DERIVACIÓN DEL POLINOMIO DE 5to GRADO

El polinomio de 5to grado:
$$\phi_5 = \frac{a_5}{20}x^5 + \frac{b_5}{12}x^4 y + \frac{c_5}{6}x^3 y^2 + \frac{d_5}{6}x^2 y^3 + \frac{e_5}{12}x y^4 + \frac{f_5}{20}y^5$$

Las derivadas primeras:
$$\frac{\partial \phi_5}{\partial x} = \frac{a_5}{4}x^4 + \frac{b_5}{3}x^3 y + \frac{c_5}{2}x^2 y^2 + \frac{d_5}{3}x y^3 + \frac{e_5}{12}y^4$$
$$\frac{\partial \phi_5}{\partial y} = \frac{b_5}{12}x^4 + \frac{c_5}{3}x^3 y + \frac{d_5}{2}x^2 y^2 + \frac{e_5}{3}x y^3 + \frac{f_5}{4}y^4$$

Las derivadas segundas:
$$\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 x y^2 + \frac{d_5}{3}y^3$$
$$\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3}x^3 + d_5 x^2 y + e_5 x y^2 + f_5 y^3$$
$$\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = \frac{b_5}{3}x^3 + c_5 x^2 y + d_5 x y^2 + \frac{e_5}{3}y^3$$

Las derivadas terceras:
$$\frac{\partial^3 \phi_5}{\partial x^3} = 3a_5 x^2 + 2b_5 x y + c_5 y^2$$
$$\frac{\partial^3 \phi_5}{\partial y^3} = d_5 x^2 + 2e_5 x y + 3 f_5 y^2$$
$$\frac{\partial^3 \phi_5}{\partial x^2 \partial y} = b_5 x^2 + 2c_5 x y + d_5 y^2$$

DERIVACIÓN DEL POLINOMIO DE 5to GRADO

El polinomio de 5to grado:
$$\phi_5 = \frac{a_5}{20}x^5 + \frac{b_5}{12}x^4 y + \frac{c_5}{6}x^3 y^2 + \frac{d_5}{6}x^2 y^3 + \frac{e_5}{12}xy^4 + \frac{f_5}{20}y^5$$

Las derivadas cuartas:
$$\frac{\partial^4 \phi_5}{\partial x^4} = 6a_5 x + 2b_5 y$$
$$\frac{\partial^4 \phi_5}{\partial y^4} = 2e_5 x + 6f_5 y$$
$$\frac{\partial^4 \phi_5}{\partial x^2 \partial y^2} = 2c_5 x + 2d_5 y$$

Llevando las derivadas 4tas a la ecuación diferencial de la placa y operando:
$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

$$6a_5 x + 2b_5 y + 2e_5 x + 6f_5 y + 4c_5 x + 4d_5 y = 0$$
$$x(6a_5 + 2e_5 + 4c_5) + y(2b_5 + 6f_5 + 4d_5) = 0$$

$$6a_5 + 2e_5 + 4c_5 = 0$$
$$2b_5 + 6f_5 + 4d_5 = 0$$

Despejando e_5 y f_5
$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5)$$
$$f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5)$$

Los coeficientes a_5, b_5 y c_5 son independientes es decir pueden tomar cualquier valor

ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA DADO POR POLINOMIO DE 5to GRADO

El polinomio de 5to grado: $$\phi_5 = \frac{a_5}{20}x^5 + \frac{b_5}{12}x^4 y + \frac{c_5}{6}x^3 y^2 + \frac{d_5}{6}x^2 y^3 + \frac{e_5}{12}xy^4 + \frac{f_5}{20}y^5$$

Tiene sus tensiones:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3}x^3 + d_5 x^2 y + e_5 xy^2 + f_5 y^3$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 xy^2 + \frac{d_5}{3}y^3$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -(\frac{b_5}{3}x^3 + c_5 x^2 y \ + d_5 xy^2 + \frac{e_5}{3}y^3)$$

Donde vimos que e_5 *y* f_5 son constantes dependientes, reemplazando con las ecuaciones relacionantes:

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5 x)$$

$$f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5)$$

Nos quedan las tensiones:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3}x^3 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5)xy^2 - \frac{1}{3}(b_5 + 2d_5)y^3$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 xy^2 + \frac{d_5}{3}y^3$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -\frac{b_5}{3}x^3 - c_5 x^2 y - d_5 xy^2 + \frac{1}{3}(2c_5 + 3a_5)y^3$$

