

POLINOMIOS

La expresión $5x^3 + 7x^2 + 4x - 12$ recibe el nombre de **polinomio en la variable x** . Es de *tercer grado*, porque la tercera es la máxima potencia de la variable x que aparece en él. Los *términos* de este polinomio son: $5x^3 + 7x^2 + 4x - 12$. Los *coeficientes* son 5, 7, 4, y -12 .

En un polinomio los números expresados mediante cifras o letras son números reales y están relacionados a través de las operaciones: suma, resta, producto y potencia de exponente natural. Es decir, todos los exponentes de las variables de un polinomio deben ser enteros no negativos. Por consiguiente, las expresiones $x^3 + x^{1/2}$ y $x^{-2} + 3x + 1$ no son polinomios, porque contienen exponentes fraccionarios y negativos.

Cualquier constante diferente de cero, como 7, se clasifica como un polinomio de grado cero, ya que: $7 = 7x^0$. También al número cero nos referimos como una constante polinomial, pero no se le asigna grado alguno.

Los polinomios que tienen sólo uno, dos o tres términos reciben nombres especiales:

| Números de términos | Nombre del polinomio | Ejemplo |
|---------------------|----------------------|-----------------|
| uno | monomio | $17x^5$ |
| dos | binomio | $2x^3 - 6x$ |
| tres | trinomio | $x^4 - x^2 + 2$ |

La variable x en el polinomio representa cualquier número real. Por este motivo expresiones como $2x$, $x + 3$ y $x^2 + x$ representan también números reales, cuyo valor depende del que tome x . Por ejemplo si $x = 3$ los valores de las expresiones dadas serán 6, 6 y 12 respectivamente.

Ya que cada símbolo de un polinomio es un número real, se pueden usar las propiedades del sistema de los números reales para operar con ellos.

En general:



Un polinomio de grado n en la variable x se puede escribir en cualquiera de las siguientes formas estándar:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números reales, y los exponentes son enteros no negativos. El **coeficiente principal** es $a_n \neq 0$, y a_0 es el **término constante**

Cabe aclarar que también se puede considerar que a_0 es el coeficiente del término $a_0 x^0$.

OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

Suma o resta de polinomios

Cuando se suman o se restan dos polinomios, el resultado es otro polinomio.

$$P(x) + Q(x) = S(x)$$

Al efectivizar dichas operaciones se suman o restan los coeficientes respectivos de iguales potencias de la variable, es decir se agrupan los términos semejantes (propiedad asociativa y conmutativa), para operar con ellos, o bien, se aplica la propiedad distributiva.

Por ejemplo, sean los polinomios: $P(x) = x + 2x^2 - 1$ y $Q(x) = 3x + 2$, hallar la suma de los mismos.

Solución:

$$(2x^2 + x - 1) + (3x + 2)$$

$$2x^2 + x - 1 + 3x + 2$$

$$2x^2 + (x + 3x) - 1 + 2$$

$$2x^2 + 4x + 1$$

se suprime paréntesis utilizando la regla de supresión de paréntesis,

se agrupan los términos semejantes haciendo uso de las propiedades conmutativa y asociativa,

se suman los coeficientes de las potencias iguales de x .

¿Por qué no es válido sumar los términos $2x^2$ y $4x$?

Veamos otro ejemplo:

Dado los Polinomios $P(x) = 4x^3 - 10x^2 + 5x + 8$ y $Q(x) = 12x^2 - 9x - 1$, efectuar la resta de los mismos.

Solución:

$$(4x^3 - 10x^2 + 5x + 8) - (12x^2 - 9x - 1)$$

$$4x^3 - 10x^2 + 5x + 8 - 12x^2 + 9x + 1$$

$$4x^3 + (-12x^2 - 10x^2) + (5x + 9x) + (8 + 1)$$

$$4x^3 + (-12 - 10)x^2 + (5 + 9)x + (8 + 1)$$

$$4x^3 - 22x^2 + 14x + 9$$

se suprime paréntesis utilizando la regla de supresión de paréntesis,

se agrupan los términos semejantes haciendo uso de las propiedades conmutativa y asociativa,

se suman los coeficientes de las potencias iguales de x , o bien se aplica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

Y Intentar lo siguiente

Dado los siguientes polinomios

$$P(x) = 3x^2 + 4x^2 - 2x$$

$$R(x) = 5x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 3$$

$$Q(x) = -2x^2 + 3x + 1/2$$

$$S(x) = 5x^4 + 2x^2 - 2x + 4$$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $P(x) + S(x)$

b) $R(x) - P(x)$

c) $S(x) - S(x)$

d) $Q(x) + P(x)$

e) $R(x) - S(x)$

¿Qué se puede decir del grado del polinomio obtenido al sumar o restar dos polinomios?

Producto entre polinomios

Cuando se multiplican dos polinomios el resultado es otro polinomio, obtenido de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y las leyes de los exponentes.

$$P(x) Q(x) = T(x)$$

Veamos a través del siguiente ejemplo:

Sean $P(x) = 2x - 3$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 1$. Hallar $P(x) Q(x)$

Cuando se multiplican dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo:

Solución:

$$\begin{aligned} P(x) Q(x) &= 2x(x^2) + (2x)(2x) + (2x)(-1) + (-3)(x^2) + (-3)(2x) + (-3)(-1) = \\ &= 2x^3 + 4x^2 - 2x - 3x^2 - 6x + 3 \end{aligned}$$

se asocian términos semejantes y se encuentra el resultado final

$$P(x)Q(x) = 2x^3 + (4x^2 - 3x^2) + (-2x - 6x) + 3 = 2x^3 + x^2 - 8x + 3$$

Intentar lo siguiente

Dados los siguientes polinomios

$P(x) = -3x$

$Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

$R(x) = x^2 - 3x + 5$

$S(x) = 2x^3 - 3x$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $P(x) S(x)$

b) $R(x) S(x)$

c) $Q(x) R(x)$

¿Cómo se calcularían las siguientes potencias: $[S(x)]^2$; $[P(x)]^3$; $[Q(x)]^2$?

