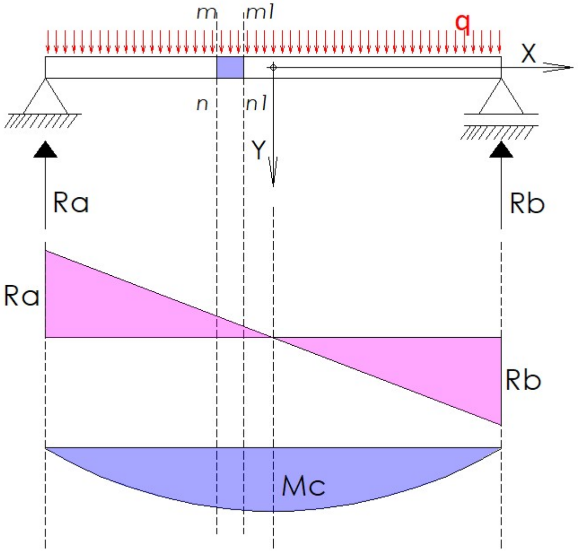
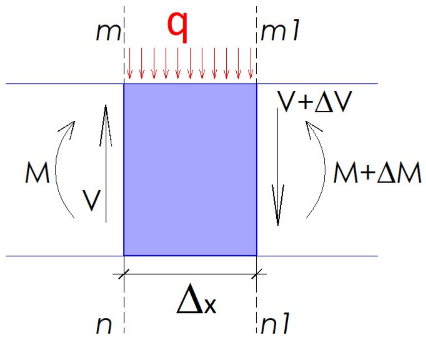
ESTUDIO DE VIGAS ELASTICAS

Relación entre Momento flector y esfuerzo de corte





Planteando el equilibrio de fuerzas verticales de un segmento de la viga

$$+V - q\Delta x - (V + \Delta V) = 0 \quad => \quad q\Delta x = -\Delta V \quad (1)$$

Para los momentos $+M + q\Delta x \dfrac{\Delta x}{2} - (M + \Delta M) + (V + \Delta V)\Delta x = 0$

$$q\frac{\Delta x^2}{2} - \Delta M + V\Delta x + \Delta V\Delta x = 0$$

$$q\frac{\Delta x}{2} + V + \Delta V = \frac{\Delta M}{\Delta x} => \boxed{\frac{dM}{dx} = V}$$

$$\text{para} \quad \Delta x \to 0$$

$$\text{para} \quad \Delta V \to 0$$

De la ecuación (1)

$$q\Delta x = \Delta V \quad => \boxed{\frac{\Delta V}{\Delta x} = -q}$$

$$\text{para} \quad \Delta x \to 0$$

$$\text{para} \quad \Delta V \to 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

