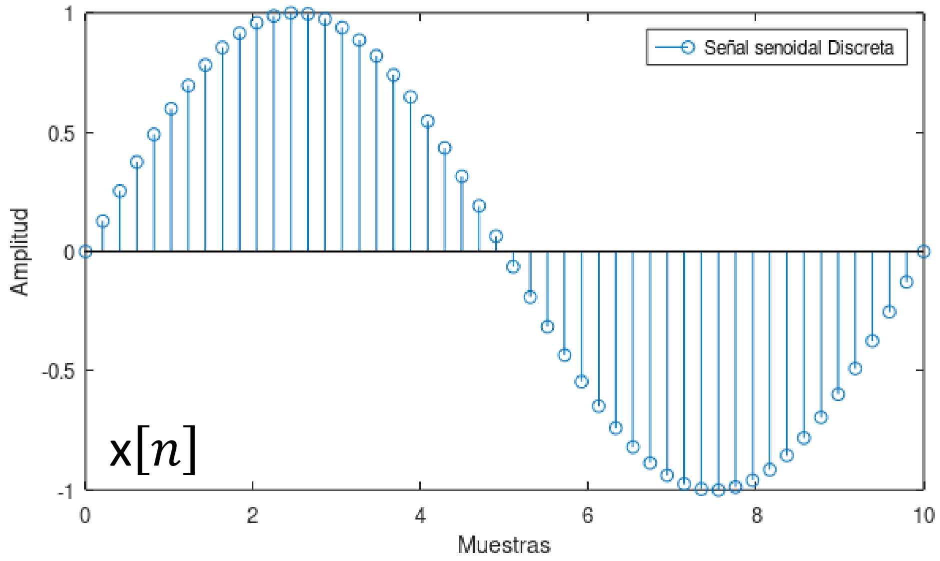
Vamos a trabajar con dos tipos de señales

Señales de tiempo continuo



Señal "Analógica"

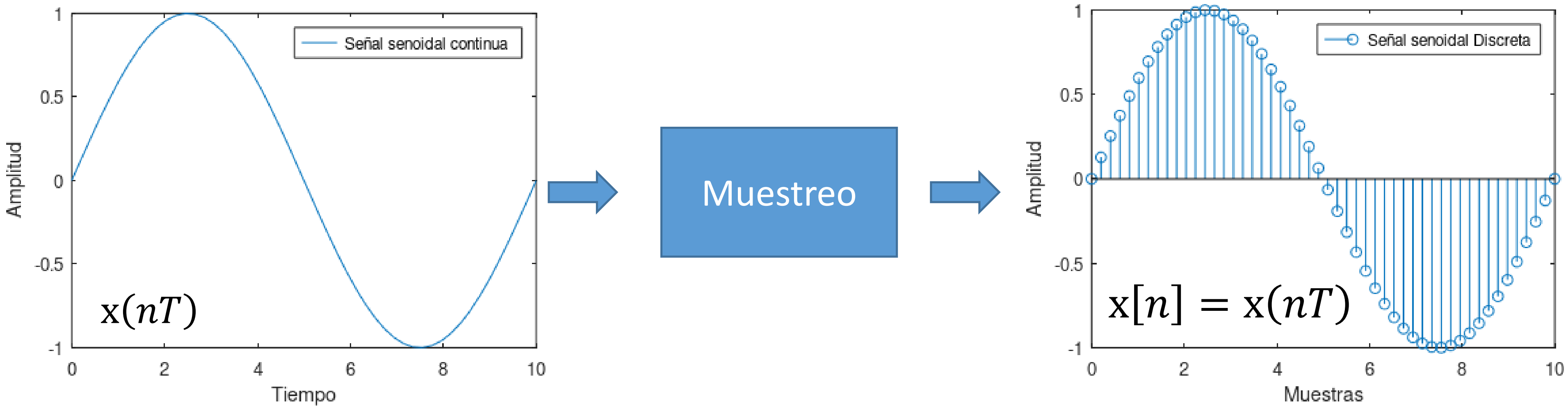
Señales de tiempo discreto



Señal "Digital"

INTRODUCCIÓN AL MUESTREO

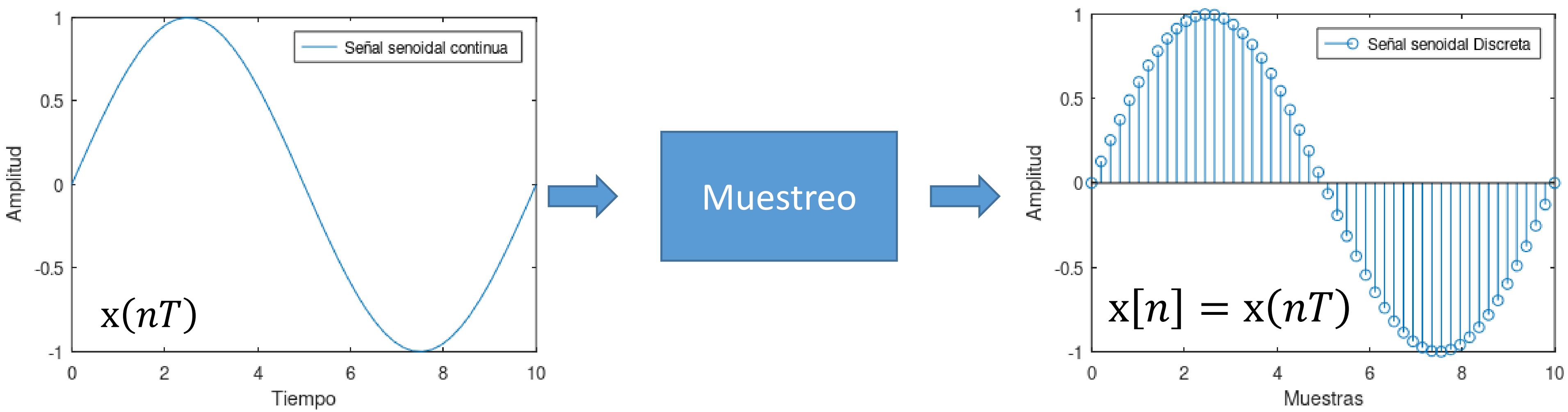
Una señal discreta puede ser obtenida a partir de “muestras” de una señal continua, este proceso se conoce como “muestreo” o “*sampling*”



“T” es el Tiempo de Muestreo y determina la precisión del muestreo. Cuanto más pequeño es “T”, mayor número de muestras por segundo.

INTRODUCCIÓN AL MUESTREO

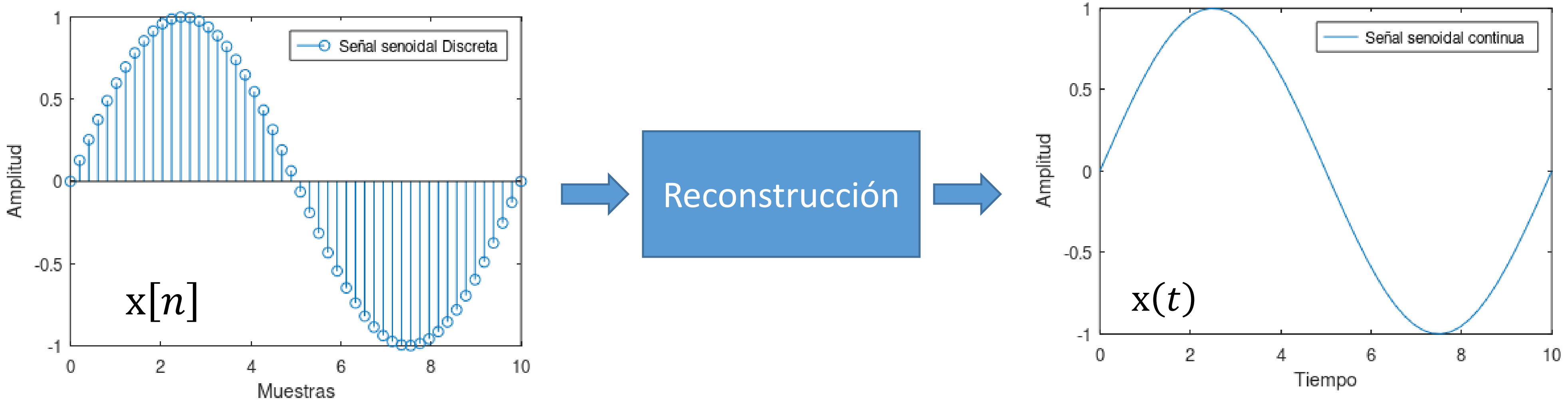
¿Cuál de las dos señales contiene más información?



¿Para qué querríamos muestrear señales continuas y perder información?

RECONSTRUCCIÓN

Hay veces (muchas veces!) que necesitamos pasar del dominio discreto al dominio continuo, esto se conoce como <u>reconstrucción.</u>



¿En qué casos se imagina que esto es necesario?

TIPOS DE SEÑALES Y CONCEPTOS

Debido a la inmensa cantidad de señales que tenemos alrededor, debemos conocer algunas clasificaciones y conceptos vinculados a las mismas:

Señales reales y complejas: → $x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$

Señales determinísticas: → $x(t) = 2\cos(wt)$

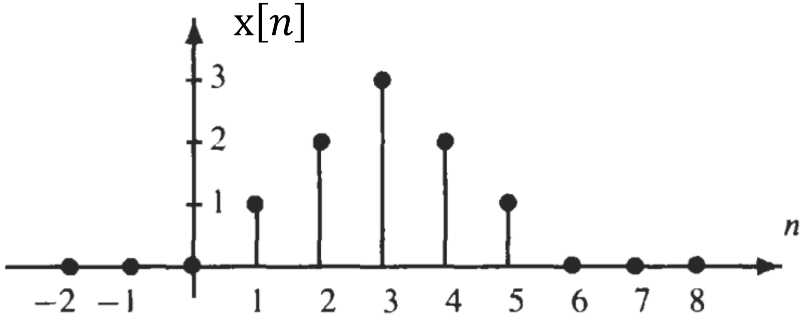
Señales aleatorias: → $x(t) = ?$

TRANSFORMACIÓN DE VARIABLE INDEPENDIENTE

A las señales, del tipo que sea, se le pueden aplicar transformaciones de distintos tipos para, por ejemplo, facilitar tareas de procesamiento.

Antes de eso, analicemos una señal discreta:

$$x[n] = [\ldots, 0, 0, (0), 1, 2, 3, 2, 1, 0, \ldots]$$

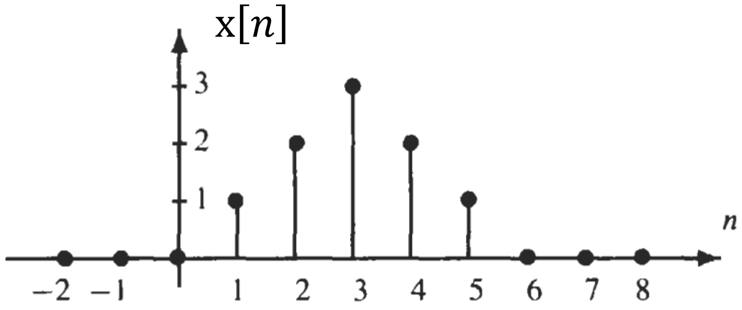


n	x[n]
0	0
1	1
2	2
3	3
4	2
5	1

TRANSFORMACIÓN DE VARIABLE INDEPENDIENTE

La transformación de la variable independiente modifica la señal de acuerdo al tipo de transformación, las cuales pueden ser:

- Inversión
- Desplazamiento temporal
- Compresión
- Expansión
- Mezcla de las anteriores

