Procesamiento Digital de Señales

Unidad 5: Transformada Discreta de Fourier y Espectro de Señales

Cálculo eficiente de la DFT

Algoritmos de FFT

Ecuaciones de la DFT (cálculo directo)

- Ecuación de análisis

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- Ecuación de síntesis

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- La diferencia es el signo de la exponencial y factor de escala $\Rightarrow$ el procedimiento de cómputo es muy similar

Costo computacional

- Expandiendo la ecuación de análisis

$$X(k) = \underbrace{x(0)e^{-j\frac{2\pi}{N}k0} + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{N}k1} + \cdots + x(N-1)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-1)}}_{N \text{ términos}}$$

- Resultan para cada valor de la DFT
  - *N* multiplicaciones complejas
  - *N*-1 sumas complejas
- En total:
  - *NxN* multiplicaciones complejas
  - *Nx*(*N*-1) sumas complejas

Costo computacional

- Colocando en términos de operaciones con números reales

$$X(k)=\sum_{k=0}^{N-1}(\{\mathrm{Re}[x(n)]\mathrm{Re}(e^{-j\frac{2\pi}{N}kn})-\mathrm{Im}[x(n)]\mathrm{Im}(e^{-j\frac{2\pi}{N}kn})\}$$

$$+\ j\{\mathrm{Re}[x(n)]\mathrm{Im}(e^{-j\frac{2\pi}{N}kn})+\mathrm{Im}[x(n)]\mathrm{Re}(e^{-j\frac{2\pi}{N}kn})\}$$

- Cada multiplicación compleja requiere 4 multiplicaciones reales y 2 sumas reales
- Cada suma compleja requiere de 2 sumas reales

Costo computacional

- Por cada valor de k, se requieren:
  - 4 N multiplicaciones reales
  - 2 (N-1) + 2 N = 4N-2 sumas reales
- Considerando los N valores diferentes de k:
  - $4N^2$ multiplicaciones reales
  - N (4N-2) sumas reales

Vemos que la cantidad de operaciones, y por lo tanto el tiempo de procesamiento, depende de N^2

Algoritmo de Goertzel

- Explora la periodicidad de la exponencial
- Dado que

$$e^{j2\pi kN/N} = 1$$

- Se tiene

$$X(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}kN} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{j\frac{2\pi}{N}k(N-m)}$$

- Tiene la forma de una convolución

Algoritmo de Goertzel

- Definiendo la secuencia

$$y_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{j2\pi k(n-m)/N} u(n-m)$$

- Siendo la convolución de la secuencia de entrada

$$x(n), \text{ de longitud } N$$

con un filtro que tiene por respuesta al impulso

$$h_k(n) = e^{j2\pi kn/N} u(n)$$

la salida de este filtro en *n* = *N* da el valor de la DFT a la frecuencia $\omega_k = 2\pi k / N$, es decir $X(k) = y_k(n)\big|_{n=N}$

Algoritmo de Goertzel

- Siendo $X(k) = y_k(n)\big|_{n=N}$

y la función de transferencia del filtro

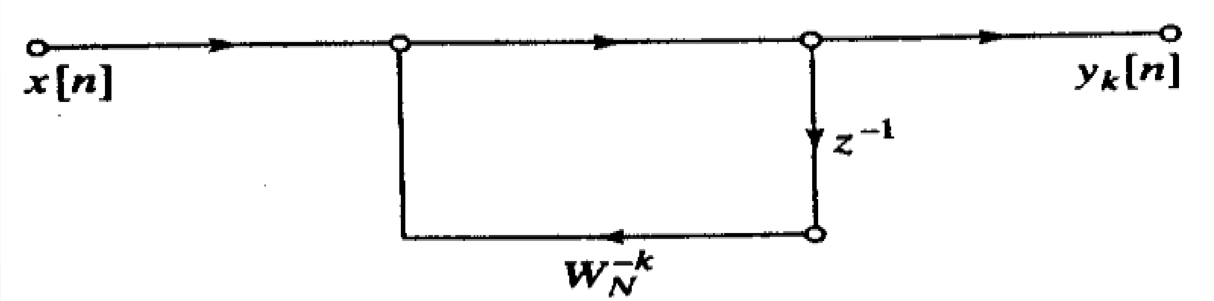
$$H_k(z) = \frac{1}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}}$$

- La ecuación a diferencias resulta

$$y_k(n) = e^{j2\pi k/N} y_k(n-1) + x(n) \quad y_k(-1) = 0$$

Algoritmo de Goertzel

$$y_k(n) = e^{j2\pi k/N} y_k(n-1) + x(n) \quad y_k(-1) = 0$$



Algoritmo de Goertzel

- Para calcular todos los valores intervinientes,

$$y_k(1),\ y_k(2), \ldots\ y_k(N-1)$$

para calcular $y_k(N) = X(k)$

son necesarias 4*N* multiplicaciones reales y 4*N* sumas reales, así, este método es ligeramente menos eficiente que el cálculo directo.

