TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

IC 512 – PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

Metodos de Fourier para el Análisis y Procesamiento de Señales

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) fue un matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas Series de Fourier

Herramientas asociadas

- Series de Fourier de tiempo discreto
- Transformada de Fourier de Tiempo discreto
- Transformada discreta de Fourier
- Transformada rápida de fourier (FFT – Fast Fourier Transform)
- Implementaciones eficientes
- Aplicaciones
- Relación entre transformada de Fourier de tiempo discreto y transformada Z

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

- Es una herramienta matemática que permite calcular de forma eficiente (pero aproximada) las diversas series y transformadas del análisis de Fourier vistas hasta ahora.
- Se define como:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{para } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

- Se obtiene un espectro discreto $X[k]$ a partir de una señal de tiempo discreto $x[n]$, de **duración finita *N*** (se ingresa un conjunto finito de datos y se obtiene un conjunto finito de datos)
- Se encuentra disponible en muchos recursos de cálculo, como las calculadoras, el excel, matlab, etc., principalmente bajo la forma de un comando llamado **fft** (*fast fourier transform*).

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

- Se enfatiza su uso como herramienta de cálculo donde:
  - Se ingresa un vector de datos de entrada de *N* elementos
  - Se ejecuta el comando relacionado con DFT
  - Se obtiene un vector de *N* datos correspondientes con las muestras de la DFT

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \ldots & x[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{DFT (FFT)}}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X[0] & X[1] & \ldots & X[N-1] \end{bmatrix}$$

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

- La DFT puede ser utilizada para el cálculo aproximado de la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) de una señal de tiempo discreto.
- Se debe considerar a la DFT como una discretización en la frecuencia de la TFTD:

$$X[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(2\pi/N)k}$$

- DFT permite obtener *N* muestras de $X(e^{j\omega})$, ubicadas en múltiplos de $2\pi/N$ (se muestrea el espectro de 0 a 2π)

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Compararemos directamente las expresiones de cada transformada:

TFTD: $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

DFT: $$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & \text{para } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

- Enumeremos las diferencias…

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Comparemos directamente las expresiones de cada transformada:

1) La frecuencia está discretizada: $\omega = (2\pi / N) k$

Esto implica en un muestreo en frecuencia (solo se calcula la DFT para ciertas frecuencias en el rango de 0 a 2π)

TFTD: $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{N} k$$

DFT: $$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & \text{para } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Comparemos directamente las expresiones de cada transformada:

2) Los límites de la sumatoria:

- Comienza siempre en 0 y va hasta *N*-1 (número finito de muestras)

TFTD: $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

DFT: $$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & \text{para } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Comparemos directamente las expresiones de cada transformada:

2) Los límites de la sumatoria:

- *N* es un parámetro que se debe elegir considerando que:

a) En la frecuencia es la cantidad de muestras del espectro considerado, y también indica la separación de las muestras (resolución). Más muestras, mejor conformado se ve el espectro

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & \text{para } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Comparemos directamente las expresiones de cada transformada:

2) Los límites de la sumatoria:

- *N* es un parámetro que se debe elegir considerando que:

b) En el dominio del tiempo, es la duración de la señal considerada. Debe ser lo suficiente para capturar los aspectos más representativos (sobre todo, cuándo se extingue la señal, de ser posible)

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & \text{para } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Comparemos directamente las expresiones de cada transformada:

3) El resultado de la DFT es un conjunto finito de valores

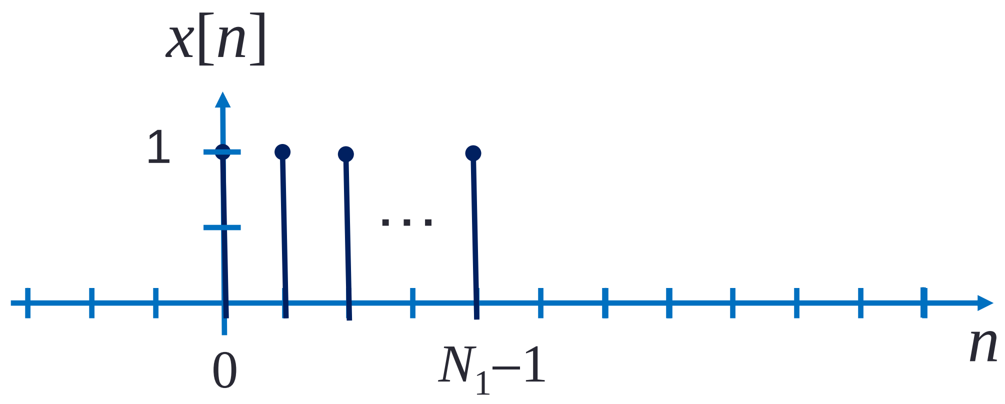
$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & \text{para } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

En definitiva, podemos considerar que a la DFT se ingresa **un vector** de datos de la señal y como resultado se tiene también **un vector** de muestras de la transformada

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Ejemplo: Graficar la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto de la siguiente señal:

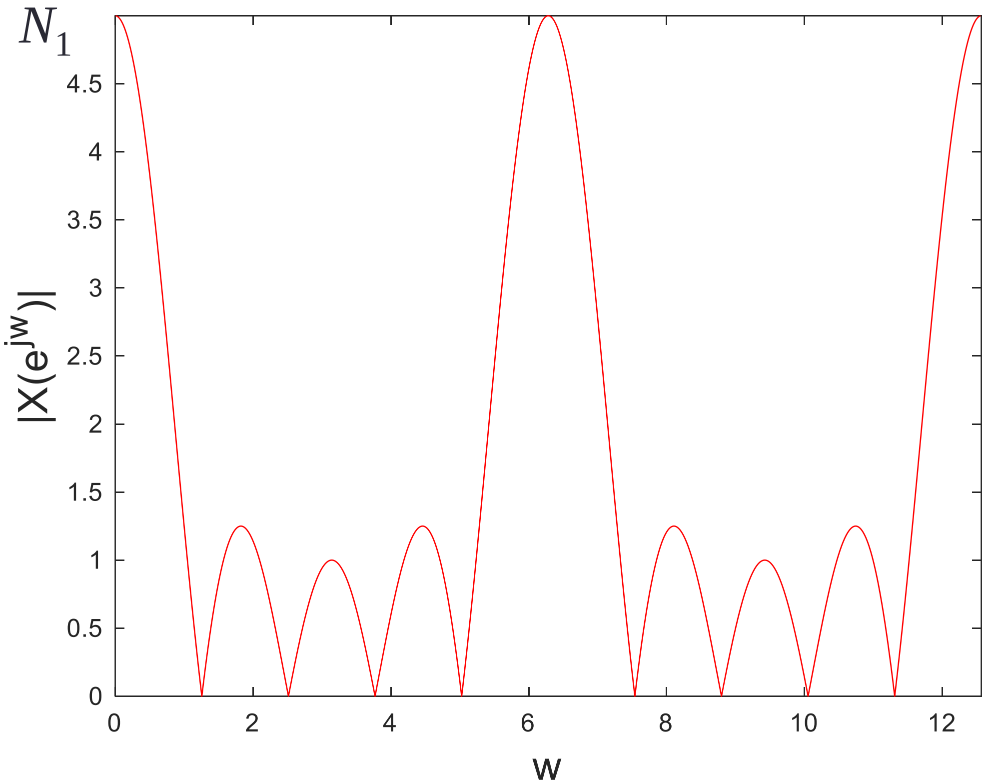
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N_1 - 1 \\ 0, & \text{para otros } n \end{cases}$$



La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Ejemplo: Solución por TFTD

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N_1-1} e^{-j\omega n} = \frac{sen(\omega N_1/2)}{sen(\omega/2)} e^{-j\omega\frac{N_1-1}{2}}$$



La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Ejemplo: Resolución por DFT
- La definición de la DFT es:

$$X[k] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & \text{para } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

- En Matlab, el comando asociado a esta transformada es fft

```
fft Discrete Fourier transform.
   fft(X) is the discrete Fourier transform (DFT) of vector X.
   For length N input vector x, the DFT is a length N vector X,
   with elements
                    N
      X(k) =       sum  x(n)*exp(-j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= k <= N.
                   n=1
```

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

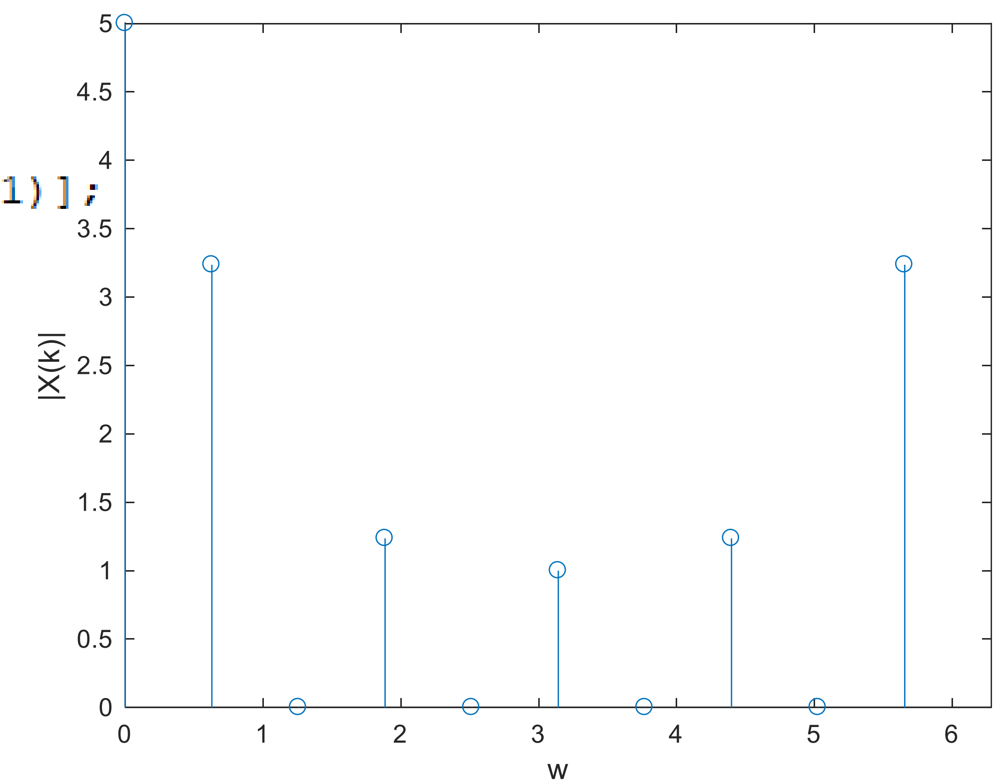
- Ejemplo: Resolución por DFT

Ejemplo1.m

```
clear all
clc

N=10;
N1=5;
x=[ones(1,N1) zeros(1,N-N1)];
X=fft(x);

w=0:2*pi/N:2*pi*(1-1/N);
figure(1)
stem(w,abs(X))
xlabel('w')
ylabel('|X(k)|')
```