Productos notables

Resolver los siguientes productos entre binomios:

a) $(A + B)(A + B)$

b) $(A - B)(A - B)$

c) $(A + B)(A - B)$

d) $(A + B)^2(A + B)$

donde A y B representan monomios cualesquiera.

¿Qué se puede decir de los polinomios obtenidos?. Caracterizarlos.

A continuación se ejemplifica lo solicitado en el ítem d) $(A + B)^2 (A + B)$
 Por definición de potencia podemos escribir:

$$\begin{aligned} (A + B)^2 (A + B) &= [(A + B) (A + B)] (A + B) = \\ &= [A^2 + 2AB + B^2] (A + B) = \\ &= A^2 (A + B) + 2 AB (A + B) + B^2 (A + B) = \\ &= A^3 + A^2 B + 2 A^2 B + 2 AB^2 + AB^2 + B^3 = \\ &= A^3 + 3A^2 B + 3AB^2 + B^3 \end{aligned}$$

El polinomio obtenido es un **cuatrinomio cubo perfecto**. Entonces, encontrar el cubo de un binomio equivale a resolver cualquiera de los siguientes productos:

$$(A + B)^3 = (A + B) (A + B) (A+B) = (A + B)^2 (A + B) = A^3 + 3A^2 B + 3AB^2 + B^3$$

- Resolver:**
- a) $(4x - 5)^3$
 - b) $(2x^2 + x^3)^2$
 - c) $(4x + x^3) (4x - x^3)$.

División de polinomios

La división de polinomios se realiza con un algoritmo similar al de la división entera.

Recordemos el algoritmo de la división entera

$$\begin{array}{r} D \quad | \quad d \\ \hline R \quad C \end{array}$$

sabemos que en este algoritmo, el divisor (d) nunca es cero y el resto es menor que el divisor y se cumple que $D = d \cdot C + R$. Es decir, que el dividendo (D) es igual al divisor (d) por el cociente (C) más el resto (R).

Para que la división entre polinomios sea otro polinomio, el divisor debe ser de grado igual o menor que el del dividendo.

Luego, en el caso de la división de polinomios, se cumple:

$$P(x) = Q(x) C(x) + R(x)$$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Dividir el polinomio $P(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6$ por $Q(x) = x^2 + x$

Solución:

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividendo [P(x)]} \rightarrow 3x^3 - x^2 - 2x + 6 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + x \\ 3x - 4 \end{array} \right. \rightarrow \text{Divisor [Q(x)]} \\
 \underline{- 3x^3 - 3x^2} \phantom{\rightarrow \text{Cociente [C(x)]}} \\
 -4x^2 - 2x + 6 \\
 \underline{4x^2 + 4x} \\
 2x + 6 \rightarrow \text{Resto [R(x)]}
 \end{array}$$

El procedimiento es el siguiente:

1. Se escriben los polinomios dividendo y divisor ordenados en forma decreciente
2. Se divide $3x^3$ (el primer término del dividendo) por x^2 (el primer término del divisor), para obtener $3x$ (el primer término del cociente).
3. Se multiplica $x^2 + x$ (el divisor) por $3x$ y se obtiene $3x^3 + 3x^2$.
4. Se cambia de signo obteniéndose $- 3x^2 - 3x$ y se coloca debajo de los términos correspondientes en el dividendo.
5. Se suma para obtener $- 4x^2$, y se escriben a continuación los demás términos del polinomio dividendo, el polinomio obtenido se trata como el nuevo dividendo.
6. Se divide $- 4x^2$ (el primer término del nuevo dividendo) por x^2 , se obtiene $- 4$ (el segundo término del cociente).
7. Se multiplica $x^2 + x$ por $- 4$ y se suma el producto del nuevo dividendo cambiado de signo. Este resultado, $2x + 6$, representa el resto de la división debido a que es un polinomio de grado menor que el grado del divisor, por lo tanto la división está terminada.

Como el resto no es cero, el polinomio dividendo no es múltiplo del divisor. Según la relación de la división entera, el polinomio dividendo se podrá escribir como:

$$\begin{array}{ccccccc}
 3x^3 - x^2 - 2x + 6 & = & (x^2 + x) \cdot (3x - 4) & + & (2x + 6) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 P(x) & = & Q(x) & \cdot & C(x) & + & R(x)
 \end{array}$$

Analicemos otro ejemplo:

Dados los polinomios $P(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ y $Q(x) = x^2 + 2$, efectuar el cociente $P(x):Q(x)$

Solución:

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividendo [P(x)]} \rightarrow \quad x^4 - 2x^2 - 8 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ x^2 - 4 \end{array} \right. \rightarrow \text{Divisor [Q(x)]} \\
 \underline{-x^4 - 2x^2} \phantom{\rightarrow \text{Cociente [C(x)]}} \\
 -4x^2 - 8 \\
 \underline{4x^2 + 8} \\
 0 \rightarrow \text{Resto [R(x)]}
 \end{array}$$

Como en este caso el resto es 0, el polinomio dividido es múltiplo del divisor y la relación anterior se reduce a: $P(x) = Q(x) C(x)$ poniendo en evidencia la posibilidad de escribir el polinomio dividido como un producto de factores: $x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2 + 2)(x^2 - 4)$.