Los coeficientes a_5, b_5, c_5 *y* d_5 son independientes es decir pueden tomar cualquier valor

ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA DADO POR POLINOMIO DE 5to GRADO

El polinomio de 5to grado: $$\phi_5 = \frac{a_5}{20}x^5 + \frac{b_5}{12}x^4 y + \frac{c_5}{6}x^3 y^2 + \frac{d_5}{6}x^2 y^3 + \frac{e_5}{12}x y^4 + \frac{f_5}{20}y^5$$

Tiene sus tensiones:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3}x^3 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5)xy^2 - \frac{1}{3}(b_5 + 2d_5)y^3$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 x y^2 + \frac{d_5}{3}y^3$$

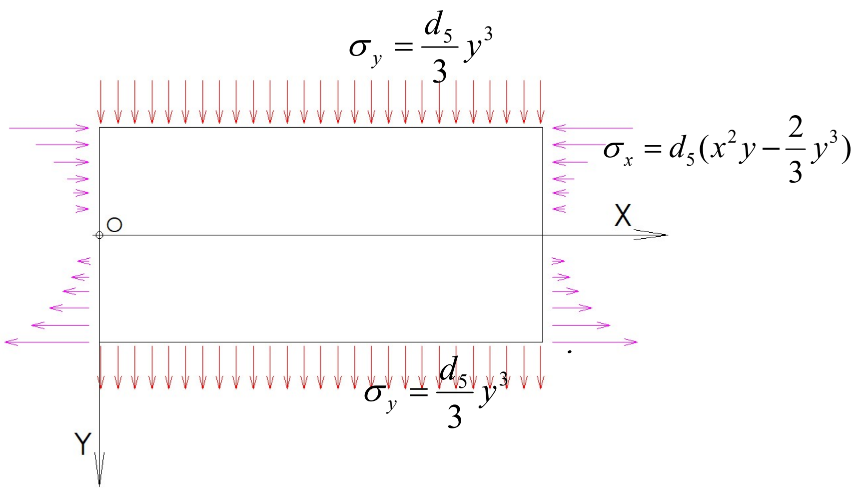
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -\frac{b_5}{3}x^3 - c_5 x^2 y - d_5 x y^2 + \frac{1}{3}(2c_5 + 3a_5)y^3$$

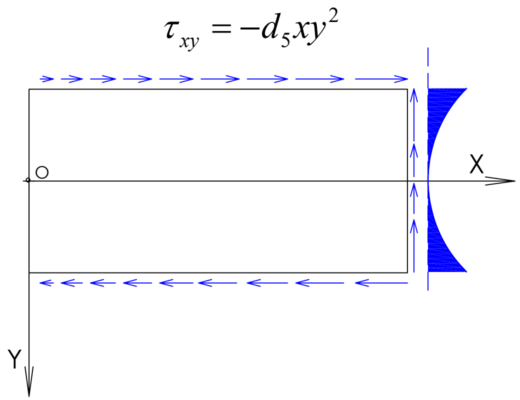
Los coeficientes son arbitrarios, entonces tomando todos iguales a cero excepto $d_5 \neq 0$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = d_5(x^2 y - \frac{2}{3}y^3)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = \frac{d_5}{3}y^3$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -d_5 x y^2$$





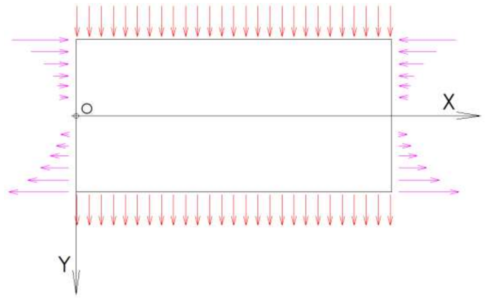
ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA DADO POR POLINOMIO DE 5to GRADO

Los coeficientes son arbitrarios, entonces tomando todos iguales a cero excepto $d_5 \neq 0$

