Procesamiento Digital de Señales

Unidad 5: Transformada Discreta de Fourier y Espectro de Señales

La DFT y la serie de Fourier de Tiempo Discreto

- A continuación se verá cómo utilizar la DFT para el cálculo de la serie de Fourier de Tiempo Discreto.

- Comparando las ecuaciones:

DFT:
$$X[k]=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{para } 0\le k\le N-1\\ 0, & \text{para otros valores de } k\end{cases}$$

SFTD:
$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

La DFT y la serie de Fourier de Tiempo Discreto

- A continuación se verá cómo utilizar la DFT para el cálculo de la serie de Fourier de Tiempo Discreto.
- Comparando las ecuaciones:

DFT:
$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{para } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

SFTD:
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

Factor de escala

La ventana de tiempo puede ser cualquiera siempre y cuando abarque un período

La DFT y la serie de Fourier de Tiempo Discreto

- En definitiva, **se pueden considerar expresiones equivalentes salvo una constante igual a 1/N**

DFT:

$$X[k]=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{para } 0\le k\le N-1\\ 0, & \text{para otros valores de } k\end{cases}$$

SFTD:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

- Es importante que la ventana de datos de la DFT abarque exactamente un período
- Se puede concluir que tienen las mismas propiedades

Propiedades de la DFT

1) Propiedad de linealidad

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \leftrightarrow a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$$

2) Desplazamiento en el tiempo

$$x[n - n_0]_{\mathrm{mod}\,N} \leftrightarrow W_N^{kn_0} X[k] \qquad W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

3) Desplazamiento en frecuencia

$$W_N^{-kn_0}\; x[n] \leftrightarrow X[k - k_0]_{\mathrm{mod}\,N}$$

Propiedades de la DFT

- Notando que las variables n y k de la DFT deben estar restringidas al rango $0 \le n, k \le N-1$
- Así, los corrimientos $x[n-n_0]$ o $X[k-k_0]$ implican:

$$x[n-n_0]_{\text{mod}\, N} \text{ o } X[k-k_0]_{\text{mod}\, N}$$

- La notación $[m]_{\text{mod}\, N}$ significa $[m]_{\text{mod}\, N} = m + iN$

siendo i un entero (positivo o negativo) tal que

$$0 \le [m]_{\text{mod}\, N} \le N-1$$

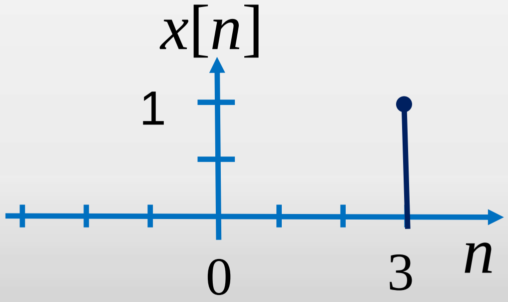
En definitiva, **el corrimiento es circular**

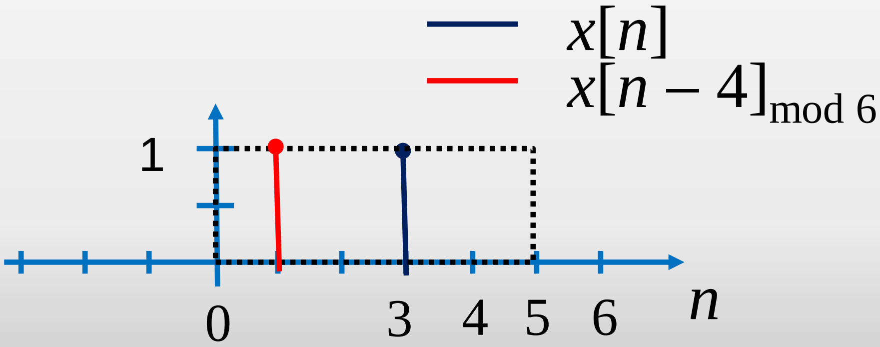
Propiedades de la DFT

- **Ejemplo de corrimiento circular en DFT:**

Si $x[n] = \delta[n-3]$, luego

$$x[n-4]_{\mathrm{mod}\,6} = \delta[n-7]_{\mathrm{mod}\,6} = \delta[n-7+6] = \delta[n-1]$$





Propiedades de la DFT

4) Conjugación:

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*[-k]_{\text{mod } N}$$

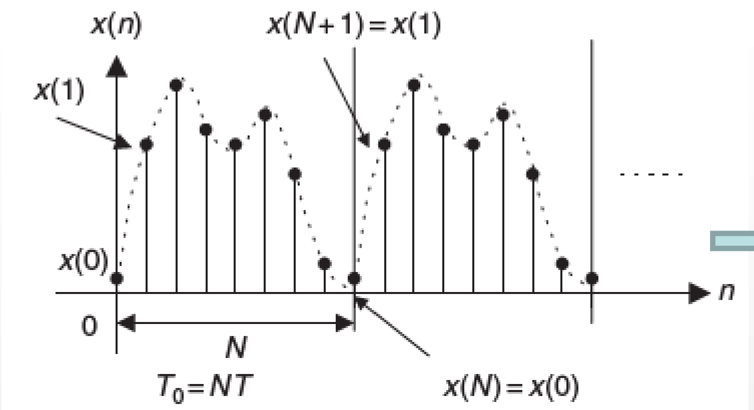
5) *Inversión temporal:* $x[-n]_{\text{mod } N} \leftrightarrow X[-k]_{\text{mod } N}$

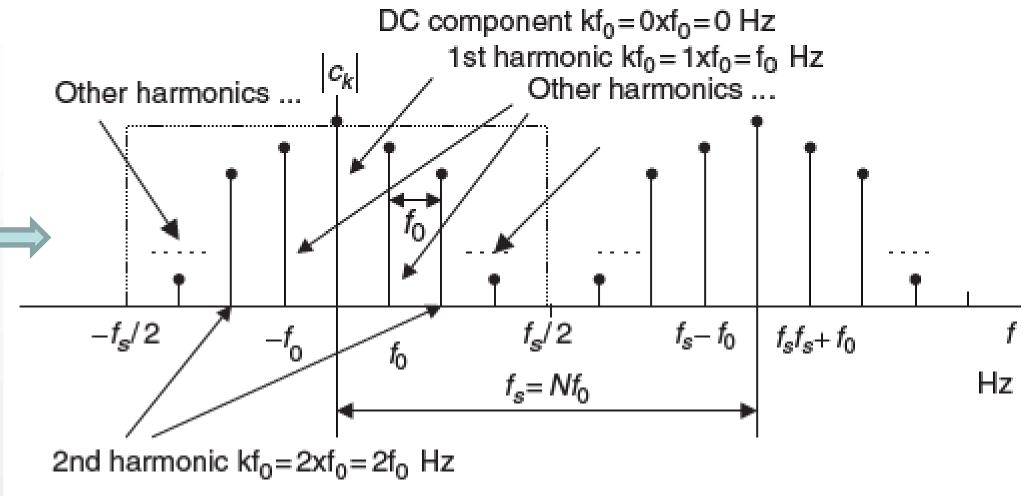
6) *Dualidad:* $X[n] \leftrightarrow Nx[-k]_{\text{mod } N}$

7) *Convolución circular:* $x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1[k]\, X_2[k]$

8) *Multiplicación:* $x_1[n]\, x_2[n] \leftrightarrow \dfrac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k]$