Intentar lo siguiente

i) Usar el algoritmo de la división para encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones entre polinomios.

a) $(x^3 - x^2 - x + 10) : (x^2 - 3x + 5)$ b) $(4x^3 - 5x^2 + x - 7) : (x^2 - 2x)$

c) $(5x^2 + 7x + x^3 + 8) : (x - 2)$ d) $(x^3 - 2x^2 - 13x + 6) : (x + 3)$

ii) Verificar cada resultado teniendo en cuenta la relación entre dividido, divisor, cociente y resto: $P(x) = Q(x) C(x) + R(x)$.

Analizar la validez de la siguiente afirmación:
 “La expresión $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, representa el resultado de la división de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ ”.

División de un polinomio por un monomio de la forma $x - c$

Cuando se realiza la división entera de un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $x - c$, donde c es un número real, puede ocurrir que el resto sea de grado cero o que sea el polinomio nulo. Por lo tanto, el resto es un número que se designará con R .

El siguiente teorema relaciona el resto R obtenido de la división de un polinomio $P(x)$ por $x - c$ y el valor del polinomio en $x = c$.

Teorema del resto: “Cuando un polinomio $P(x)$ se divide por $x - c$, el resto R es el valor del polinomio en $x = c$, esto es, $R = P(c)$.”

En efecto:

$$\begin{array}{l} P(x) \quad \left| \begin{array}{c} x - c \\ \hline C(x) \end{array} \right. \rightarrow P(x) = (x - c) \cdot C(x) + R \\ R \end{array}$$

$$P(c) = (c - c) \cdot C(x) + R$$

Luego $P(c) = R$

Por ejemplo: si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, es posible anticipar cuál será el resto de dividirlo por $x - 1$, ya que según el teorema se tendrá:

$$R = P(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 2$$

También se puede escribir $P(x)$ en términos de $x - 1$ encontrando el cociente $C(x)$ y utilizando la expresión de la división entera:

$$P(x) = (x - 1) C(x) + 2$$

Si $P(c) = 0$, entonces $x = c$ se constituye en una raíz de $P(x)$, quedando $P(x)$ expresado como un producto, es decir $P(x)$ está factorizado:

$$P(x) = (x - 1) C(x)$$

Así, si el divisor fuera $x - 2$, se tiene que $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$, por consiguiente $x - 2$ será un factor de $P(x)$ y podrá expresarse de la siguiente manera:

$$P(x) = (x - 2) (x^2 - x - 2)$$

donde $C(x) = x^2 - x - 2$ es el cociente de la división, el cual puede obtenerse fácilmente mediante la regla de Ruffini.

A continuación se recuerda el algoritmo correspondiente a la regla de Ruffini:

1. En el primer renglón se escriben los coeficientes del dividendo (el cual debe estar completo y ordenado en forma decreciente). A la izquierda, sólo se escribe la raíz del divisor (el valor que lo anula).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & & & \end{array}$$

Los demás coeficientes se obtienen de la siguiente forma:

2. El coeficiente principal del dividendo (1) se copia abajo. Se lo multiplica por 2 y el resultado (2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (-3). Se suman -3 y 2 y el resultado (-1) se escribe abajo.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

3. El -1 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por 2 y el resultado (-2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (0). Se suman 0 y -2 y el resultado (-2) se escribe abajo.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \end{array}$$

4. El -2 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por 2 y el resultado (-4) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (4). Se suman 4 y -4 y el resultado (0) es el resto. Se escribe abajo.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

El resto es 0. Los valores 1, -1 y -2 son los coeficientes del polinomio cociente: $C(x) = x^2 - x - 2$, cuyo grado es en una unidad menor que el del polinomio dividendo.



Recuerda que la Regla de Ruffini sólo se podrá aplicar en cocientes donde el divisor es de la forma $x - c$.

Conviene tener presente que:



Decir que $P(c) = 0$, equivale a decir que:

- $(x - c)$ divide exactamente a $P(x)$ o que $P(x)$ es divisible por $(x - c)$,
- $P(x)$ podrá expresarse como el producto: $P(x) = (x - c) \cdot C(x)$ donde $C(x)$ es el polinomio cociente entre $P(x)$ y $x - c$.



Intentar lo siguiente

Dadas las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$

b) $(x^3 + 5x^2 - 7x + 8) : (x - 2)$

c) $(2x^3 + x^2 - 3x + 7) : (x + 1)$

d) $(x^3 + 27) : (x + 3)$

- i) Utilizar el Teorema del Resto para establecer si el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.
- ii) Cuando sea posible, factorizarlo en término del divisor, aplicando la regla de Ruffini para encontrar el cociente.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio significa expresar al polinomio como **el producto** de dos o varios monomios, binomios, trinomios, etc.

Hay seis maneras básicas de factorizar un polinomio, y normalmente reciben el nombre de **casos de factoreo**:

- 1º Caso: Factor común.
- 2º Caso: Factor común en grupos.
- 3º Caso: Trinomio cuadrado perfecto (cuadrado de un binomio)
- 4º Caso: Cuatrinomio cubo perfecto (cubo de un binomio)
- 5º Caso: Diferencia de cuadrados.
- 6º Caso: suma y resta de potencia de igual exponente (Gauss).

1º Caso: Factor común

Para factorizar un polinomio a través de factor común, debemos acordarnos de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma o resta.

$a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac$ (el factor a se repite en ambos términos)

Para extraer el factor común, se debe proceder de manera inversa: $a \cdot b \pm a \cdot c = a \cdot (b \pm c)$

Primero se debe reconocer cuál es el factor que se encuentra repetido en cada término y luego, para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término por el factor común.