Determinación de la tensión axil en una viga

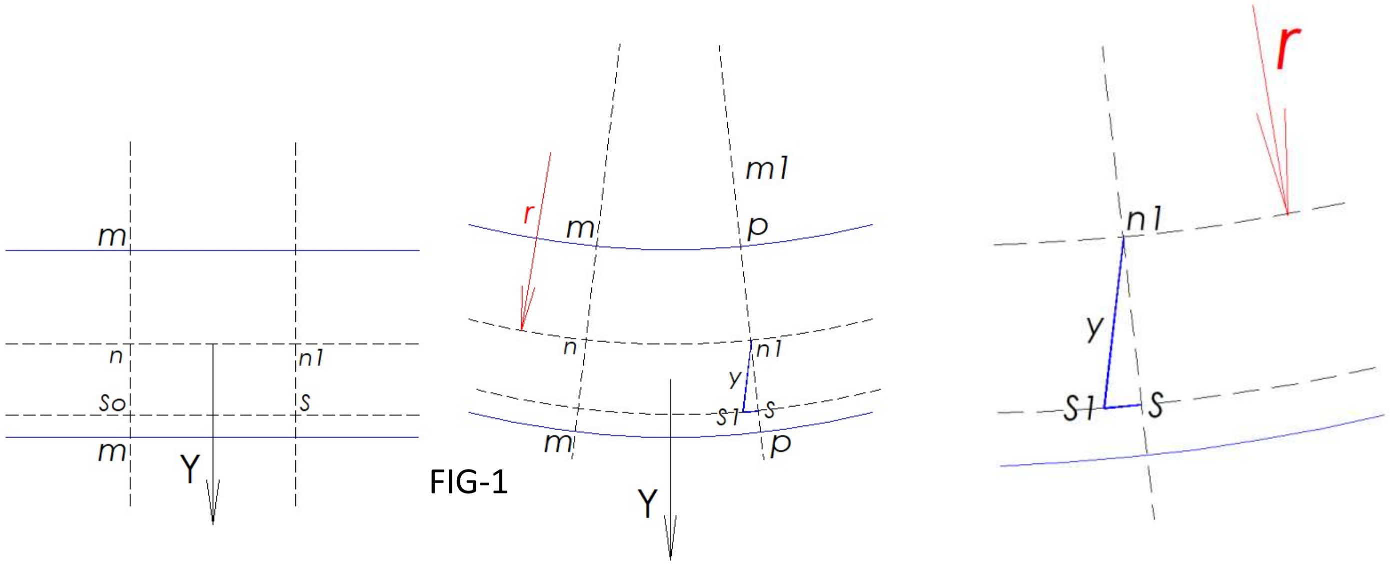


FIG-1

La deformación específica de una fibra a una distancia **y** del eje neutro

De la FIG-1 tenemos:

$$\varepsilon_x = \frac{S - S_1}{nn_1} = \frac{y}{r} \quad => \quad \varepsilon_x = \frac{y}{r}$$

Transversalmente ocurre: $\varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x = -\mu\frac{y}{r}$

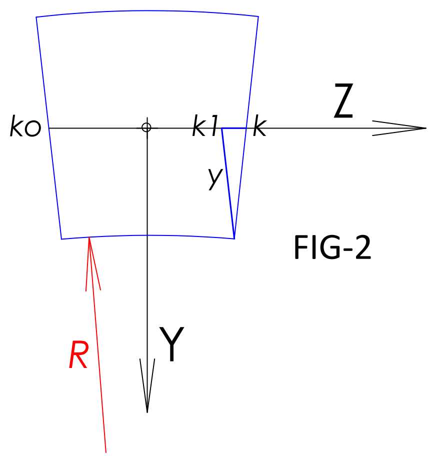


FIG-2

De la FIG-2:

$$\varepsilon_z = \frac{k1 - k}{ko - k}$$

$$\varepsilon_z = \frac{ko - k}{R} = \frac{k1 - k}{y}$$

Despejando en la primera y llevando a la segunda obtenemos: $\varepsilon_z = -\frac{y}{R}$

Dijimos que: $\varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x = -\mu\dfrac{y}{r}$

Por otro lado: $\varepsilon_z = -\dfrac{y}{R}$

Comparando ambas ecuaciones obtenemos la relación entre el radio de curvatura longitudinal y el transversal:

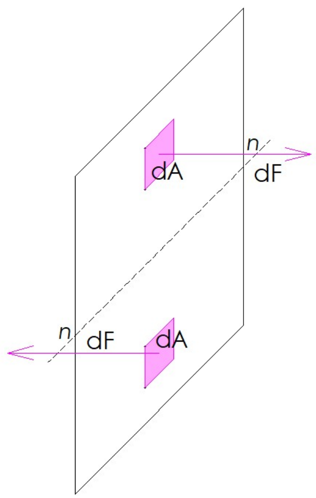
$$R = \frac{r}{\mu}$$

La tensión axil en X a una distancia **y** de la fibra neutra es:

$$\boxed{\sigma_x = E.\varepsilon_x = E\frac{y}{r}}$$

El equilibrio de fuerzas en la dirección X indica que:

$$\int E\frac{y}{r}dA = \frac{E}{r}\int y.dA = 0$$



Por otro lado:

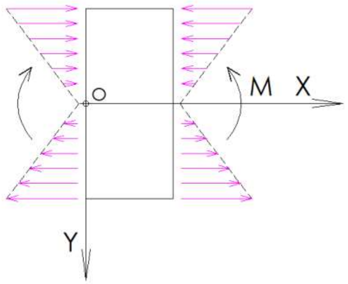
$$\int \frac{E}{r}y^2 dA = M = \frac{E}{r}I_z$$

Despejando:

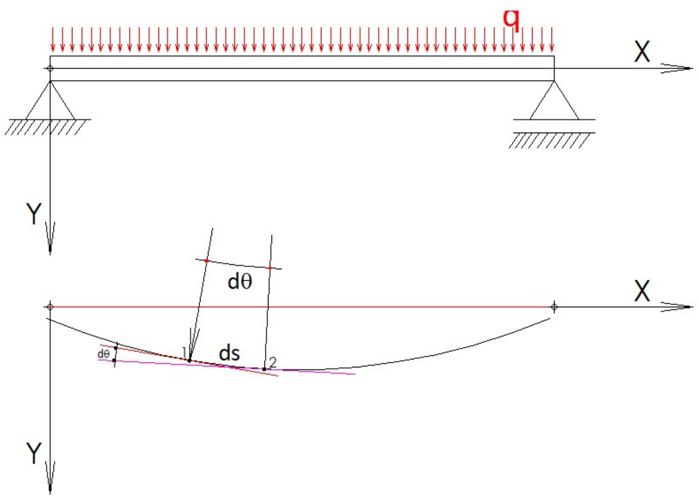
$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}$$

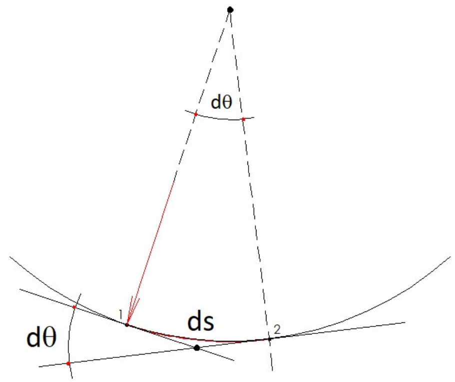
Finalmente nos queda la tensión:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M.y}{I_z}}$$



ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA ELASTICA DE UNA VIGA





Se analiza la curvatura y sus tangentes en dos secciones cercanas y considerando que la curvatura es pequeña como ocurre en las estructuras reales

Hemos visto que: $$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}$$

En el esquema vemos que: $$\mathrm{ds} = \mathrm{r}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{1}{\mathrm{r}} = \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}}\right)$$

Analizando los signos para el sistema de ejes planteado:

Para un incremento positivo de **ds** el ángulo **d**θ es negativo

El momento se considera positivo (+) cuando la concavidad va hacia arriba por lo tanto la curvatura es positiva

Con esta consideración de signos queda: $$\frac{1}{r}=\left(-\frac{d\theta}{ds}\right)$$

Incremento negativo

Curvatura positiva

Para pequeñas deformaciones se puede considerar: $ds \cong dx$

$$\theta = tg\theta = \frac{dy}{dx}$$

Se obtiene: $$\frac{1}{r}=-\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{1}{r}=-\frac{d^2y}{dx^2}$$

Llevando a : $\frac{1}{r}=\frac{M}{EI_z}$ Nos queda la ecuación diferencial de la elástica de la viga: $$\boxed{E.I_z\frac{d^2y}{dx^2}=-M}$$

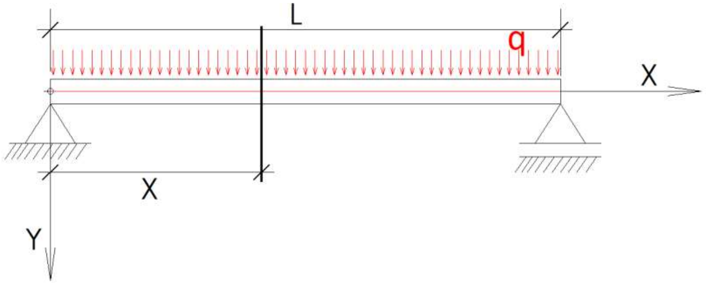
Derivando y teniendo presente : $\frac{dM}{dx}=V$, $\frac{dV}{dx}=-q$ Nos queda: $$\boxed{\begin{array}{l} EI_z\frac{d^3y}{dx^3}=-V \\ EI_z\frac{d^4y}{dx^4}=q \end{array}}$$

Si la viga es esbelta y las deformaciones son mayores se debe usar : $\theta = arc.tg\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Nos queda la ecuación diferencial para vigas esbeltas : $$\frac{1}{r}=-\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\left(arctg\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\frac{dx}{ds}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

