14 MECÁNICA DE FLUIDOS

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- El significado de la densidad de un material y la densidad media de un cuerpo.
- Qué se entiende por presión en un fluido y cómo se mide.
- Cómo calcular la fuerza de flotación que ejerce un fluido sobre un cuerpo sumergido en ella.
- La importancia de un flujo laminar contra un flujo de fluido turbulento, y cómo la rapidez del flujo en un tubo depende del tamaño de éste.
- Cómo utilizar la ecuación de Bernoulli para relacionar la presión y la rapidez de flujo en diferentes puntos en ciertos tipos de fluidos.

? Este tiburón debe nadar constantemente para no hundirse en el fondo del océano; sin embargo, los peces tropicales anaranjados pueden permanecer en el mismo nivel del agua con poco esfuerzo. ¿Por qué existe esta diferencia?

Los fluidos desempeñan un papel crucial en muchos aspectos de la vida cotidiana. Los bebemos, respiramos y nadamos en ellos; circulan por nuestro organismo y controlan el clima. Los aviones vuelan a través de ellos y los barcos flotan en ellos. Un fluido es cualquier sustancia que puede fluir; usamos el término tanto para líquidos como para gases. Por lo regular, pensamos que los gases son fáciles de comprimir y que los líquidos son casi incompresibles, aunque hay casos excepcionales.

Comenzaremos nuestro estudio con la **estática de fluidos**, es decir, el estudio de fluidos en reposo en situaciones de equilibrio. Al igual que otras situaciones de equilibrio, ésta se basa en la primera y la tercera leyes de Newton. Exploraremos los conceptos clave de densidad, presión y flotación. La **dinámica de fluidos** —es decir, el estudio de fluidos en movimiento— es mucho más compleja; de hecho, es una de las ramas más complejas de la mecánica. Por fortuna, podemos analizar muchas situaciones importantes usando modelos idealizados sencillos y los principios que ya conocemos, como las leyes de Newton y la conservación de la energía. Aun así, apenas si rozaremos la superficie de este tema tan amplio e interesante.

14.1 Densidad

Una propiedad importante de cualquier material es su **densidad**, que se define como su masa por unidad de volumen. Un material homogéneo, como el hielo o el hierro, tiene la misma densidad en todas sus partes. Usamos la letra griega ρ (rho) para denotar la densidad. Si una masa m de material homogéneo tiene un volumen V, la densidad ρ es

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \text{(definición de densidad)} \qquad (14.1)$$

Dos objetos hechos del mismo material tienen igual densidad aunque tengan masas y volúmenes diferentes. Eso se debe a que la *razón* entre masa y volumen es la misma para ambos objetos (figura 14.1).

14.1 Dos objetos con masas y volúmenes diferentes, pero con igual densidad.

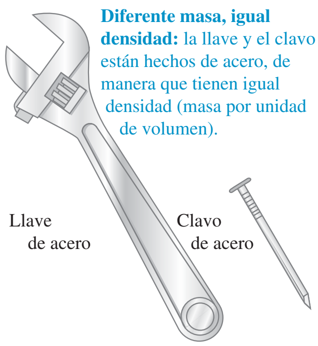


Tabla 14.1 Densidades de algunas sustancias comunes

Material	Densidad (kg/m^3)*	Material	Densidad (kg/m^3)*
Aire (1 atm, 20°C)	1.20	Hierro, acero	7.8×10^3
Etanol	0.81×10^3	Latón	8.6×10^3
Benceno	0.90×10^3	Cobre	8.9×10^3
Hielo	0.92×10^3	Plata	10.5×10^3
Agua	1.00×10^3	Plomo	11.3×10^3
Agua de mar	1.03×10^3	Mercurio	13.6×10^3
Sangre	1.06×10^3	Oro	19.3×10^3
Glicerina	1.26×10^3	Platino	21.4×10^3
Concreto	2×10^3	Estrella enana blanca	10^{10}
Aluminio	2.7×10^3	Estrella de neutrones	10^{18}

*Para obtener las densidades en gramos por centímetro cúbico, divida entre 10^3.