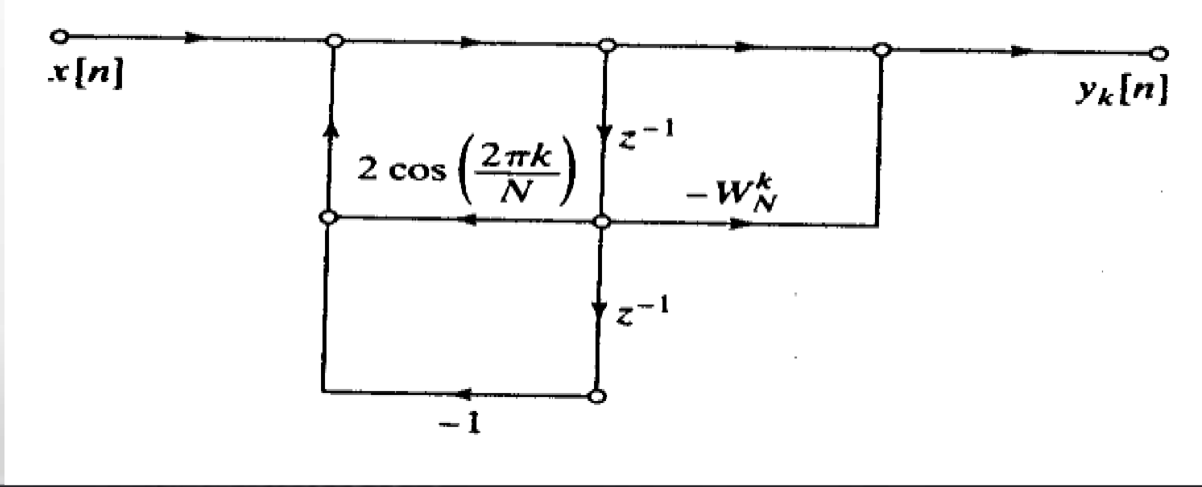
Sin embargo, evita el cálculo de los coeficientes, $e^{-j2\pi nk/N}$

Siendo que estos estan implicitamente calculados en las recursiones dadas por la figura

Algoritmo de Goertzel

- Las multiplicaciones y sumas complejas se pueden evitar multiplicando numerador y denominador por $(1-e^{-j2\pi k/N})$

resultando
$$H_k(z)=\frac{1-e^{-j2\pi k/N}z^{-1}}{1-2\cos(2\pi k/N)z^{-1}+z^{-2}}$$



Algoritmo de Goertzel

Si la entrada es compleja, solo 2 multiplicaciones reales son requeridas, siendo que -1 no se cuenta como multiplicación

La multiplicación compleja por $y_k(N)$ solo es requerida para calcular $e^{-j2\pi k/N}$

El costo computacional total es de 2(N+2) multiplicaciones reales y 4(N+1) sumas reales (la mitad de multiplicaciones que el cálculo directo)

Además, $e^{-j2\pi k/N}$ y $\cos(2\pi k / N)$

son los únicos dos coeficientes que deben ser calculados y almacenados

Algoritmo de Goertzel

Como ventaja adicional tenemos que el cálculo de puntos ubicados en posiciones conjugadas, es decir $X(k) = X(N-k)$

requiere de los mismos polos y ceros que son complejos conjugados entre si. Siendo que el cero es requerido solo en la iteración final, las 2N multiplicaciones y las 4N sumas pueden ser utilizadas para el calculo de los dos valores de DFT.