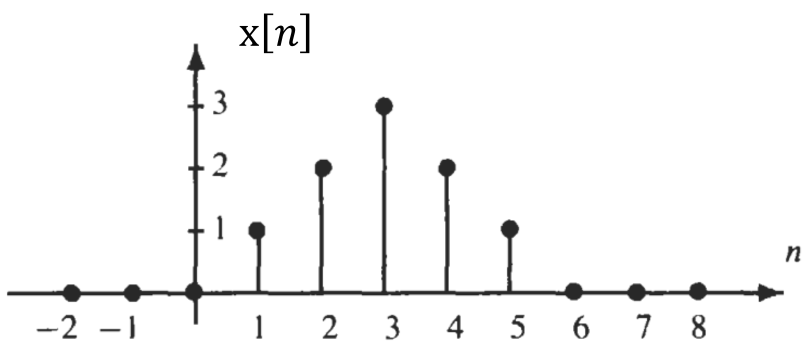


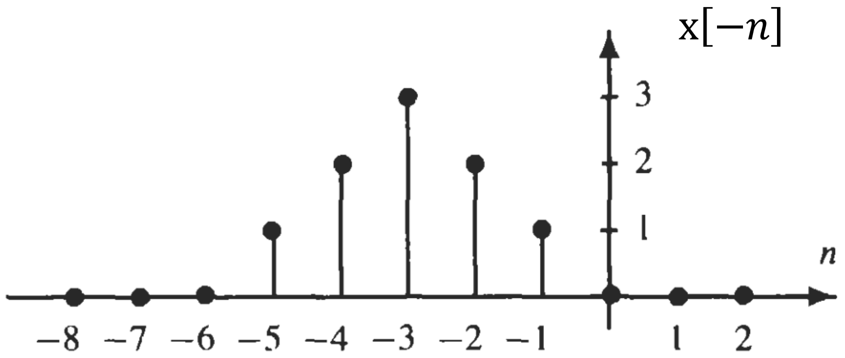
TRANSFORMACIÓN DE VARIABLE INDEPENDIENTE

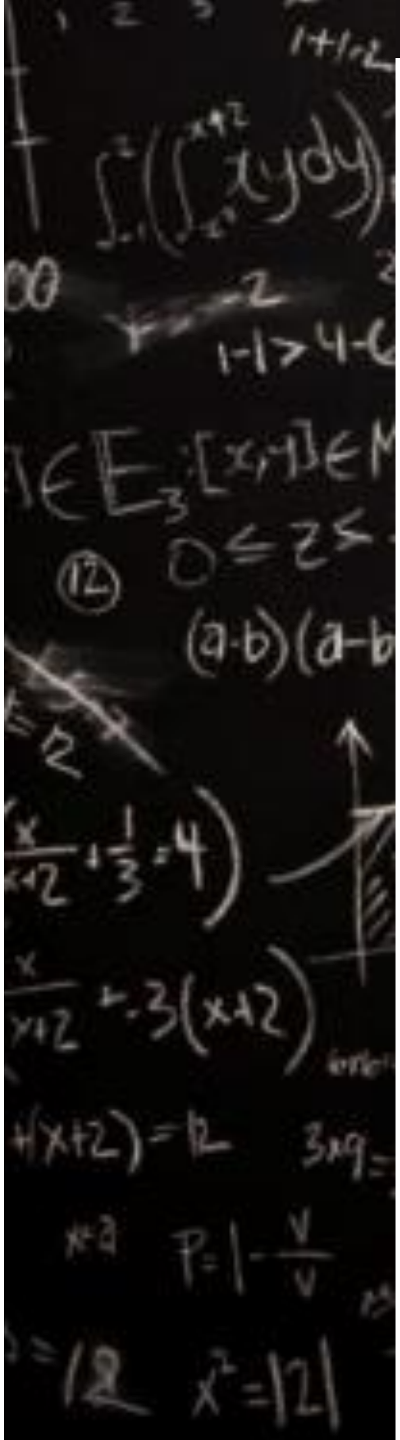
CASO DISCRETO

La transformación de la variable independiente modifica la señal de acuerdo al tipo de transformación, las cuales pueden ser:

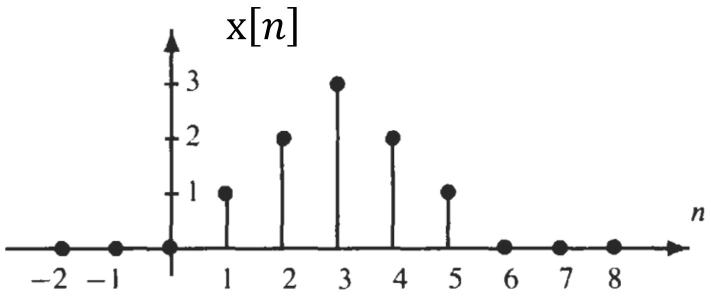
- <u>Inversión</u> $x_2[n] = \mathrm{x}[-n]$

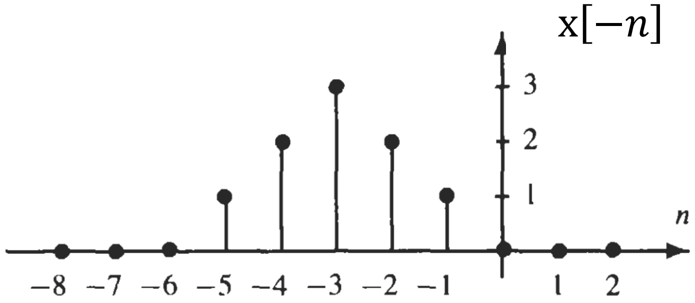






INVERSIÓN





$$x_2[n] = \mathrm{x}[-n]$$

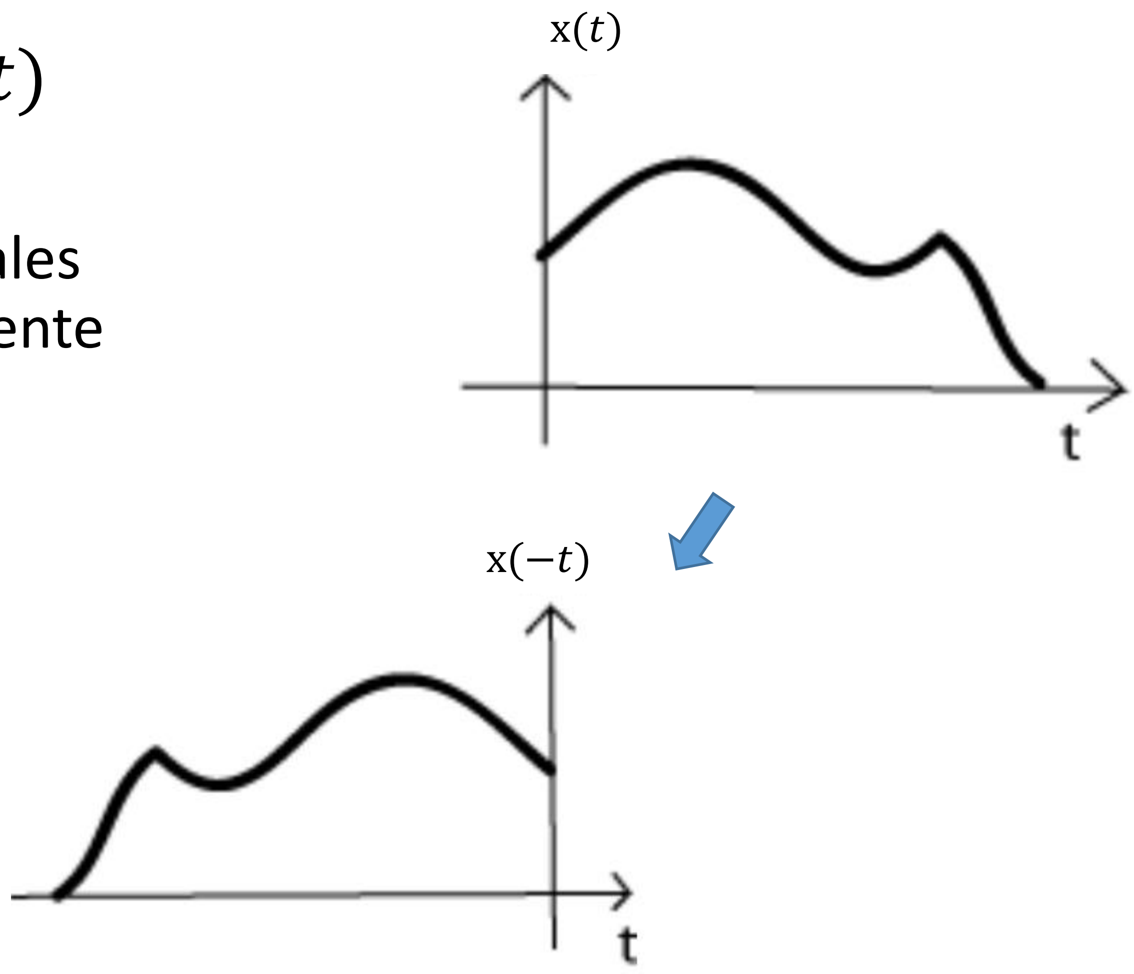
n	x[n]	$\mathbf{x}[-n]$
-6	0	0
-5	0	**1**
-4	0	**2**
-3	0	**3**
-2	0	**2**
-1	0	**1**
0	0	0
1	**1**	0
2	**2**	0
3	**3**	0
4	**2**	0
5	**1**	0

INVERSIÓN

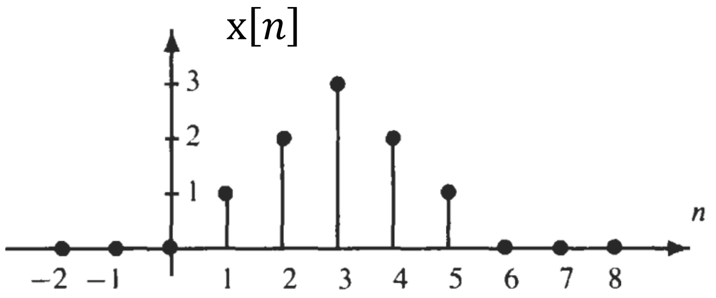
CASO CONTINUO

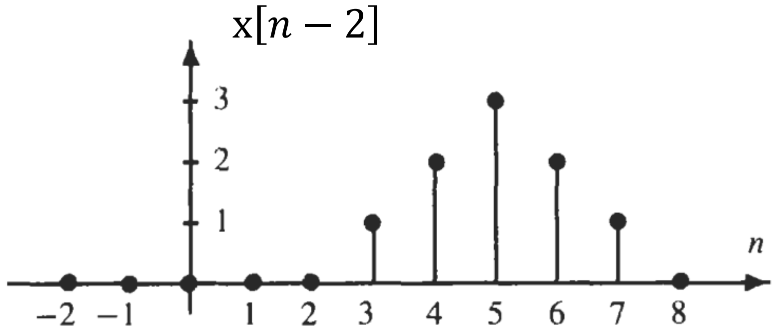
$$x_2(\mathrm{t}) = \mathrm{x}(-t)$$

Para trabajar con señales continuas, es conveniente definirlas por tramos.



DESPLAZAMIENTO TEMPORAL





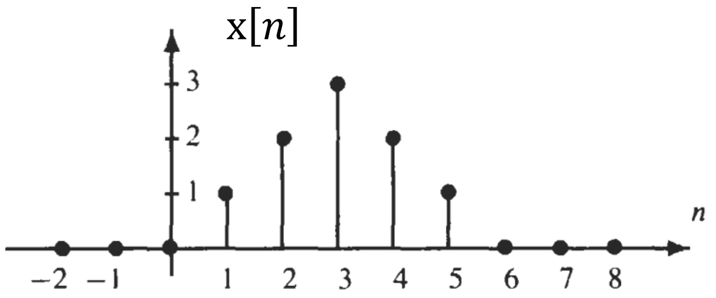
$$x_3[n] = \mathrm{x}[n - n_0]$$

n	x[n]	$\mathbf{x}[n-2]$
0	0	0
1	**1**	0
2	**2**	0
3	**3**	**1**
4	**2**	**2**
5	**1**	**3**
6	0	**2**
7	0	**1**
8	0	0

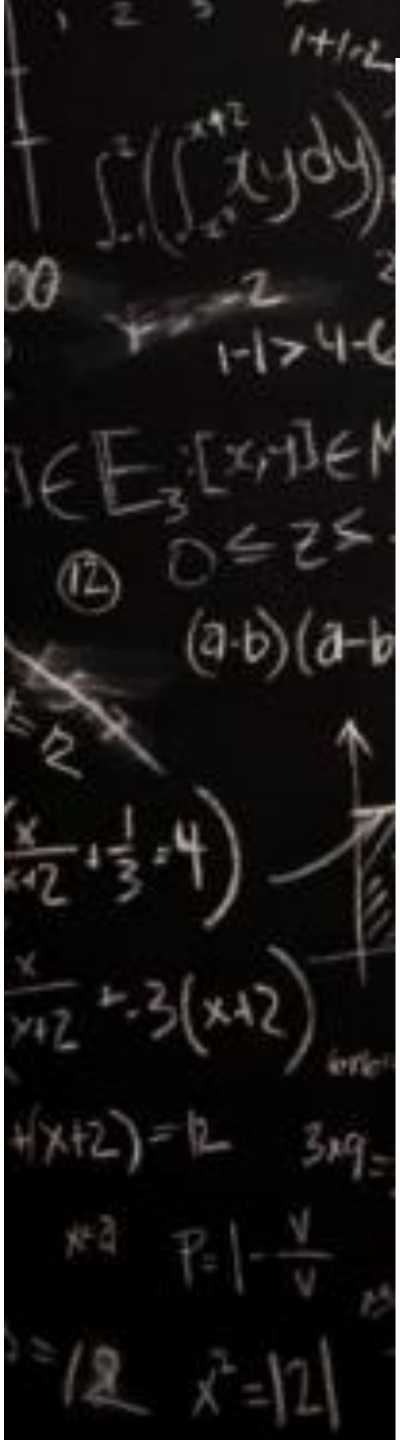
DESPLAZAMIENTO TEMPORAL

$$x_3[n] = \mathrm{x}[n+3]$$

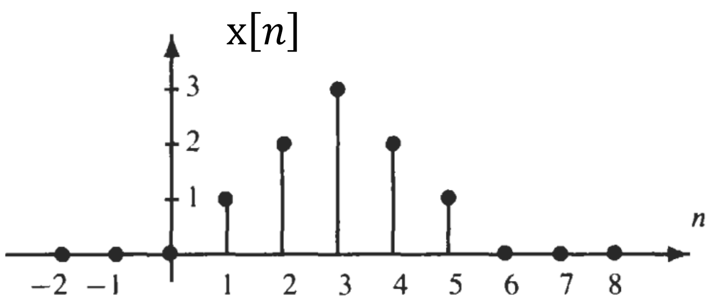
n	x[n]	$\mathbf{x}[n+3]$
0	0	?
1	**1**	?
2	**2**	?
3	**3**	?
4	**2**	?
5	**1**	?