La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

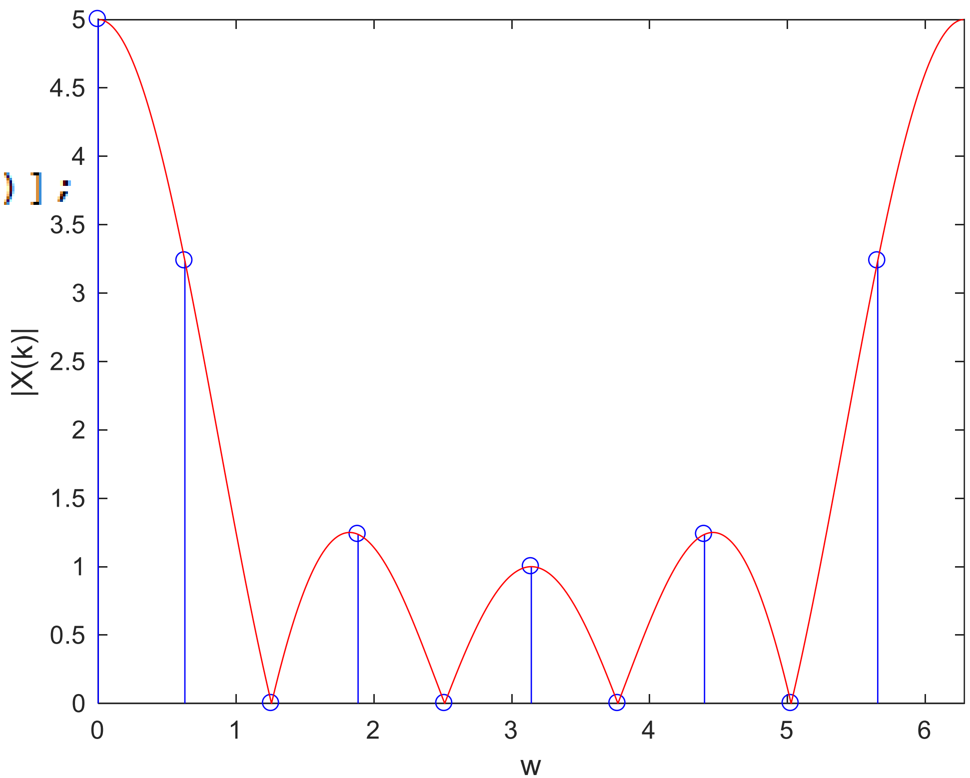
- Superponiendo al resultado TFTD:

Ejemplo1.m

```
clear all
clc

N=10;
N1=5;
x=[ones(1,N1) zeros(1,N-N1)];
X=fft(x);

w=0:2*pi/N:2*pi*(1-1/N);
figure(1)
stem(w,abs(X))
xlabel('w')
ylabel('|X(k)|')
```



La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

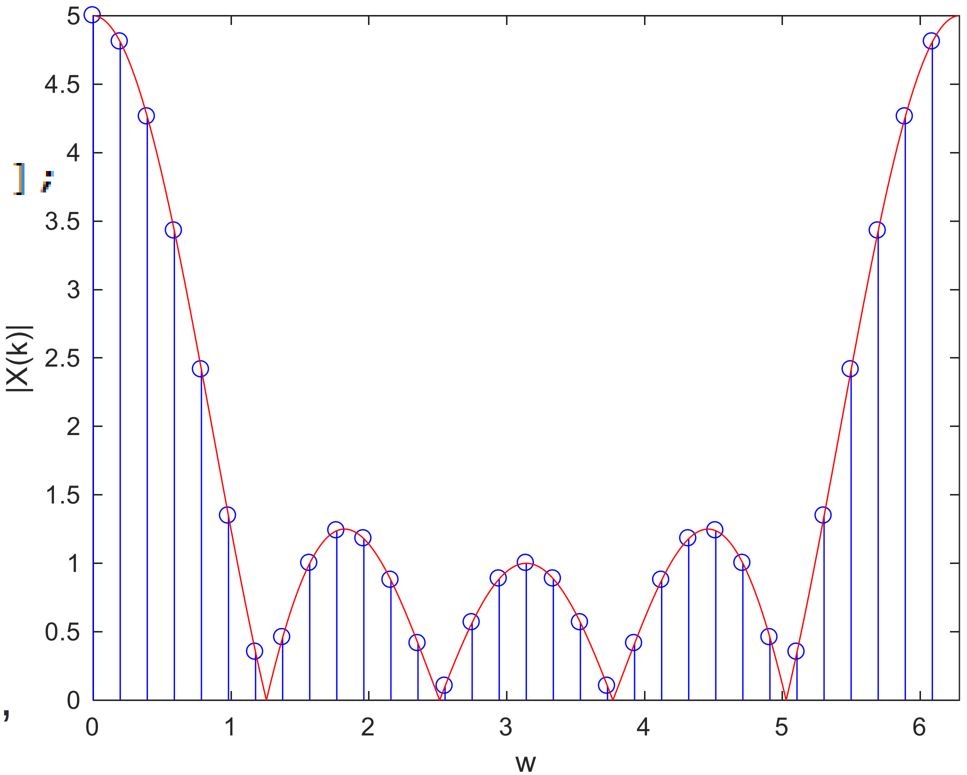
- Se puede aumentar las muestras en frecuencia

Ejemplo1.m

```
clear all
clc

N=32;
N1=5;
x=[ones(1,N1) zeros(1,N-N1)];
X=fft(x);

w=0:2*pi/N:2*pi*(1-1/N);
figure(1)
stem(w,abs(X))
xlabel('w')
ylabel('|X(k)|')
```



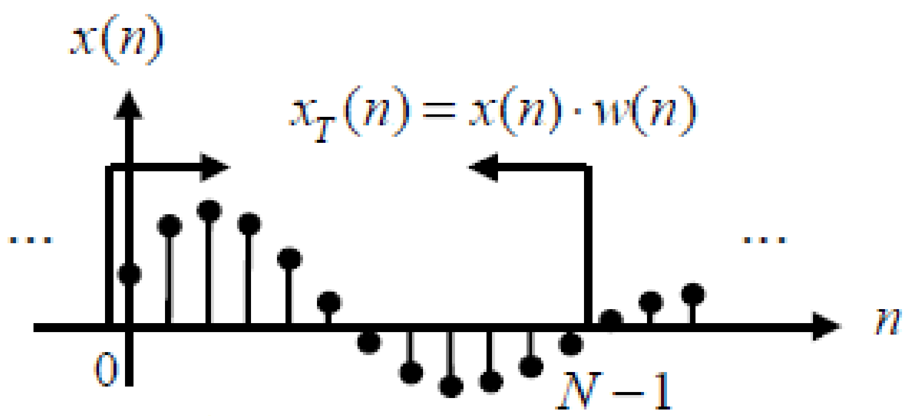
Zero padding (completar con ceros)
Se mejora la resolución (pero, en algunos, casos de forma artificial)