Coeficientes de la serie de Fourier de Señales periódicas digitales

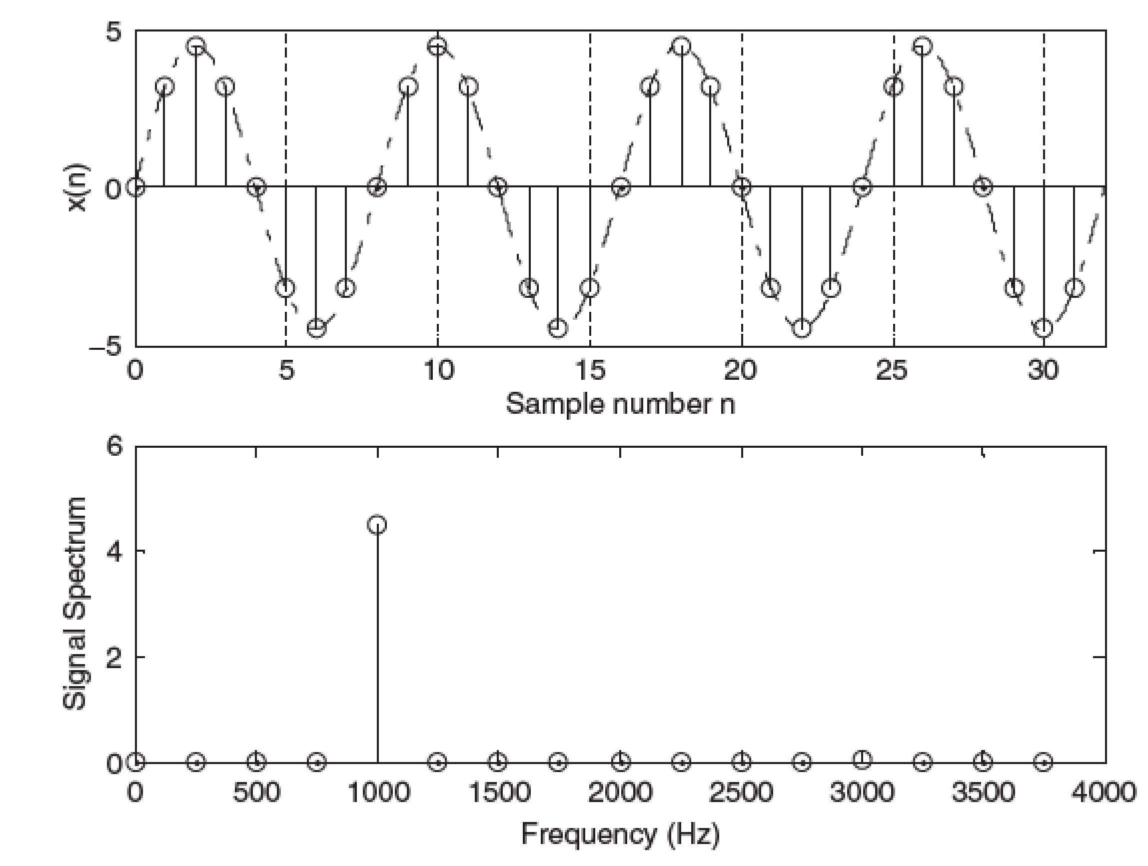




- Solo la porción entre las frecuencias $-f_s/2 < f < f_s/2$ representa toda la información espectral de la señal (two sides spectrum)

DFT de una senoide

- Senoide de 1.000 Hz, muestreada a 8.000 Hz



Relación entre la banda *k* y la frecuencia

$$\omega = \frac{k\omega_s}{N} \text{ (radians per second)},$$

$$f = \frac{kf_s}{N} \text{ (Hz)},$$

La resolución en frecuencia es:

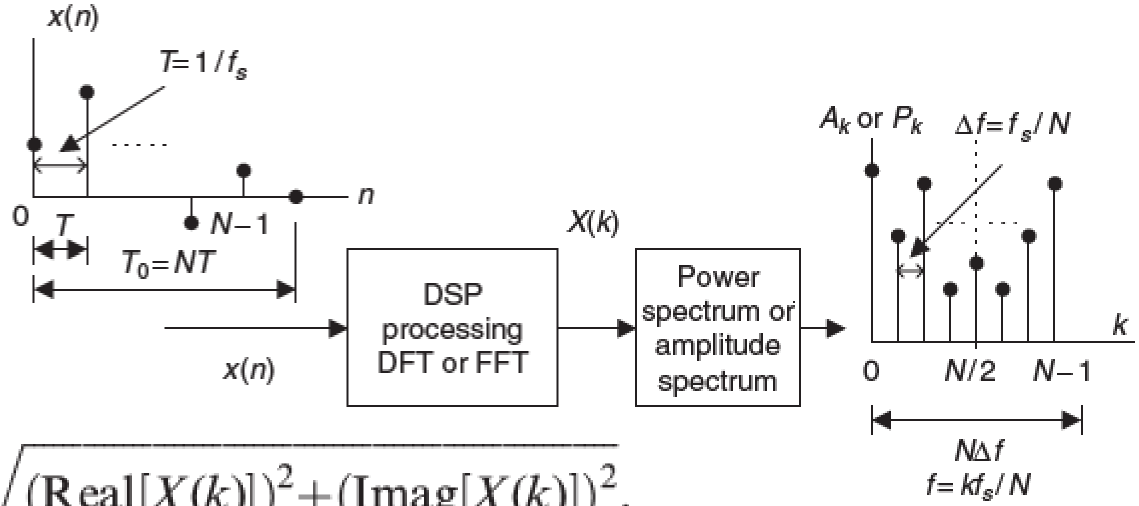
$$\Delta\omega = \frac{\omega_s}{N} \text{ (radians per second)},$$

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} \text{ (Hz)}.$$

Ejercicio:

- Dada una secuencia $x[n] = [\ (1) \quad 2 \quad 3 \quad 4]$ cuya DFT de 4 puntos resulta $X(k) = [\ 10 \quad -2 + j2 \quad -2 \quad -2 - j2]$, dada una frecuencia de muestreo de 10 Hz,
  - Determinar el período de muestreo, los índices de tiempo, y la estampa de tiempo para la muestra $x[3]$
  - Determinar la resolución en frecuencia, el número de bandas, y mapear en frecuencia cada coeficiente de la DFT

Espectro de amplitud y espectro de potencia



$$A_k = \frac{1}{N}|X(k)| = \frac{1}{N}\sqrt{(\mathrm{Real}[X(k)])^2+(\mathrm{Imag}[X(k)])^2},$$

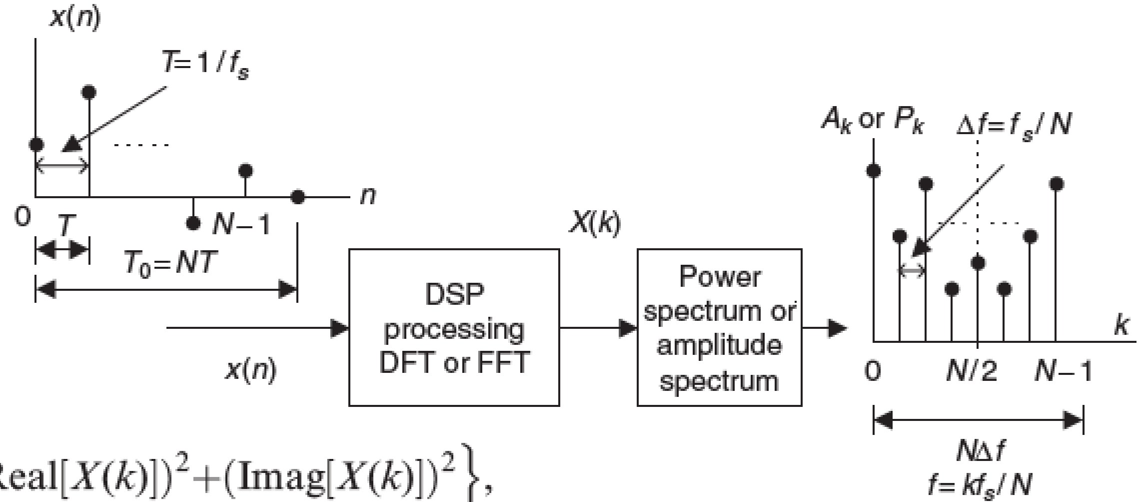
$$k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Espectro de amplitud a dos lados (two sides)

$$\bar{A}_k = \begin{cases} \frac{1}{N}|X(0)|, & k = 0 \\ \frac{2}{N}|X(k)|, & k = 1, \ldots, N/2 \end{cases}$$

Espectro de amplitud a un lado (one side) (se preserva la energía de la señal)

Espectro de amplitud y espectro de potencia



$$P_k = \frac{1}{N^2}|X(k)|^2 = \frac{1}{N^2}\left\{(\mathrm{Real}[X(k)])^2 + (\mathrm{Imag}[X(k)])^2\right\},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

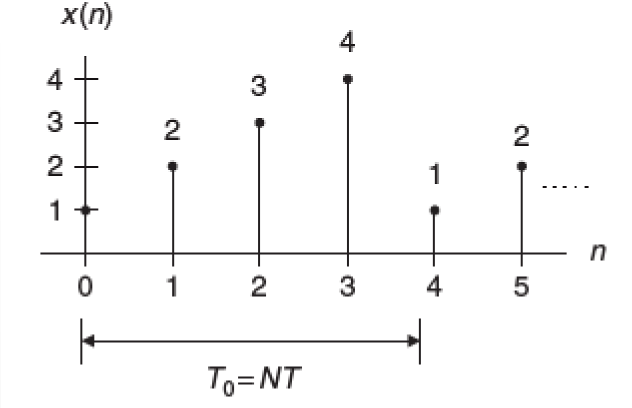
Espectro de potencia a dos lados (two sides)

$$\bar{P}_k = \begin{cases} \frac{1}{N^2}|X(0)|^2 & k = 0 \\ \frac{2}{N^2}|X(k)|^2 & k = 0, 1, \ldots, N/2 \end{cases}$$

Espectro de potencia a un lado (one side)

Ejercicio de espectro de amplitud y potencia

- Dada la secuencia:

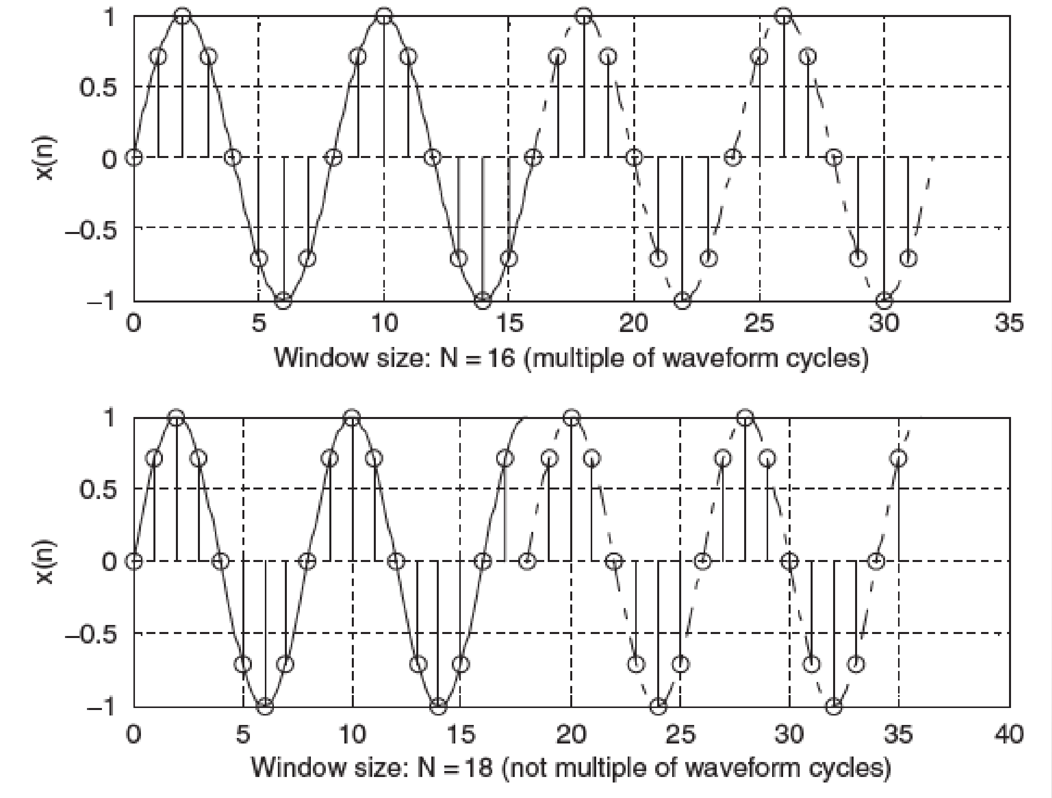


- Asumiendo una frecuencia de muestreo de 100 Hz, calcular el espectro de amplitud, fase y potencia.