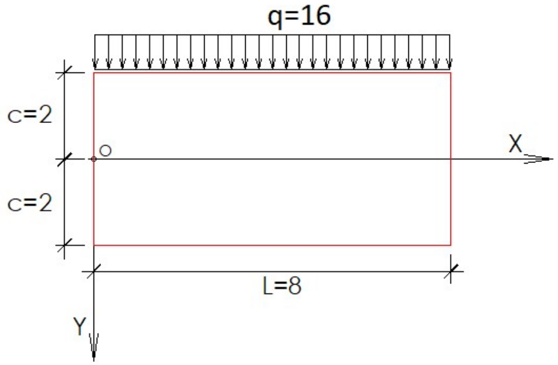
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = d_5(x^2 y - \frac{2}{3} y^3)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = \frac{d_5}{3} y^3$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -d_5 x y^2$$



Ejemplo:



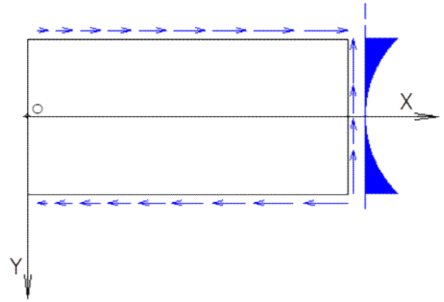
Para C=-2 $\sigma_y = \frac{d_5}{3}(-2)^3 + q = 0$

Si q=16 $\frac{d_5}{3}(-2)^3 + = -16$

$$d_5(-8) + = 3(-16)$$

$$d_5(-8) + = -16$$

$$d_5(-8) + = -\frac{1}{8} 3(-16) = 6$$



$$\sigma_y = \frac{6}{3} y^3 = 2y^3$$

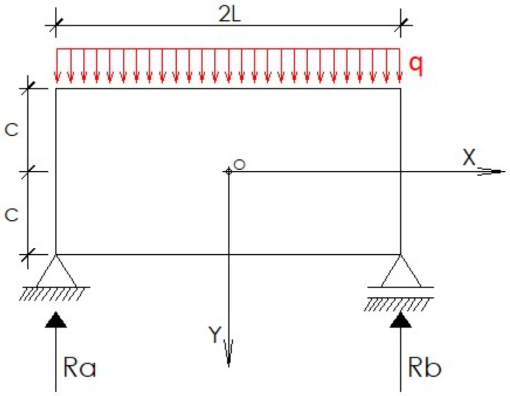
$$\sigma_x = d_5(x^2 y - \frac{2}{3} y^3) = 6(x^2 y - \frac{2}{3} y^3) = 6x^2 y - 4y^3$$

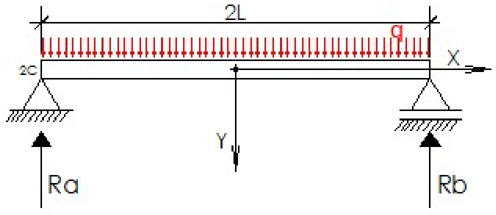
$$\tau_{xy} = -d_5 x y^2 = -6xy^2$$

ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA/ VIGA CON CARGA UNIFORME

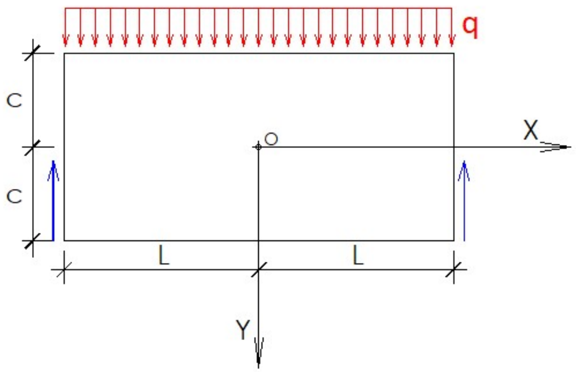
Se nos presenta el siguiente problema de una estructura de viga utilizando una placa