El factor común puede ser la variable del polinomio, elevada a la menor potencia, y/o el Divisor común mayor de todos los coeficientes del mismo.

Ejemplos:

Factorizar los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 2x^2 - 4x$ (se ve que son comunes, una x en cada término, y el 2).

$$P(x) = 2x \cdot x - 2 \cdot 2x \rightarrow 2x \text{ es el factor común de los dos términos.}$$

$$P(x) = 2x \cdot (x - 2)$$

\rightarrow Expresión factoreada de $P(x)$ a través del factor común.

$$\frac{2x^2}{2x} - \frac{4x}{2x}$$

b) $P(x) = -12x^6 + 6x^5 - 15x^3 = -4 \cdot 3x^3 \cdot x^3 + 2 \cdot 3x^3 \cdot x^2 - 5 \cdot 3x^3 = 3x^3(-4x^3 + 2x^2 - 5)$

Normalizar polinomio

Para normalizar un polinomio, se debe **sacar como factor común el coeficiente principal**.

$$P(x) = 2x^2 - \frac{1}{3} = 2 \cdot \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{2} \right) = 2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{6} \right)$$

2º Caso: Factor común en grupos

En primer lugar, si queremos factorizar un polinomio por este método, se debe tener en cuenta que **el polinomio debe contar con un número par de términos** (por lo menos 4).

El método es similar al 1º Caso, es como separar el polinomio en dos partes y luego aplicar en cada una de esas partes el 1º Caso.

Se debe “partir” el polinomio en dos partes, porque en la primera de esas partes va a haber “algo” en común, y en la segunda vamos a encontrar otra cosa común. Lo que se busca es que lo que queda “dentro del paréntesis” en cada una de las partes, sea lo mismo, para luego unir esas dos partes que quedaban del polinomio, mediante otro factor común (1º Caso).

Ejemplos:

a) $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x + 6$

$$P(x) = \underbrace{(x^5 - 2x^4)}_{x^4} + \underbrace{(-3x + 6)}_{-3}$$

$$P(x) = x^4(x - 2) - 3(x - 2)$$

$$P(x) = (x - 2) \cdot (x^4 - 3)$$

\rightarrow Se forman grupos de igual cantidad de términos, de forma tal que cada uno de ellos haya un factor común.

\rightarrow En cada término debe aparecer el mismo factor para poder extraerlo nuevamente como factor común.

\rightarrow Al sacar nuevamente factor común, la expresión queda factorizada a través del factor común por grupos.

c) $Q(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (3x^3 + 3x^2) + (2x + 2) = 3x^2(x + 1) + 2(x + 1)$

$$Q(x) = (x + 1) \cdot (3x^2 + 2)$$

3º Caso: Trinomio cuadrado perfecto

Primeramente recordemos la **fórmula del cuadrado de un binomio**

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Lo que tenemos que hacer para factorizar un polinomio por este método, **es asegurar que un polinomio de 3 términos sea equivalente a un binomio elevado al cuadrado**, y luego escribir el polinomio como un **binomio al cuadrado**.

Para poder aplicar este método, el polinomio debe tener tres términos (ni más ni menos). Pero claro, no cualquier polinomio de tres términos es el cuadrado de un binomio. Más allá de tener tres términos, tenemos que ver que dos de esos términos sean el cuadrado de “algo”, y también tenemos que verificar que el otro término que queda sea el doble del producto de esos “algo”.

Ejemplo:

Factorizar el siguiente polinomio: $P(x) = 9x^2 + 30x + 25$

- Lo comparamos con el cuadrado de un binomio:

$$\begin{array}{rclcl} P(x) = & 9x^2 & +30x & +25 \\ (a \pm b)^2 = & a^2 & \pm 2ab & +b^2 \end{array}$$

Entonces, si $a^2 = 9x^2 \rightarrow a = \sqrt{9x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} = 3x$

si $b^2 = 25 \rightarrow b = \sqrt{25} = 5$

Vemos que $a = 3x$ y $b = 5 \Rightarrow 2ab = 2 \cdot 3x \cdot 5 = 30x$

Concluimos que: $P(x) = 9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$

4° Caso: Cuatrinomio cubo perfecto

Primeramente recordemos **la fórmula del cubo de un binomio**

$$(a \pm b)^3 = a^3 + 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3$$

Lo que se tiene que hacer para factorizar un polinomio por este método **es asegurar que un polinomio de 4 términos sea equivalente a un binomio elevado al cubo**. La manera de factorizar el polinomio es similar a la usada en el caso anterior. Más allá que para aplicar este método “tenemos que tener” un polinomio de 4 términos, dos de ellos tienen que equivaler a “algo elevado al cubo”. Luego debemos verificar si los otros dos términos restantes coinciden con los de la fórmula del cubo de un binomio.

Ejemplo:

Factorizar el siguiente polinomio: $P(x) = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

- Lo comparamos con el cubo de un binomio:

$$\begin{array}{rclcl} P(x) = & 8x^3 & +36x^2 & +54x & +27 \\ (a \pm b)^3 = & a^3 & +3a^2b & \pm 3ab^2 & \pm b^3 \end{array}$$

Entonces, si $a^3 = 8x^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^3} = 2x$

si $b^3 = 27 \rightarrow b = \sqrt[3]{27} = 3$

Vemos que $a = 2x$ y $b = 3 \Rightarrow 3a^2b = 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 = 3 \cdot 4x^2 \cdot 3 = 36x^2$
 $\Rightarrow \pm 3ab^2 = 3 \cdot (2x) \cdot 3^2 = 3 \cdot 2x \cdot 9 = 54x$

Concluimos que: $P(x) = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x + 3)^3$

5° Caso: diferencia de cuadrados

Este caso es el más fácil de reconocer, porque para factorizar un polinomio por este método, el polinomio debe tener sólo dos términos, y cada uno de ellos debe ser el cuadrado de “algo”.