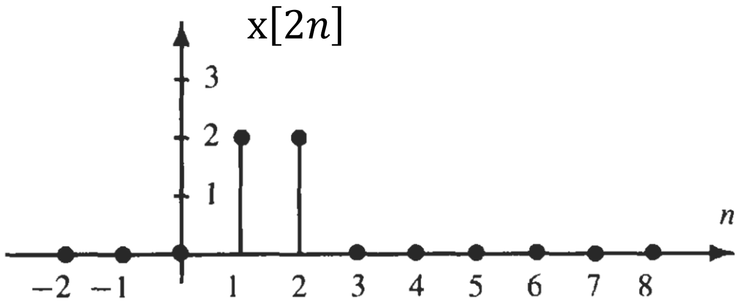


¿En qué aplicación práctica se puede utilizar este tipo de transformación de variable independiente?



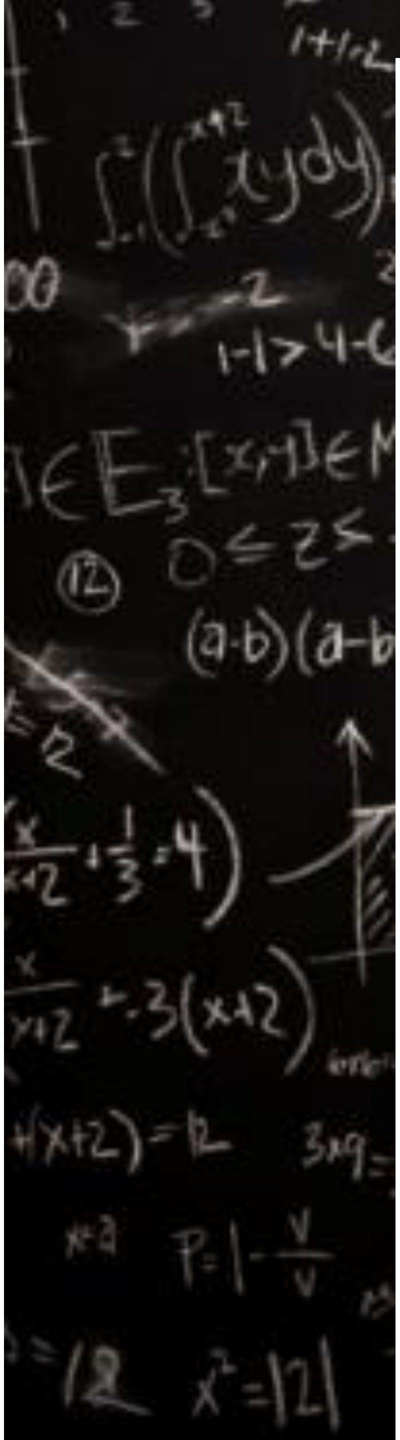
COMPRESIÓN





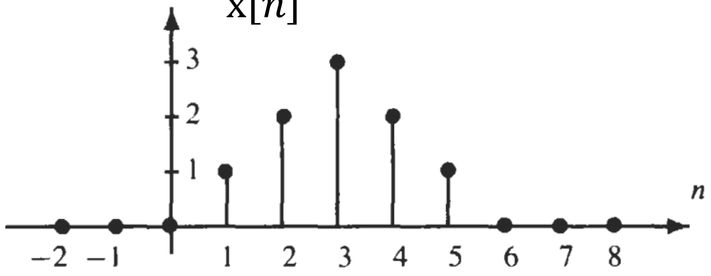
$$x_4[n] = \mathrm{x}[kn] \qquad k > 0$$

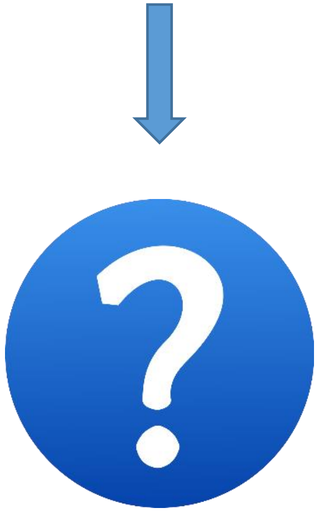
n	x[n]	x[2n]
0	0	0
1	**1**	**2**
2	**2**	**2**
3	**3**	0
4	**2**	0
5	**1**	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0



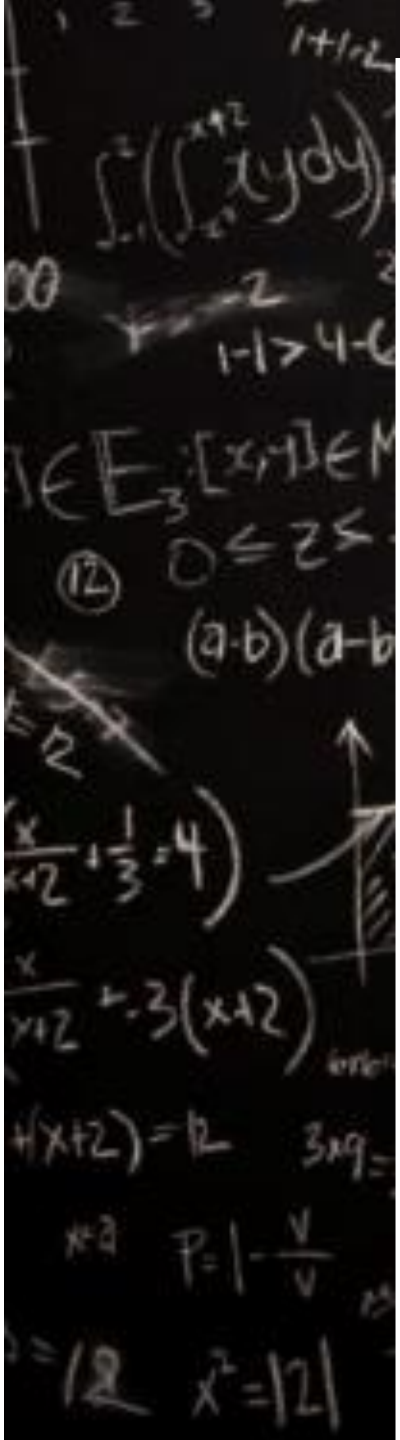
¿Y AHORA?

$$x_5[n] = \mathrm{x}[n/2]$$

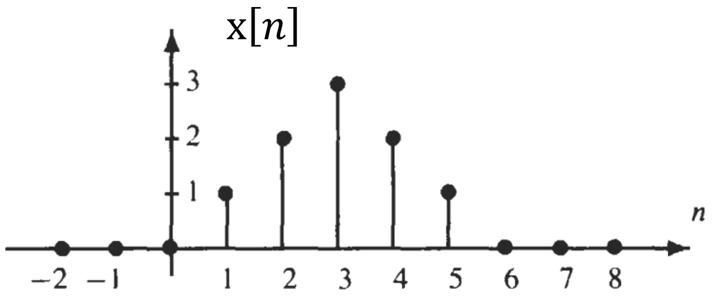


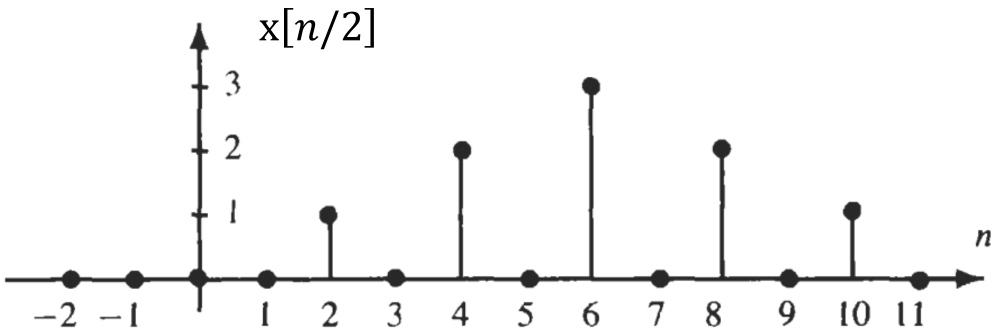


n	x[n]	$\mathbf{x}[n/2]$
0	0	?
1	**1**	?
2	**2**	?
3	**3**	?
4	**2**	?
5	**1**	?



EXPANSIÓN



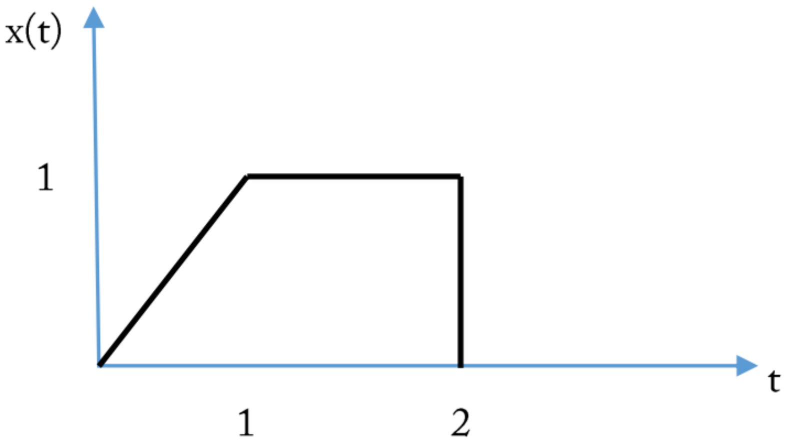


$$x_6[n] = \mathrm{x}[kn] \qquad k < 1$$

n	x[n]	$\mathbf{x}[n * 0{,}5]$
0	0	0
1	**1**	**0**
2	**2**	**1**
3	**3**	0
4	**2**	2
5	**1**	0
6	0	3
7	0	0
8	0	2
9	0	0
10	0	1

Ejemplo:

Aplicar la transformación $x_1(t) = x(-t+1)$ a *x(t)* y graficar su resultado:



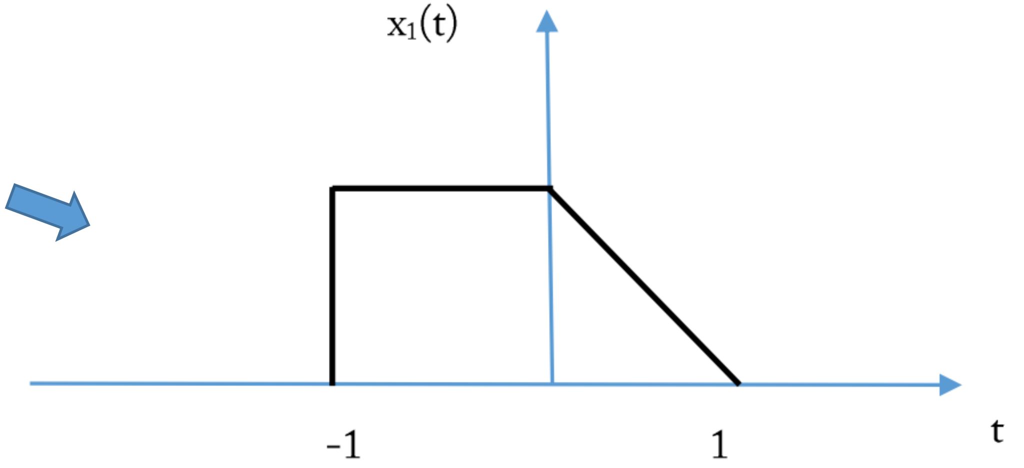
$$x(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \leq 2 \\ 0 & \forall\, t \end{cases}$$

Aplicando la transformación "-t+1" en la definición a tramos de x(t) tenemos:

$$x(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \leq 2 \\ 0 & \forall\, t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = \begin{cases} -\mathrm{t} + 1 & 0 < -\mathrm{t} + 1 \leq 1 \\ 1 & 1 < -\mathrm{t} + 1 \leq 2 \\ 0 & \forall\, t \end{cases}$$

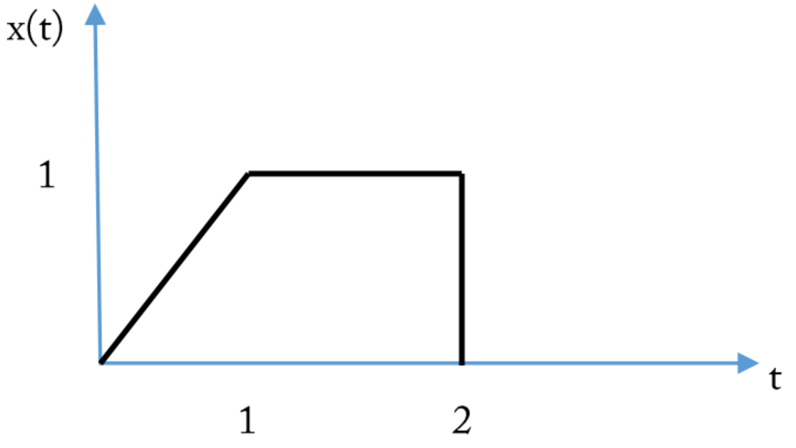
Despejando para "t":

$$x_1(t) = \begin{cases} -\mathrm{t} + 1 & 0 < \mathrm{t} \leq 1 \\ 1 & -1 < \mathrm{t} \leq 0 \\ 0 & \forall\, t \end{cases}$$

