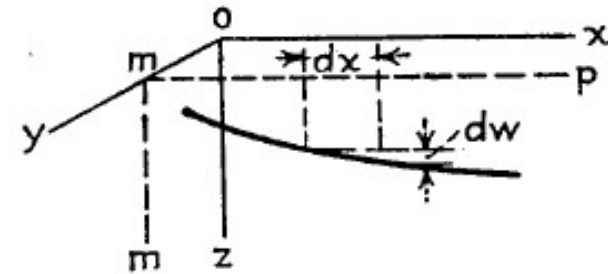
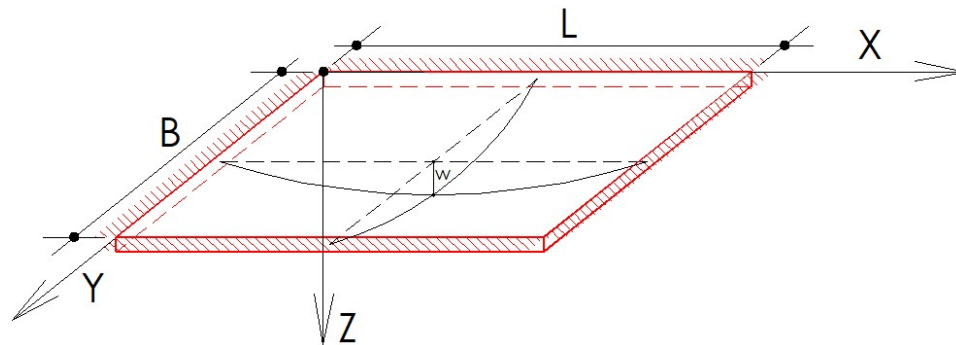


FLEXION PURA DE PLACAS

Pendiente de la superficie de deformada de placas bidireccionales

Estudiaremos placas

- 1-) con relaciones entre lados no mayores de 3
- 2-) la placa se encuentra apoyada en los 4 lados

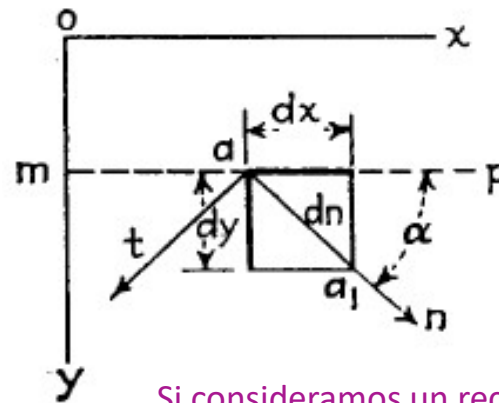
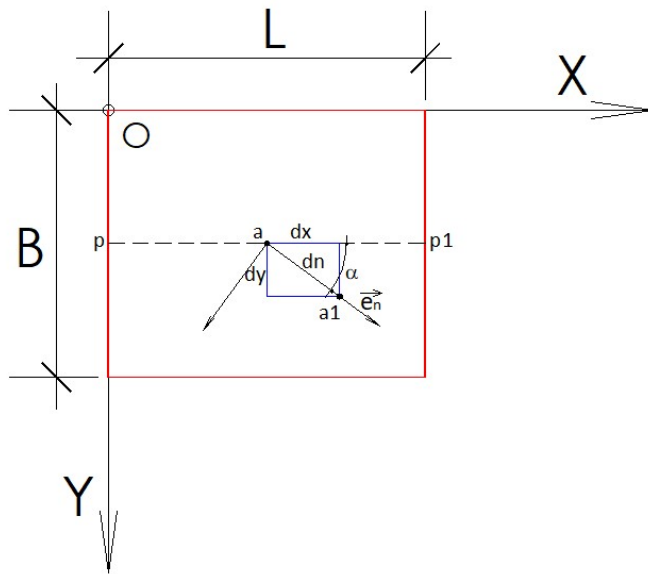


- La deformación de estas placas (flecha) representa una superficie de doble curvatura
- En cada punto la superficie de formada presenta dos pendientes ortogonales en las direcciones de los ejes

$$i_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad i_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

La diferencial total es: $dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$

Pendiente de la superficie de deformada de placas bidireccionales



Si consideramos un rectángulo elemental perteneciente a la placa cuya diagonal tiene la dirección del vector \mathbf{n}

$$\frac{dx}{dn} = \cos \alpha$$

$$\frac{dy}{dn} = \cos \beta = \text{sen} \alpha$$

Dividiendo la diferencial total por dn y reemplazando:

$$\frac{d\omega}{dn} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{dy}{dn} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \omega}{\partial y} \text{sen} \alpha$$

Tenemos entonces que la pendiente de la curva en la dirección n :

$$i_n = \frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{d\omega}{dn}$$

$$i_n = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \omega}{\partial y} \text{sen} \alpha$$

Pendiente de la superficie de deformada de placas bidireccionales

FILMINA 72

Si derivamos la ecuación de pendiente en función del ángulo α de la dirección teníamos:

$$i_n = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \omega}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha$$
$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \operatorname{sen} \alpha + \frac{\partial \omega}{\partial y} \cos \alpha$$

La dirección de la máxima pendiente se obtiene igualando a cero esta derivada

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \alpha_1 - \frac{\partial \omega}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha_1 = 0 \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \alpha_1 = \frac{\partial \omega}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha_1$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\frac{\partial \omega}{\partial x}}$$

Llevando el valor obtenido a: $\frac{d\omega}{dn} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \omega}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha$