Además **deben estar separados por un signo menos**.

La fórmula que utilizaremos es: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Se factorizará el polinomio por el método de **diferencia de cuadrados**, es escribir el polinomio como la suma de las bases, multiplicado por la resta de las mismas (en la fórmula anterior las bases son a y b).

Ejemplo:

Factorizar el siguiente polinomio: $P(x) = x^2 - 4$

Entonces, si $a^2 = x^2 \rightarrow a = \sqrt{x^2} = x$

si $b^2 = 4 \rightarrow b = \sqrt{4} = 2$

Concluimos que $P(x) = x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$

Otro ejemplo:

Factorizar el siguiente polinomio: $P(x) = 9x^6 - 1$

Entonces, si $a^2 = 9x^6 \rightarrow a = \sqrt{9x^6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^6} = 3x^3$

si $b^2 = 1 \rightarrow b = \sqrt{1} = 1$

Concluimos que $P(x) = 9x^6 - 1 = (3x^3 + 1) \cdot (3x^3 - 1)$

6° Caso: suma o resta de potencias de igual exponente

Para factorizar un polinomio por este método, **dicho polinomio debe constar de dos términos sumados o restados**, elevados a la misma potencia.

Por lo tanto el polinomio debe ser de la forma: $P(x) = x^k \pm b^k$

Lo que se hace para factorizar un polinomio de estos, es dividirlo usando el método de Ruffini, y para saber porque binomio dividir, debemos tener en cuenta lo siguiente:

Cuando k es un número impar $\begin{cases} * \text{ Si el signo es un MENOS se divide por } (x - b) \\ * \text{ Si el signo es un MÁS se divide por } (x + b) \end{cases}$

Cuando k es un número par $\begin{cases} * \text{ Si el signo es un MENOS se puede dividir por } (x - b) \text{ o por } (x + b) \\ * \text{ Si el signo es un MÁS no se puede dividir al polinomio por nada} \end{cases}$

Ejemplos:

1) $P(x) = x^5 + 2^5 \rightarrow$ el exponente es impar, el signo un más \Rightarrow dividimos por $(x + 2)$

2) $Q(x) = x^3 - y^3 \rightarrow$ exponente impar, signo menos \Rightarrow dividimos por $(x - y)$

3) $R(x) = x^6 + y^6 \rightarrow$ exponente par, signo más \Rightarrow no se puede dividir por nada.

4) $S(x) = x^8 - y^8 \rightarrow$ exponente par, signo menos \Rightarrow dividimos por $(x - y)$ o $(x + y)$

Ejemplo completo

Factorizar $P(x) = x^3 - 8$

El polinomio se puede escribir así: $P(x) = x^3 - 2^3$

Como el exponente es impar y el signo es un MENOS, debemos dividir por $(x - 2)$

Aplicamos Ruffini para dividir, pero primeramente completamos el polinomio:

$$P(x) = 1x^3 + 0x^2 + 0x - 8$$

| | | | | |
|---|---|---|---|----|
| | 1 | 0 | 0 | -8 |
| 2 | | 2 | 4 | 8 |
| | 1 | 2 | 4 | 0 |

Como vemos, el resto $R(x) = 0$. Si aplicamos bien el método **siempre el resto debe ser cero**.

Para finalizar, debemos expresar al polinomio factorizado como el producto del polinomio obtenido, por su cociente:

$$P(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$$

Observación: un polinomio del tipo $P(x) = x^7 - 1$, aunque no parezca 6º caso, lo es, ya que $1^7 = 1 \Rightarrow P(x) = x^7 - 1^7$

A continuación, presentaremos una herramienta útil al momento de transformar un polinomio cualquiera en producto de factores, el **Teorema del Factor**.

"Un polinomio $P(x)$ tiene un factor $x - c$, si y sólo si: $P(c) = 0$ "

Este teorema asegura que basta encontrar un valor de "c" que anule a $P(x)$, para determinar uno de los factores del polinomio dado; en efecto, este podrá escribirse como $P(x) = (x - c)C(x)$ donde $C(x)$ es el polinomio cociente, por estar asegurado que el resto de la división es cero (Teorema del resto).

Entonces, encontrando un valor de "c" que anule a $P(x)$ tendremos asegurado que el binomio $x - c$ será un divisor de $P(x)$ y por lo tanto será posible iniciar la factorización del polinomio.

Factorizar completamente a $P(x)$ implicará establecer la existencia de algún factor de $C(x)$, el cociente de la división anterior. Este procedimiento deberá continuarse hasta que el último cociente hallado, no contenga ningún factor (no exista un valor de "c" que lo anule).