ESTUDIO DE LA ELASTICA DE VIGA

Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida

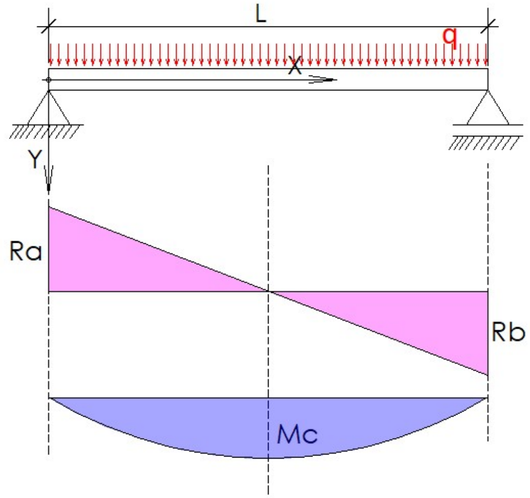


Las reacciones de la viga son: $R_a = R_b = \dfrac{qL}{2}$

El esfuerzo de corte y el momento para una sección que se encuentra a una distancia X del apoyo izquierdo:

$$Q = \frac{qL}{2} - q.x = q(\frac{L}{2} - x)$$

$$M = \frac{qx}{2}(L - x)$$



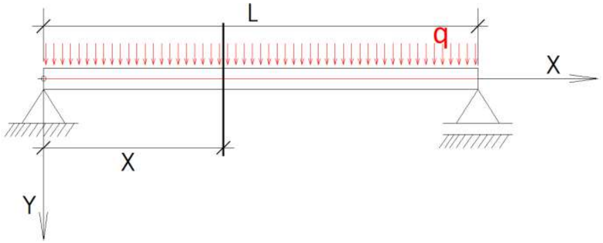
Trabajando la ecuación nos queda: $M = \dfrac{qxL}{2} - \dfrac{qx^2}{2}$

Para el centro del tramo es: $x = \dfrac{L}{2}$

$$M = \frac{q.L^2}{8}$$

ESTUDIO DE LA ELASTICA DE VIGA

Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida



Entonces tenemos la ecuación de momentos: $M = \frac{qxL}{2} - \frac{qx^2}{2}$

La ecuación diferencial de la elástica es: $E.I_z \frac{d^2y}{dx^2} = -M$

Reemplazando: $E.I_z \frac{d^2y}{dx^2} = -q\frac{Lx}{2} + q\frac{x^2}{2}$

Para obtener la curva de la elastica o deformada de la viga que es la función y=f(x)

Se debe integra las ecuación diferencial de la elástica

Integrando: $E.I_z \frac{dy}{dx} = \int \left(-q\frac{Lx}{2} + q\frac{x^2}{2} \right) dx = -q\frac{Lx^2}{4} + q\frac{x^3}{6} + C_1$

La constante C1 se obtiene para el centro del tramo, es decir para X=L/2:

$$x = \frac{L}{2}$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ Para el centro del tramo la pendiente de la elástica es nula

ESTUDIO DE LA ELASTICA DE VIGA

Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida

Dando el valor de X=L/2 en la ecuación y despejando C1 se obtiene: $C_1 = \frac{qL^3}{24}$

Reemplazando: $E.I_z \frac{dy}{dx} = -q\frac{Lx^2}{4} + q\frac{x^3}{6} + q\frac{L^3}{24}$ **Ecuación de las rotaciones**

La rotación máxima es en los apoyos o sea para X=0 ó X=L:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{máx} = \theta \max = \frac{qL^3}{24EI_z}$$

Integrando nuevamente: $E.I_z y = -q\frac{Lx^3}{12} + q\frac{x^4}{24} + q\frac{x.L^3}{24} + C_2$

La constante C2 se obtiene en los apoyos para X=0 ó X=L
Para ambos puntos la deformación o deflexión es nula o sea Y=0

Reemplazando y despejando obtenemos: $C_2 = 0$

Finalmente la ecuación de la elástica queda:

$$\boxed{y = \frac{q}{24EI_z}\left(L^3x - 2Lx^3 + x^4\right)}$$

La deflexión máxima es en el centro de la luz, es decir X=L/2 cuyo valor nos da reemplazando:

$$y_{\max} = \frac{5}{384}\frac{q}{EI_z}L^4$$