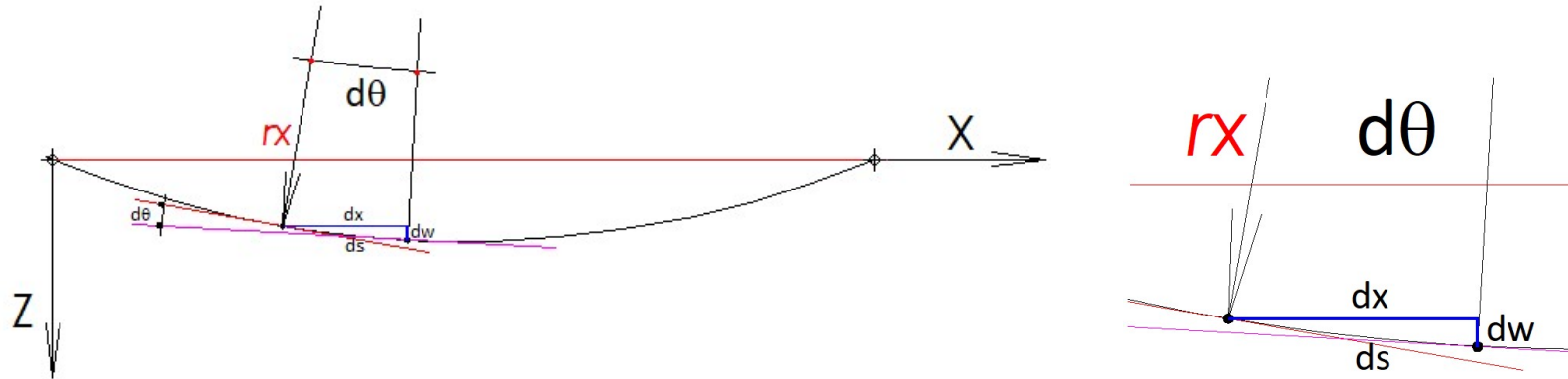
Se obtiene el valor de la máxima pendiente: $i_{\max} = \left(\frac{d\omega}{dn} \right)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2}$

Anulando: $\frac{d\omega}{dn} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \omega}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha$ $\frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \alpha_2 + \frac{\partial \omega}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha_2 = 0$

Se obtiene el ángulo de pendiente nula:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial y}}$$

Haciendo: $\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial y}} \cdot \frac{\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\frac{\partial \omega}{\partial x}} = -1$ Esto muestra que las direcciones de la máxima pendiente y la de pendiente nula son perpendiculares



Para placas con pequeños deformaciones y analizando para la dirección X tenemos:

$$r_x \cdot d\theta = ds \Rightarrow \frac{1}{r_x} = -\frac{d\theta}{ds}$$

Para un incremento positivo del ángulo tenemos un incremento negativo de la curvatura Y se considera curvatura negativa cuando tiene la concavidad hacia arriba

Para pequeñas deformaciones: $ds \cong dx$; $\theta \cong \tan \theta = \frac{d\omega}{dx}$

Nos queda entonces: $\frac{1}{r_x} = -\frac{d\left(\frac{d\omega}{dx}\right)}{dx} = -\frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$ $\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$

De la misma manera en Y: $\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$

Curvatura de la superficie de deformada de placas bidireccionales

FILMINA 74

Para una dirección cualquiera: $\frac{1}{r_n} = -\frac{\partial\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)$

Teniendo presente según vimos: $\frac{d\omega}{dn} = \frac{\partial\omega}{\partial n} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha$

Y considerando el operador de derivación según una dirección que ya vimos:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{sen}(\alpha)$$

Nos queda entonces:

$$\frac{1}{r_n} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{sen}(\alpha)\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial\omega}{\partial y}\operatorname{sen}(\alpha)\right) = -\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\cos^2(\alpha) + 2\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) + \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\operatorname{sen}^2(\alpha)\right)$$

$$\frac{1}{r_n} = \left(\frac{1}{r_x}\cos^2(\alpha) - \frac{1}{r_{xy}}\operatorname{sen}(2\alpha) + \frac{1}{r_y}\operatorname{sen}^2(\alpha)\right)$$

Donde: $\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$ **Curvatura de flexión en dirección X**

$\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$ **Curvatura de flexión en dirección Y**

$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2\omega}{\partial xy}$ **Curvatura de torsión**

Placas bidireccionales

Entonces la curvatura para una dirección **n** es:

$$\frac{1}{r_n} = \left(\frac{1}{r_x} \cos^2(\alpha) - \frac{1}{r_{xy}} \operatorname{sen}(2\alpha) + \frac{1}{r_y} \operatorname{sen}^2(\alpha) \right)$$

Para la dirección **t** que es ortogonal a la dirección **n** para la cual

usamos el ángulo : $\alpha + \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{r_t} = \left(\frac{1}{r_x} \operatorname{sen}^2(\alpha) + \frac{1}{r_{xy}} \operatorname{sen}(2\alpha) + \frac{1}{r_y} \cos^2(\alpha) \right)$$

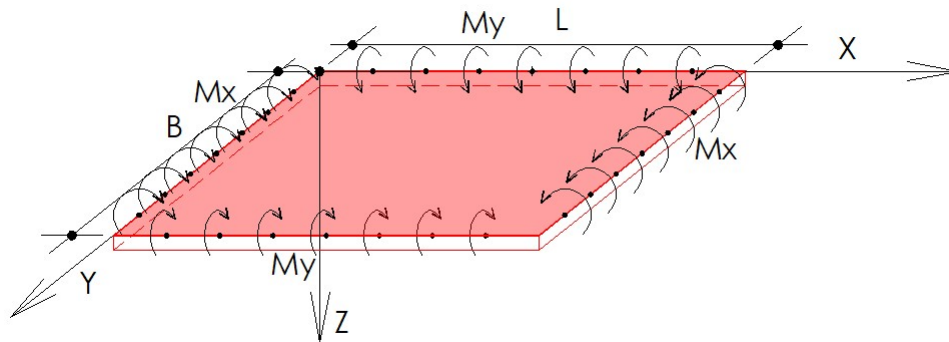
Sumando ambas ecuaciones: $\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}$

Se ve que la suma de dos curvaturas ortogonales es una constante para cada punto y se denomina curvatura del punto.