Ejemplo: Factorizar $P(x) = x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x$

Solución: Es evidente que $c_1 = 0$ anula a $P(x)$ por lo tanto el binomio $x - c_1 = x - 0 = x$ divide exactamente a $P(x)$, luego se podrá escribir que:

$$P(x) = (x - c_1) C_1(x) = x(x^3 + 4x^2 - 4x - 16)$$

como en este caso el divisor es un monomio, el polinomio cociente se puede hallar dividiendo cada término del polinomio $P(x)$ por x :

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16}{x} = \frac{x^4}{x} + \frac{4x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} - \frac{16x}{x}$$

Poder factorizar $P(x)$ completamente implicará averiguar si existe algún factor de $C_1(x)$; como para $c_2 = 2$ $C_1(x)$ se anula, podremos afirmar que el binomio $x - c_2 = x - 2$ permitirá escribir $C_1(x) = (x - c_2) C_2(x)$ donde $C_2(x)$ podrá encontrarse mediante la regla de Ruffini. Luego,

$$P(x) = (x - c_1) C_1(x) = (x - c_1) (x - c_2) C_2(x)$$

$$P(x) = x (x^3 + 4x^2 - 4x - 16) = x (x - 2) (x^2 + 6x + 8)$$

Como $C_2(x) = (x^2 + 6x + 8)$ se anula para $c_3 = -2$, el binomio $x - c_3 = x + 2$ será un factor de $C_2(x)$, por lo tanto se podrá escribir: $C_2(x) = (x - c_3) C_3(x)$ y el polinomio $P(x)$ como:

$$P(x) = (x - c_1) C_1(x) = (x - c_1) (x - c_2) C_2(x) = (x - c_1) (x - c_2) (x - c_3) C_3(x)$$

$$P(x) = x (x^3 + 4x^2 - 4x - 16) = x (x - 2) (x^2 + 6x + 8) = x (x - 2) (x + 2) (x + 4)$$

de esta manera hemos logrado factorizar por completo al polinomio $P(x)$, utilizando como único recurso la búsqueda de factores.

El polinomio $P(x)$ es de cuarto grado y tiene cuatro raíces reales. En general se cumple:

El **teorema del factor** provee una herramienta para encontrar los diversos factores que posee un polinomio cualquiera, por lo que resulta útil como recurso para factorizar.

Todo polinomio $P(x)$ de grado n que tenga n raíces reales, puede factorizarse como:

$$P(x) = a_n (x - c_1) (x - c_2) \dots (x - c_n)$$

Donde a_n es el coeficiente principal de $P(x)$ y c_1, c_2, \dots, c_n son las n raíces reales distintas de $P(x)$.

Veamos otro ejemplo: Factorizar $Q(x) = x^2 + 4$

Para factorizar el polinomio $Q(x)$ será necesario buscar un valor de c que lo anule; como la suma de x^2 y 4 será siempre positiva se puede afirmar que no existe un número real que anule al polinomio, por lo tanto $Q(x)$ no posee raíces reales; sus dos raíces son complejas: $\pm 2i$.

El siguiente teorema ayuda a caracterizar las raíces de un polinomio:

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces $P(x) = 0$ tiene exactamente n raíces, siempre y cuando la multiplicidad k de una raíz se cuente k veces. (Pudiendo ser estas raíces reales o complejas).

Podemos usar por ejemplo el punto $(1, 16/15)$ como punto de control.

Intentar lo siguiente

Representar gráficamente: a) $2x - 6y = -2$ b) $3y = 2x - 6$

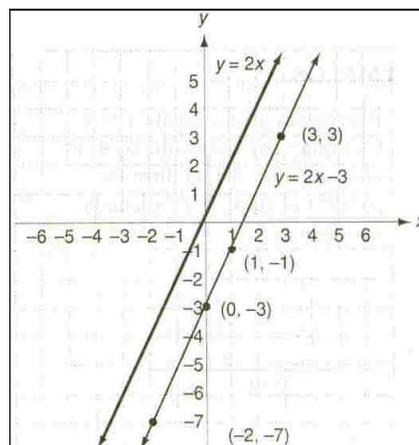
Rectas Paralelas

La gráfica de $y = mx$ es una línea recta que pasa por el origen. ¿Qué sucede si sumamos un número b al miembro derecho de la ecuación para obtener $y = mx + b$.

Ejemplo 3: Representar gráficamente $y = 2x - 3$ y comparar con la gráfica de $y = 2x$.

Primero construimos la tabla de valores, luego representamos gráficamente y comparamos.

| x | y (o $2x - 3$) |
|-----|-------------------|
| 0 | -3 |
| 1 | -1 |
| 3 | 3 |
| -2 | -7 |



La gráfica de $y = 2x - 3$ es una línea recta desplazada 3 unidades hacia abajo a partir de la gráfica de $y = 2x$.

Teorema

La gráfica de una ecuación de la forma $y = mx$ es una línea recta que pasa por el origen.
La gráfica de $y = mx + b$ es una línea paralela a $y = mx$ que tiene como ordenada al origen al número b .

Intentar lo siguiente

Representar gráficamente y comparar con la gráfica de $y = 2x$.

- a) $y = 2x + 1$ b) $y = 2x - 4$

Rectas Perpendiculares

Si dos rectas se intersecan en ángulos rectos, son perpendiculares.

Teorema

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1 .

Ejemplo 1: Determinar si las gráficas de $5y = 4x + 10$ y $4y = -5x + 4$ son perpendiculares.

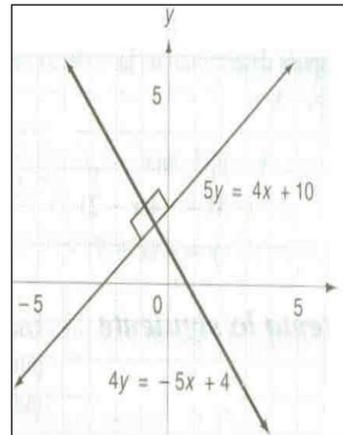
Solución. Primero encontramos la forma pendiente – ordenada al origen resolviendo para y .

$$y = \frac{4}{5}x + 2 \quad \text{y} \quad y = -\frac{5}{4}x + 1$$

El producto de las pendientes es -1 ; es decir,

$$\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -1.$$

Las rectas son perpendiculares.