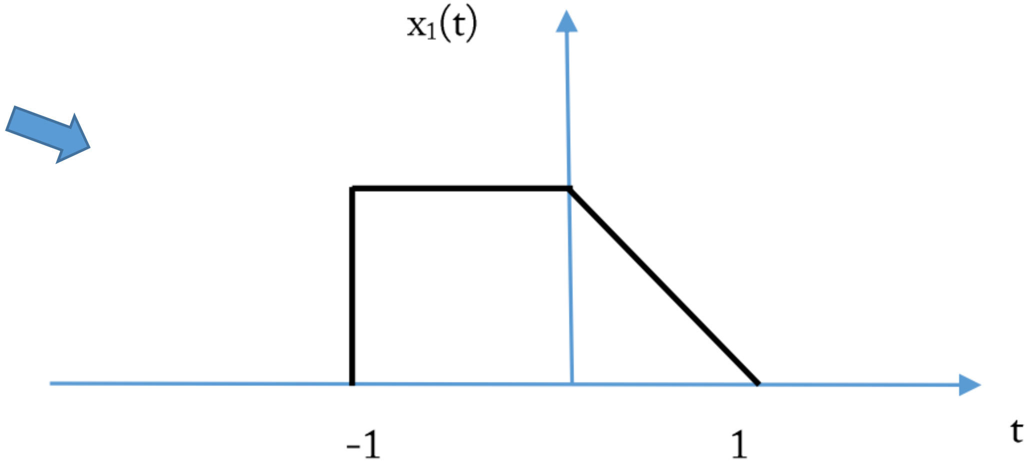


Preguntas de repaso:

1) Para este caso ejemplificado: ¿Da igual el orden en que se evalúan las transformaciones de la variable independiente?
2) ¿En qué casos se obtendrían diferentes resultados dependiendo el orden de evaluación de la transformación de la variable?



$$x_1(t) = x(-t+1)$$



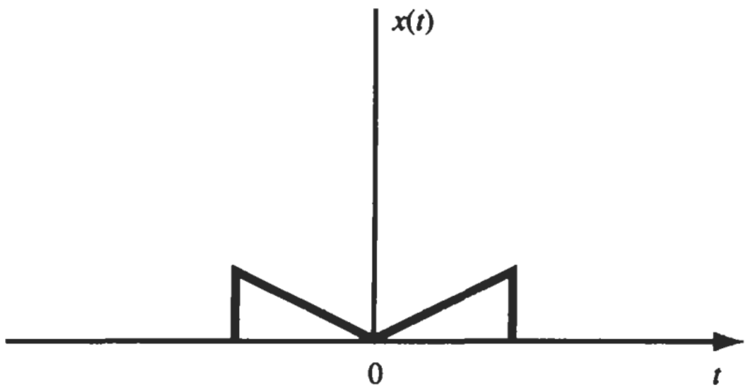
SEÑALES PARES E IMPARES

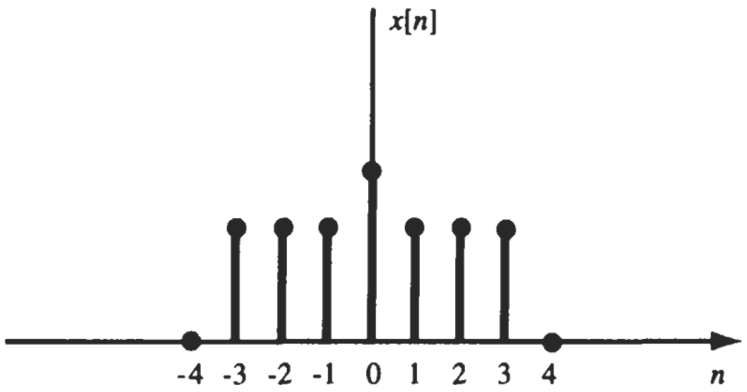
(*Even and Odd*)

Una señal es **<u>PAR</u>** si se cumple que:

$$x(-t) = x(t)$$

$$x[-n] = x[n]$$





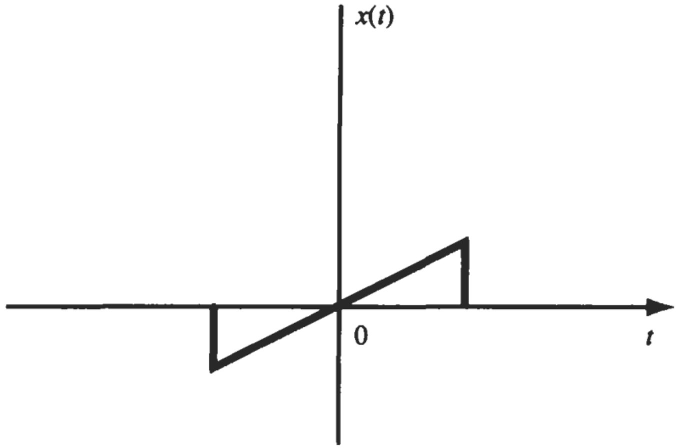
Simetría respecto al eje vertical

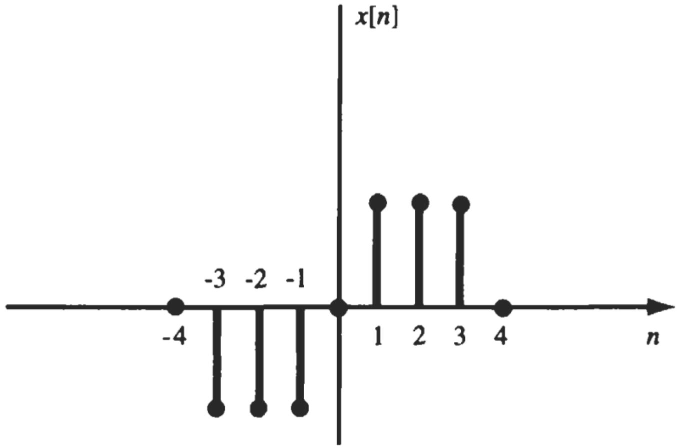
SEÑALES PARES E IMPARES

(*Even and Odd*)

Una señal es IMPAR si se cumple que:

$$x(-t) = -x(t)$$
$$x[-n] = -x[n]$$





Simetría respecto al eje horizontal

SEÑALES PARES E IMPARES

(*Even and Odd*)

Toda señal puede ser descompuesta en una parte par e impar:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

Donde las partes par e impar son:

$$x(t)_{par} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$ *Parte par de x(t)*

$$x(t)_{impar} = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$ *Parte impar de x(t)*

Descomposición PAR-IMPAR

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

$$x(t)_{par} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x(t)_{impar} = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

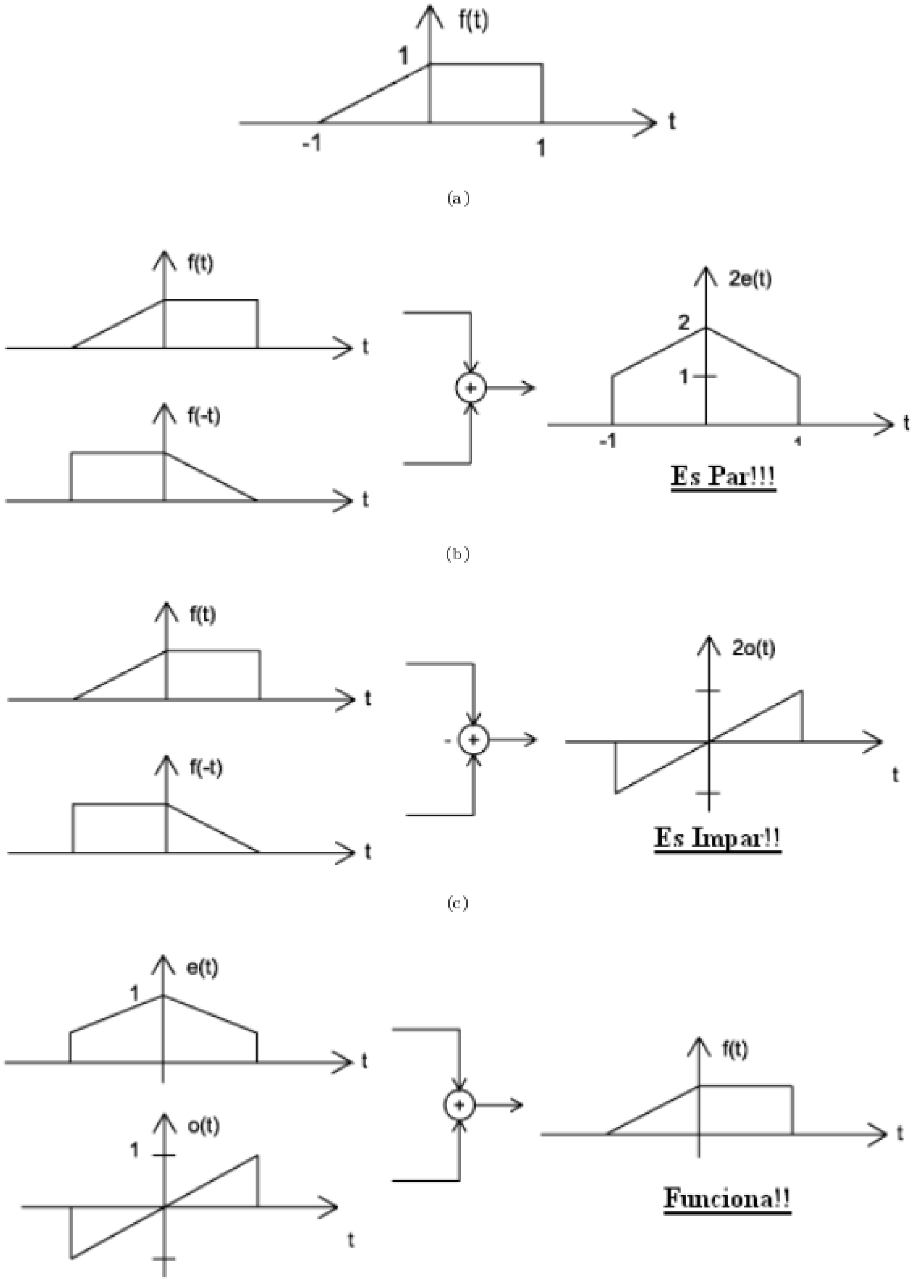


Imagen obtenida de “Señales y Sistemas - Richard Baraniuk”

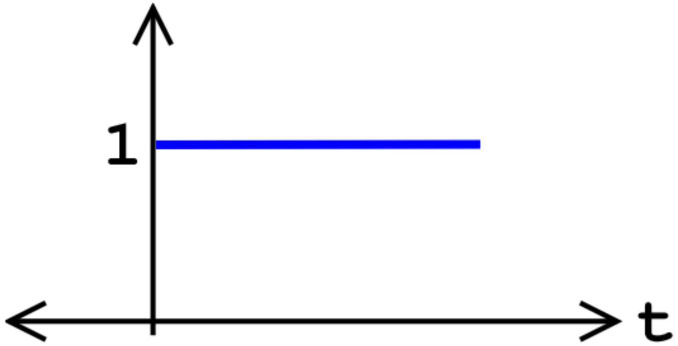
SEÑALES IMPORTANTES

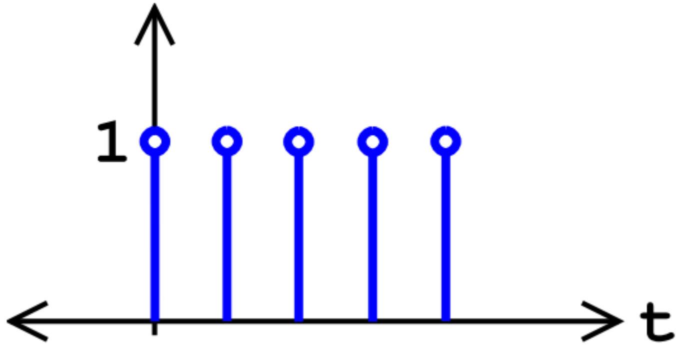
En la ingeniería, hay algunas señales que son muy importantes y útiles:

Escalón unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



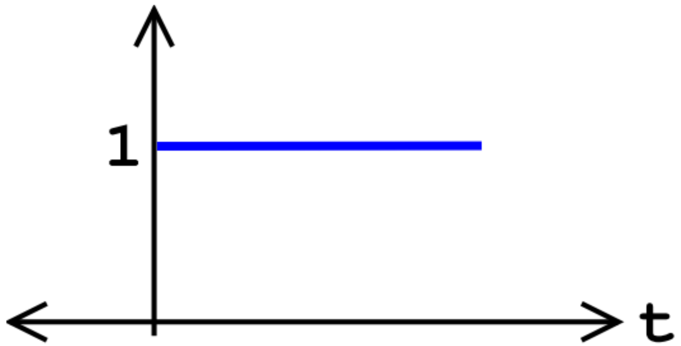


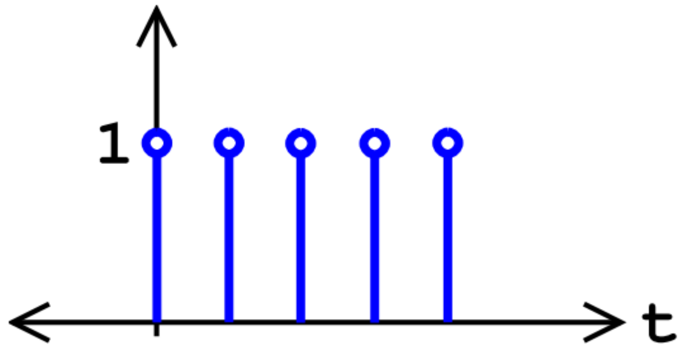
Utilizando el escalón unitario…

¿Cómo podría definir una señal acotada en ciertos valores de tiempo t1 y t2?