La unidad de densidad en el SI es el kilogramo por metro cúbico ($1\ kg/m^3$). También se usa mucho la unidad cgs, gramo por centímetro cúbico ($1\ g/cm^3$):

$$1\ g/cm^3 = 1000\ kg/m^3$$

En la tabla 14.1, se indican las densidades de varias sustancias comunes a temperaturas ordinarias. Observe la amplia gama de magnitudes (figura 14.2). El material más denso que se encuentra en la Tierra es el metal osmio ($\rho = 22{,}500\ kg/m^3$), pero esto no es nada en comparación con la densidad de los objetos astronómicos exóticos, como las estrellas enanas blancas y las estrellas de neutrones.

14.2 El precio del oro se cotiza por peso (digamos, en dólares por onza). Puesto que el oro es uno de los metales más densos, es posible almacenar una fortuna en oro en un volumen pequeño.

La **gravedad específica** de un material es la razón entre su densidad y la del agua a 4.0°C, $1000\ kg/m^3$; es un número puro, sin unidades. Por ejemplo, la gravedad específica del aluminio es 2.7. Aunque el término “gravedad específica” es inadecuado, ya que nada tiene que ver con la gravedad; habría sido mejor utilizar el término “densidad relativa”.

La densidad de algunos materiales varía de un punto a otro dentro del material. Un ejemplo es el material del cuerpo humano, que incluye grasa de baja densidad (940 kg/m^3 aproximadamente) y huesos de elevada densidad (de 1700 a 2500 kg/m^3). Otros dos ejemplos son la atmósfera terrestre (que es menos densa a mayores altitudes) y los océanos (que son más densos a mayores profundidades). Para estos materiales, la ecuación (14.1) describe la **densidad media**. En general, la densidad de un material depende de factores ambientales, como la temperatura y la presión.

La medición de la densidad es una técnica analítica importante. Por ejemplo, podemos determinar el nivel de carga de un acumulador midiendo la densidad de su electrólito, que es una disolución de ácido sulfúrico (H_2SO_4). Al descargarse la batería, el H_2SO_4 se combina con el plomo de las placas del acumulador para formar sulfato de plomo ($PbSO_4$) insoluble, lo que reduce la concentración de la disolución. La densidad baja de cerca de $1.30 \times 10^3\ kg/m^3$ en un acumulador completamente cargado a $1.15 \times 10^3\ kg/m^3$ en uno descargado.

Otro ejemplo relacionado con automóviles es el anticongelante permanente, que por lo general es una disolución de etilén glicol ($\rho = 1.12 \times 10^3\ kg/m^3$) y agua. El punto de congelación de la disolución depende de la concentración de glicol, y puede determinarse midiendo su gravedad específica. Tales mediciones se realizan en forma rutinaria en los talleres de servicio para automóviles usando un dispositivo llamado hidrómetro, el cual describiremos en la sección 14.3.

Ejemplo 14.1 Peso de un cuarto lleno de aire

Calcule la masa y el peso del aire en una estancia a 20 °C cuyo piso mide 4.0 m × 5.0 m y que tiene una altura de 3.0 m. ¿Qué masa y peso tiene un volumen igual de agua?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Suponemos que el aire es homogéneo, así que la densidad es la misma en todo el cuarto. (Es verdad que el aire es menos den-

continúa

so a gran altitud que cerca del nivel del mar, pero la variación de densidad a lo largo de la altura de 3.0 m del cuarto es despreciable; véase la sección 14.2.)

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (14.1) para relacionar la masa (la incógnita) con el volumen (que calculamos a partir de las dimensiones del cuarto) y la densidad (de la tabla 14.1).

EJECUTAR: El volumen de la habitación es $V = (3.0\text{ m})(4.0\text{ m}) \times (5.0\text{ m}) = 60\text{ m}^3$. La masa m_{aire} está dada por la ecuación (14.1):

$$m_{\text{aire}} = \rho_{\text{aire}} V = (1.20\text{ kg/m}^3)(60\text{ m}^3) = 72\text{ kg}$$

El peso del aire es

$$w_{\text{aire}} = m_{\text{aire}}\, g = (72\text{ kg})(9.8\text{m/s}^2) = 700\text{ N} = 160\text{ lb}$$

La masa de un volumen igual de agua es

$$m_{\text{agua}} = \rho_{\text{agua}} V = (1000\text{ kg/m}^3)(60\text{ m}^3) = 6.0 \times 10^4\text{ kg}$$