PLACAS RECTANGULARES BIDIRECCIONALES

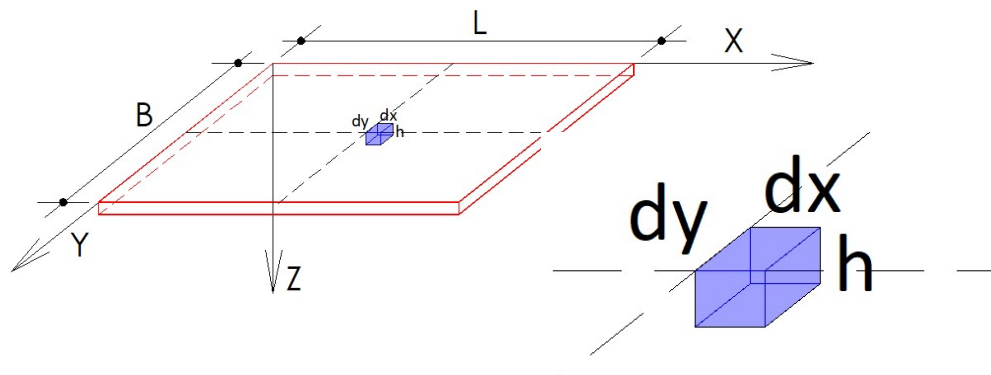
Relación entre momentos y flechas

Consideremos una placa rectangular apoyada en todo su contorno y sobre estos contornos un momento por unidad de longitud aplicado como se indica en la figura es decir provocando compresión en la zona superior del eje medio de la placa



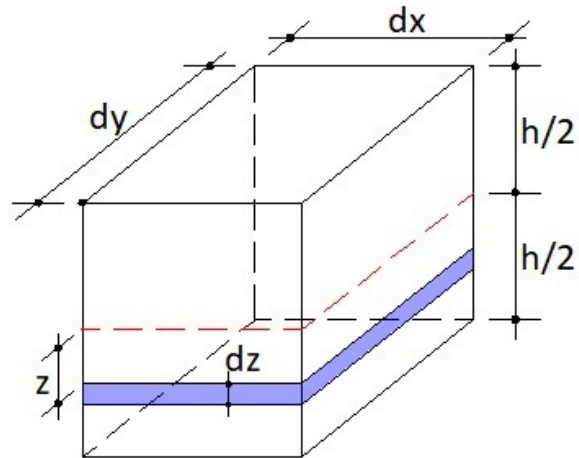
El momento es constante en toda la longitud L con un valor M_x y en todo el ancho B con un valor M_y

Analizaremos lo ocurrido en un elemento perteneciente a la placa limitado por planos ortogonales



Relación entre momentos y flechas

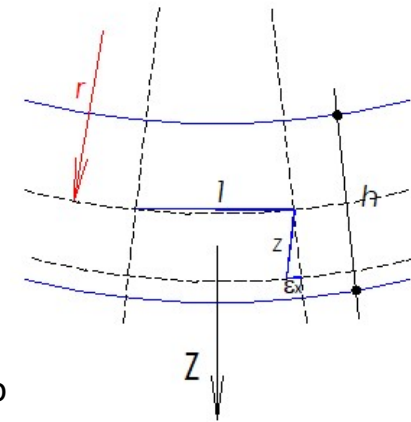
El elemento aislado de la placa:



Al igual que en las barras en flexión para ambas direcciones tenemos:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{r_x} \quad \varepsilon_y = \frac{z}{r_y}$$

Siendo z la distancia al eje neutro medio considerada y r_x, r_y los respectivos radios de curvatura



Utilizando la ley de Hooke: $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} \Rightarrow \frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_x + \mu \frac{\sigma_y}{E}$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \frac{\sigma_y}{E} = \varepsilon_y + \mu \frac{\sigma_x}{E}$$

Reemplazando: $\frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_x + \mu(\varepsilon_y + \mu \frac{\sigma_x}{E})$

$$\frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + \mu^2 \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\frac{\sigma_x}{E}(1 - \mu^2) = \varepsilon_x + \mu\varepsilon_y$$

Relación entre momentos y flechas

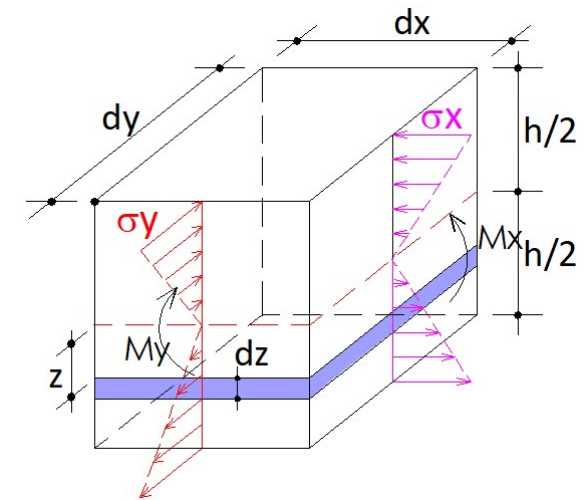
Finalmente la tensión en X queda en función de las curvaturas de la placa:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\mu^2)} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_x = \frac{Ez}{(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right)$$

Operando de la misma manera obtenemos la tensión en Y :

$$\sigma_y = \frac{Ez}{(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{r_y} + \mu \frac{1}{r_x} \right)$$



Estas tensiones proporcionales a la distancia al eje neutro se integran en las caras perpendiculares a X e Y dando lugar a pares por unidad de longitud

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \cdot dy \cdot dz = M_x dy$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \cdot dx \cdot dz = M_y dx$$

Relación entre momentos y flechas

Introduciendo la expresiones de las tensiones en las integrales de momentos

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \cdot dy \cdot dz = M_x dy \quad \sigma_x = \frac{Ez}{(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right) dy dz = \frac{E}{(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right) dy \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = M_x dy$$

$$\frac{E}{(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right) dy \left[\frac{h^3}{12} \right] = M_x dy = D \left(\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right) dy$$

Simplificando: $M_x = D \left(\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right)$

Haciendo lo mismo en dirección Y: $M_y = D \left(\frac{1}{r_y} + \mu \frac{1}{r_x} \right)$

Recordemos que: $\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$ $\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$

Nos queda finalmente los momentos en función de las flechas:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

