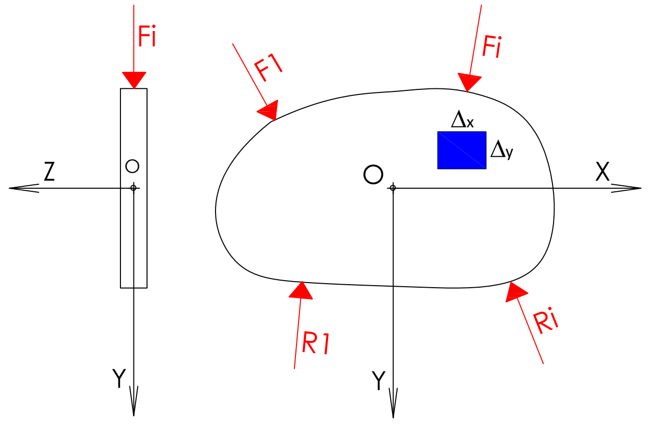
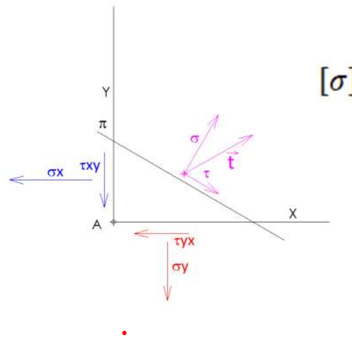
ELASTICIDAD DE SOLIDOS DEFORMABLES PLANOS

Supongamos tener un solido deformable plano (placa) sometido a un sistema de fuerzas exteriores en equilibrio

Se denomina placa a aquellos sólidos donde un dimensión es mucho menor que las dos restantes



ESTADO PLANO DE TENSIÓN



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Este sistema de cargas exteriores genera en cada punto de la placa, en un sistema ortogonal, un estado plano de tensiones caracterizado por los valores: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Estos valores varían de punto a punto en forma continua expresado por:

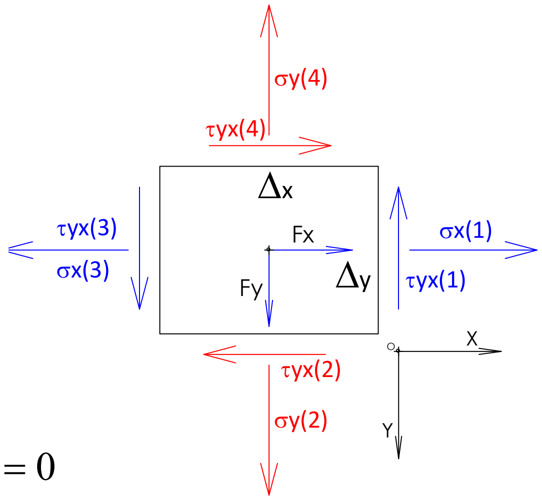
$$\sigma_x = (x, y)$$
$$\sigma_y = (x, y)$$
$$\tau_{xy} = (x, y)$$

Nos propondremos a determinar para la placa estas **funciones** para distintos tipos de cargas y distintas geometrías de la placa

ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO

Consideremos un pequeño bloque rectangular de dimensiones $\Delta x \;\; \Delta y$ perteneciente a una placa y con sus espesor igual a la unidad y que se encuentra en equilibrio y en el cual actúa un sistema plano de tensiones $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Estas tensiones varían de punto a punto, entonces las actuantes en las distintas caras en general son distintas:



Además sobre este rectángulo de espesor unitario suponemos actuando fuerzas másicas Fx Fy por unidad de volumen

Planteando el equilibrio: $\sigma_{x(1)}\Delta_y - \sigma_{x(3)}\Delta_y + \tau_{yx(2)}\Delta_x - \tau_{yx(4)}\Delta_x + F_x\Delta_x\Delta_y = 0$

Dividiendo por $\Delta x \;\; \Delta y$, haciendo tender estas dimensiones a cero es decir haciendo tender el rectángulo al punto

$$\frac{\sigma_{x(1)} - \sigma_{x(3)}}{\Delta_x} + \frac{\tau_{yx(2)} - \tau_{yx(4)}}{\Delta_y} + F_x = 0$$

$$\Delta_x \to 0$$

$$\Delta_y \to 0$$

Recordando que: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

Nos que la ecuación de equilibrio en X:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO

Planteando el equilibrio en la dirección del eje Y:

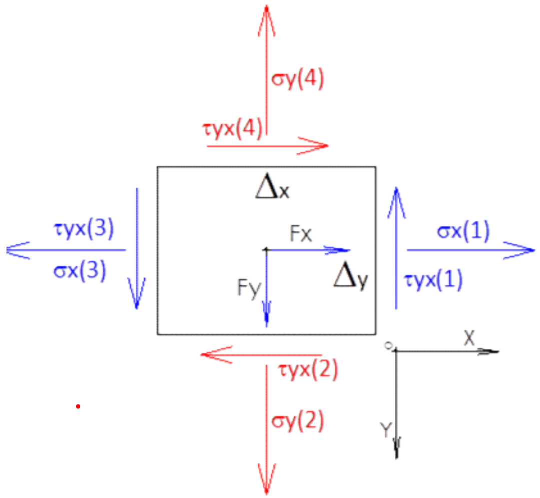
$$\sigma_{y(2)}\Delta_x - \sigma_{y(4)}\Delta_x + \tau_{xy(1)}\Delta_x - \tau_{xy(3)}\Delta_x + F_y\Delta_x\Delta_y = 0$$

Dividiendo por Δx Δy, haciendo tender estas dimensiones a cero es decir haciendo tender el rectángulo al punto

$$\frac{\sigma_{y(2)} - \sigma_{y(4)}}{\Delta_y} + \frac{\tau_{xy(1)} - \tau_{xy(3)}}{\Delta_y} + F_y = 0$$

$$\Delta_x \to 0$$

$$\Delta_y \to 0$$



Nos que la ecuación de equilibrio en Y: $\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$

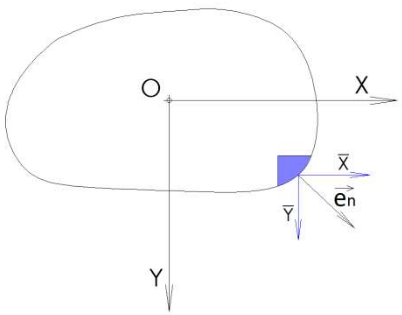
En la práctica la única fuerza másica es el peso
Entonces las ECUACIONES DE EQUILIBRIO nos quedan:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$$

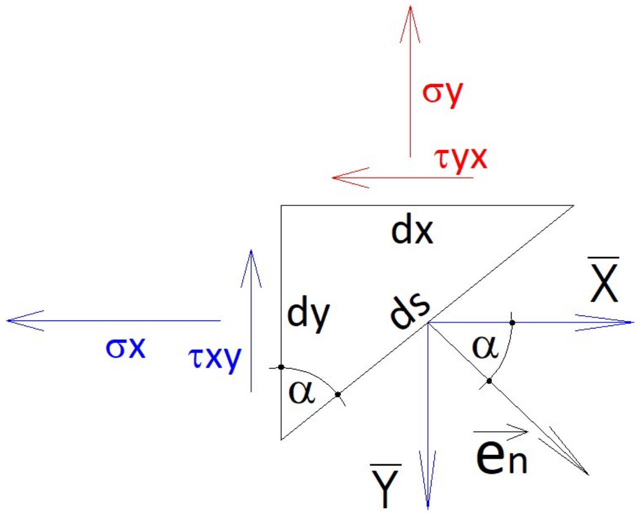
CONDICIONES DE CONTORNO

Las componentes de tensión varían de punto en punto, y al llegar al borde de la placa deben equilibrar las fuerzas exteriores aplicada a la misma



$$\overline{X} e \overline{Y} = fuerzas\ por\ unidad\ de\ \mathrm{sup}$$

Los coseno directores de la normal al plano en el punto de la superficie analizado: $\hat{e} = [\alpha, \beta]$



Planteando el equilibrio sobre los ejes:

$$\overline{X}.ds = \sigma_x.dy + \tau_{xy}.dx$$

Dividiendo por ds y teniendo presente los cosenos directores de la normal a la superficie:

$$\overline{X} = \sigma_x \frac{dy}{ds} + \tau_{xy} \frac{dx}{ds} = \sigma_x.\alpha + \tau_{xy}.\beta$$

Haciendo lo mismo sobre el eje Y:

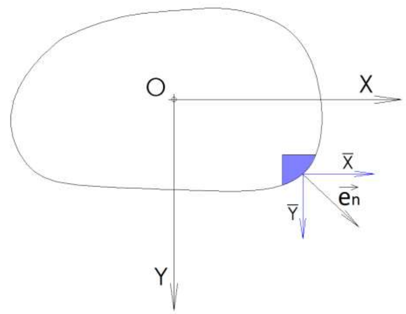
$$\overline{Y}.ds = \sigma_y.dx + \tau_{xy}.dy$$

$$\overline{Y} = \sigma_y \frac{dx}{ds} + \tau_{xy} \frac{dy}{ds} = \sigma_y.\beta + \tau_{xy}.a$$

CONDICIONES DE CONTORNO

Entonces las ecuaciones de contorno vienen expresadas por:

$$\overline{X} = \sigma_x.\alpha + \tau_{xy}.\beta$$
$$\overline{Y} = \sigma_y.\beta + \tau_{xy}.\alpha$$

