FUNCIÓN DE TENSIÓN

Hemos visto que para resolver los problemas tensionales bidimensionales, basta con encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales de equilibrio, que satisfagan la ecuación de compatibilidad y las condiciones de contorno.

Si tratamos con placas bidimensionales donde la única fuerza másica es el peso tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \textit{ecuaciones de equilibrio}$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\sigma_y + \sigma_x\right) = 0\right\} \quad \textit{ecuaciones de compatibilidad}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x.\alpha + \tau_{xy}.\beta = \vec{\bar{X}} \\ \sigma_y.\beta + \tau_{xy}.\alpha = \vec{Y} \end{aligned}\right\} \quad \textit{Condiciones de contorno}$$

Esto se pude resolver introduciendo una función llamada **FUNCIÓN DE TENSIÓN**

Se comprueba que las ecuaciones de equilibrio son satisfecha por una función Φ(x,y) relacionadas con las componentes de tensión por medio de las siguientes expresiones:

$$\sigma_x = \frac{\partial \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD EN COMPONENTES DE TENSIÓN

Nos queda entonces $$2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (7) $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \mu \sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \mu \sigma_x\right) = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(1+\mu)\tau_{xy} \qquad (7)$$

Nos queda la ecuación de compatibilidad en componentes de tensión:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\sigma_y + \sigma_x\right) = 0}$$

Que desarrollada queda: $$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0$$

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD EN COMPONENTES DE TENSIÓN

Tenemos las leyes de Hooke generalizadas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

La ecuación de compatibilidad deducida es:

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Si reemplazamos en esta ecuación las componentes de deformaciones especificas longitudinales y las de distorsión por las tensiones según las ley de Hooke nos queda:

$$\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) + \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}2(1+\mu)\tau_{xy}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) = 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(1+\mu)\tau_{xy} \qquad (7)$$

Recordemos las ecuaciones de equilibrio con solo el peso como fuerza másica:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$$

Derivando la primera respecto de x y la segunda respecto de y y sumando:

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = 0 \\ + & \dfrac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = 0 \\ \hline & \dfrac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = 0 \end{array}$$

FUNCIÓN DE TENSIÓN

Llevando esta propuesta de función de tensión

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

A las ecuaciones de compatibilidad

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\sigma_y + \sigma_x) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) = 0$$

Nos queda la **ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA PLACA** en estado plano de tensiones

$$\boxed{\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0}$$

Resolver un problema de elasticidad plano, consiste en encontrar una función Φ(x,y) que sea solución de la **ecuación diferencial de la placa** y las condiciones de contorno de la misma dadas por:

$$\overline{X} = \sigma_x.\alpha + \tau_{xy}.\beta$$

$$\overline{Y} = \sigma_y.\beta + \tau_{xy}.\alpha$$

RESOLUCIÓN DE LA FUNCIÓN DE TENSIÓN

Estudiaremos distintas soluciones para la ecuación diferencial de la función de tensión que representan estado tensionales en placas con cargas en su plano.

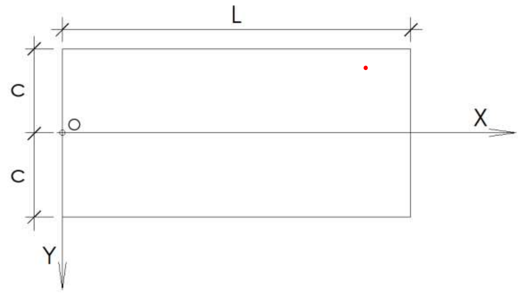
La ecuación diferencial de la placa en estado de tensión placa:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

Con: $\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$

Trabajaremos soluciones polinómicas de distintos grados para la función Φ(x,y) que resuelvan la **ecuación diferencial de la placa** y las distintas condiciones de contorno :

Referenciando la placa con el sistema X Y:



Consideremos primero un polinomio de 2do grado $\phi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2$