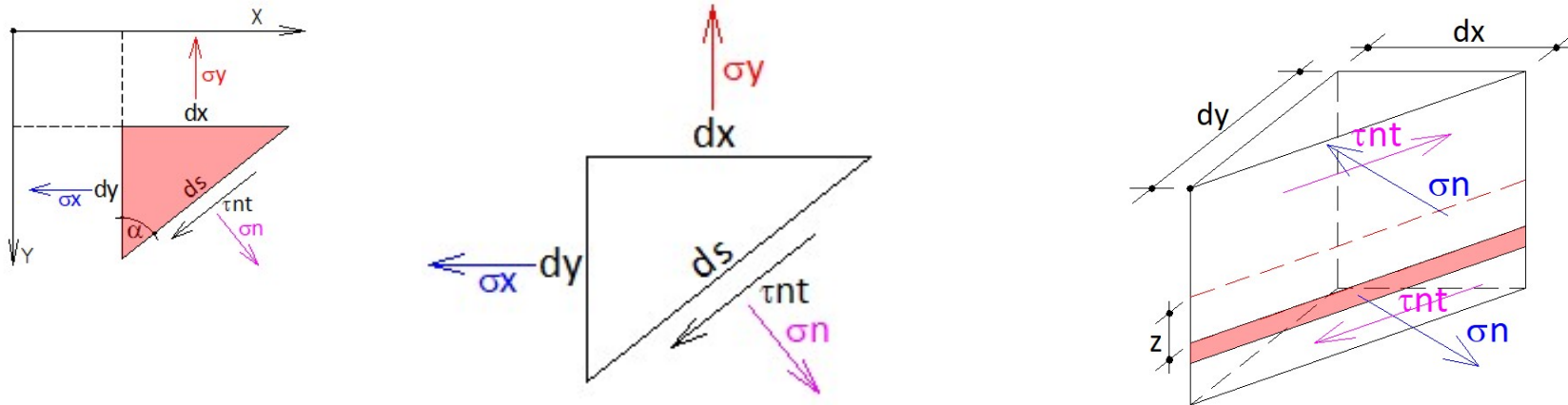
$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$$

Rigidez flexional de la placa

Momentos en una dirección cualquiera n

Consideremos las tensiones obrantes en un plano definido por su normal **n**



De las ecuaciones del estado doble de tensión $\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha$

$$\tau_{nt} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

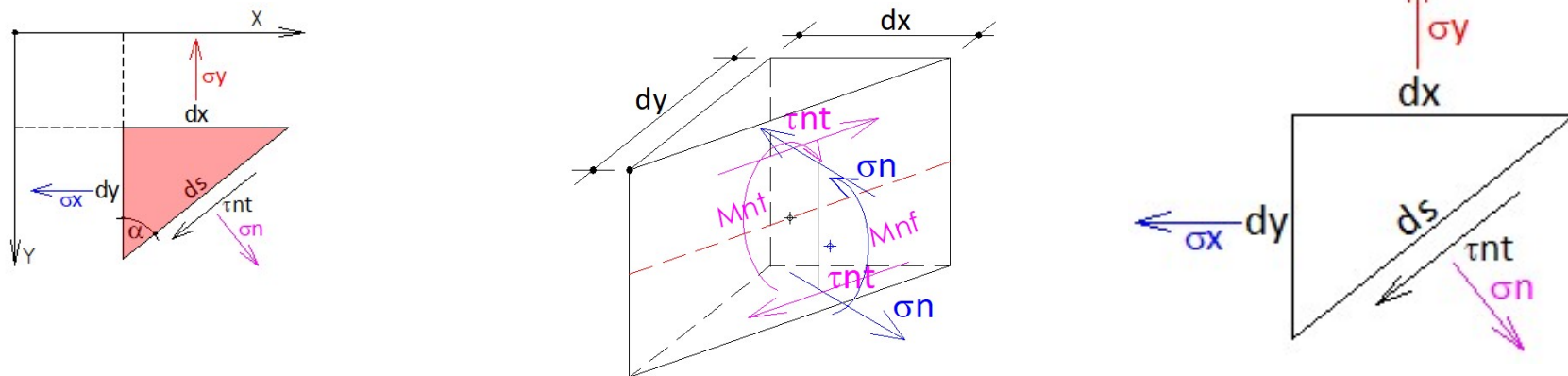
Integrando en el espesor de la placa la tensión axial σ_n :

$$M_n \cdot ds = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n z dz ds \quad \text{Momento flector en la dirección } \mathbf{n} \text{ por unidad de longitud}$$

$$M_n = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n z dz = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha$$

Momentos en una dirección cualquiera n

Consideremos ahora las tensiones tangenciales en ese plano



Provocan un momento torsor en el plano normal a **n**

Es decir este momento torsor hace rotar entre si dos planos infinitamente cerca

Integrando en el espesor de la placa las tensiones tangenciales:

$$\tau_{nt} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\cos^2 \alpha + \sigma_x \sin^2 \alpha$$

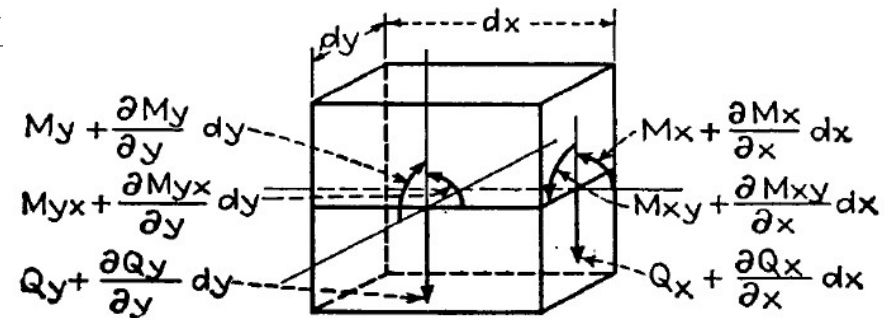
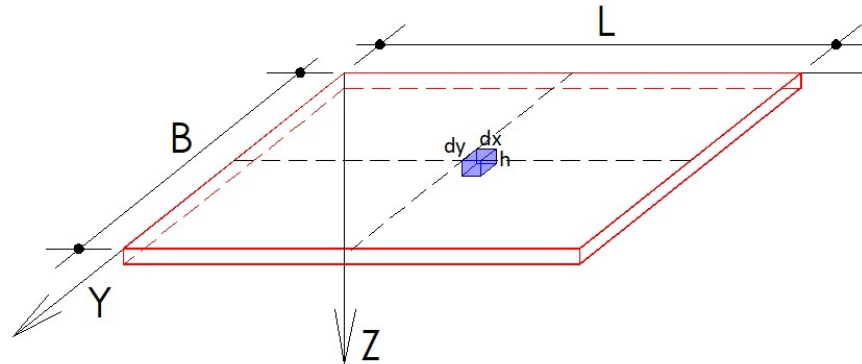
$$M_{nt} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{nt} z dz = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (M_x - M_y)$$