El peso es

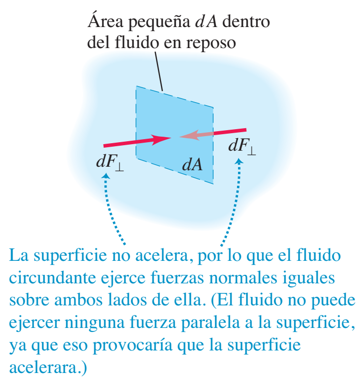
$$\begin{aligned} w_{\text{agua}} = m_{\text{agua}}\, g &= (6.0 \times 10^4\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) \\ &= 5.9 \times 10^5\text{ N} = 1.3 \times 10^5\text{ lb} = 66\text{ toneladas} \end{aligned}$$

EVALUAR: ¡El aire contenido en un cuarto pesa aproximadamente lo que pesa una persona adulta! El agua es casi mil veces más densa que el aire, y su masa y peso son mayores en la misma proporción. De hecho, el peso de un cuarto lleno de agua seguramente hundiría el piso de una casa común.

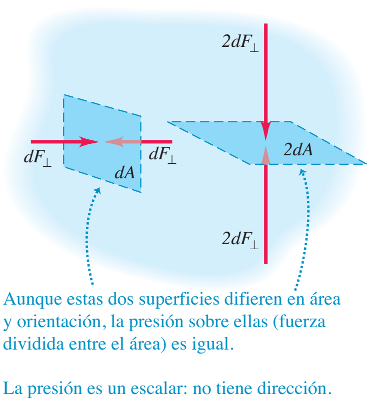
Evalúe su comprensión de la sección 14.1 Clasifique los siguientes objetos en orden decreciente de su densidad media: i) masa 4.00 kg, volumen $1.60 \times 10^{-3}\text{ m}^3$; ii) masa 8.00 kg, volumen $1.60 \times 10^{-3}\text{ m}^3$; iii) masa 8.00 kg, volumen $3.20 \times 10^{-3}\text{ m}^3$; iv) masa 2560 kg, volumen 0.640 m^3; v) masa 2560 kg, volumen 1.28 m^3.

14.2 Presión en un fluido

14.3 Las fuerzas actúan sobre una pequeña superficie dentro de un fluido en reposo.



14.4 La presión sobre cualquiera de los dos lados de una superficie es igual a la fuerza dividida entre el área. La presión es un escalar y sus unidades son newtons por metro cuadrado. En contraste, la fuerza es un vector y sus unidades son newtons.



Cuando un fluido (ya sea líquido o gas) está en reposo, ejerce una fuerza perpendicular a cualquier superficie en contacto con él, como la pared de un recipiente o un cuerpo sumergido en el fluido. Ésta es la fuerza que sentimos en las piernas al meterlas en una piscina. Aunque el fluido considerado como un todo está en reposo, las moléculas que lo componen están en movimiento; la fuerza ejercida por el fluido se debe a los choques de las moléculas con su entorno.

Si imaginamos una superficie *dentro* del fluido, el fluido a cada lado de ella ejerce fuerzas iguales y opuestas sobre la superficie. (De otra forma, la superficie se aceleraría y el fluido no permanecería en reposo.) Considere una superficie pequeña de área dA centrada en un punto en el fluido; la fuerza normal que el fluido ejerce sobre cada lado es $dF_\perp$ (figura 14.3). Definimos la **presión** p en ese punto como la fuerza normal por unidad de área, es decir, la razón entre $dF_\perp$ y dA (figura 14.4):

$$p = \frac{dF_\perp}{dA} \qquad \text{(definición de presión)} \tag{14.2}$$

Si la presión es la misma en todos los puntos de una superficie plana finita de área A, entonces

$$p = \frac{F_\perp}{A} \tag{14.3}$$

donde $F_\perp$ es la fuerza normal neta en un lado de la superficie. La unidad del SI para la presión es el **pascal**:

$$1\text{ pascal} = 1\text{ Pa} = \text{N/m}^2$$

Ya presentamos el pascal en el capítulo 11. Dos unidades relacionadas, que se emplean sobre todo en meteorología, son el *bar*, igual a 10^5 Pa, y el *milibar*, igual a 100 Pa.