Así, es requerido un total de aproximadamente

$$N^2 \text{ multiplicaciones reales}$$

$$2N^2 \text{ sumas reales}$$

Cálculo de la DFT mediante Goertzel

- Solo son necesarios algunos puntos de la DFT
- El cálculo directo es más eficiente que la DFT si el número de valores es inferior a
- El cálculo directo puede formularse como una operación de filtrado lineal de la secuencia de entrada

FFT diezmado en el tiempo

- Metodología “divide y vencerás”
- Se basa en la descomposición de una DFT de *N* puntos en DFTs más pequeñas
- Consideremos el cálculo de una DFT donde

$$N = LM$$

(puede rellenarse cualquier secuencia para obtener un número primo)

FFT diezmado en el tiempo

- La secuencia de entrada puede almacenarse en una matriz rectangular indexada según *l* y *m*, donde

$$0 \le l \le L-1$$
$$0 \le m \le M-1$$

De diferentes formas, según la relación de *l* y *m* con *n*

FFT diezmado en el tiempo

Por filas $n = Ml + m$

$l \backslash m$	0	1	2	…	$M-1$
0	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	…	$x(M-1)$
1	$x(M)$	$x(M+1)$	$x(M+2)$	…	$x(2M-1)$
2	$x(2M)$	$x(2M+1)$	$x(2M+2)$	…	$x(3M-1)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$
$L-1$	$x((L-1)M)$	$x((L-1)M+1)$	$x((L-1)M+2)$	…	$x(LM-1)$

FFT diezmado en el tiempo

Por columnas $\quad n = l + mL$

$l \backslash m$	0	1	2		$M-1$
0	$x(0)$	$x(L)$	$x(2L)$	$\cdots$	$x((M-1)L)$
1	$x(1)$	$x(L+1)$	$x(2L+1)$	$\cdots$	$x((M-1)L+1)$
2	$x(2)$	$x(L+2)$	$x(2L+2)$	$\cdots$	$x((M-1)L+2)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$L-1$	$x(L-1)$	$x(2L-1)$	$x(3L-1)$	$\cdots$	$x(LM-1)$

FFT diezmado en el tiempo

- Una disposición similar puede usarse para almacenar los valores calculados de la DFT. Por ejemplo, considerando para el índice k, los índices p y q, con

$$0 \le p \le L-1$$
$$0 \le q \le M-1$$

- La DFT se almacena por filas si $k = Mp + q$

- La DFT se almacena por columnas si $k = qL + p$

FFT diezmado en el tiempo

- Expresando la DFT como un sumatorio doble

$$X(p,q)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{L-1}x(l,m)e^{-j2\pi(Mp+q)(mL+l)/N}$$

pero

$$e^{-j2\pi(Mp+q)(mL+l)/N}=e^{-j2\pi MLmp/N}e^{-j2\pi mLq/N}e^{-j2\pi Mpl/N}e^{-j2\pi lq/N}$$

sin embargo

$$e^{-j2\pi Nmp/N}=1,$$

$$e^{-j2\pi mqL/N}=e^{-j2\pi mq/(N/L)}=e^{-j2\pi mq/M}$$

$$e^{-j2\pi Mpl/N}=e^{-j2\pi pl/(N/M)}=e^{-j2\pi pl/L}$$

FFT diezmado en el tiempo

- Así, podemos expresar

$$X(p,q)=\sum_{l=0}^{L-1}\left\{e^{-j2\pi lq/N}\left[\sum_{m=0}^{M-1}x(l,m)e^{-j2\pi mq/M}\right]\right\}e^{-j2\pi lp/L}$$

- Se puede dividir el cálculo en 3 pasos:

  1- Calcular las DFTs de *M* puntos

$$F(l,q)\equiv\sum_{m=0}^{M-1}x(l,m)e^{-j2\pi mq/M},\quad 0\le q\le M-1$$

para cada una de las filas $l=0,1,\ldots L-1$

FFT diezmado en el tiempo

2- Calculamos la nueva matriz rectangular definida como

$$G(l,q) = e^{-j2\pi lq/N} F(l,q) \text{ para } \begin{cases} 0 \le l \le L-1 \\ 0 \le q \le M-1 \end{cases}$$

3- Finalmente, calculamos las DFTs de *L* puntos

$$X(p,q) = \sum_{l=0}^{L-1} G(l,q) e^{-j2\pi lp/L}$$

FFT diezmado en el tiempo

- A primera vista parece más complejo, veamos:
  - L DFTs de M puntos: LM^2 multiplicaciones complejas, $LM(M-1)$ sumas complejas
  - Segundo paso: LM multiplicaciones complejas