Observamos que conociendo la ecuación de la deformada de la placa $w(x,y)$ se obtienen los momentos flectores y torsores en los distintos puntos y las tensiones con:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6M_x}{h^2} \quad (\sigma_y)_{\max} = \frac{6M_y}{h^2} \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = \frac{3(M_x - M_y)}{h^2}$$

PLACA RECTANGULAR VINCULADA EN LOS LADOS

Ecuación diferencial de la deformada

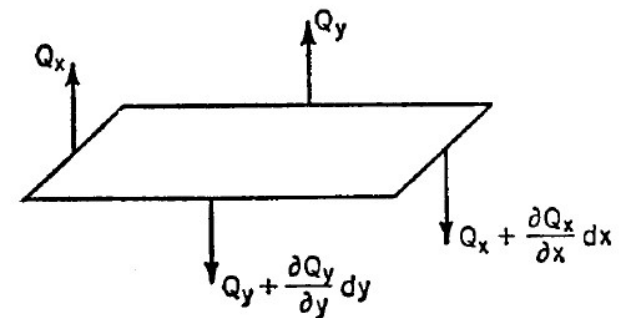
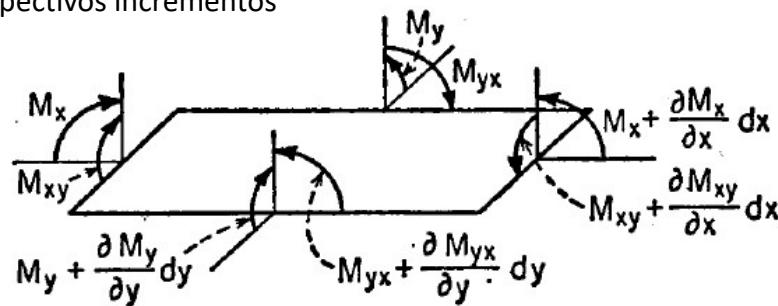


Estudiaremos la placa rectangular bidireccional apoyada en los 4 lados
Tomando un prisma elemental de lados dx, dy

En cada cara tenemos las siguientes acciones:

- Momentos flectores en las direcciones X e Y con sus respectivos incrementos
- Momentos torsores en las caras normales a X e Y con sus respectivos incrementos

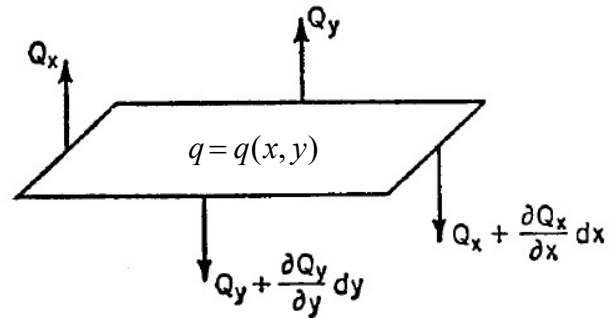
- Esfuerzos cortantes en las caras normales a X e Y con sus respectivos incrementos



Ecuación diferencial de la deformada

Tengamos presente que los esfuerzos de cortes son:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad ; \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$



$q = q(x, y)$ Es la carga por unidad de superficie función de x e y

Entonces la ecuación de equilibrio de traslación en la dirección Z es:

$$-Q_x dy + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy - Q_y dx + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dx + q dx dy = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

ECUACION DE EQUILIBRIO A LA TRASLACIÓN

Nos indica que la suma de las variaciones de esfuerzo cortante en las dos direcciones es igual a la carga actuante en la superficie de la placa en el prisma analizado

Ecuación diferencial de la deformada

Para el equilibrio de momento tomamos respecto del eje X:

$$-M_y dx + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy\right) dx - M_{xy} dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\right) dy - Q_x dy \frac{dy}{2} + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{dy}{2} - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx dy - q dx dy \frac{dy}{2} = 0$$

Estos términos se desprecian por ser de orden superior

Simplificando y agrupando:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - Q_y dx dy = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0$$

Tomando momento respecto del eje Y:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0$$

como: $\tau_{xy} = \tau_{yx} \Rightarrow M_{yx} = -M_{xy}$

Ecuación diferencial de la deformada

Si tomamos la ecuación de equilibrio de momentos respecto de X

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0$$

derivamos respecto de Y:

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial M_y^2}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial M_y^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y}$$

Haciendo lo mismo con la ecuación de momento respecto de X

Obtenemos:

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_x^2}{\partial x^2} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial M_x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Como vimos:
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

Trayendo los términos que acabamos de deducir:
$$\frac{\partial M_x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_y^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = -q$$

Como $M_{xy} = -M_{yx}$

Nos queda finalmente:

$$\frac{\partial M_x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial M_y^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = -q$$

Ecuación diferencial de la deformada

Entonces tenemos
$$\frac{\partial M_x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial M_y^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = -q$$

Teniendo presente las ecuaciones que vinculan los momentos con la deformada

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \qquad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$$

Para el torsor:

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo en la ecuación deducida nos queda finalmente:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Donde: $q = q(x, y)$ Carga por unidad de superficie para los distintos puntos de la placa

$\omega = \omega(x, y)$ Flecha elástica para cada punto de la placa

$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}$ Rigidez flexional de la placa

La resolución de esta ecuación diferencial conduce a la obtención de la elástica de la placa: $\omega = \omega(x, y)$

Ecuación diferencial de la deformada

Obtención de los esfuerzos cortantes

Teníamos las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \rightarrow Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \rightarrow Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

Utilizando las ecuaciones de momentos en función de la flecha

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$$

derivando:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \right)$$

→ Se anula al derivar respecto de X

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = -D \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \right)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D(1 - \mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right)$$

Llevando a las ecuaciones de cortantes Nos quedan los cortantes en función de las flechas:

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \right) + D(1 - \mu) \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \right) + D(1 - \mu) \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

Ecuación diferencial de la deformada

Entonces resolviendo la ecuación diferencial:
$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Los momentos se obtienen:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{Momento flector en el punto (x,y) en la dirección X}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad \text{Momento flector en el punto (x,y) en la dirección Y}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad \text{Momento torsor en el punto (x,y)}$$

Los esfuerzos de cortes se obtienen con:

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \right) + D(1 - \mu) \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \right) + D(1 - \mu) \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

Donde: $q = q(x, y)$

$\omega = \omega(x, y)$ Flecha elástica para cada punto de la placa

$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}$ Rigidez flexional de la placa

Ecuación diferencial de la deformada

Condiciones de borde

Para la resolución particular de la ecuación diferencial de placa deberemos establecer las condiciones de borde o contorno de la placa.