La **presión atmosférica** p_a es la presión de la atmósfera terrestre, es decir, la presión en el fondo de este "mar" de aire en que vivimos. Esta presión varía con el estado del tiempo y con la altitud. La presión atmosférica normal al nivel del mar (valor medio) es 1 atmósfera (atm), definida exactamente como 101,325 Pa. Con cuatro cifras significativas,

$$\begin{aligned} (p_a)_{\text{med}} &= 1\text{ atm} = 1.013 \times 10^5\text{ Pa} \\ &= 1.013\text{ bar} = 1013\text{ milibares} = 14.70\text{ lb/in}^2 \end{aligned}$$

CUIDADO **No confunda presión con fuerza** En el lenguaje cotidiano, las palabras “presión” y “fuerza” significan casi lo mismo, pero en la mecánica de fluidos describen cantidades distintas con características diferentes. La presión de fluidos actúa en forma perpendicular a cualquier superficie en el fluido, sin importar su orientación (figura 14.4). Por lo tanto, la presión no tiene una dirección intrínseca: es un escalar. En cambio, la fuerza es un vector con dirección definida. Recuerde que la presión es fuerza por unidad de área. Como muestra la figura 14.4, una superficie con el doble de área recibe el doble de fuerza ejercida por un fluido, por lo que la presión es igual.

Ejemplo 14.2 La fuerza del aire

En la estancia descrita en el ejemplo 14.1, ¿qué fuerza total descendente actúa sobre el piso debida a una presión del aire de 1.00 atm?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la relación entre la presión de un fluido (en este caso, el aire), la fuerza normal ejercida por el fluido y el área sobre la cual actúa esa fuerza. En tal situación, la superficie del piso es horizontal, de manera que la fuerza ejercida por el aire es vertical (hacia abajo).

PLANTEAR: La presión es uniforme, así que usamos la ecuación (14.3) para determinar la fuerza $F_\perp$ a partir de la presión y el área.

EJECUTAR: El área del piso es $A = (4.0\text{ m})(5.0\text{ m}) = 20\text{ m}^2$. De acuerdo con la ecuación (14.3), la fuerza total hacia abajo es

$$\begin{aligned} F_\perp &= pA = (1.013 \times 10^5\text{ N/m}^2)(20\text{ m}^2) \\ &= 2.0 \times 10^6\text{ N} = 4.6 \times 10^5\text{ lb} = 230\text{ toneladas} \end{aligned}$$

EVALUAR: Al igual que en el ejemplo 14.1, esta fuerza basta para hundir el piso. ¿Por qué no lo hace? Porque hay una fuerza de igual magnitud *hacia arriba* en el lado de abajo del piso. Si la casa tiene sótano, esa fuerza es ejercida por el aire bajo el piso. En este caso, si despreciamos el espesor del piso, la fuerza *neta* debida a la presión del aire es cero.

Presión, profundidad y ley de Pascal

Si podemos despreciar el peso del fluido, la presión en un fluido es la misma en todo su volumen. Usamos esta aproximación al ver el esfuerzo y la deformación de volumen en la sección 11.4, pero muchas veces el peso del fluido *no* es despreciable. La presión atmosférica es menor a gran altitud que al nivel del mar, lo que obliga a presurizar la cabina de un avión que vuela a 35,000 pies. Al sumergirnos en agua profunda, los oídos nos indican que la presión aumenta rápidamente al aumentar la profundidad.

Podemos deducir una relación general entre la presión p en cualquier punto de un fluido en reposo y la altura y del punto. Supondremos que la densidad ρ y la aceleración debida a la gravedad g tienen el mismo valor en todo el fluido (es decir, la densidad es *uniforme*). Si el fluido está en equilibrio, cada elemento de volumen está en equilibrio. Considere un elemento delgado, de altura dy (figura 14.5a). Las superficies inferior y superior tienen área A, y están a distancias y y $y + dy$ por arriba de algún nivel de referencia donde $y = 0$. El volumen del elemento fluido es $dV = A\,dy$, su masa es $dm = \rho\,dV = \rho A\,dy$, y su peso es $dw = dm\,g = \rho g A\,dy$.