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- **Efecto de truncamiento de los datos**:

Considere una señal de longitud infinita de la cual se desea obtener la TFTD utilizando DFT

Es necesario restringir la duración de la señal (por una cuestión computacional).



$$
\begin{aligned}
w(n) &= 1 \quad 0 \le n \le N-1 \\
&= 0 \quad \text{otherwise}
\end{aligned}
$$

Esto puede ser modelado como el producto de la señal $x(n)$ por una ventana $w(n)$ (ventana rectangular).

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- **Efecto de truncamiento de los datos**:

Así, al realizar el cálculo de la DFT de las muestras seleccionadas, se realiza en realidad un muestreo de la TFTD del producto $x(n)\ w(n)$. Por propiedades de TFTD, se verifica que la transformada de este producto corresponde a la convolución circular de las transformadas individuales. Por lo tanto se obtienen muestras de un espectro de $x(n)$ distorsionado.

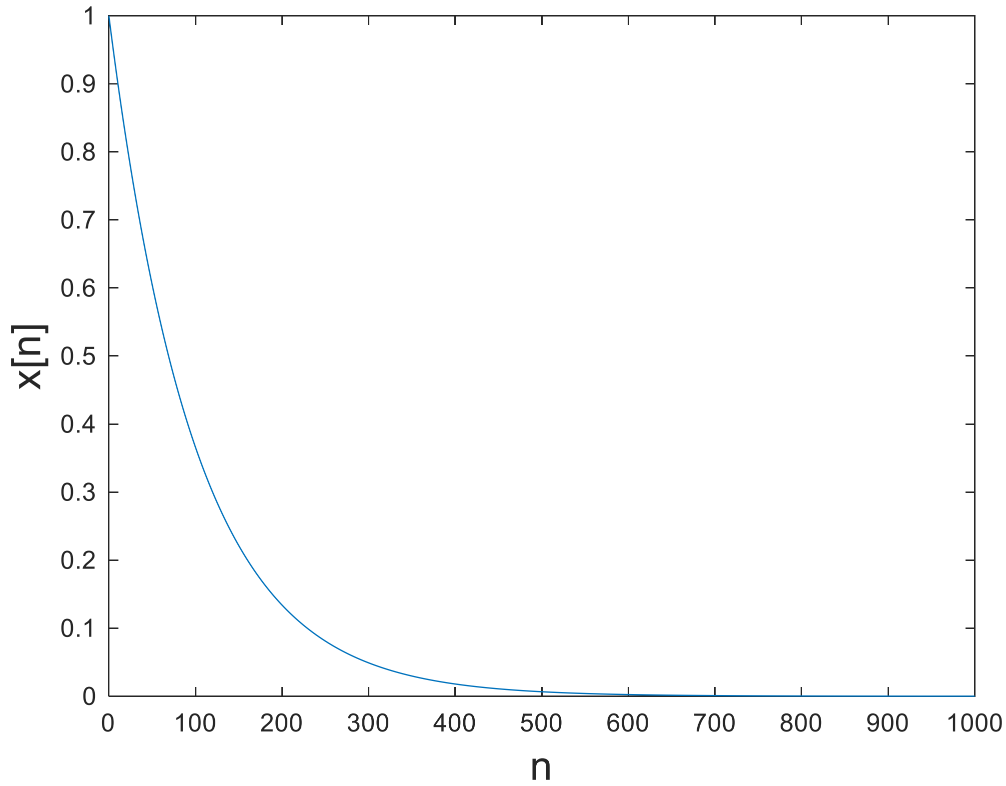
$$x_t[n] = x[n].w[n] \xleftrightarrow{TFTD} X_t(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- **Efecto de truncamiento de los datos:**

Ejemplo: determine la TFTD de la siguiente señal:

$$x[n] = a^n u[n], \text{ con } a = 0,99$$

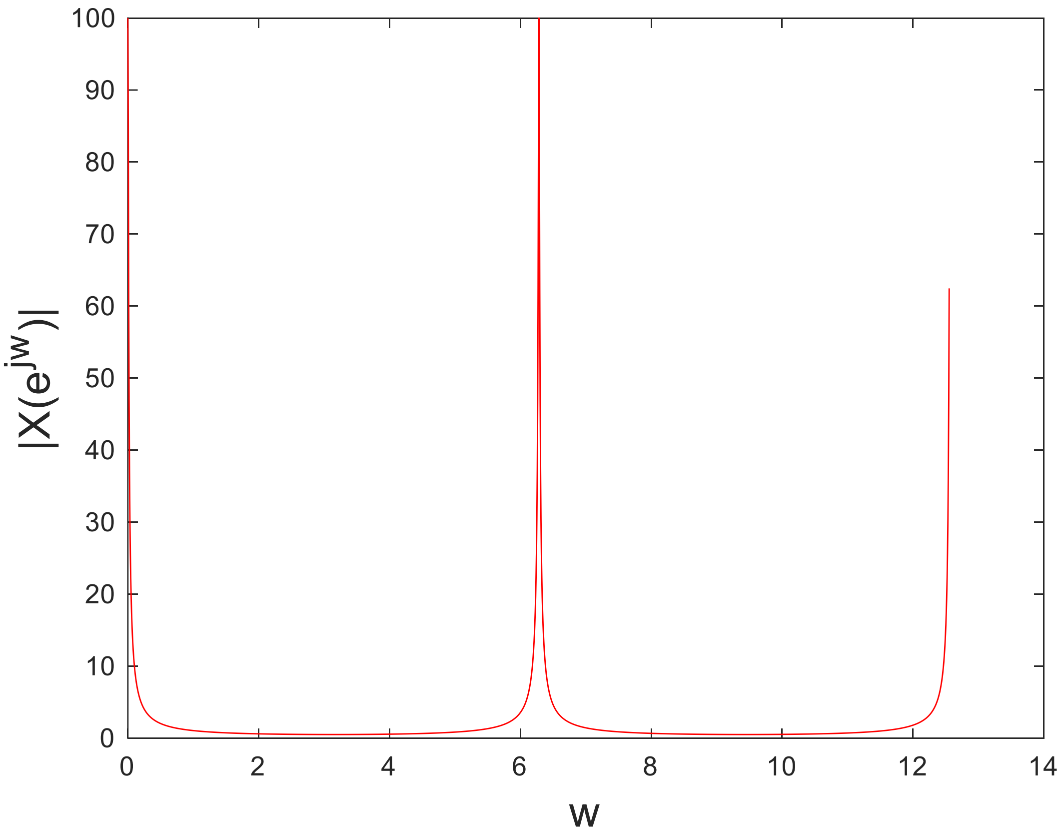


Señal de evolución muy lenta

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- **Efecto de truncamiento de los datos:**

Por definición: $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1-0{,}99e^{-j\omega}}$$

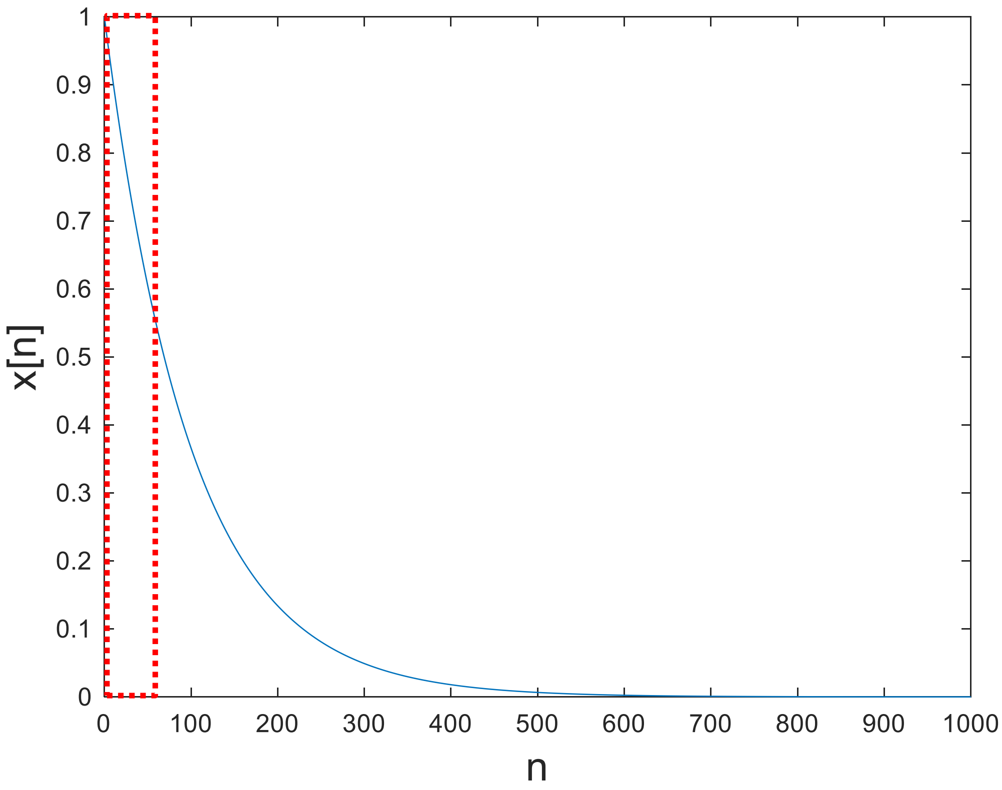


Espectro concentrado en bajas frecuencias

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Efecto de truncamiento de los datos:

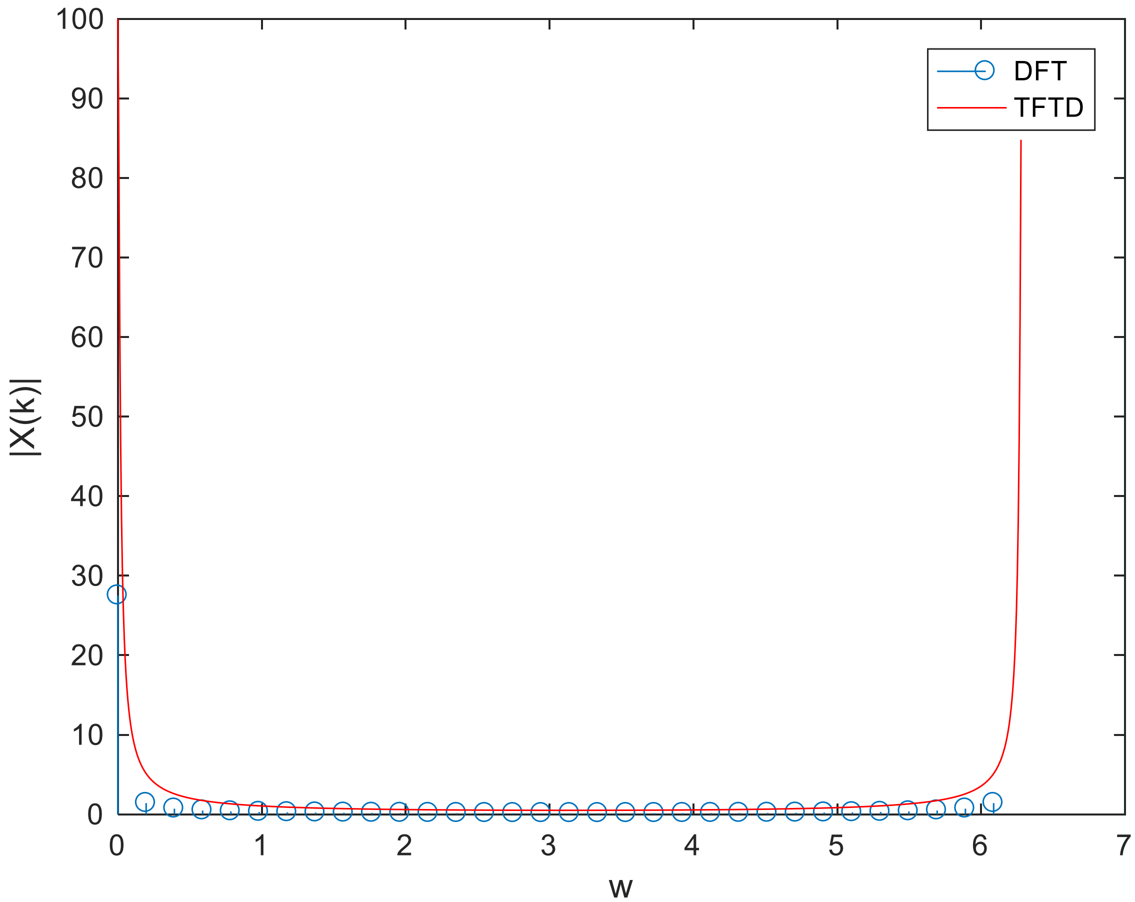
Haciendo el cálculo de DFT con truncando en 32 muestras