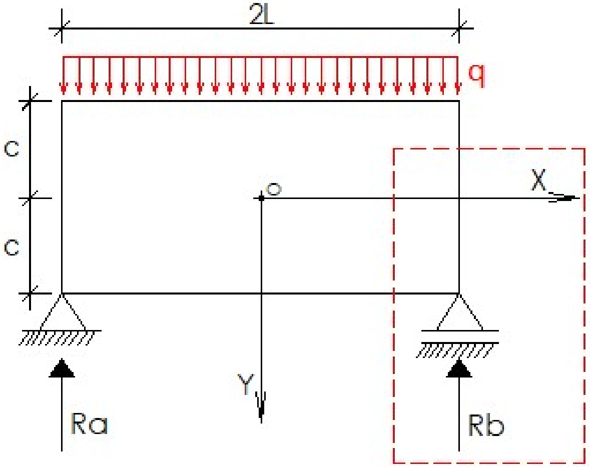
Viga placa: VIGA DE GRAN ALTURA

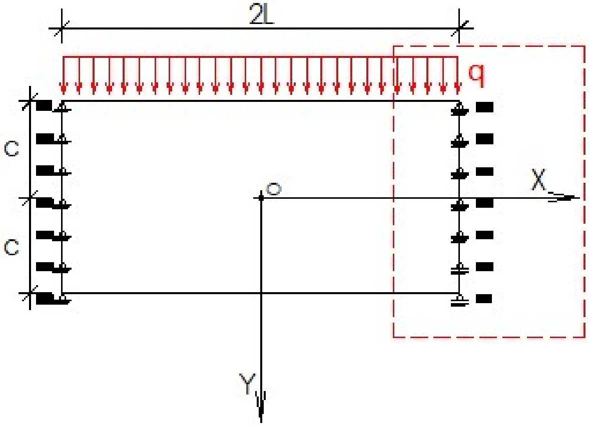


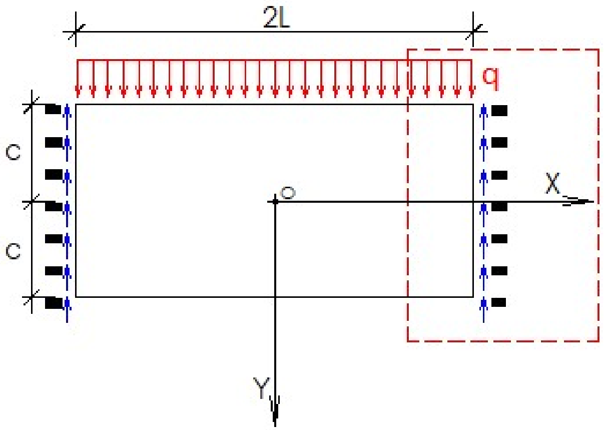


VIGA NORMAL





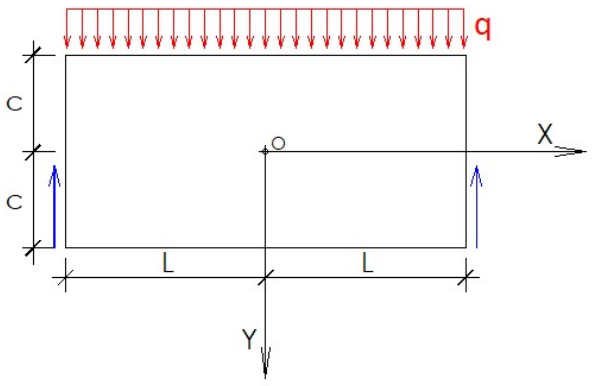




ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA/ VIGA CON CARGA UNIFORME

Lo resolveremos con la superposición de ecuaciones polinómicas

Viga placa: VIGA DE GRAN ALTURA



$\rho g=0$ fuerzas másicas se consideran nulas

Las condiciones de contorno son:

CONDICIONES SOBRE BORDES LONGITUDINALES

$$\tau_{xy} = 0 \quad para \quad y = \pm c$$

$$\sigma_y = 0 \quad para \quad y = +c$$

$$\sigma_y = -q \quad para \quad y = -c$$

Cara de aplicación de la carga q

CONDICIONES PARA LAS CARAS LATERALES

$$\int_{-c}^{c} \tau_{xy}.dy = \pm q.L$$

Las reacciones en las caras

$$\int_{-c}^{c} \sigma_x.dy = 0$$

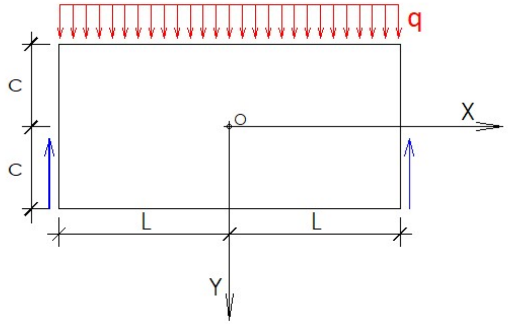
No hay fuerzas horizontales en X

$$\int_{-c}^{c} \sigma_x y.dy = 0$$

No hay momentos aplicados en las caras extremas

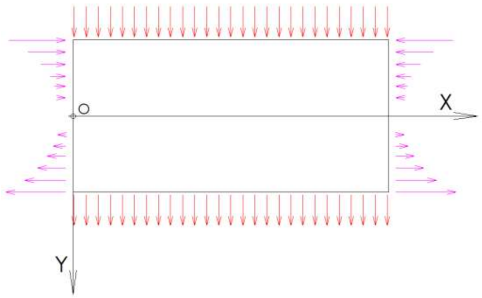
ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA/ VIGA CON CARGA UNIFORME

Viga placa: VIGA DE GRAN ALTURA



$\rho g=0$ fuerzas másicas se consideran nulas

Consideraremos la solución con un polinomio de 5to grado al que le iremos adicionando otras soluciones

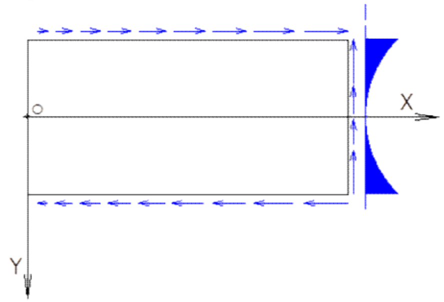


Tomaremos un polinomio de 5to grado con todos los coeficientes nulo excepto $d_5 \neq 0$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = d_5 (x^2 y - \frac{2}{3} y^3)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = \frac{d_5}{3} y^3$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -d_5 x y^2$$

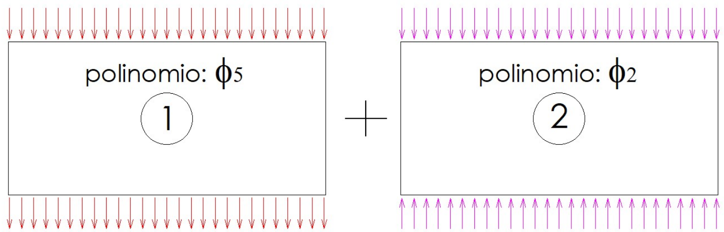


Para anular las tensiones axiales en la cara inferior Adicionamos un polinomio de 2do grado con solo a2 distinta de cero

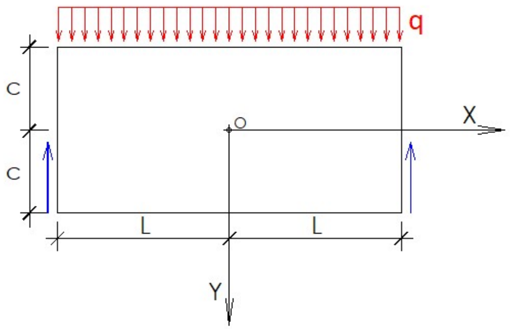
$$\sigma_y = 0 \quad para \quad y = +c$$

$$\sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3 + a_2$$

$$\sigma_y = \text{solucion}\,\phi_5 + \text{solucion}\,\phi_2$$



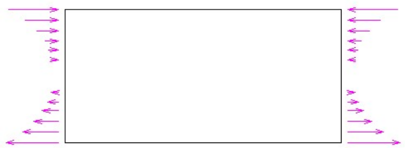
ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA/ VIGA CON CARGA UNIFORME

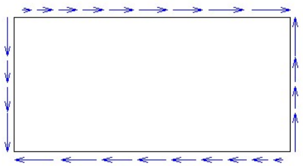


Vemos que el polinomio de 5to grado tiene tensiones axiles en X y tensiones tangenciales

$$\sigma_x = d_5 (x^2 y - \frac{2}{3} y^3)$$

$$\tau_{xy} = -d_5 x y^2$$





Para anular las tensiones tangenciales inferiores que son variables en X sumaremos la solución de un polinomio de 3er grado con b3 distinta de cero $\tau_{xy} = -b_3 x$

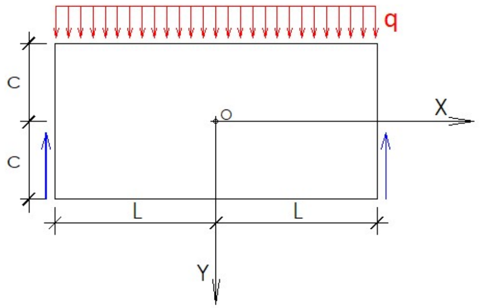
$$\tau_{xy} = \text{solucion}\, \phi_3$$