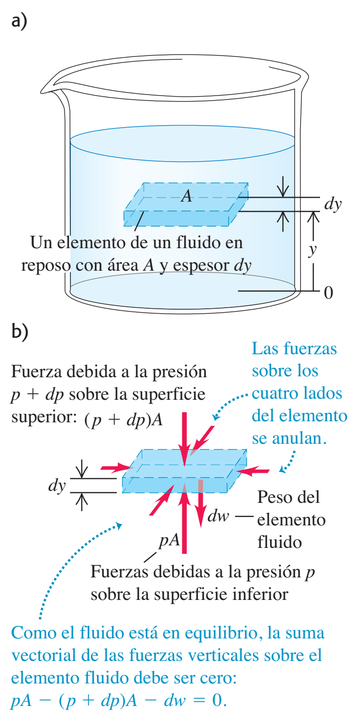
¿Qué otras fuerzas actúan sobre este elemento? (Véase la figura 14.5b.) Llamemos p a la presión en la superficie inferior; la componente y de fuerza total hacia arriba que actúa sobre esa superficie es pA. La presión en la superficie superior es $p + dp$, y la componente y de fuerza total (hacia abajo) sobre esta superficie es $-(p + dp)A$. El elemento de fluido está en equilibrio, así que la componente y de fuerza total, incluyendo el peso y las fuerzas en las superficies superior e inferior, debe ser cero:

$$\sum F_y = 0 \qquad \text{así que} \qquad pA - (p + dp)A - \rho g A\,dy = 0$$

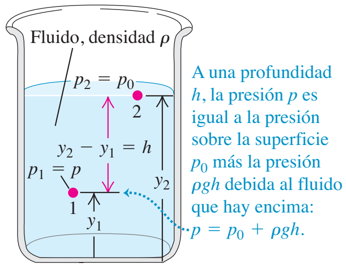
Dividiendo entre el área A y reordenando, obtenemos

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \tag{14.4}$$

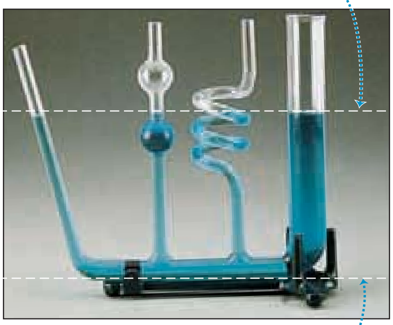
14.5 Las fuerzas sobre un elemento de fluido en equilibrio.



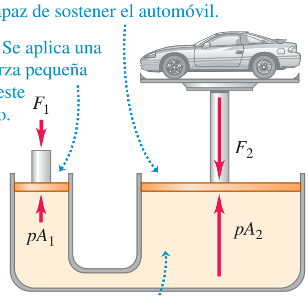
14.6 Cómo varía la presión en función de la profundidad en un fluido con densidad uniforme.



14.7 Todas las columnas de fluido tienen la misma altura, sin importar cuál sea su forma.



14.8 El elevador hidráulico es una aplicación de la ley de Pascal. El tamaño del recipiente lleno de fluido se ha exagerado por claridad.



Esta ecuación indica que si y aumenta, p disminuye; es decir, conforme se sube por el fluido, la presión disminuye, como esperaríamos. Si p_1 y p_2 son las presiones en las alturas y_1 y y_2 respectivamente, y si ρ y g son constantes, entonces

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \quad \text{(presión en un fluido de densidad uniforme)} \qquad (14.5)$$

Suele ser útil expresar la ecuación (14.5) en términos de la *profundidad* bajo la superficie de un fluido (figura 14.6). Tomemos el punto 1 en cualquier nivel en el fluido y sea p la presión en ese punto. Tomemos el punto 2 en la *superficie* del fluido, donde la presión es p_0 (el subíndice indica profundidad cero). La profundidad del punto 1 bajo la superficie es $h = y_2 - y_1$, y la ecuación (14.5) se convierte en

$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1) = -\rho gh \qquad \text{o bien,}$$

$$p = p_0 + \rho gh \qquad \text{(presión en un fluido de densidad uniforme)} \qquad (14.6)$$

La presión p a una profundidad h es mayor que la presión p_0 en la superficie, en una cantidad ρgh. Observe que la presión es la misma en dos puntos cualesquiera situados en el mismo nivel en el fluido. La *forma* del recipiente no importa (figura 14.7).

La ecuación (14.6) nos dice que si aumentamos la presión p_0 en la superficie, tal vez usando un pistón que embona herméticamente en el recipiente para empujar contra la superficie del fluido, la presión p a cualquier profundidad aumenta exactamente en la misma cantidad. El científico francés Blaise Pascal (1623-1662) reconoció este hecho en 1653 y lo enunció en la llamada *ley de Pascal*.