Intentar lo siguiente

Determinar si las gráficas de los siguientes pares de ecuaciones son perpendiculares:

a) $2y - x = 2$ y $y + 2x = 4$

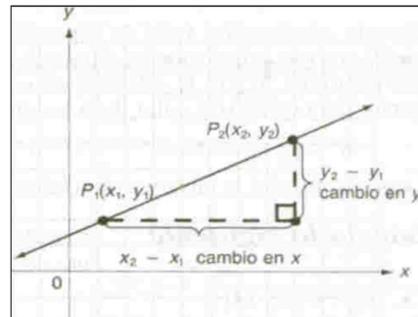
b) $3y = 2x + 15$ y $2y = 3x + 10$

Determinación de la Pendiente de una Recta

Si observamos el gráfico vemos una recta sobre la que hemos marcado dos puntos. A medida que vamos de P_1 a P_2 , el cambio en x es $x_2 - x_1$. Análogamente, el cambio en y es $y_2 - y_1$.

La razón de cambio en y dividido por el cambio en x se llama **pendiente** de la recta.

Es común utilizar la letra m para designar pendientes.



Definición

La **pendiente** m de una recta es el cambio en y dividido por el cambio en x , o $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos cualesquiera de la recta, y $x_2 \neq x_1$.

Para hallar la pendiente de una recta, se utiliza las coordenadas de dos puntos cualesquiera para determinar el cambio en y y el cambio en x . Después se divide el cambio en y por el cambio en x .

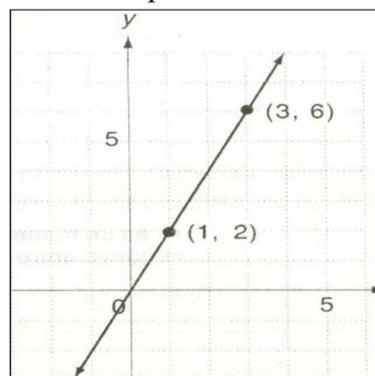
Ejemplo 1: Los puntos $(1, 2)$ y $(3, 6)$ están en una recta. Encontrar su pendiente.

Solución.

$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

$$= \frac{6 - 2}{3 - 1}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$



Si utilizamos los puntos $(1, 2)$ y $(3, 6)$ en sentido inverso, encontramos que el cambio en y es negativo y el cambio en x es negativo. Obtenemos el mismo número para la pendiente.

$$m = \frac{2 - 6}{1 - 3} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Cuando calculamos el valor de la pendiente, el orden de los puntos no importa en la medida en que calculemos las diferencias en el mismo orden.

Los puntos $(0, 0)$ y $(-1, -2)$ también se encuentran sobre la recta. Si utilizamos estos puntos para calcular el valor de la pendiente, obtenemos lo siguiente:

La pendiente será la misma, independiente del par de puntos que utilizemos. Vemos que esta recta asciende de izquierda a derecha y tiene pendiente positiva. Si una recta desciende de izquierda a derecha tendrá pendiente negativa.

Intentar lo siguiente

Calcular la pendiente de la recta que contiene a cada par de puntos.

- a) $(1, 1)$ y $(12, 14)$ b) $(3, 9)$ y $(4, 10)$ c) $(0, -4)$ y $(5, 7)$ d) $(7, 2)$ y $(6, 3)$

Ecuación Punto – Pendiente de una Recta

Si conocemos la pendiente de una recta y las coordenadas de un punto sobre la recta podemos encontrar una ecuación para la misma.

Teorema

La ecuación punto – pendiente

Una recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m tiene por ecuación $(y - y_1) = m(x - x_1)$.

Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(1/2, -1)$ con pendiente 5.

Solución. $(y - y_1) = m(x - x_1)$

$$y - (-1) = 5(x - 1/2) \quad \text{Sustituyendo}$$

$$y + 1 = 5(x - 1/2)$$

$$y = 5x - 7/2 \quad \text{Simplificando}$$

Ejemplo 2: Encontrar la ecuación de la recta que tiene ordenada al origen de 4 y pendiente 3.

Solución. $(y - y_1) = m(x - x_1)$

$$y - 4 = 3(x - 0) \quad \text{Sustituyendo}$$

$$y = 3x + 4 \quad \text{Simplificando}$$

Intentar lo siguiente

- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 4)$ con pendiente -3 .
- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-4, -10)$ con pendiente $1/4$.
- Encontrar la ecuación de la recta cuya abscisa al origen es 5 y pendiente $-1/2$.

Ecuación de la Recta que Pasa por Dos Puntos

Dados dos puntos, podemos encontrar la ecuación de la recta que pasa por ellos. Si encontramos la pendiente de la recta dividiendo el cambio en y por el cambio en x , y sustituimos este valor por m en la ecuación punto – pendiente, obtenemos la **ecuación de los dos puntos**.

Teorema

Ecuación de los dos puntos

La ecuación de cualquier recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se calcula con la fórmula

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(1, -4)$.

Solución. Primero encontramos la pendiente y después sustituimos en la fórmula los dos puntos.