Pero esta solución para anular las tensiones tangenciales inferiores nos adiciona tensiones axiles en Y $\sigma_y = b_3 y$

$$\sigma_y = \text{solucion}\, \phi_3$$

ENTONCES NUESTRO POLINOMIO FINAL ES LA SUMA: $\phi = \text{solucion}\, \phi_2 + \text{solucion}\, \phi_3 + \text{solucion}\, \phi_5$

ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA/ VIGA CON CARGA UNIFORME



ENTONCES NUESTRO POLINOMIO FINAL ES LA SUMA:

$$\phi = \text{solucion}\,\phi_2 + \text{solucion}\,\phi 3 + \text{solucion}\,\phi 5$$

Las tensiones nos quedan:

$$\sigma_x = d_5(x^2 y - \frac{2}{3} y^3)$$

$$\sigma_y = \frac{d_5}{3} y^3 + b_3 y + a_2$$

$$\tau_{xy} = -d_5 x y^2 - b_3 x$$

Aplicando las condiciones de contorno para las caras longitudinales:

$$\tau_{xy} = 0 \quad para \quad y = \pm c$$

$$\sigma_y = 0 \quad para \quad y = +c$$

$$\sigma_y = -q \quad para \quad y = -c$$

1-) para la primera condición:

$$\tau_{xy} = -d_5 x y^2 - b_3 x$$

$$\text{para } y = c$$

$$-d_5 x c^2 - b_3 x = 0 \quad \Rightarrow -d_5 c^2 - b_3 = 0$$

2-) para la segunda condición:

$$\sigma_y = \frac{d_5}{3} y^3 + b_3 y + a_2$$

$$\text{para } y = c$$

$$\frac{d_5}{3} y^3 + b_3 y + a_2 = 0 \quad \Rightarrow \frac{d_5}{3} c^3 + b_3 c + a_2 = 0$$

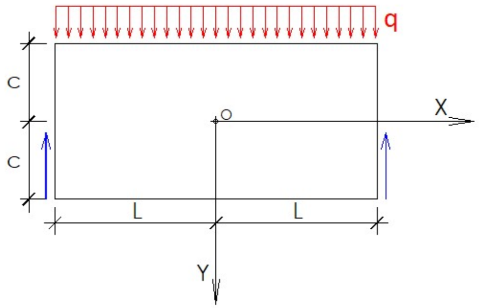
3-) para la tercera condición:

$$\sigma_y = \frac{d_5}{3} y^3 + b_3 y + a_2$$

$$\text{para } y = -c$$

$$\frac{d_5}{3} y^3 + b_3 y + a_2 = -q \quad \Rightarrow -\frac{d_5}{3} c^3 - b_3 c + a_2 = -q$$

ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA/ VIGA CON CARGA UNIFORME



ENTONCES NUESTRO POLINOMIO FINAL ES LA SUMA:

$$\phi = \text{solucion}\,\phi_2 + \text{solucion}\,\phi_3 + \text{solucion}\,\phi_5$$

De las condiciones de contorno en las caras longitudinales: $\tau_{xy} = 0 \;\; para \quad y = \pm c$

$$\sigma_y = 0 \;\; para \quad y = +c$$

$$\sigma_y = -q \;\; para \quad y = -c$$

Surge el siguiente sistema para las constantes del polinomio:

$$-d_5 c^2 - b_3 = 0$$

$$\frac{d_5}{3} c^3 + b_3 c + a_2 = 0$$

$$-\frac{d_5}{3} c^3 - b_3 c + a_2 = -q$$

Cuya solución es:

$$b_3 = \frac{3}{4}\frac{q}{c}$$

$$a_2 = -\frac{q}{2}$$

$$d_5 = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}$$

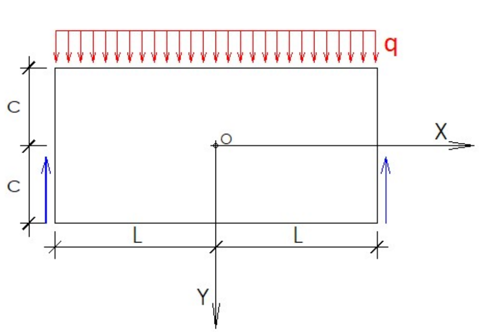
Las tensiones finalmente nos quedan:

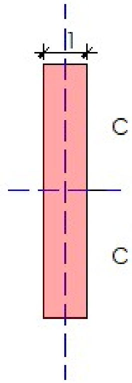
$$\sigma_x = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(x^2 y - \frac{2}{3} y^3)$$

$$\sigma_y = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(c^2 - y^2)x$$

ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA/ VIGA CON CARGA UNIFORME





$$I = \frac{8c^3}{12} = \frac{2}{3}c^3$$

Reemplazando en las ecuaciones de tensiones:

$$\sigma_x = -\frac{q}{2I}(x^2 y - \frac{2}{3}y^3)$$

$$\sigma_y = -\frac{q}{2I}(\frac{1}{3}y^3 - c^2 y + \frac{2}{3}c^3)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x$$

Se puede comprobar que estas ecuaciones de tensiones satisfacen:

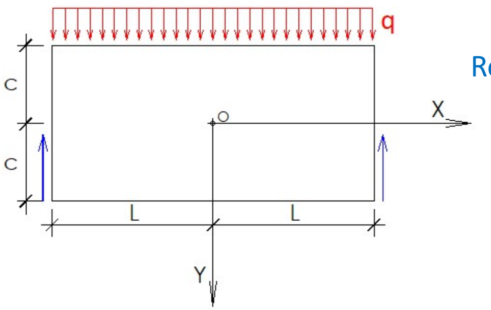
$$\int_{-c}^{c} \tau_{xy}.dy = \pm q.L$$

$$\int_{-c}^{c} \sigma_x.dy = 0$$

Se podría comprobar también que no se cumple: $$\int_{-c}^{c} \sigma_x y.dy = 0$$

Para que se cumpla se debe superponer una solución que anule el momento resultante de esa integral y para ello se tomará un polinomio de tercer grado con d3 distinto de cero: $\sigma_x = d_3 y$

ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA/ VIGA CON CARGA UNIFORME



Resolviendo la integral entre +c y -c: $\int_{-c}^{c}\sigma_x y.dy = \int_{-c}^{c}\left[-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(x^2 y-\frac{2}{3}y^3)+d_3 y\right]y.dy = 0$

$$d_3 = \frac{3}{4}\frac{q}{c}\left(\frac{L^2}{c^2}-\frac{2}{5}\right)$$

$$\sigma_x = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(x^2 y-\frac{2}{3}y^3)+d_3 y = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(x^2 y-\frac{2}{3}y^3)+\frac{3}{4}\frac{q}{c}\left(\frac{L^2}{c^2}-\frac{2}{5}\right)y$$

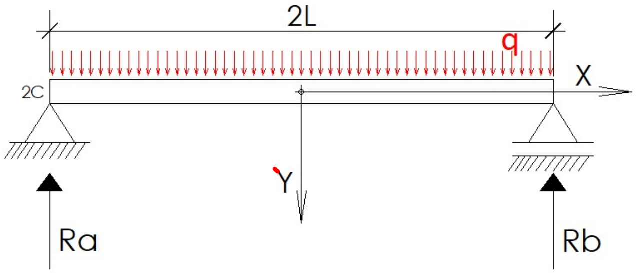
Finalmente operando las tensiones axiles en X $\sigma_x = \boxed{\frac{q}{2I}(L^2-x^2)y} + \boxed{\frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{2}{5}c^2 y\right)}$

Teoría elemental de vigas

Corrección por ser placa

Esta corrección es menor en la medida que la placa tiene mayor relación entre el largo y el alto

Teoría elemental de vigas



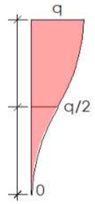
$$I = \frac{2}{3}c^3$$

$$R_a = q\frac{2L}{2} = qL$$

$$M = qL(L-x)-q\frac{(L-x)^2}{2} = qL(L-x)-\frac{qL^2}{2}+qLx-\frac{qx^2}{2} = \frac{qL^2}{2}-\frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2}(L^2-x^2)$$