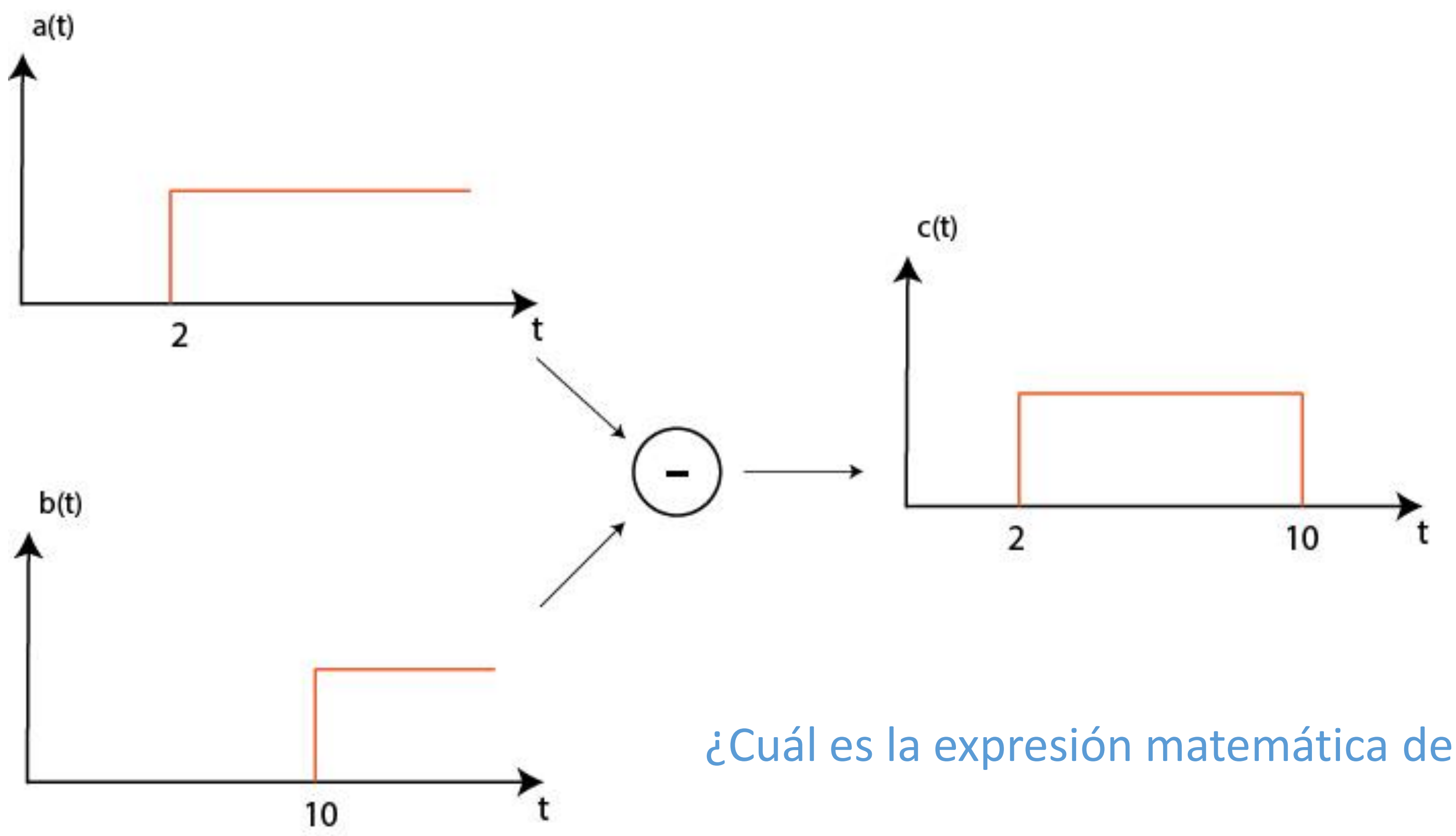
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$





¿Cómo podría definir una señal acotada en ciertos valores de tiempo t1 y t2?



¿Cuál es la expresión matemática de a(t) y b(t)?

¿Qué tipo de transformación se aplicó al escalón?

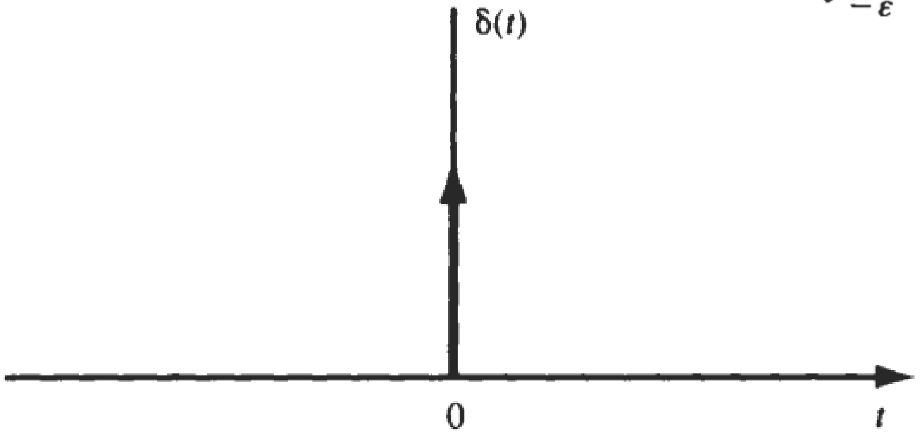
SEÑALES IMPORTANTES

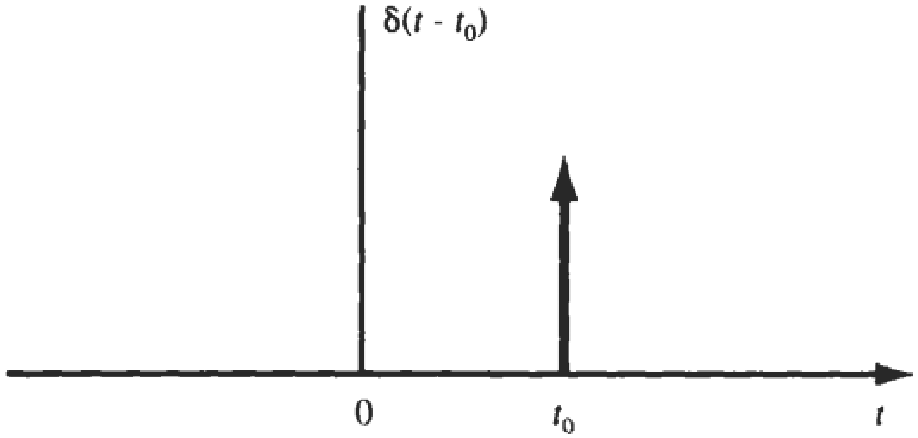
Impulso unitario o "*Delta de Dirac*":

Es una señal teórica y de gran importancia para una enorme cantidad de tareas y posee la siguiente definición:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\, dt = 1$$

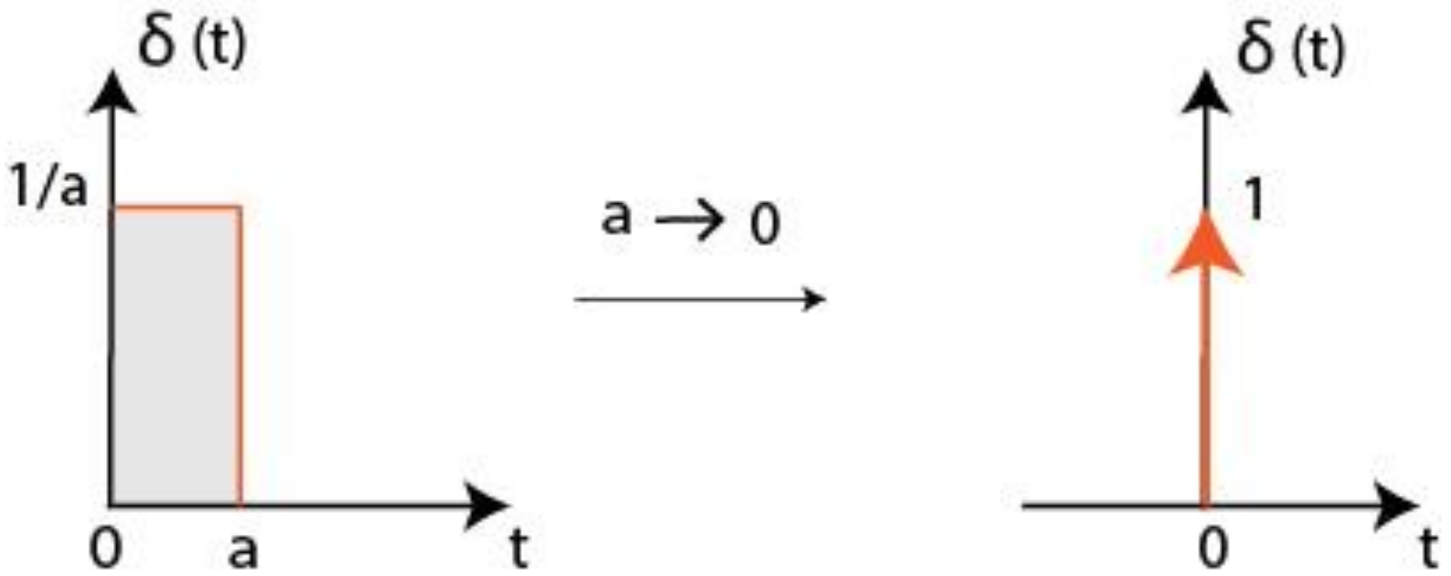




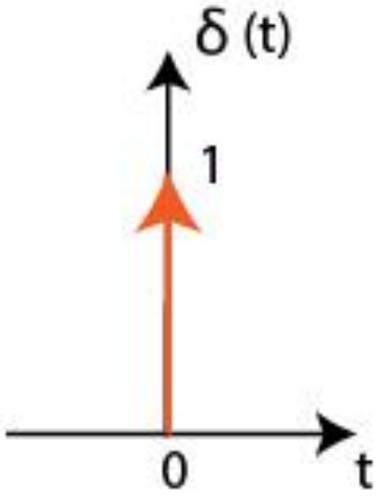
Impulso unitario o “*Delta de Dirac*”:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\, dt = 1$$



Si decimos que la amplitud del impulso es infinita, y eso lo representamos con la flecha… ¿Por qué se escribe el "1" en el impulso?



El impulso unitario o Delta de Dirac es una función generalizada, es decir, está mejor definida por sus aplicaciones que por sus valores propios.