Ley de Pascal: la presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución a todas las partes del fluido y las paredes del recipiente.

El elevador hidráulico que se representa en la figura 14.8 ilustra la ley de Pascal. Un pistón con área transversal pequeña A_1 ejerce una fuerza F_1 sobre la superficie de un líquido (aceite). La presión aplicada $p = F_1/A_1$ se transmite a través del tubo conector a un pistón mayor de área A_2. La presión aplicada es la misma en ambos cilindros, así que

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad \text{y} \qquad F_2 = \frac{A_2}{A_1}F_1 \qquad (14.7)$$

El elevador hidráulico es un dispositivo multiplicador de la fuerza con un factor de multiplicación igual al cociente de las áreas de los pistones. Las sillas de los dentistas, los gatos hidráulicos para autos, muchos elevadores y los frenos hidráulicos se basan en este principio.

En el caso de los gases, el supuesto de que la densidad ρ es uniforme sólo es realista en distancias verticales cortas. En un cuarto de 3.0 m de altura lleno de aire con densidad uniforme de 1.2 kg/m^3, la diferencia de presión entre el piso y el techo, dada por la ecuación (14.6), es

$$\rho gh = (1.2\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(3.0\ \text{m}) = 35\ \text{Pa}$$

es decir, cerca de 0.00035 atm, una diferencia muy pequeña. En cambio, entre el nivel del mar y la cumbre del Monte Everest (8882 m) la densidad del aire cambia casi en un factor de 3, y en este caso no podemos usar la ecuación (14.6). Los líquidos, en cambio, son casi incompresibles, y suele ser una buena aproximación considerar su densidad como independiente de la presión. Una presión de varios cientos de atmósferas sólo causa un pequeño incremento porcentual en la densidad de la mayoría de los líquidos.

Presión absoluta y presión manométrica

Si la presión dentro de un neumático es igual a la presión atmosférica, el neumático estará desinflado. La presión debe ser *mayor* que la atmosférica para poder sostener el vehículo, así que la cantidad significativa es la *diferencia* entre las presiones interior y exterior. Cuando decimos que la presión de un neumático es de "32 libras" (en realidad 32 lb/in^2, igual a 220 kPa o 2.2×10^5 Pa), queremos decir que es *mayor* que la presión atmosférica (14.7 lb/in^2 o 1.01×10^5 Pa) en esa cantidad. La presión *total* en el neumático es de 47 lb/in^2, o 320 kPa. El exceso de presión más allá de la atmosférica suele llamarse **presión manométrica**, y la presión total se llama **presión absoluta**. Los ingenieros usan las abreviaturas psig y psia para "lb/in^2 manométrica" y "lb/in^2 absoluta", respectivamente. Si la presión es *menor* que la atmosférica, como en un vacío parcial, la presión manométrica es negativa.

Ejemplo 14.3 Determinación de las presiones absoluta y manométrica

Un tanque de almacenamiento de 12.0 m de profundidad está lleno de agua. La parte superior del tanque está abierto al aire. ¿Cuál es la presión absoluta en el fondo del tanque? ¿Y la presión manométrica?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El agua es casi incompresible. (Imagine que trata de comprimir con un pistón un cilindro lleno de agua. ¡No podría hacerlo!) Por lo tanto, consideramos que el fluido tiene densidad uniforme.

PLANTEAR: El nivel de la parte superior del tanque corresponde al punto 2 de la figura 14.6, y el nivel del fondo del tanque corresponde al punto 1. Por lo tanto, la incógnita es p en la ecuación (14.6); nos indican que $h =$ 12.0 m y, como el tanque está abierto a la atmósfera, p_0 es igual a 1 atm $= 1.01 \times 10^{-5}$ Pa.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (14.6), la presión absoluta es

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho g h \\ &= (1.01 \times 10^5\ \text{Pa}) + (1000\ \text{kg/m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)(12.0\ \text{m}) \\ &= 2.19 \times 10^5\ \text{Pa} = 2.16\ \text{atm} = 31.8\ \text{lb/in}^2 \end{aligned}$$