La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Efecto de truncamiento de los datos:

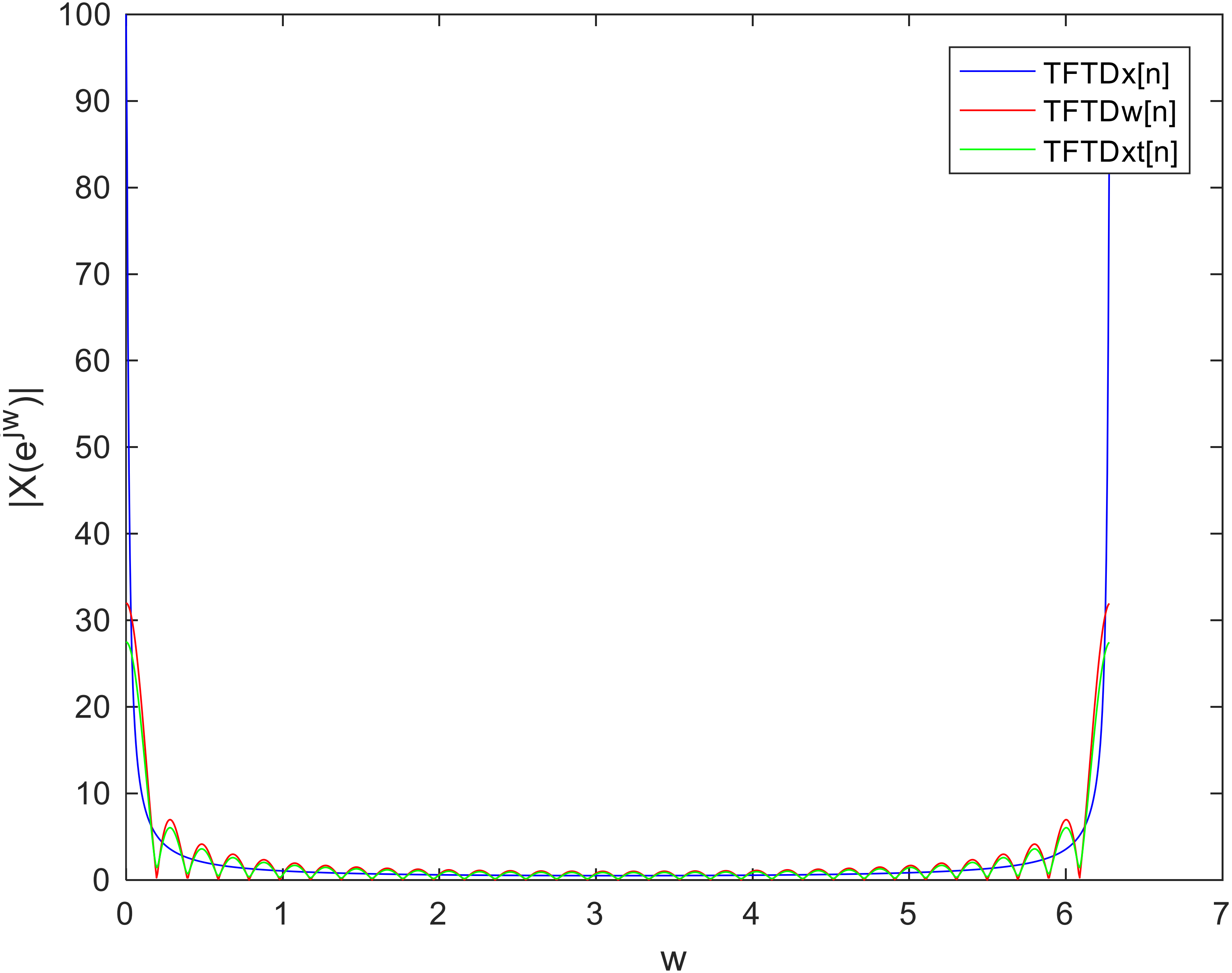
Haciendo el cálculo de DFT truncando en 32 muestras