Tomamos $(2, 3)$ como (x_1, y_1) y $(1, -4)$ como (x_2, y_2) .

$$y - 3 = \frac{-4 - 3}{1 - 2} (x - 2) \quad \text{Sustituyendo}$$

$$y - 3 = \frac{-7}{-1} (x - 2)$$

$$y - 3 = 7 (x - 2)$$

$$y - 3 = 7x - 14$$

$$y = 7x - 11$$

Podríamos haber tomado (1, -4) como (x_1, y_1) y (2, 3) como (x_2, y_2) y haber obtenido la misma ecuación.

$$y - (-4) = \frac{3 - (-4)}{2 - 1} (x - 1) \quad \text{simplificando} \quad y = 7x - 11$$

Y Intentar lo siguiente

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos señalados:

a) (1, 4) y (3, -2)

b) (3, -6) y (0, 4)

Representación Gráfica de un Polinomio tipo: $a x^2 + b x + c$

Definición

Todo polinomio de segundo grado de la forma $a x^2 + b x + c = 0$, donde a , b y c son constantes y $a \neq 0$, se llama **forma estándar** de la ecuación cuadrática.

Solución de Ecuaciones Utilizando la Fórmula Cuadrática

A continuación, mostramos una fórmula que proporciona las soluciones de cualquier ecuación cuadrática.

Teorema

La fórmula cuadrática

Las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado, $a x^2 + b x + c = 0$, están dadas por la **fórmula cuadrática**.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1: Resolver $2x^2 + 8x = 10$

Solución: Primero hay que encontrar la forma estándar y determinar a, b y c.

$$2x^2 + 8x - 10 = 0 \rightarrow a = 2, b = 8, c = -10$$

Después, hay que utilizar la fórmula cuadrática.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{4} = \frac{-8 \pm 12}{4}$$

Las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-8 + 12}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-8 - 12}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

Cuando se utiliza la fórmula cuadrática, las soluciones que se obtienen son soluciones de la ecuación original a menos que se haya cometido un error de cálculo.

Y Intentar lo siguiente

Resolver utilizando la fórmula cuadrática: a) $3x^2 + 2x = 7$ b) $5x^2 + 3x = 9$

Discriminante

La expresión $b^2 - 4ac$ de la fórmula cuadrática se llama **discriminante**. Con este número podemos determinar la naturaleza de las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática.

Teorema

Una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ y coeficientes reales, tiene

- a) Exactamente una raíz real si $b^2 - 4ac = 0$.
- b) Dos raíces reales si $b^2 - 4ac > 0$.
- c) Dos raíces complejas, mas no reales, que son conjugadas entre sí cuando $b^2 - 4ac < 0$.

Ejemplo 1: Determinar la naturaleza de las raíces de $9x^2 - 12x + 4 = 0$

Solución. $a = 9$, $b = -12$ y $c = 4$

Calculamos el discriminante

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$$

Solo hay una raíz y ésta es un número real.

Ejemplo 2: Determinar la naturaleza de las raíces de $x^2 + 5x + 8 = 0$

Solución. $a = 1$, $b = 5$ y $c = 8$

Calculamos el discriminante

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 25 - 32 = -7$$

En vista que el discriminante es negativo, la ecuación no tiene raíces reales. Sus raíces son complejas y conjugadas entre sí.

Ejemplo 3: Determinar la naturaleza de las raíces de $x^2 + 5x + 6 = 0$

Solución. $a = 1$, $b = 5$ y $c = 6$

Calculamos el discriminante

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

Como el discriminante es positivo, hay dos raíces reales distintas entre sí.

¶ Intentar lo siguiente

Determinar la naturaleza de las raíces de cada ecuación

a) $x^2 + 5x - 3 = 0$

b) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

c) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

Vértice de la función cuadrática.

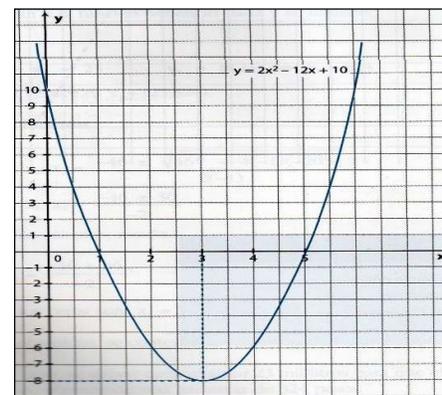
Con las expresiones $x_v = -b / 2.a$ y $y_v = f(x_v)$ podemos determinar el vértice de la ecuación cuadrática.

Ejemplo: $y = 2x^2 - 12x + 10$

Vértice: $x_v = \frac{-(-12)}{2 \times 2} = 3$ $y_v = f(3) = -8$

Ceros de la función: $x_1 = 5$ y $x_2 = 1$ estos valores se hallan utilizando la fórmula cuadrática.

La ordenada al origen: 10.



APLICACIONES DEL FACTOREO

Simplificación de Expresiones racionales

El cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se denomina expresión racional. Si estos polinomios tienen en común algún factor entonces es posible simplificarlo y escribir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en forma más sencilla.

Por ejemplo en la expresión $\frac{x^2 - 5x - 6}{x^3 + 1}$ se tiene que $x = -1$ es raíz del numerador y del denominador. Así ambos podrán ser escritos como producto donde uno de los factores será $x - (-1)$, es decir $x + 1$:

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{x^3 + 1} = \frac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{x-6}{x^2 - x + 1}$$

El numerador tiene una raíz $x = 6$ y el denominador tiene raíces complejas conjugadas. Como no comparten raíces, carecen de factores comunes y no es posible simplificar más la última expresión. Finalmente se obtiene que

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{x^3 + 1} = \frac{x-6}{x^2 - x + 1} \text{ para } x \neq -1$$

Nota: La condición $x \neq -1$ debe ser considerada porque las expresiones en ambos miembros son equivalentes para cualquier valor de x excepto para $x = -1$, donde la expresión original no está definida.

Intentar lo siguiente

Simplificar las siguientes expresiones racionales.

a) $\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - x - 2}$

b) $\frac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$