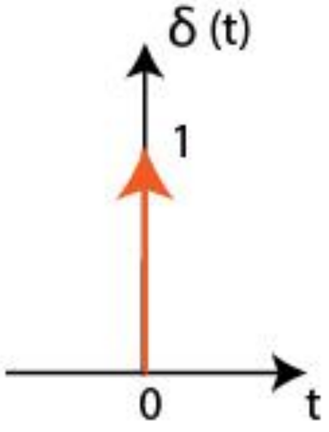
Propiedad de muestreo del Impulso unitario:

La principal propiedad del impulso, y por lo que es tan útil se obtiene cuando es multiplicada por otra señal:

$$f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$$

Una señal multiplicada por infinito daría infinito; pero si se integra la multiplicación se obtiene:

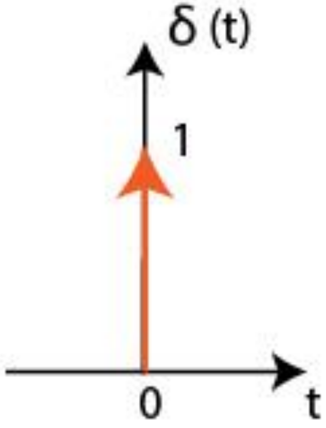
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\,\delta(t)\,dt \\ &= f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt \\ &= f(0)\end{aligned}$$



Si hacemos lo mismo, pero con un impulso desplazado obtenemos:

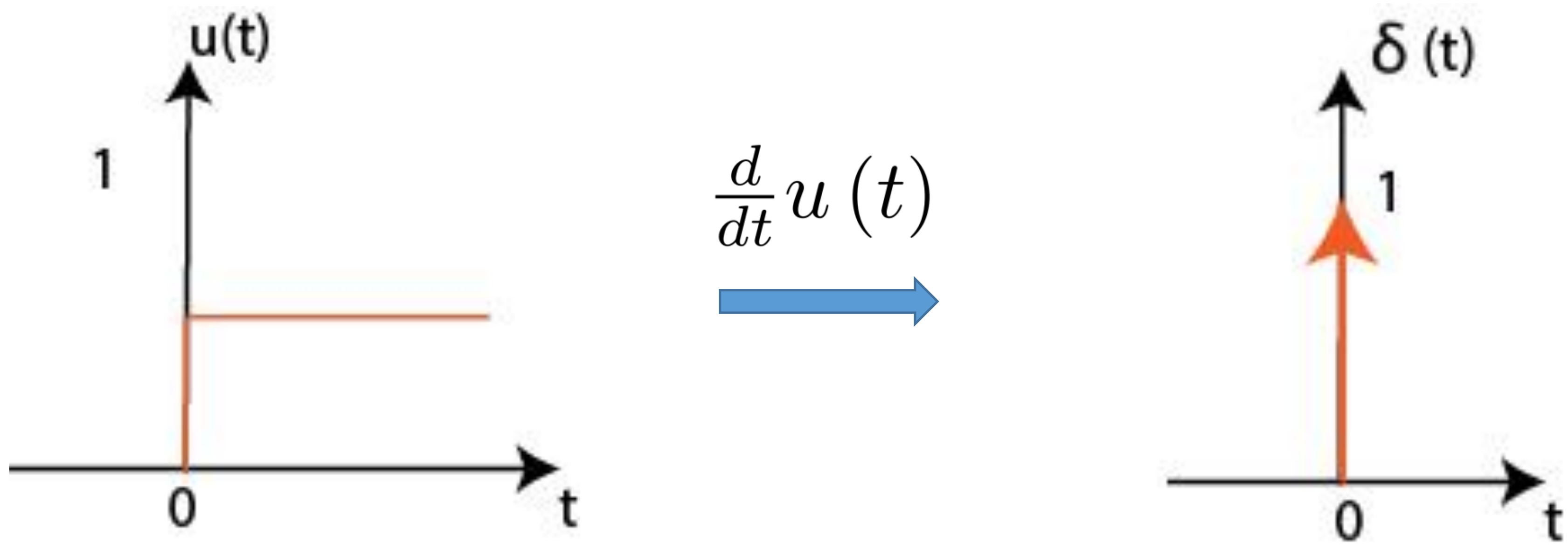
$$f(t)\delta(t-T) = f(T)$$

Es decir, que un impulso puede utilizarse para tomar “muestras” de una señal continua en cualquier punto.



Relación del impulso unitario con el escalón unitario

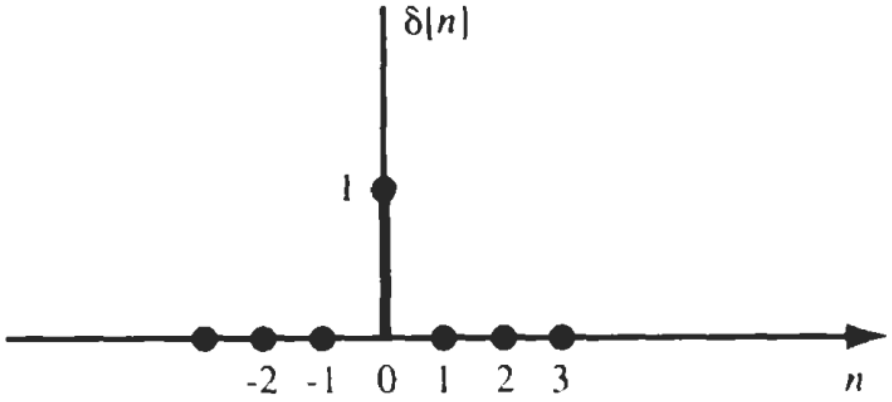
- $\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$, donde $u(t)$ es el escalón unitario.

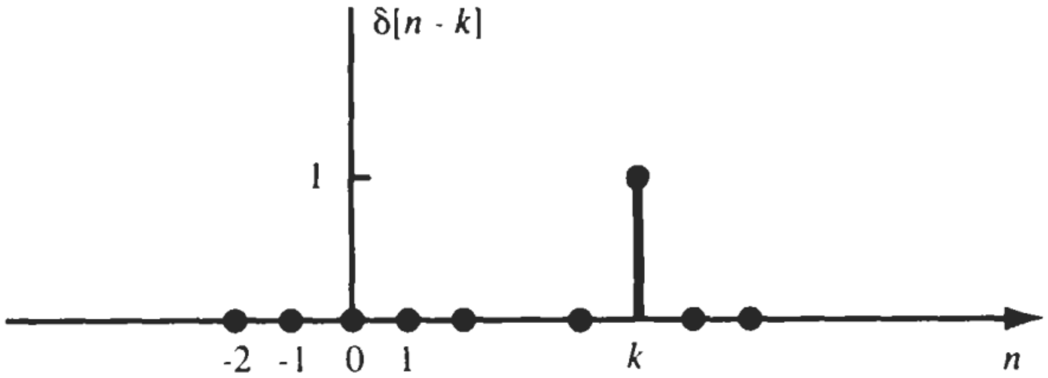


Impulso unitario: caso discreto o "*muestra unitaria*"

Si en el caso continuo definimos al Delta de Dirac como una integral que en todo "t" da como resultado 1, para el caso discreto, la integral se convierte en una sumatoria y obtenemos:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$





Señales exponenciales complejas $f(t) = e^{st}$

Quizá una de las señales más utilizadas en señales y sistemas:

$$f(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

$$e^{st} = e^{\sigma t}\,[cos(\omega t) + jsen(\omega t)]$$

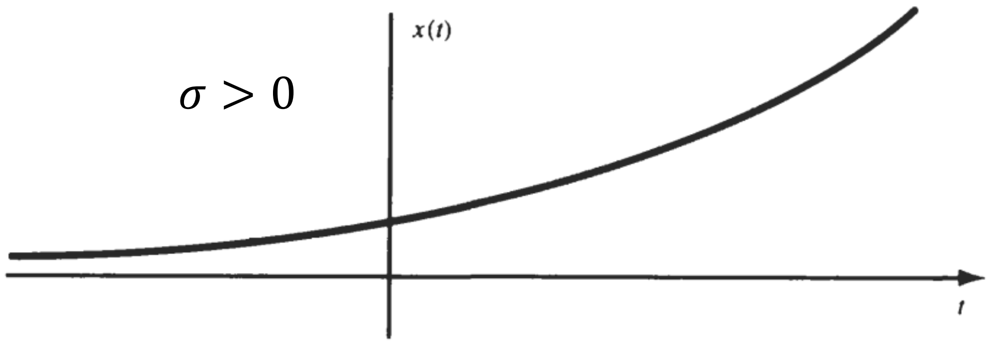
Donde utilizamos la Fórmula de Euler:

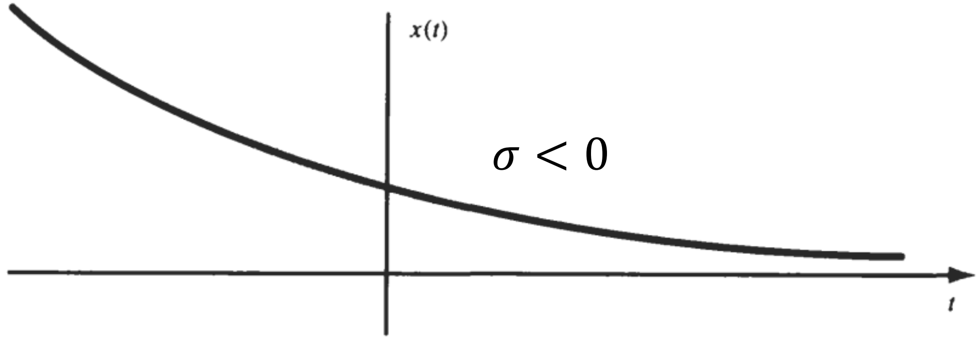
$$e^{j\omega t} = cos(\omega t) + jsen(\omega t)$$

Vamos a analizar por parte. Primero tenemos la parte de exponencial real

$$e^{st} = e^{\sigma t}[cos(\omega t) + jsen(\omega t)]$$

$\sigma > 0$



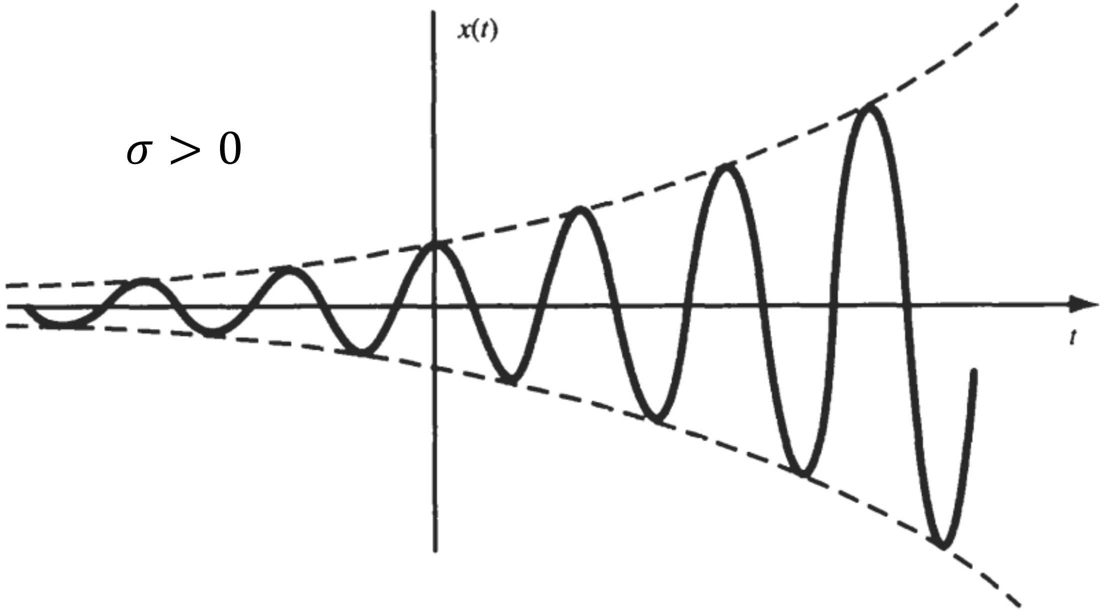


$\sigma < 0$

Luego tenemos la parte <u>oscilatoria</u>, con componente real e imaginaria.

$$e^{st} = e^{\sigma t}\ \underline{[cos(\omega t) + jsen(\omega t)]}$$

$\sigma > 0$



Analicemos la parte oscilatoria, ¡el corazón del procesamiento de señales!