Derivando : $\frac{\partial^4 \phi_2}{\partial x^4} = 0$

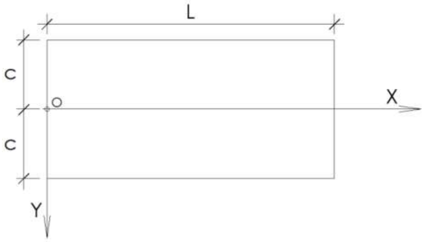
$$\frac{\partial^4 \phi_2}{\partial y^4} = 0$$

$$\frac{\partial^4 \phi_2}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

Cumple con la ecuación diferencial de la placa

SOLUCIÓN POLINÓMICA DE 2do GRADO

Entonces vimos que el polinomio de 2do grado $\phi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2$



Es solución de la ecuación: $\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0$

Por lo tanto representa un estado tensional plano de una placa y las tensiones son:

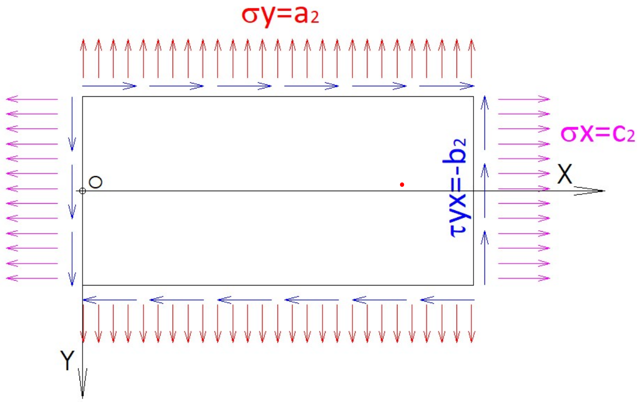
$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x\partial y}$$

Nos quedan:

$$\sigma_x = \frac{\partial\phi}{\partial y^2} = c_2$$

$$\sigma_y = \frac{\partial\phi}{\partial x^2} = a_2$$

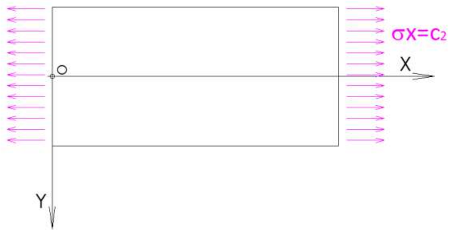
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = -b_2$$



1-) Si hacemos a2 y b2 iguales a cero nos queda:

$$\phi_2 = \frac{c_2}{2}y^2$$

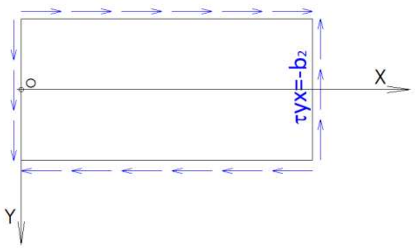
$$\sigma_x = \frac{\partial\phi_2}{\partial y^2} = c_2$$

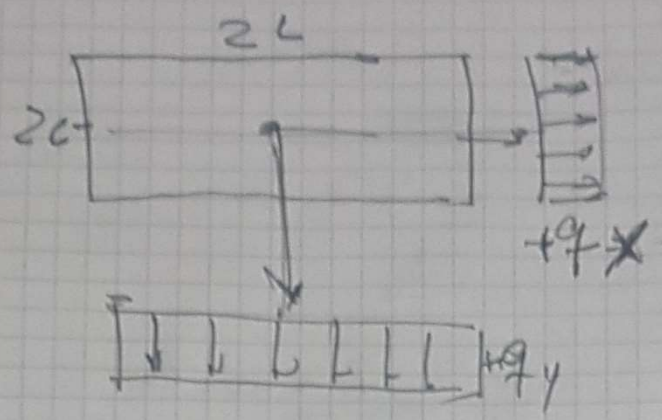


2-) Si hacemos a2 y c2 iguales a cero nos queda:

$$\phi_2 = b_2xy$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = -b_2$$





$\sigma_x = c_2$

$\sigma_y = a_2$

$\tau_{xy} = -b_2$ $\qquad b_2 = 0 = \tau_{xy}$

$\bar{X} = \sigma_x \cancel{\alpha}$ $\qquad \alpha = 1$

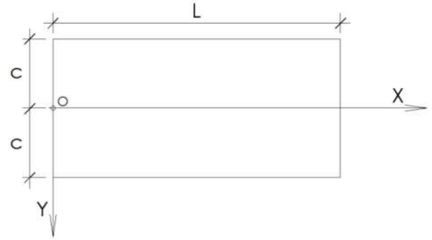
$\bar{X} = \sigma_x$ $\qquad \sigma_x = q_x = c_2$

$\bar{Y} = \sigma_y$ $\qquad \sigma_y = q_y = a_2$

$$\boxed{\phi_2 = \frac{q_y}{2} x^2 + \frac{q_x}{2} y^2}$$

SOLUCIÓN POLINÓMICA DE 3er GRADO

Veamos ahora un polinomio de 3er grado $\phi_3 = \frac{a_3}{6}x^2 + \frac{b_3}{2}x^2 y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{6}y^3$



Es solución de la ecuación: $\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0$

Por lo tanto representa un estado tensional plano de una placa y las tensiones son:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi_3}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi_3}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi_3}{\partial x\partial y}$$

Nos quedan:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi_3}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\phi_3}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi_3}{\partial x\partial y} = -b_3 x - c_3 y$$

Si hacemos todos los coeficientes iguales a cero excepto d_3:
El polinomio queda:

$$\phi_3 = \frac{d_3}{6}y^3$$

Y las tensiones derivadas de este polinomio son:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi_3}{\partial y^2} = d_3 y$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

SOLUCIÓN POLINÓMICA DE 3er GRADO

Estamos estudiando el polinomio de 3er grado incompleto: $\phi_3 = \frac{d_3}{6} y^3$

Dijimos que las tensiones son:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = d_3 y$$

$$\sigma_y = 0$$

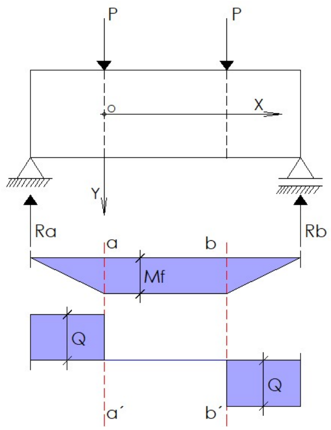
$$\tau_{xy} = 0$$

Se representan entonces por:

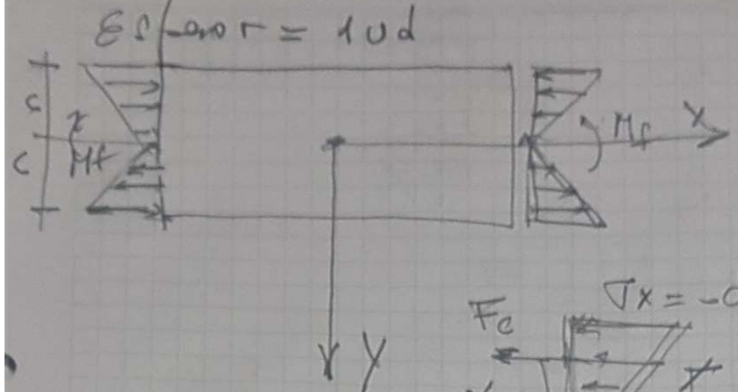
Cada plano a cualquier distancia X del origen esta sometido a una tensión axil en X y que varia según la distancia al eje X que se denomina eje neutro de tensiones