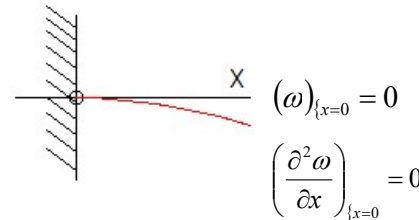
Se distinguen las siguientes condiciones de borde:

Borde empotrado

El apoyo **no puede rotar ni desplazarse** y se genera un momento de empotramiento

La flecha es nula: $(\omega)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$

La rotación es nula: $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$ $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$



Borde apoyado

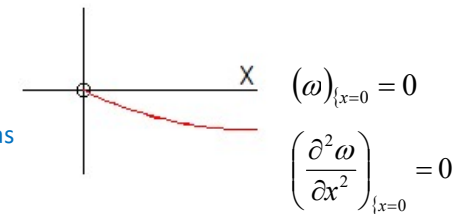
El apoyo **puede rotar pero no desplazarse** y se genera un momento de empotramiento

La flecha es nula: $(\omega)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$

El apoyo rota y el momento es nulo:

Es decir $M_x=0$ ó $M_y=0$ por lo tanto debe ser: $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$

[Los momentos son función de las derivadas segundas]



Borde libre

El apoyo **puede rotar y desplazarse**

En este tipo de apoyo

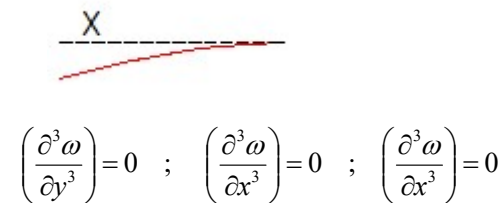
Puede rotar, desplazarse

Es decir un borde con ausencia de esfuerzo:

$$M_x = 0 \quad M_y = 0 \quad M_{xy} = 0$$

$$Q_x = 0 \quad Q_y = 0$$

[Los esfuerzos de corte son función de las derivadas terceras]



Ecuación diferencial de la deformada

Resolución a través de una serie trigonométrica

La carga sobre la placa $q=q(x, y)$ se puede expresar a través de una serie trigonométrica doble

$$q = q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen}\left(m \frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi y}{b}\right)$$

Donde los coeficientes a_{mn} de la serie se calculan con: $a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \operatorname{sen}\left(m \frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi y}{b}\right) dx dy$

Supongamos por ejemplo para desarrollar una placa con una carga constante por unidad de superficie en todos los puntos de la placa

Es decir:

$$q = q(x, y) = q_0 \quad \text{Carga uniforme en toda la placa}$$

Calculamos los coeficientes a_{mn}

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \operatorname{sen}\left(m \frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi y}{b}\right) dx dy = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \operatorname{sen}\left(m \frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi y}{b}\right) dx dy$$

Integrando respecto de y

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \operatorname{sen}\left(m \frac{\pi x}{a}\right) \left[-\frac{b}{\pi n} \cos\left(n \frac{\pi y}{b}\right) \right]_0^b dx$$

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \operatorname{sen}\left(m \frac{\pi x}{a}\right) \left[-\frac{b}{\pi n} \cos(n\pi) + \frac{b}{\pi n} \cos(0) \right] dx$$

Resolución a través de una serie trigonométrica

Integrando respecto de x

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \left[\frac{b}{\pi n} - \frac{b}{\pi n} \cos(n\pi) \right] \int_0^a \operatorname{sen} \left(m \frac{\pi x}{a} \right) dx$$

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \left[\frac{b}{\pi n} - \frac{b}{\pi n} \cos(n\pi) \right] \left[\frac{a}{\pi m} - \frac{a}{\pi m} \cos(m\pi) \right]$$

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \left(\frac{b}{\pi n} \right) (1 - \cos n\pi) \left(\frac{a}{\pi m} \right) (1 - \cos m\pi)$$

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \frac{a}{\pi m} \frac{b}{\pi n} (1 - \cos n\pi)(1 - \cos m\pi) = \frac{4q_0}{\pi^2 m n} (1 - \cos n\pi)(1 - \cos m\pi)$$

De esta fórmula surge que si m ó n es par siempre es: $(1 - \cos n\pi)(1 - \cos m\pi) = 0$
 $a_{mn} = 0$

 m y n deberán tomar los valores

m: 1,3,5,7,....

n: 1,3,5,7,....

Con m ó n impar nos queda siempre: $(1 - \cos n\pi)(1 - \cos m\pi) = 4$ Por ejemplo: $(1 - \cos 1\pi)(1 - \cos 3\pi) = 4$

Entonces nos queda: $a_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 m n}$ definido distinto de cero para índices impares

La ecuación final de la carga es: $q_o = q(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^2 m n} \sum \sum \operatorname{sen} \left(m \frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(n \frac{\pi y}{b} \right)$

Resolución de la ecuación diferencial de la placa

Placa apoyada en sus cuatro lados

Carga uniforme sobre la placa

La ecuación diferencial de la placa es:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

La ecuación de la carga es:

$$q_o = q(x, y) = \frac{16 q_0}{\pi^2 m n} \sum \sum \operatorname{sen} \left(m \frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(n \frac{\pi y}{b} \right)$$

Entonces nos queda:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \frac{16 q_0}{\pi^2 m n} \sum \sum \operatorname{sen} \left(m \frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(n \frac{\pi y}{b} \right)$$

La solución de esta ecuación diferencial para las condiciones de este tipo de placa mencionada es:

$$\omega = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(m \frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(n \frac{\pi y}{b} \right)}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Ecuaciones de momentos flectores en la placa