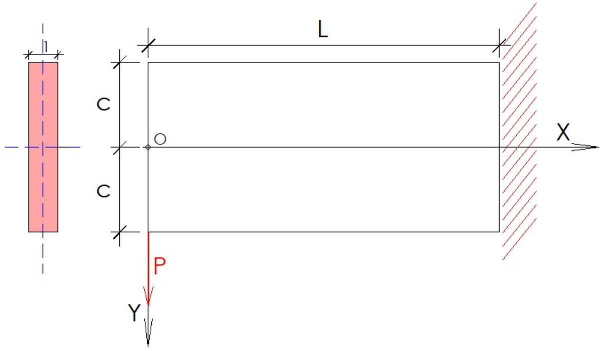
$$\sigma_x = \frac{M}{I}y = \boxed{\frac{q}{2I}(L^2-x^2)y}$$

Esta teoría elemental ignora las tensiones sy verticales que se disipan en la altura de la viga



ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA EN VOLADIZO CON CARGA PUNTUAL EN EL EXTREMO

Lo resolveremos con la superposición de ecuaciones polinómicas



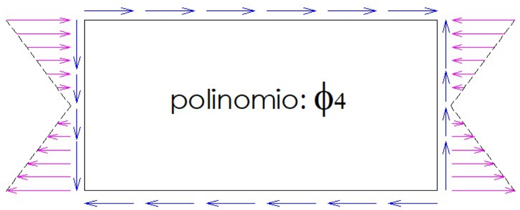
P: carga sobre el extremo de la placa a través de tensiones tangenciales

P: es la única carga actuante (son nulas las cargas gravitacionales de peso)

Se propone la solución superponiendo al polinomio de 4to grado con solo d4 distinto de cero cuyas ecuaciones de tensión son:

$$\sigma_x = d_4 xy$$
$$\sigma_y = 0$$
$$\tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2$$

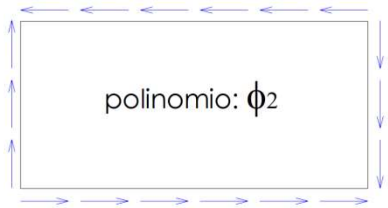
solucion polinomio ϕ_4



Para anular las tensiones tangenciales en las caras inferior y superior se le suma el polinomio de 2do grado con b2 distinta de cero

$$\tau_{xy} = -b2$$

solucion polinomio ϕ_2

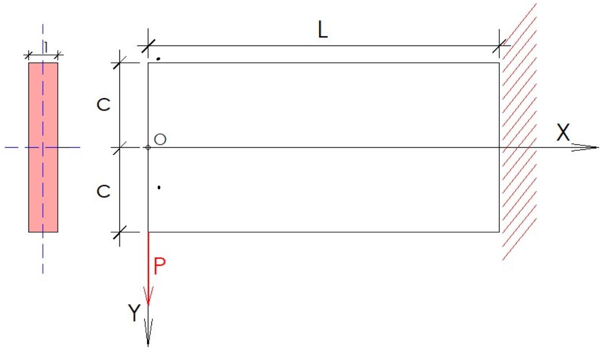


Nos quedan las tensiones finales con la suma de los dos polinomios:

$$\sigma_x = d_4 xy$$
$$\sigma_y = 0$$
$$\tau_{xy} = -b2 - \frac{d_4}{2} y^2$$

solucion polinomio $\phi_2 + \phi_4$

ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA EN VOLADIZO CON CARGA PUNTUAL EN EL EXTREMO



$$\sigma_x = d_4 xy$$
$$\sigma_y = 0$$
$$\tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2$$

solucion polinomio $\phi_2 + \phi_4$

Aplicando las condiciones de contorno para las caras longitudinales donde las tensiones son nulas:

$$\tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2 = 0$$

para $y = \pm c$

Se deduce el valor de d4: $d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}$

Por otro lado la condición sobre el extremo cargado X=0 es que la suma de las tensiones tangenciales es igual a –P:

$$-\int_{-c}^{c} \tau_{xy}.dy = \int_{-c}^{c} (b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2).dy = P$$

Se deduce el valor de b2: $b_2 = \frac{3P}{4c}$

Sustituyendo:

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3} xy$$
$$\sigma_y = 0$$
$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c}(1 - \frac{y^2}{c^2})$$

Como: $I = \frac{2}{3} c^3$

$$\sigma_x = -\frac{P}{I} xy$$
$$\sigma_y = 0$$
$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2)$$