  M DFTs de L puntos: ML^2 multiplicaciones complejas y $ML(L-1)$ sumas complejas

  Resultando:

  $N(M+L+1)$ multiplicaciones complejas

  $N(M+L-2)$ sumas complejas

FFT diezmado en el tiempo

- $N = 1000$, $L = 2$ y $M = 500$

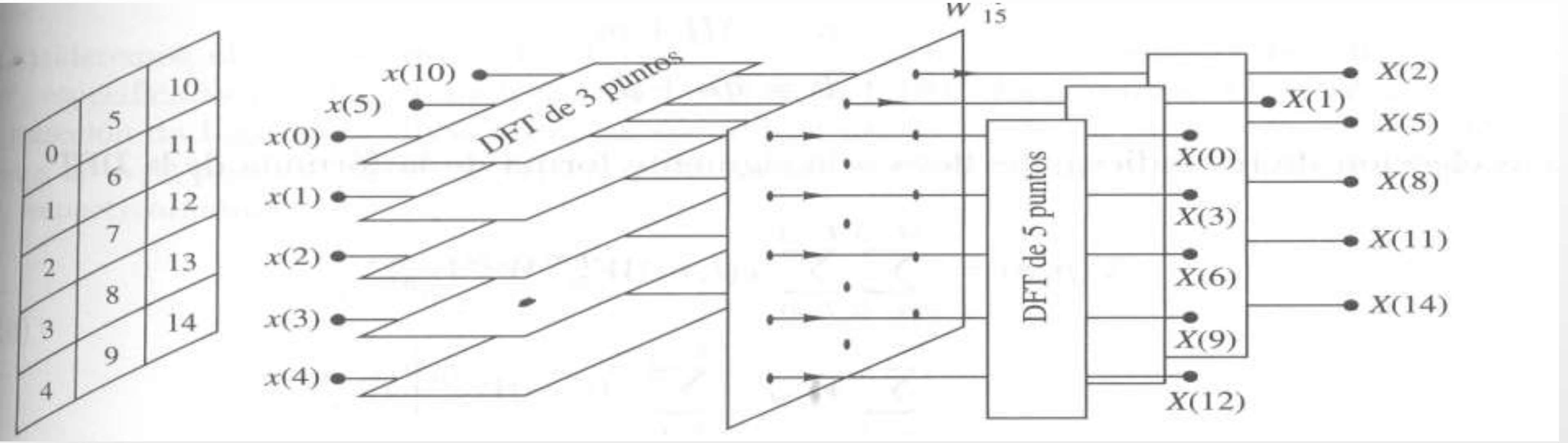
Cálculo directo: N^2 = 1.000.000 multiplicaciones

Método expuesto: $N(M+L+1)$ = 503.000 multiplicaciones

Cuando N es un número compuesto alto, $N = r_1 r_2 \cdots r_v$

La descomposición puede repetirse (v-1) veces, llevando a DFTs más pequeñas y algoritmos más eficientes

FFT diezmado en el tiempo



FFT diezmado en el tiempo

- Otro algoritmo con estructura similar se obtiene si la señal de entrada se almacena por filas y la transformación resultante se hace por columnas

Algoritmos para FFT base-2

- En esta sección se evalúa el caso $N = r^{v}$

Todas las DFTs son de tamaño r, de manera que el cálculo sigue un padrón regular. El número r se denomina base del algoritmo para FFT

Algoritmos para FFT base-2

- Considerando $N = 2^{v}$ y escogiendo $M = N/2$ y $L = 2$
- Esto da lugar a la división de la secuencia de entrada en dos secuencias de N/2 puntos, correspondientes a muestras pares e impares

$$f_1(n) = x(2n)$$

$$f_2(n) = x(2n+1), \; n = 0,1,\ldots, \frac{N}{2}-1$$

- Las secuencias se obtienen diezmando la señal de entrada por 2, en consecuencia, el algoritmo es llamado de diezmado en el tiempo