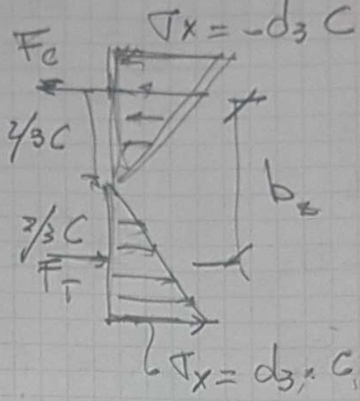
Esto representa un estado de flexión pura en el eje X y se da en placas cargadas en su plano con cargas que solicitan a la misma a una flexión pura:

Por ejemplo en la siguiente placa apoyada en sus extremos en el tramo central entre cargas de igual magnitud:



Espesor = 1ud





$$\sigma_x = d_3\, y$$

$$F_C = \frac{\sigma_x \cdot c}{2} = -\frac{d_3 C^2}{2}$$

$$F_T = \frac{\sigma_x \cdot c}{2} = \frac{d_3 \cdot C^2}{2}$$

$$b_z = \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c = \frac{4}{3}C$$

$$M_{\sigma_i} = \frac{d_3 C^2}{2} \cdot \frac{4}{3} C = \frac{2}{3} d_3 C^3 = M_f$$

$$\boxed{d_3 = \frac{3}{2} M_f \frac{1}{C^3}}$$

$$\phi_3 = \frac{d_3}{6} y^3 = \frac{3}{2} \frac{M_f}{C^3}$$

$$\phi_1 = -1/4 \frac{M_f}{C^3} y^3$$

SOLUCIÓN POLINÓMICA DE 3er GRADO

Si además hacemos b3 ó c3 distintos de cero tendremos conjuntamente con las tensiones axiles σx tensiones tangenciales:

Si b3 es distinto de cero nos queda:

$$\phi_3 = \frac{b_3}{2}x^2 y + \frac{d_3}{6}y^3$$

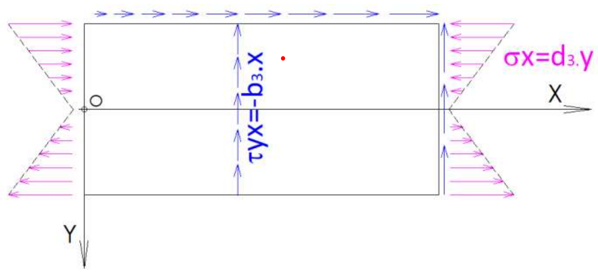
Las tensiones nos quedan:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = d_3 y$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial y} = -b_3 x$$

Graficando según nuestra convención de signos la placa :



Cada plano a cualquier distancia X del origen esta sometido a una tensión axil en X y que varia según la distancia al eje X que se denomina eje neutro de tensiones

DERIVACIÓN DEL POLINOMIO DE 4to GRADO

El polinomio de 4to grado: $\phi_4 = \frac{a_4}{4.3}x^4 + \frac{b_4}{3.2}x^3y + \frac{c_4}{2}x^2y^2 + \frac{d_4}{3.2}xy^3 + \frac{e_4}{4.3}y^4$

Las derivadas primeras:

$$\frac{\partial\phi_4}{\partial x} = \frac{a_4}{3}x^3 + \frac{b_4}{2}x^2y + c_4x\,y^2 + \frac{d_4}{3.2}y^3$$

$$\frac{\partial\phi_4}{\partial y} = \frac{b_4}{3.2}x^3 + c_4x^2y + \frac{d_4}{2}xy^2 + \frac{e_4}{3}y^3$$

Las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2\phi_4}{\partial x^2} = a_4x^2 + b_4xy + c_4y^2$$

$$\frac{\partial^2\phi_4}{\partial y^2} = c_4x^2 + d_4xy + e_4y^2$$

$$\frac{\partial^2\phi_4}{\partial x\partial y} = \frac{b_4}{2}x^2 + 2c_4xy + \frac{d_4}{2}y^2$$