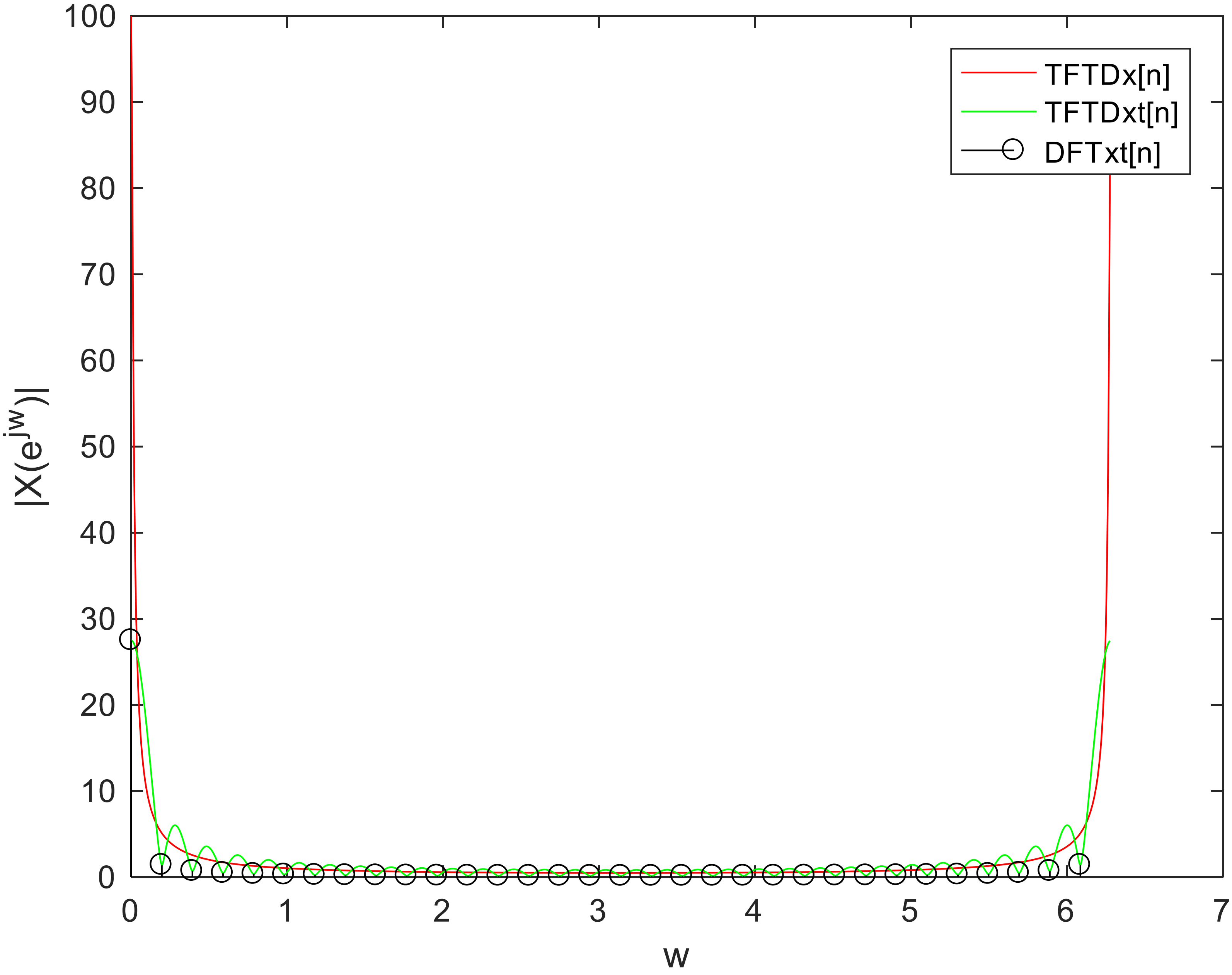
En rojo se ilustra la TFTD de la señal x[n] considerando duración infinita

En azul las muestras de la DFT truncando en 32 muestras

¿Qué puede observar?



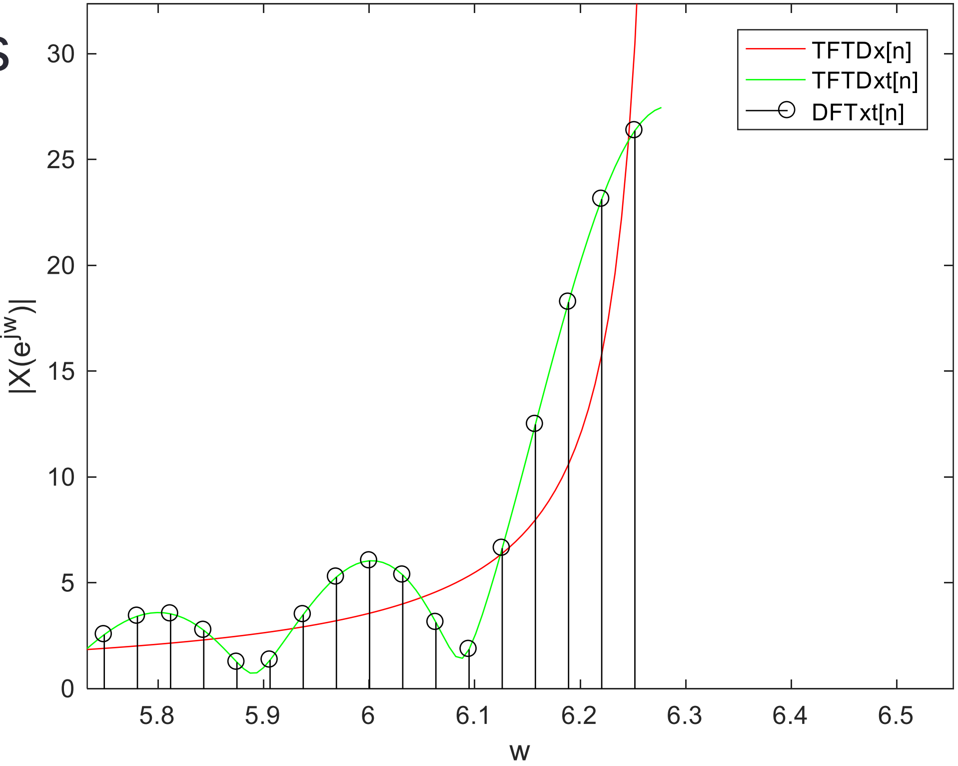
TFTDx[n]
TFTDw[n]
TFTDxt[n]
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
|X(e^jw)|
w