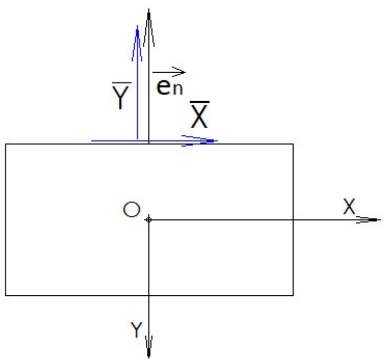


Que en forma matricial se puede expresar:

$$\begin{bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

PLACA RECTANGULAR

Si suponemos el caso particular de una placa rectangular y tomamos los ejes paralelos a los lados



Tomando por ejemplo un borde de la placa paralela a X tendremos para esta parte del contorno que la normal $\vec{e}_n$ es paralela al eje Y, de modo que α=0 y β=+/−1 con lo que las ecuaciones de contorno quedan:

$$\overline{X} = \pm\tau_{xy}$$
$$\overline{Y} = \pm\sigma_y$$

Se deberá tomar el signo positivo cuando la normal a la superficie tenga el sentido del semieje positivo, y el signo negativo para el sentido contrario de esta normal.

De esto resulta que las componentes de tensión que se desarrollan sobre el contorno de la placa, son iguales a las componentes de las fuerzas superficiales.

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

Las deformaciones específicas en función de las funciones escalares de desplazamientos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2)$$

Y las distorsiones angulares: $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$

Entre las deformaciones especificas lineales y las distorsiones debe haber vinculaciones, es decir fijadas las deformaciones específicas, las distorsiones no pueden ser arbitrarias.
Buscaremos las relaciones entre ambas:

Derivando (1) dos veces con respecto a **y**
Derivando (2) dos veces con respecto a **x**
Derivando (3) dos veces con respecto a **x** e **y**

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \quad (6)$$

Reemplazando 4 y 5 en la ecuación 6 nos queda:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}}$$

Ecuación de compatibilidad entre **Deformaciones longitudinales y distorsiones**

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD EN COMPONENTES DE TENSIÓN

Tenemos las leyes de Hooke generalizadas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

La ecuación de compatibilidad deducida es:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Si reemplazamos en esta ecuación las componentes de deformaciones especificas longitudinales y las de distorsión por las tensiones según las ley de Hooke nos queda:

$$\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) + \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}2(1+\mu)\tau_{xy}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(1+\mu)\tau_{xy} \qquad (7)$$

Recordemos las ecuaciones de equilibrio con solo el peso como fuerza másica:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$$

Derivando la primera respecto de x *y* la segunda respecto de y y sumando:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$+ \quad \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD EN COMPONENTES DE TENSIÓN

Nos queda entonces $2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$

Reemplazando este resultado en la ecuación (7) $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(1+\mu)\tau_{xy} \qquad (7)$$

Nos queda la ecuación de compatibilidad en componentes de tensión:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0$$

Que podemos expresarla en forma sintética:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\sigma_y + \sigma_x\right) = 0}$$

FUNCIÓN DE TENSIÓN

Para resolver los problemas tensionales bidimensionales, basta con encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales de equilibrio, que satisfagan la ecuación de compatibilidad y las condiciones de contorno.

Si tratamos con placas bidimensionales donde la única fuerza másica es el peso tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \textit{ecuaciones de equilibrio}$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\sigma_y + \sigma_x) = 0 \right\} \quad \textit{ecuaciones de compatibilidad}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x.\alpha + \tau_{xy}.\beta &= \vec{X} \\ \sigma_y.\beta + \tau_{xy}.\alpha &= \vec{Y} \end{aligned}\right\} \quad \textit{Condiciones de contorno}$$

Esto se pude resolver introduciendo una función llamada **FUNCIÓN DE TENSIÓN**

Se comprueba que las ecuaciones de equilibrio son satisfecha por una función Φ(x,y) relacionada con las componentes de tensión por medio de las siguientes expresiones:

$$\sigma_x = \frac{\partial \phi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

FUNCIÓN DE TENSIÓN

Llevando esta propuesta de función de tensión

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

A las ecuaciones de compatibilidad

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\sigma_y + \sigma_x) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = 0$$

Nos queda la **ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA PLACA** en estado plano de tensiones

$$\boxed{\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0}$$

Resolver un problema de elasticidad plano, consiste en encontrar una función Φ(x,y) que sea solución de la **ecuación diferencial de la placa** y las condiciones de contorno de la misma dadas por:

$$\bar{X} = \sigma_x.\alpha + \tau_{xy}.\beta$$
$$\bar{Y} = \sigma_y.\beta + \tau_{xy}.\alpha$$