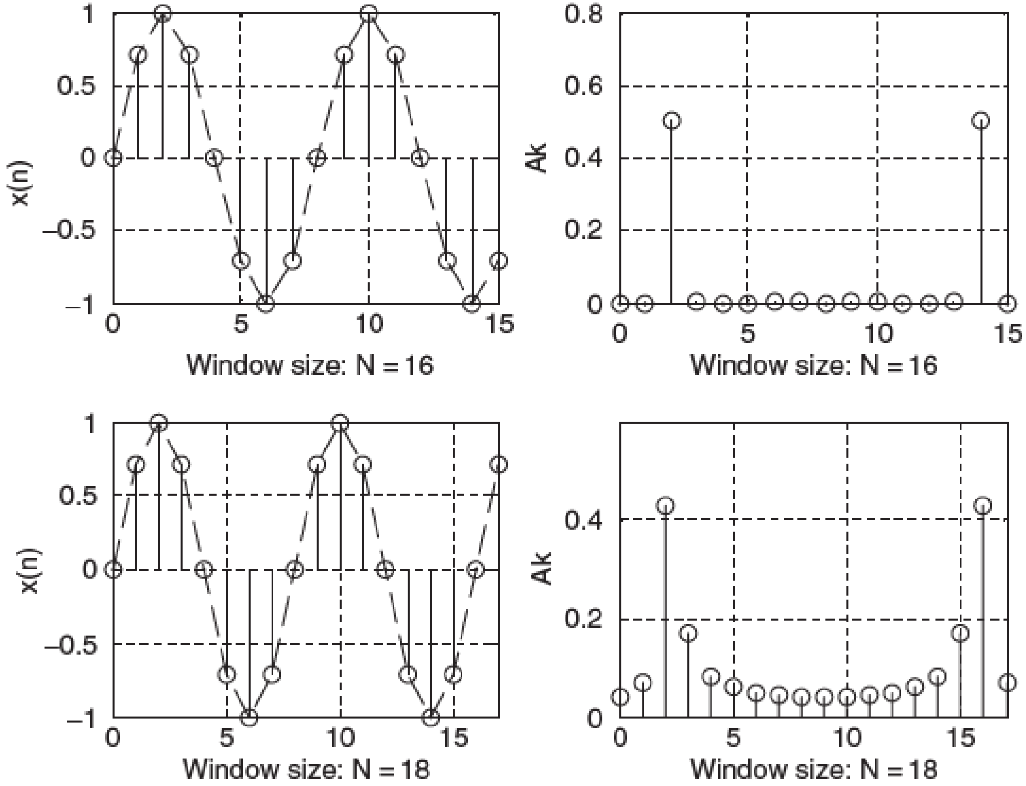
Ejercicio de resolución espectral

- Considere una secuencia muestreada a 10kHz, si se utiliza una DFT de 1024 para calcular el espectro:
  - Determinar la resolución espectral
  - Determinar la frecuencia más alta

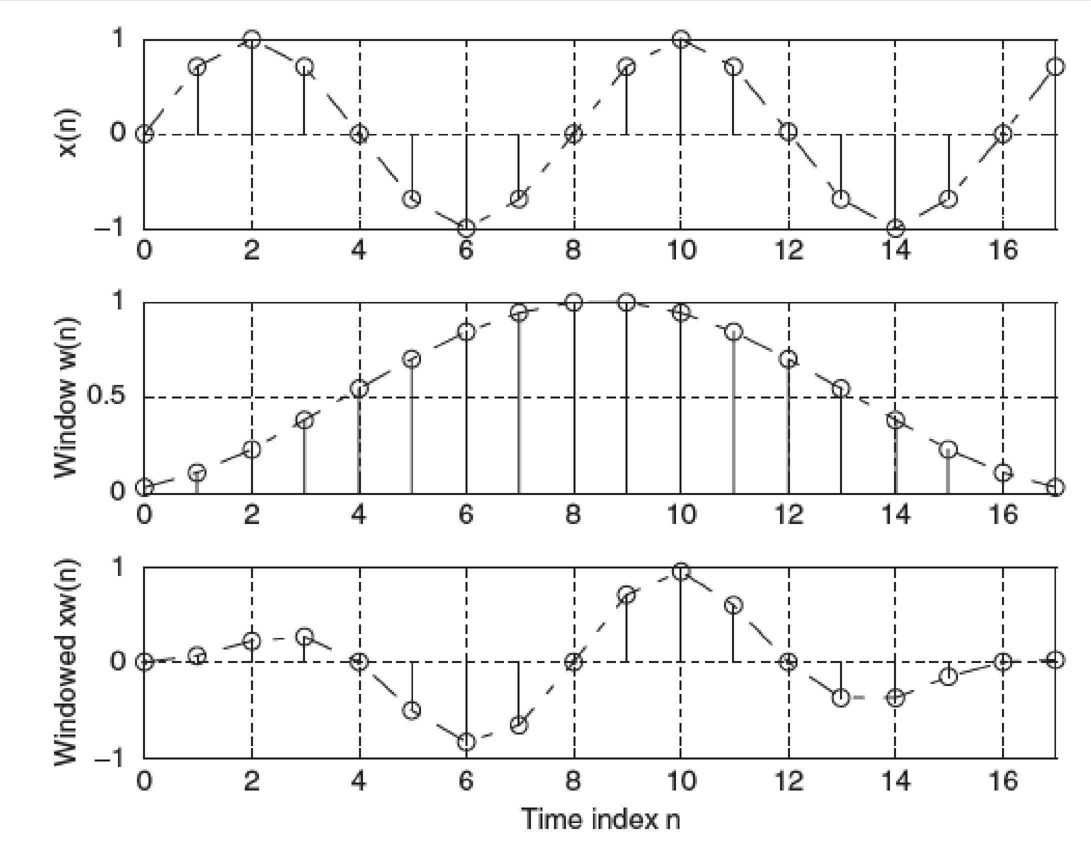
Efecto de Ventaneo



Efecto de Ventaneo



Efecto de Ventaneo



Efecto de Ventaneo