$$\boxed{e^{j\omega t} = cos(\omega t) + jsen(\omega t)}$$

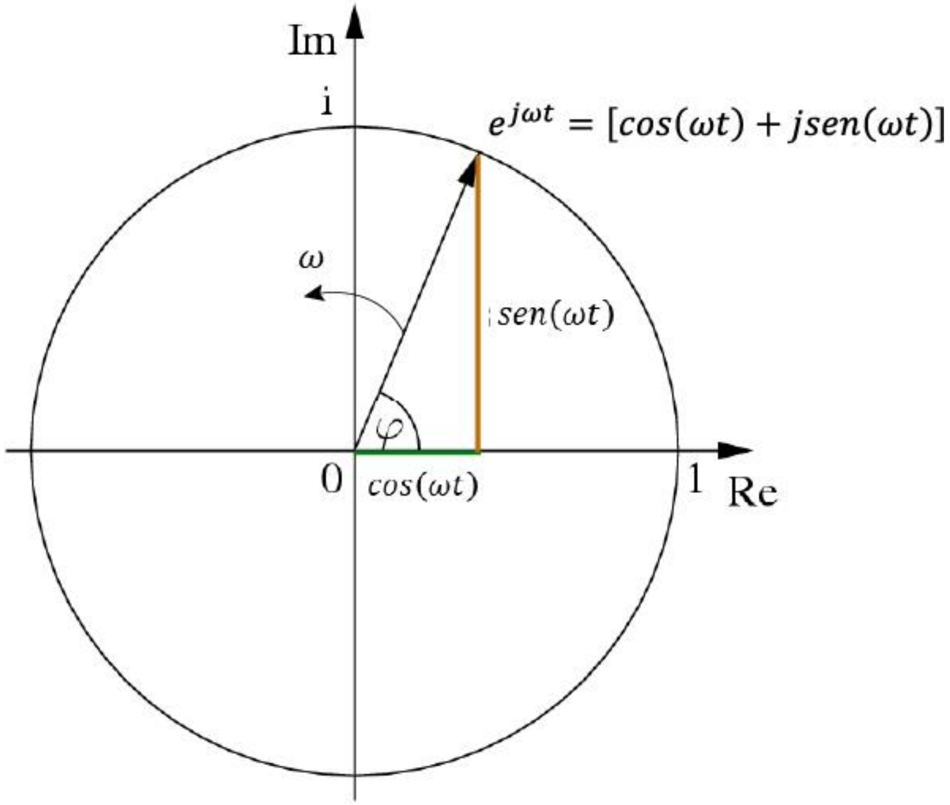
$$Re\left[e^{j\omega t}\right] = cos(\omega t)$$

$$Im\left[e^{j\omega t}\right] = sen(\omega t)$$

$$\varphi = \omega t$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T}\ (Hertz\ - Hz)$$



$$e^{j\omega t} = cos(\omega t) + jsen(\omega t)$$

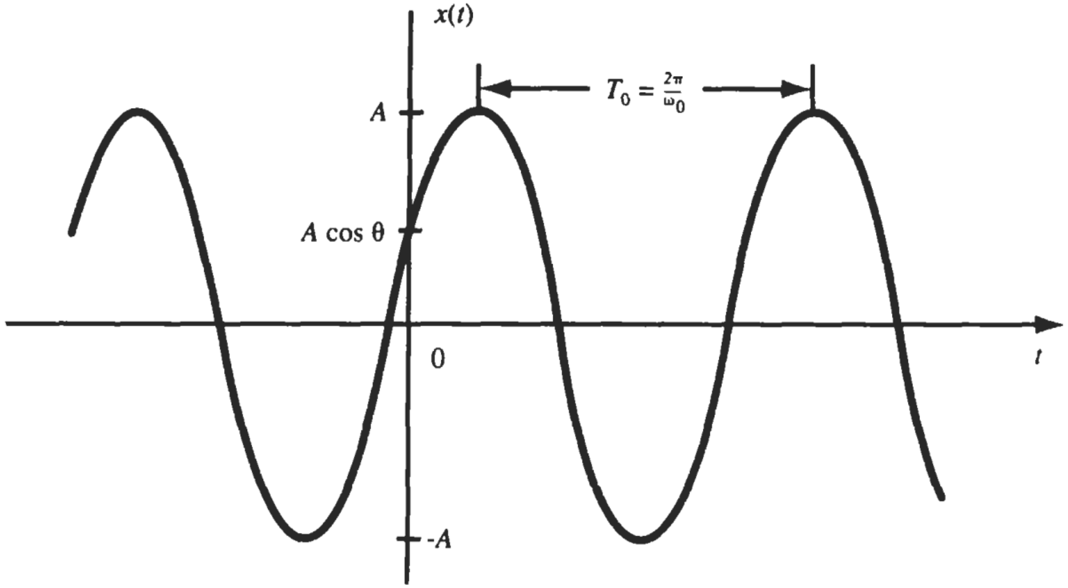
$$\varphi = \omega t \ (rad)$$

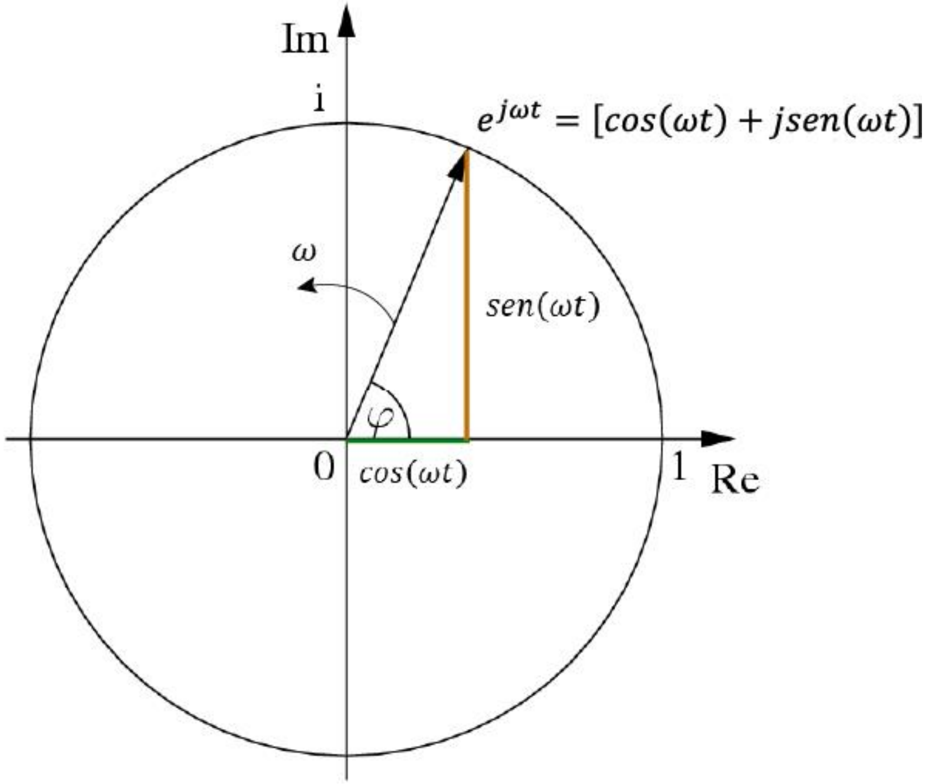
$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T} \ (Hertz - Hz)$$

$$Re\left[e^{j\omega t}\right] = cos(\omega t)$$

$$Im\left[e^{j\omega t}\right] = sen(\omega t)$$





SEÑALES SENOIDALES

CASO CONTINUO

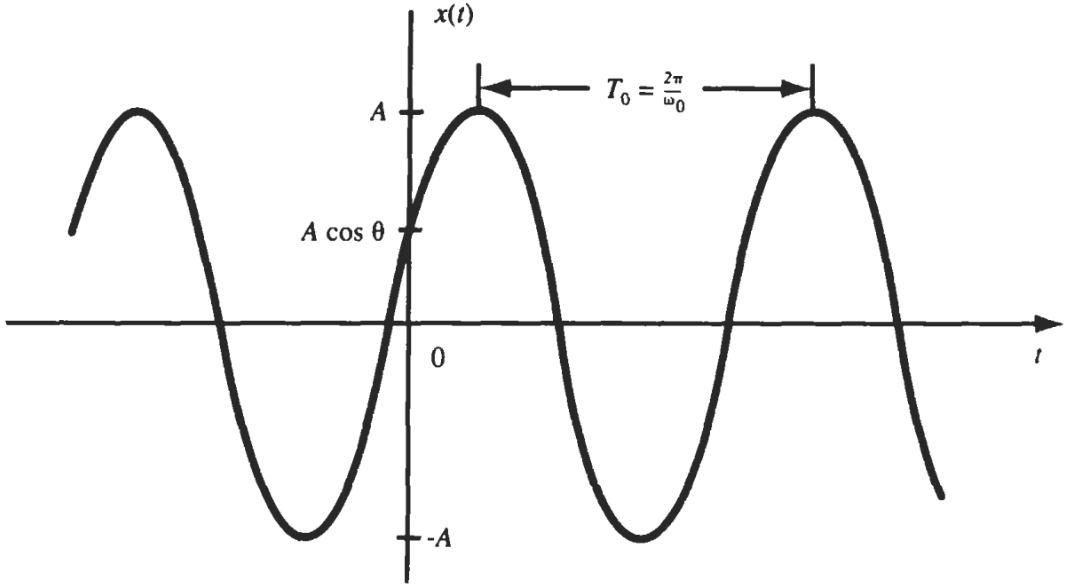
$$x(t) = Acos(\omega t + \theta)$$

$$\theta = fase\ (radianes)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\ \ Periodo\ fundamental$$

$$\omega = 2\pi f_0$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}(Hertz\ - Hz)$$



SEÑALES SENOIDALES

CASO DISCRETO

$$x[n] = A\cos(\omega n + \theta)$$

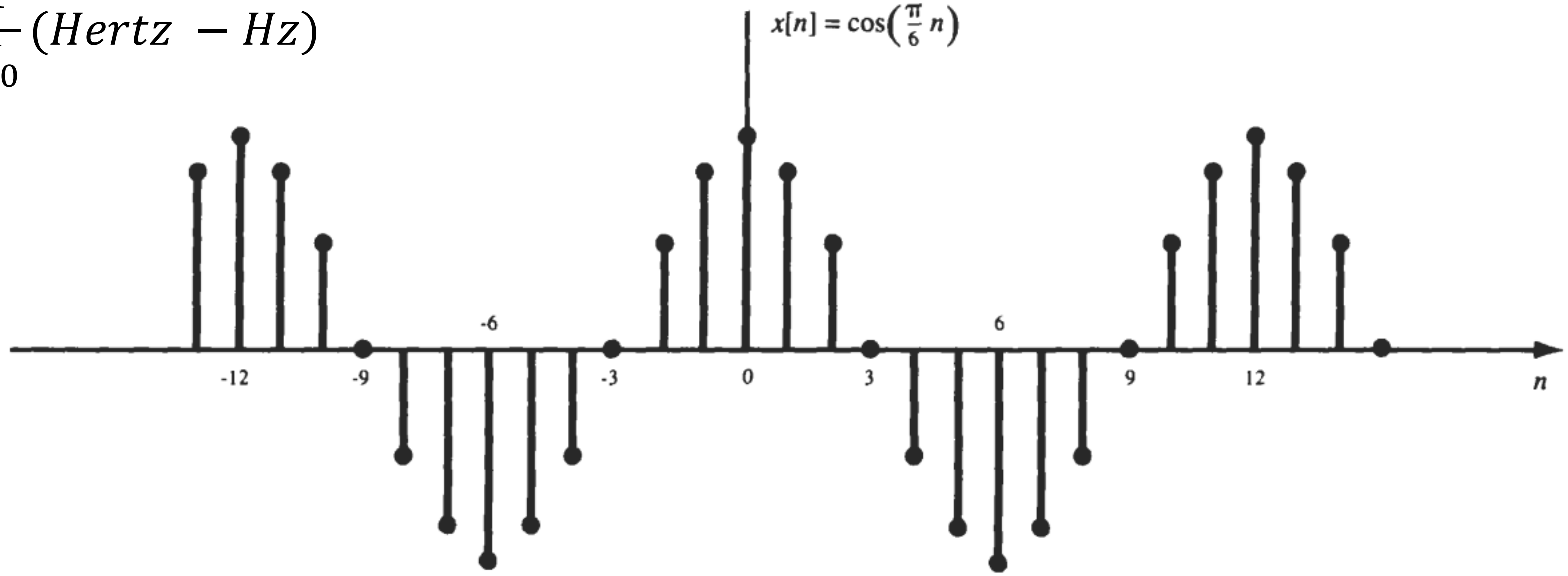
$\theta = fase\ (radianes)$

$N_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ $\quad Periodo\ fundamental$

$f_0 = \dfrac{1}{N_0} (Hertz\ - Hz)$

¿Cuánto vale el periodo de la señal?

¿Es siempre así?



SEÑALES SENOIDALES

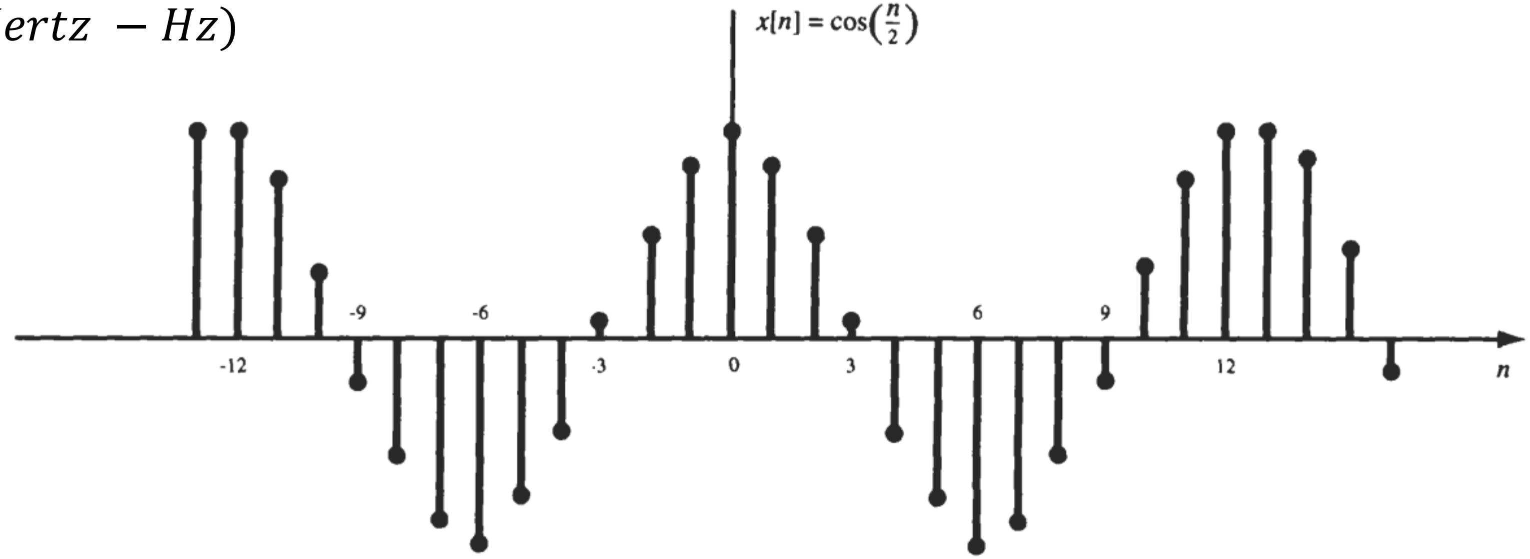
CASO DISCRETO

$$x[n] = A\cos(\omega n + \theta)$$

$$\theta = fase\ (radianes)$$

$$N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad Periodo\ fundamental$$ --- NO SIEMPRE SE CUMPLE!