Las derivadas terceras:

$$\frac{\partial^3\phi_4}{\partial x^3} = 2a_4x + b_4y$$

$$\frac{\partial^3\phi_4}{\partial y^3} = d_4x + 2e_4y$$

$$\frac{\partial^3\phi_4}{\partial x^2\partial y} = b_4x + 2c_4y$$

DERIVACIÓN DEL POLINOMIO DE 4to GRADO

El polinomio de 4to grado:
$$\phi_4 = \frac{a_4}{4.3}x^4 + \frac{b_4}{3.2}x^3y + \frac{c_4}{2}x^2y^2 + \frac{d_4}{3.2}xy^3 + \frac{e_4}{4.3}y^4$$

Las derivadas cuartas:
$$\frac{\partial^4\phi_4}{\partial x^4} = 2a_4$$
$$\frac{\partial^4\phi_4}{\partial y^4} = 2e_4$$
$$\frac{\partial^4\phi_4}{\partial x^2\partial y^2} = 2c_4$$

Llevando las derivadas 4tas a la ecuación diferencial de la placa y operando:
$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0$$

$$2a_4 + 2.2c_4 + 2e_4 = 0$$
$$a_4 + 2c_4 + e_4 = 0$$
$$e_4 = -(a_4 + 2c_4)$$

En este caso los coeficientes no son independientes si no que hay condiciones entre ellos

Finalmente las tensiones son:
$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi_4}{\partial y^2} = c_4x^2 + d_4xy + e_4y^2 = c_4x^2 + d_4xy - (a_4 + 2c_4)y^2$$
$$\sigma_y = \frac{\partial^2\phi_4}{\partial x^2} = a_4x^2 + b_4xy + c_4y^2$$
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi_4}{\partial x\partial y} = -(\frac{b_4}{2}x^2 + 2c_4xy + \frac{d_4}{2}y^2) = -\frac{b_4}{2}x^2 - 2c_4xy - \frac{d_4}{2}y^2$$

ESTADO DE TENSIÓN EN UNA PLACA DADO POR POLINOMIO DE 4to GRADO

El polinomio de 4to grado: $$\phi_4 = \frac{a_4}{4.3}x^4 + \frac{b_4}{3.2}x^3y + \frac{c_4}{2}x^2y^2 + \frac{d_4}{3.2}xy^3 + \frac{e_4}{4.3}y^4$$

Tiene sus tensiones:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi_4}{\partial y^2} = c_4x^2 + d_4xy + e_4y^2 = c_4x^2 + d_4xy - (a_4 + 2c_4)y^2$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\phi_4}{\partial x^2} = a_4x^2 + b_4xy + c_4y^2$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi_4}{\partial x\partial y} = -(\frac{b_4}{2}x^2 + 2c_4xy + \frac{d_4}{2}y^2) = -\frac{b_4}{2}x^2 - 2c_4xy - \frac{d_4}{2}y^2$$

Si hacemos las constantes iguales a cero excepto **d**4: $$\phi_4 = \frac{d_4}{3.2}xy^3$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi_4}{\partial y^2} = d_4xy$$

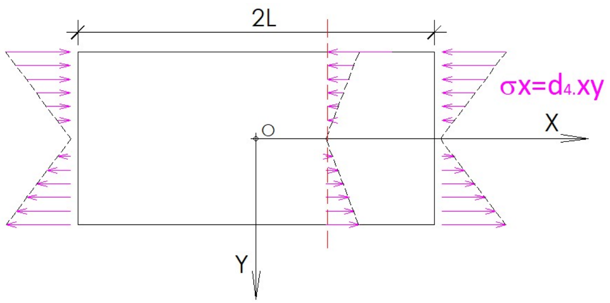
$$\sigma_y = \frac{\partial^2\phi_4}{\partial x^2} = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi_4}{\partial x\partial y} = -\frac{d_4}{2}y^2$$

Para cada plano normal al eje X existen tensiones σx variables en el eje y proporcionales a la distancia y que también varían de plano en plano X

En cada plano X existe tensiones tangenciales variables con Y máximas para Y=C (borde de placa) y nulas en el centro de placa

La representación es para las tensiones axiles en X:



La representación es para las tensiones ta