Algoritmos para FFT base-2

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0,1,\ldots N-1$$

$$\sum_{n\ \text{par}} x(n) e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n\ \text{impar}} x(n) e^{-j2\pi kn/N} =$$

$$= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m) e^{-j2\pi k(2m)/N} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1) e^{-j2\pi k(2m+1)/N}$$

pero

$$e^{-j2\pi(2m)k/N} = e^{-j2\pi mk/(N/2)}$$

Algoritmos para FFT base-2

$$X(k) = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_1(m) e^{-j2\pi km/(N/2)} +$$

$$+ e^{-j2\pi k/N} \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_2(m) e^{-j2\pi km/(N/2)}$$

$$= F_1(k) + e^{-j2\pi k/N} F_2(k) \quad k = 0,1,\ldots\ N-1$$

DFTs de N/2 puntos. Considerando la periodicidad

$$F_1(k + N/2) = F_1(k)$$

$$F_2(k + N/2) = F_2(k)$$

$$\text{además } e^{-j2\pi(k+N/2)/N} = -e^{-j2\pi k/N}$$

$$X(k) = F_1(k) + e^{-j2\pi k/N} F_2(k), \quad k = 0,1,\ldots \frac{N}{2} - 1$$

$$X(k + \frac{N}{2}) = F_1(k) - e^{-j2\pi k/N} F_2(k), \quad k = 0,1,\ldots \frac{N}{2} - 1$$

Repitiendo el proceso de diezmado:

$$v_{11}(n) = f_1(2n) \qquad n = 0,1,\ldots,\frac{N}{4} - 1$$

$$v_{12}(n) = f_1(2n+1) \quad n = 0,1,\ldots,\frac{N}{4} - 1$$

$$v_{21}(n) = f_2(2n) \qquad n = 0,1,\ldots,\frac{N}{4} - 1$$

$$v_{22}(n) = f_2(2n+1) \quad n = 0,1,\ldots,\frac{N}{4} - 1$$

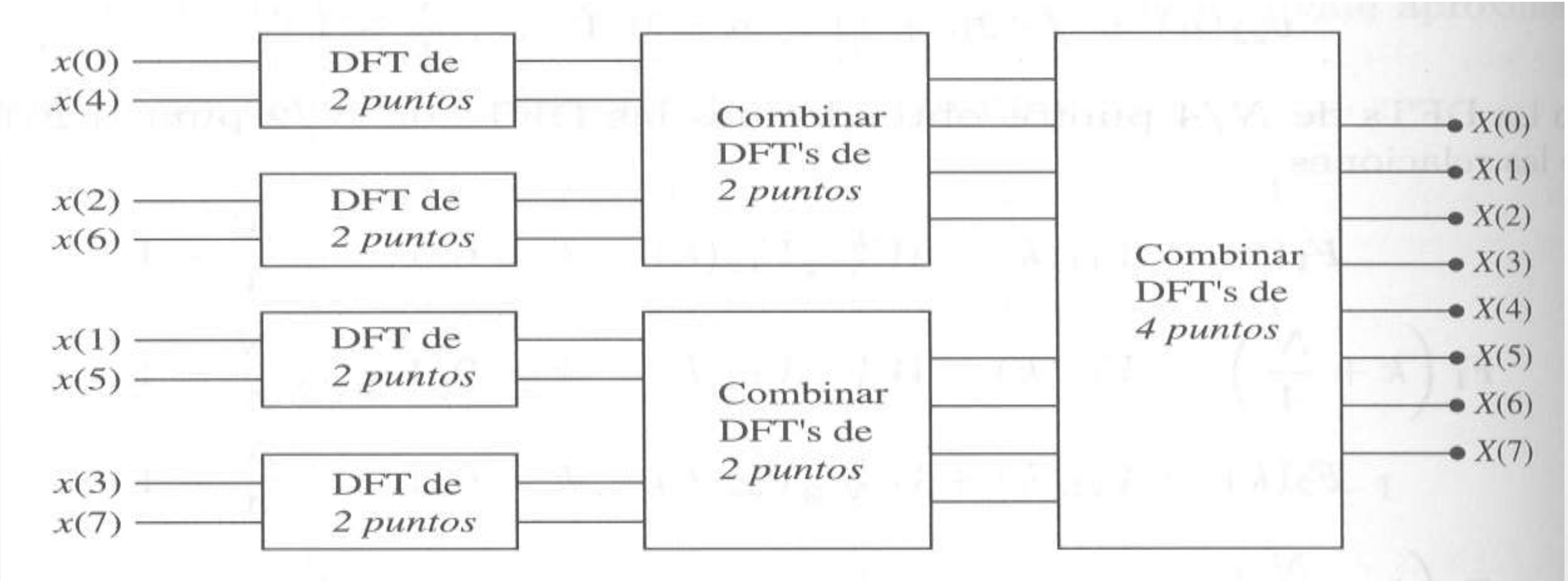
Calculando las DFTs de N/4 puntos obtendremos

$$F_1(k) = V_{11}(k) + e^{-j2\pi k/(N/2)} V_{12}(k) \quad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1$$