TFTDx[n]
TFTDxt[n]
DFTxt[n]
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
$|X(e^{jw})|$
0
1
2
3
4
5
6
7
w

DFT y TFTD

- Zero padding: si agregamos ceros a las señal truncada, obtenemos un espectro con mejor resolución, pero continuará siendo el espectro de una señal truncada, no de la verdadera señal
- Lo ideal es incorporar más muestras de la señal de duración infinita



La DFT y la serie de Fourier de Tiempo Discreto

- A continuación se verá cómo utilizar la DFT para el cálculo de la serie de Fourier de Tiempo Discreto.
- Comparando las ecuaciones:

DFT:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{para } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

SFTD:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

La DFT y la serie de Fourier de Tiempo Discreto

- A continuación se verá cómo utilizar la DFT para el cálculo de la serie de Fourier de Tiempo Discreto.
- Comparando las ecuaciones:

DFT:
$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{para } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

SFTD:
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

Factor de escala

La ventana de tiempo puede ser cualquiera siempre y cuando abarque un período

La DFT y la serie de Fourier de Tiempo Discreto

- En definitiva, **se pueden considerar expresiones equivalentes salvo una constante igual a 1/N**

DFT:
$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{para } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

SFTD:
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

•Es importante que la ventana de datos de la DFT abarque exactamente un período

•Se puede concluir que tienen las mismas propiedades

Propiedades de la DFT

1) Propiedad de linealidad

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2\,[n] \leftrightarrow a_1 X_1[k] + a_2 X_2\,[k]$$

2) Desplazamiento en el tiempo

$$x[n - n_0]_{\operatorname{mod} N} \leftrightarrow W_N^{k n_0}\, X[k] \qquad W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

3) Desplazamiento en frecuencia

$$W_N^{-k n_0}\; x[n] \leftrightarrow X[k - k_0]_{\operatorname{mod} N}$$

Propiedades de la DFT

- Notando que las variables n y k de la DFT deben estar restringidas al rango $0 \leq n, k \leq N-1$
- Así, los corrimientos $x[n-n_0]$ o $X[k-k_0]$ implican:

$$x[n-n_0]_{\mathrm{mod}\,N} \text{ o } X[k-k_0]_{\mathrm{mod}\,N}$$

- La notación $[m]_{\mathrm{mod}\,N}$ significa $[m]_{\mathrm{mod}\,N} = m + iN$

siendo i un entero (positivo o negativo) tal que

$$0 \leq [m]_{\mathrm{mod}\,N} \leq N-1$$

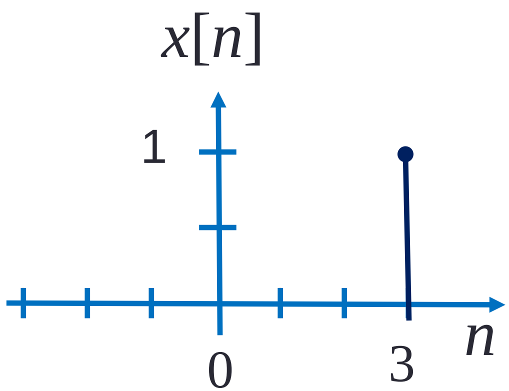
En definitiva, **el corrimiento es circular**

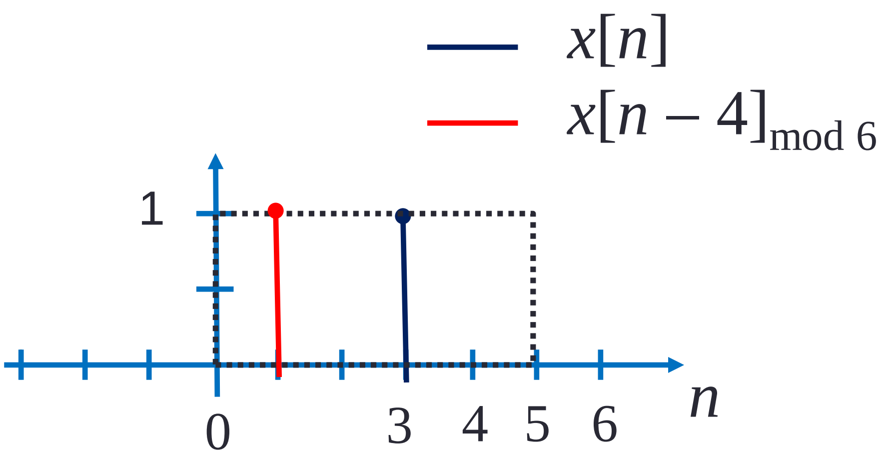
Propiedades de la DFT

- **Ejemplo de corrimiento circular en DFT:**

Si $x[n] = \delta[n-3]$, luego

$$x[n-4]_{\mathrm{mod}\,6} = \delta[n-7]_{\mathrm{mod}\,6} = \delta[n-7+6] = \delta[n-1]$$





Propiedades de la DFT

4) Conjugación: $x^*[n] \leftrightarrow X^*[-k]_{\text{mod } N}$

5) *Inversión temporal:* $x[-n]_{\text{mod } N} \leftrightarrow X[-k]_{\text{mod } N}$

6) *Dualidad:* $X[n] \leftrightarrow Nx[-k]_{\text{mod } N}$

7) *Convolución circular:* $x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1[k]\,X_2[k]$

8) *Multiplicación:* $x_1[n]\,x_2[n] \leftrightarrow \dfrac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k]$