Derivando la ecuación de la elástica con respecto a x y con respecto a y:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\frac{m\pi}{a} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\frac{n\pi}{b} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right)}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Haciendo las derivadas segundas respecto de x e y :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = -\frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -\frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\frac{n^2 \pi^2}{b^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\frac{m \cdot n \cdot \pi^2}{a b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

Nos quedan entonces las ecuaciones de momentos

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$M_x = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \mu \frac{n^2}{b^2} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$$

$$M_y = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{n^2}{b^2} + \mu \frac{m^2}{a^2} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

Y el momento torsor:

$$M_{xy} = D(1 - \mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$$

$$M_{xy} = (1 - \mu) \frac{16 q_0}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\frac{mn}{ab} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

Ecuaciones de esfuerzos cortantes en la placa

Haciendo las derivadas terceras de la deformada:

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} = -\frac{16 q_0}{\pi^3 D} \sum_m \sum_n \frac{\frac{m^3}{a^3} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} = -\frac{16 q_0}{\pi^3 D} \sum_m \sum_n \frac{\frac{n^3}{b^3} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y^2} = -\frac{16 q_0}{\pi^3 D} \sum_m \sum_n \frac{\frac{m \cdot n^2}{ab^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

Habíamos visto que los esfuerzos cortantes se podían expresar en función de la deformada:

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \right) + D(1 - \mu) \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \right) + D(1 - \mu) \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

Nos queda entonces para esta placa:

$$Q_x = \frac{16q_0}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\frac{m^3}{a^3} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} - \frac{16q_0}{\pi^3} (1 - \mu) \sum_m \sum_n \frac{\frac{m.n^2}{ab^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$Q_x = \frac{16q_0}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{m^3}{a^3} + (1 - \mu) \frac{m.n^2}{ab^2}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$Q_y = \frac{16q_0}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{n^3}{b^3} + (1 - \mu) \frac{n.m^2}{ba^2}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

TABLAS ADIMENSIONALES PARA LA RESOLUCIÓN DE PLACAS

Existen en los textos tablas para los distintos casos de placas apoyadas y empotradas en sus lados para distintos casos de cargas

Las tablas han sido construidas a través de la resolución de la ecuación diferencial de la placa por distintos métodos matemáticos resolutivos de la misma

En las tablas están tabulados factores adimensionales que nos permiten calcular las solicitaciones y flechas

Los factores adimensionales se obtienen en función de la relación de lados para las distintas solicitaciones y deformación de la placa

Las solicitaciones y flechas se obtienen multiplicando los factores obtenidos de la tabla por alguna de las dimensiones de la placa y la carga. Todos los valores intervinientes en unidades consistentes y que nos darán las unidades del resultado

En el cálculo de la flecha de la placa interviene la rigidez flexional que debe calcularse previamente en unidades consistentes

TABLAS ADIMENSIONALES PARA LA RESOLUCIÓN DE PLACAS

Resolución de placa bidireccional apoyada en los cuatro lados

DATOS

b: lado mayor de la placa
 a: lado menor de la placa
 D: Rigidez flexional de placa
 q: carga por unidad de superficie

RESULTADOS

Wmax: flecha máxima en centro de placa
 Mx, My: Momentos máximos en centro de tramo
 Qx, Qy: Cortantes máximos en apoyo
 Vx, Vy: Reacción de descarga en apoyo
 R: Reacción puntual en vértices de placa

Factores $\alpha, \beta, \gamma, \delta, n$ para placas rectangulares simplemente apoyadas uniformemente cargadas
 $\nu = 0,3$

b/a	$w_{\text{máx}}$ $= \alpha \frac{qa^4}{D}$ α	$(M_x)_{\text{máx}}$ $= \beta qa^2$ β	$(M_y)_{\text{máx}}$ $= \beta_1 qa^2$ β_1	$(Q_x)_{\text{máx}}$ $= \gamma qa$ γ	$(Q_y)_{\text{máx}}$ $= \gamma_1 qa$ γ_1	$(V_x)_{\text{máx}}$ $= \delta qa$ δ	$(V_y)_{\text{máx}}$ $= \delta_1 qa$ δ_1	R $= nqa^2$ n
1,0	0,00406	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,00485	0,0554	0,0493	0,360	0,347	0,440	0,440	0,070
1,2	0,00564	0,0627	0,0501	0,380	0,353	0,455	0,453	0,074
1,3	0,00638	0,0694	0,0503	0,397	0,357	0,468	0,464	0,079
1,4	0,00705	0,0755	0,0502	0,411	0,361	0,478	0,471	0,083
1,5	0,00772	0,0812	0,0498	0,424	0,363	0,486	0,480	0,085
1,6	0,00830	0,0862	0,0492	0,435	0,365	0,491	0,485	0,086
1,7	0,00883	0,0908	0,0486	0,444	0,367	0,496	0,488	0,088
1,8	0,00931	0,0948	0,0479	0,452	0,368	0,499	0,491	0,090
1,9	0,00974	0,0985	0,0471	0,459	0,369	0,502	0,494	0,091
2,0	0,01013	0,1017	0,0464	0,465	0,370	0,503	0,496	0,092
3,0	0,01223	0,1189	0,0406	0,493	0,372	0,505	0,498	0,093
4,0	0,01282	0,1235	0,0384	0,498	0,372	0,502	0,500	0,094
5,0	0,01297	0,1246	0,0375	0,500	0,372	0,501	0,500	0,095
∞	0,01302	0,1250	0,0375	0,500	0,372	0,500	0,500	0,095

TABLAS ADIMENSIONALES PARA LA RESOLUCIÓN DE PLACAS

Resolución de placa bidireccional apoyada en los cuatro lados

DATOS

- b: 600 cm
- a: 500 cm
- E: 250000 kg/cm²
- h: 10cm
- q: 0.5 kg/cm²

CALCULO

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad [D] = [Kg.cm^2]$$

$$D = 22893773 [Kg.cm^2]$$

$$w_{max} = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D} = 0,00564 \cdot \frac{0,5 \cdot 500^4}{D} = 7,69 [cm]$$