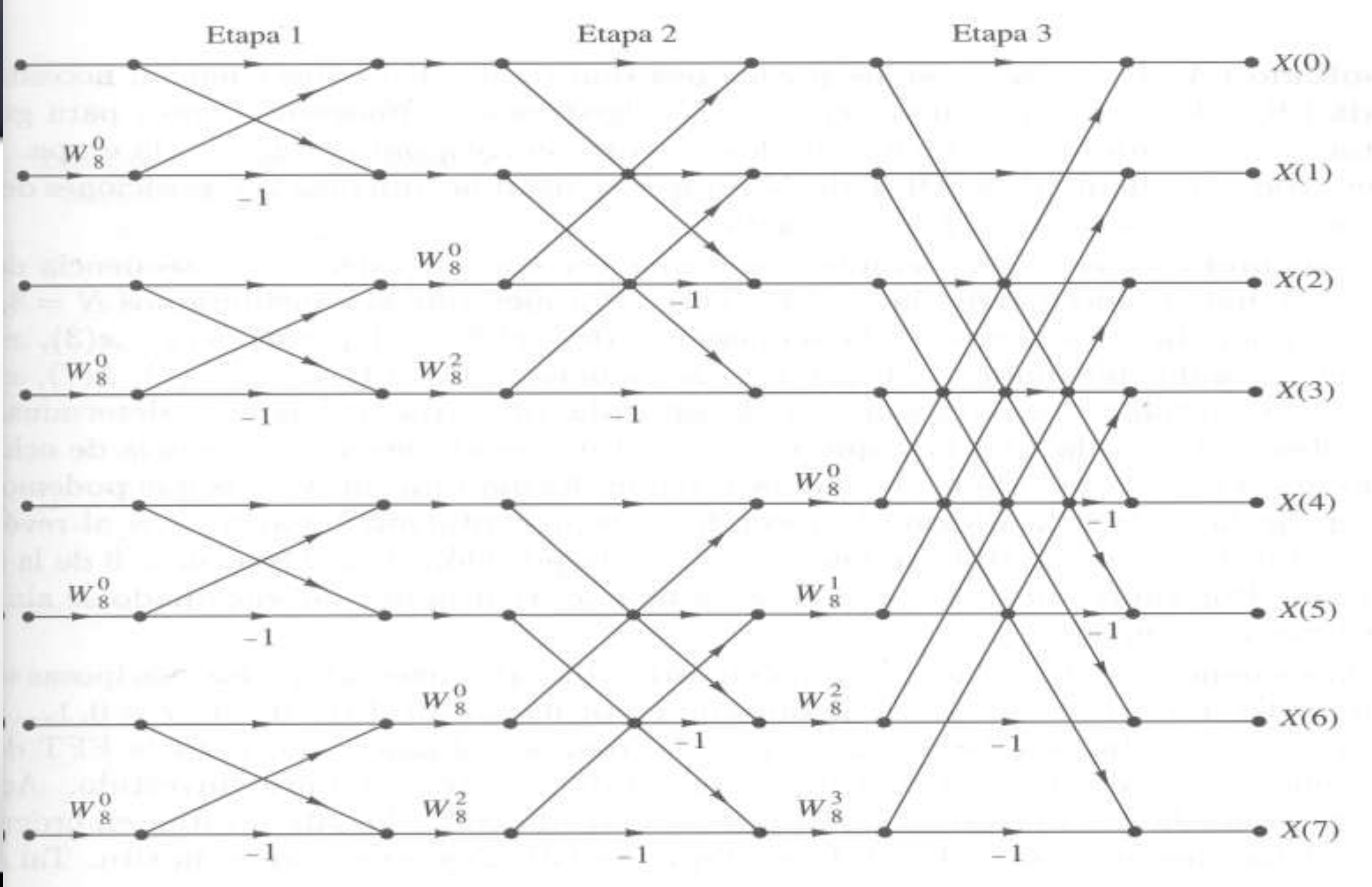
$$F_1(k+\frac{N}{4}) = V_{11}(k) - e^{-j2\pi k/(N/2)} V_{12}(k) \quad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1$$