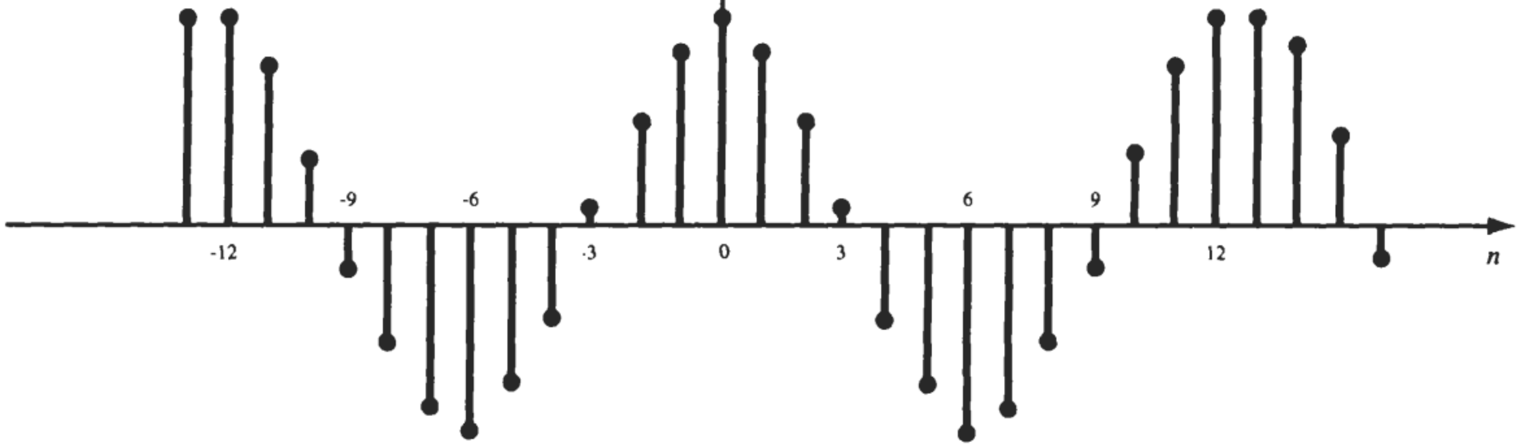
$$f_0 = \frac{1}{N_0}(Hertz\ - Hz)$$



SEÑALES SENOIDALES

CASO DISCRETO

$$x[n] = cos\left({}^{8\pi n}/_{31}\right)$$



$$N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{{}^{8\pi}/_{31}} = \frac{31}{4}$$

¿Puede un periodo discreto ser 31/4?

La solución es buscar un <u>entero</u> próximo

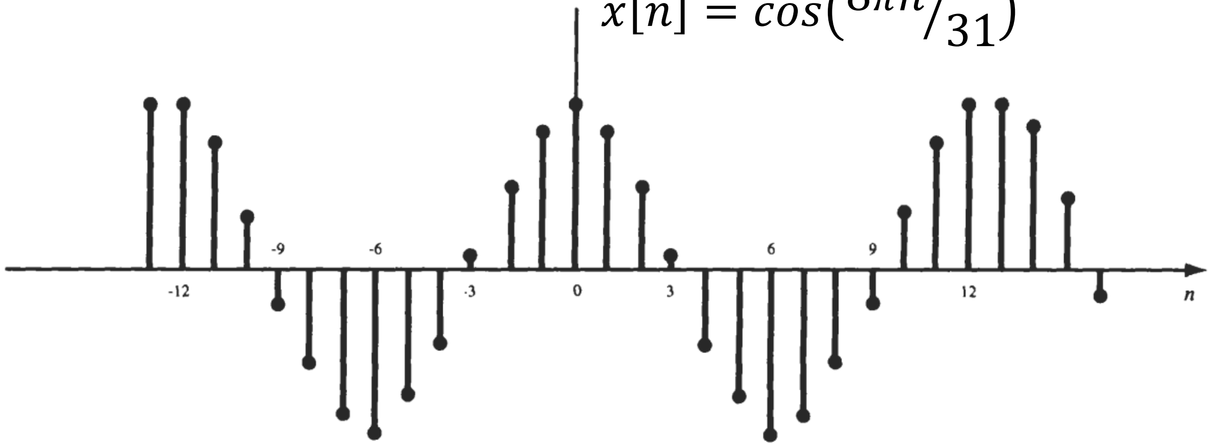
$$\boxed{N_0 = \frac{m2\pi}{\omega_0}}$$

$$N_0 = \frac{m2\pi}{\omega_0} = \frac{m2\pi}{8\pi/31} = \frac{m31}{4}$$

Para m=4, N=31

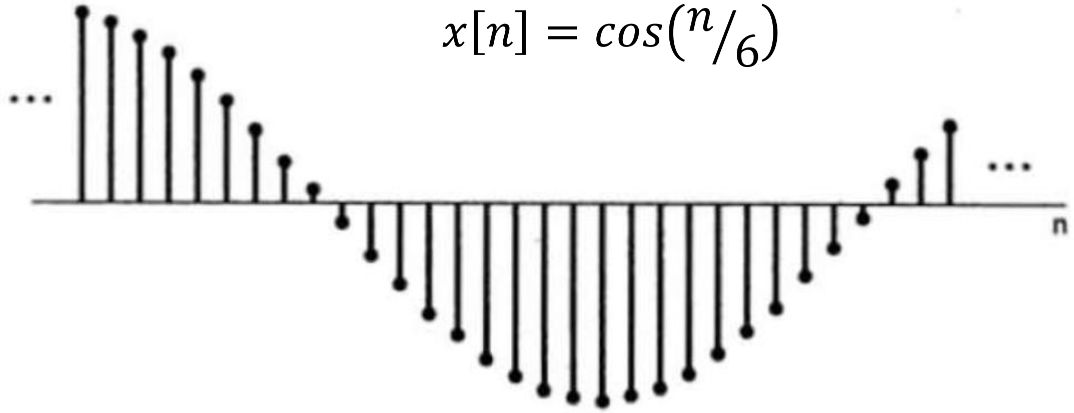
¡Es periódica!

$x[n] = cos\left(8\pi n/31\right)$



Otro ejemplo:

$$x[n] = cos\left({}^{n}/_{6}\right)$$



$$N_0 = \frac{m2\pi}{\omega_0}$$

$$N_0 = \frac{m2\pi}{\omega_0} = \frac{m2\pi}{{}^{1}/_{6}} = m12\pi$$

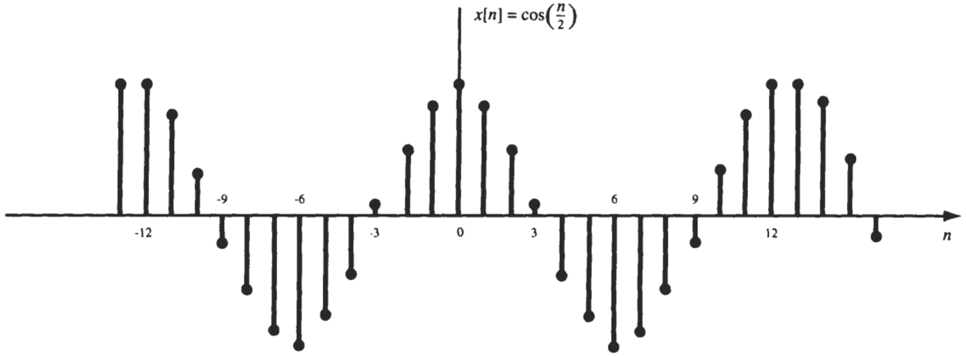
¿Qué valor de “m” puede hacer periódica a la señal?

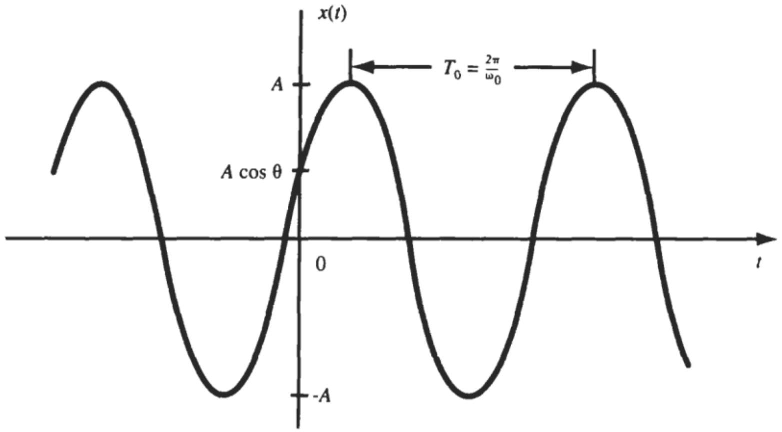
¡La señal no es periódica!

En resumen:

- Todas las señales trigonométricas de tiempo continuo son periódicas.

- No todas las señales trigonométricas de tiempo discreto son periódicas.



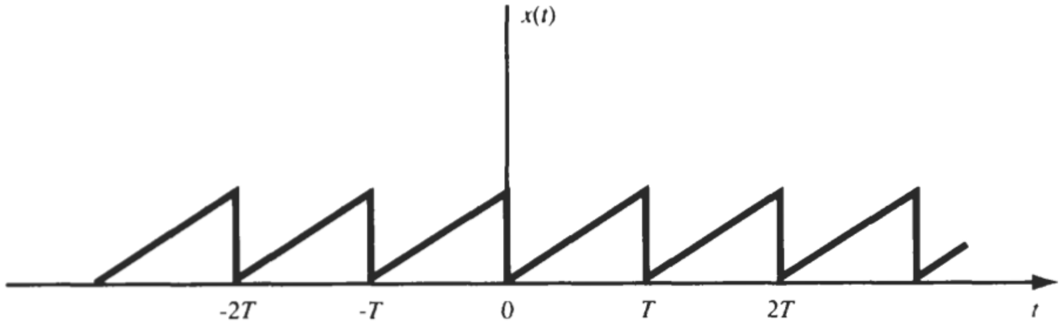


SEÑALES PERIÓDICAS

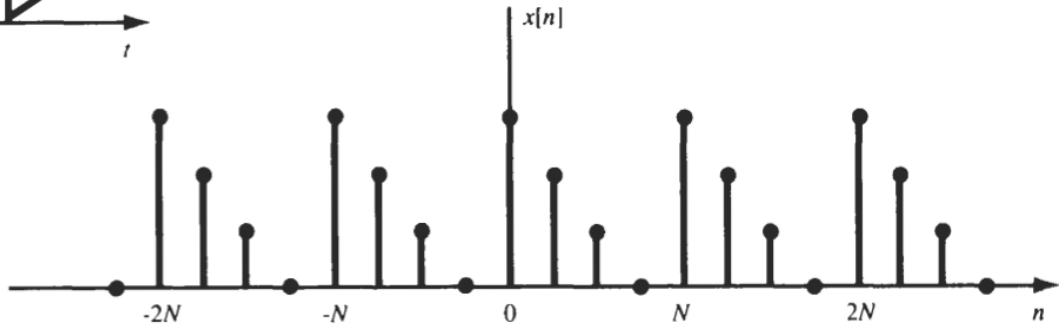
Una señal, discreta o continua, es periódica si se cumple que:

$$x(t) = x(t + T)$$

$$x[n] = x[n + N]$$



N debe ser entero



SEÑALES DE ENERGÍA Y POTENCIA

CASO CONTINUO

Podemos calcular la energía o potencia de distintas señales como:

$$\mathrm{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Energía de una señal continua

$$\mathrm{P} = Lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Potencia promedio de una señal continua

SEÑALES DE ENERGÍA Y POTENCIA

CASO DISCRETO

Podemos calcular la energía o potencia de distintas señales como:

$$\mathrm{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Energía de una señal discreta

$$\mathrm{P} = Lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Potencia promedio de una señal discreta

SEÑALES DE ENERGÍA Y POTENCIA

En base a estas definiciones, podemos clasificar las señales como:

Señales de energía: Si, y solo si, $0 < E < \infty$ por lo que P=0

Señales de potencia: Si, y solo si, $0 < P < \infty$ por lo que E= ∞

Las señales que no cumplan con alguna de estas clasificaciones, no se consideran ni de energía, ni de potencia.