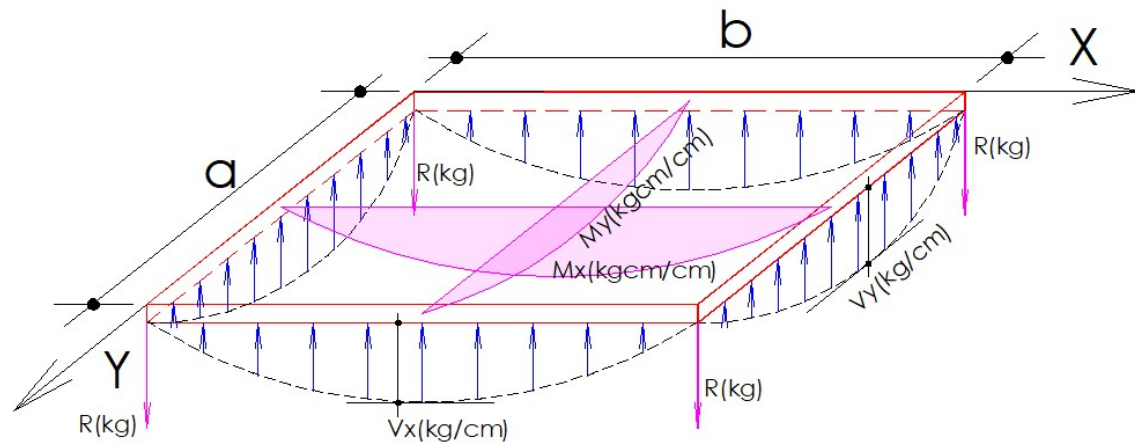
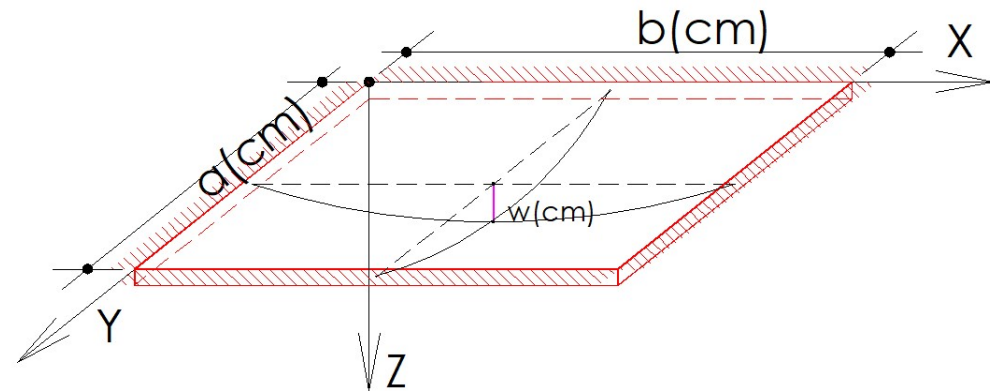
$$M_x = \beta \cdot q \cdot a^2 = 0,0627 \cdot 0,5 \cdot 500^2 = 7838 [kgcm/cm]$$

$$M_y = \beta_1 \cdot q \cdot a^2 = 0,0501 \cdot 0,5 \cdot 500^2 = 6263 [kgcm/cm]$$

$$V_x = \delta \cdot q \cdot a = 0,455 \cdot 0,5 \cdot 500 = 113,8 [kg/cm]$$

$$V_y = \delta_1 \cdot q \cdot a = 0,453 \cdot 0,5 \cdot 500 = 113,3 [kg/cm]$$

$$R = n \cdot q \cdot a^2 = 0,074 \cdot 0,5 \cdot 500^2 = 9250 [kg]$$



TABLAS ADIMENSIONALES PARA LA RESOLUCIÓN DE PLACAS

Resolución de placa bidireccional empotrada en los cuatro lados

DATOS

b: lado mayor de la placa
 a: lado menor de la placa
 D: Rigidez flexional de placa
 q: carga por unidad de superficie

RESULTADOS

Wmax: flecha máxima en centro de placa
 M_x, M_y: Momentos positivos máximos en centro de tramo
 M_x, M_y: Momentos negativos máximos en apoyos

Flechas y momentos flectores en placa rectangular uniformemente cargada con bordes empotrados

$$\nu = 0,3$$

b/a	$(w)_{x=0, y=0}$	$(M_x)_{x=a/2, y=0}$	$(M_y)_{x=0, y=b/2}$	$(M_x)_{x=0, y=0}$	$(M_y)_{x=0, y=0}$
1,0	$0,00126qa^4/D$	$-0,0513qa^2$	$-0,0513qa^2$	$0,0231qa^2$	$0,0231qa^2$
1,1	$0,00150qa^4/D$	$-0,0581qa^2$	$-0,0538qa^2$	$0,0264qa^2$	$0,0231qa^2$
1,2	$0,00172qa^4/D$	$-0,0639qa^2$	$-0,0554qa^2$	$0,0299qa^2$	$0,0228qa^2$
1,3	$0,00191qa^4/D$	$-0,0687qa^2$	$-0,0563qa^2$	$0,0327qa^2$	$0,0222qa^2$
1,4	$0,00207qa^4/D$	$-0,0726qa^2$	$-0,0568qa^2$	$0,0349qa^2$	$0,0212qa^2$
1,5	$0,00220qa^4/D$	$-0,0757qa^2$	$-0,0570qa^2$	$0,0368qa^2$	$0,0203qa^2$
1,6	$0,00230qa^4/D$	$-0,0780qa^2$	$-0,0571qa^2$	$0,0381qa^2$	$0,0193qa^2$
1,7	$0,00238qa^4/D$	$-0,0799qa^2$	$-0,0571qa^2$	$0,0392qa^2$	$0,0182qa^2$
1,8	$0,00245qa^4/D$	$-0,0812qa^2$	$-0,0571qa^2$	$0,0401qa^2$	$0,0174qa^2$
1,9	$0,00249qa^4/D$	$-0,0822qa^2$	$-0,0571qa^2$	$0,0407qa^2$	$0,0165qa^2$
2,0	$0,00254qa^4/D$	$-0,0829qa^2$	$-0,0571qa^2$	$0,0412qa^2$	$0,0158qa^2$
∞	$0,00260qa^4/D$	$-0,0833qa^2$	$-0,0571qa^2$	$0,0417qa^2$	$0,0125qa^2$