$$F_2(k) = V_{21}(k) + e^{-j2\pi k/(N/2)} V_{22}(k) \quad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1$$

$$F_2(k+\frac{N}{4}) = V_{21}(k) - e^{-j2\pi k/(N/2)} V_{22}(k) \quad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1$$



x(0)
x(4)
x(2)
x(6)
x(1)
x(5)
x(3)
x(7)
DFT de 2 puntos
DFT de 2 puntos
DFT de 2 puntos
DFT de 2 puntos
Combinar DFT's de 2 puntos
Combinar DFT's de 2 puntos
Combinar DFT's de 4 puntos
X(0)
X(1)
X(2)
X(3)
X(4)
X(5)
X(6)
X(7)



Etapa 1
Etapa 2
Etapa 3
W_8^0
W_8^2
W_8^1
W_8^3
−1
X(0)
X(1)
X(2)
X(3)
X(4)
X(5)
X(6)
X(7)

FFT diezmado en la frecuencia

- Se elige $M = 2$ y $L = N/2$
- Esta elección implica en un almacenamiento por columnas
- Se empieza dividiendo la secuencia en dos partes:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} + e^{-j2\pi Nk/2/N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n + \frac{N}{2}) e^{-j2\pi kn/N}$$

FFT diezmado en la frecuencia

- Dado que $e^{-j2\pi kN/2/N} = (-1)^k$

Se obtiene $X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + (-1)^k x(n + \frac{N}{2}) \right] e^{-j2\pi kn/N}$

Dividiendo (diezmando) en muestras pares e impares

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + x(n + \frac{N}{2}) \right] e^{-j2\pi kn/(N/2)}$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{ \left[x(n) + x(n + \frac{N}{2}) \right] e^{-j2\pi n/N} \right\} e^{-j2\pi kn/(N/2)}$$

FFT diezmado en la frecuencia

- Si se definen las secuencias de N/2 puntos

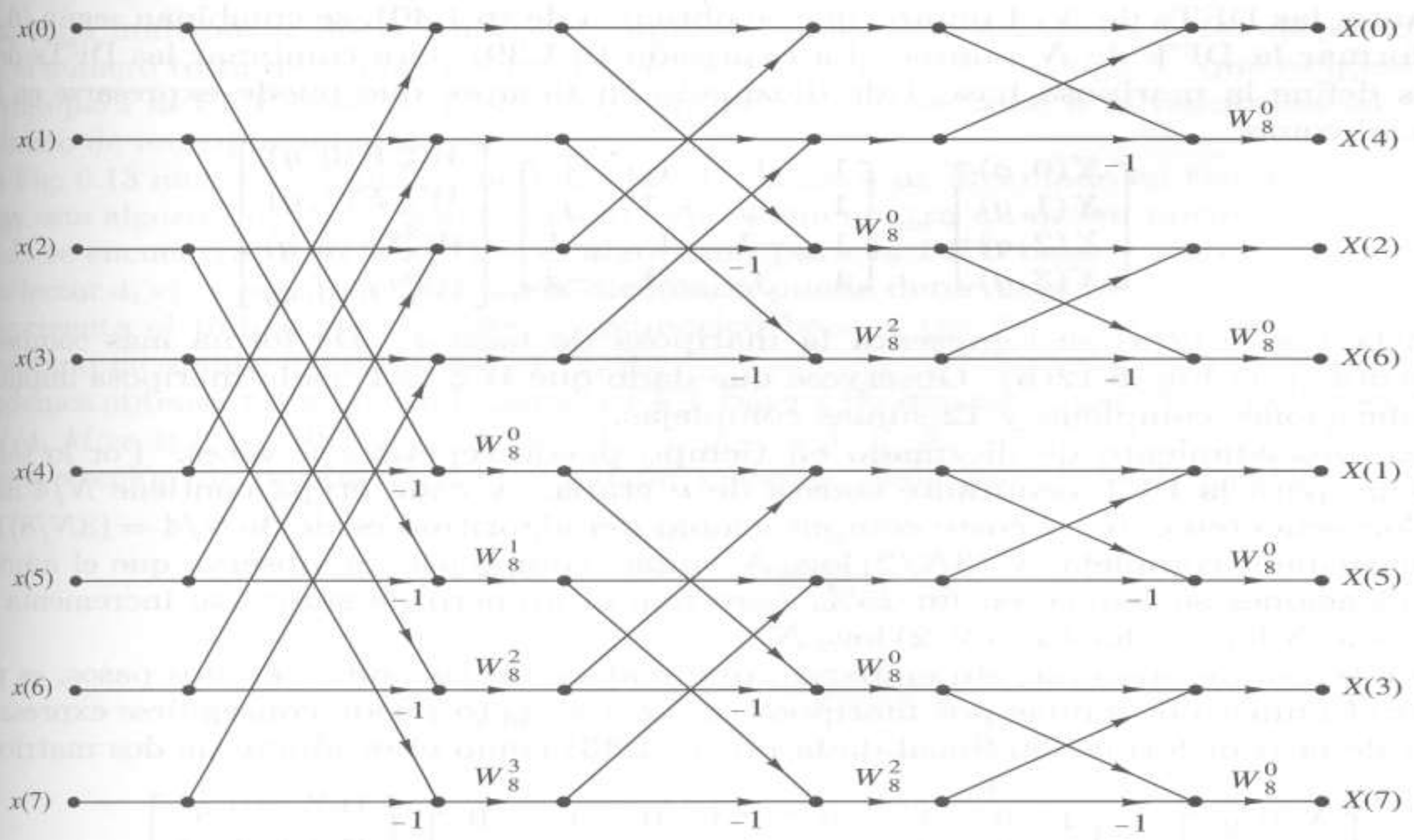
$$g_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)$$

$$g_2(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right]e^{-j2\pi n/N} \quad n = 0,1,\ldots,(N/2)-1$$

- Entonces

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_1(n)e^{-j2\pi kn/(N/2)}$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_2(n)e^{-j2\pi kn/(N/2)}$$



x(0)
x(1)
x(2)
x(3)
x(4)
x(5)
x(6)
x(7)
X(0)
X(4)
X(2)
X(6)
X(1)
X(5)
X(3)
X(7)
W_8^0
W_8^1
W_8^2
W_8^3
−1

Transformada inversa

- El cálculo de la IDFT, dado por

$$h(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

se diferencia en el factor de normalización y el signo del factor de fase

Transformada inversa

- Algoritmo de diezmado en el tiempo:
  - Se invierte el diagrama de flujo
  - Se cambia el signo de los factores de fase
  - Se intercambian la entrada y la salida
  - Se divide la salida por N
  - Se obtiene el algoritmo de FFT de diezmado en frecuencia para el cálculo de la IDFT

Transformada inversa

- Algoritmo de diezmado en la frecuencia:
  - Se invierte el diagrama de flujo
  - Se cambia el signo de los factores de fase
  - Se intercambian la entrada y la salida
  - Se divide la salida por N
  - Se obtiene el algoritmo de FFT de diezmado en el tiempo para el cálculo de la IDFT

Implementación de algoritmos para la FFT

- Procedimiento de cálculo:
  - Tomar dos datos de la memoria
  - Realizar los cálculos de la mariposa
  - Devolver los resultados a la memoria
  - Se repite $(N \log N)/2$ veces

Los cálculos de la mariposa necesitan del factor de giro

$$e^{-j2\pi k/N}$$

en diferentes etapas, tanto en su orden natural como binario invertido

Implementación de los algoritmos

- Se calculan y almacenan los factores de fase en una tabla tanto en orden natural como invertido
- Se necesitan 2*N* posiciones de memoria, pero doblar la memoria puede simplificar las operaciones de control y direccionamiento

Implementación de los algoritmos

- Procesadores de propósito general (predomina el costo de operaciones numéricas): algoritmos FFT base 2, base 4 y base partida
- Procesadores digitales de señal, de propósito especial, (con operaciones de multiplicación y suma en un solo ciclo, direccionamiento en orden binario invertido, alto grado de paralelismo) la regularidad del algoritmo es tan importante como las operaciones numéricas, se prefieren FFT de base 2, de base 4 y diezmado en frecuencia

Aplicaciones de los algoritmos para FFT

- Básicamente los algoritmos FFT son una herramienta eficiente para el cálculo de la DFT e IDFT
- Esto permite realizar:
  - Filtrado lineal
  - Correlación
  - Análisis espectral

- **Tema que sigue:**

Espectrograma: resolución tiempo-frecuencia