La presión manométrica es

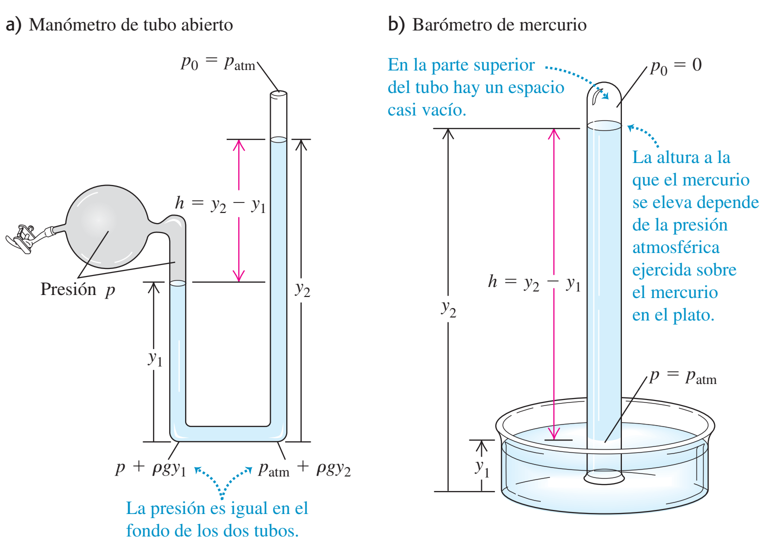
$$\begin{aligned} p - p_0 &= (2.19 - 1.01) \times 10^5\ \text{Pa} \\ &= 1.18 \times 10^5\ \text{Pa} = 1.16\ \text{atm} = 17.1\ \text{lb/in}^2 \end{aligned}$$

EVALUAR: Si un tanque así tiene un medidor de presión, seguramente estará calibrado para indicar la presión manométrica, no la presión absoluta. Como señalamos, la variación en la presión *atmosférica* a una altura de unos cuantos metros es despreciable.

Medidores de presión

El medidor de presión más sencillo es el *manómetro* de tubo abierto (figura 14.9a). El tubo en forma de U contiene un líquido de densidad ρ, con frecuencia mercurio o agua. El extremo izquierdo del tubo se conecta al recipiente donde se medirá la presión p, y el extremo derecho está abierto a la atmósfera, con $p_0 = p_{\text{atm}}$. La presión en el fondo del tubo debida al fluido de la columna izquierda es $p + \rho g y_1$, y la debida al fluido de la columna derecha es $p_{\text{atm}} + \rho g y_2$. Estas presiones se miden en el mismo punto, así que deben ser iguales:

$$\begin{aligned} p + \rho g y_1 &= p_{\text{atm}} + \rho g y_2 \\ p - p_{\text{atm}} &= \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h \end{aligned} \tag{14.8}$$



14.9 Dos tipos de medidores de presión.

En la ecuación (14.8), p es la *presión absoluta*, y la diferencia $p - p_{atm}$ entre la presión absoluta y la atmosférica es la presión manométrica. Así, la presión manométrica es proporcional a la diferencia de altura $h = y_2 - y_1$ de las columnas de líquido.

Otro medidor de presión común es el **barómetro de mercurio**, que consiste en un largo tubo de vidrio, cerrado por un extremo, que se llena con mercurio y luego se invierte sobre un plato con mercurio (figura 14.9b). El espacio arriba de la columna sólo contiene vapor de mercurio, cuya presión es insignificante, así que la presión p_0 arriba de la columna es prácticamente cero. De acuerdo con la ecuación (14.6),

$$p_a = p = 0 + \rho g(y_2 - y_1) = \rho g h \tag{14.9}$$

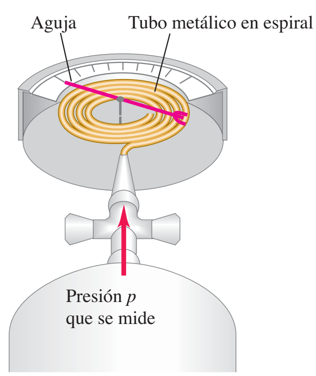
Así, el barómetro de mercurio indica la presión atmosférica p_{atm} directamente por la altura de la columna de mercurio.

Las presiones a menudo se describen en términos de la altura de la columna de mercurio correspondiente, como "pulgadas de mercurio" o "milímetros de mercurio" (que se abrevia mm Hg). Una presión de 1 mm Hg es 1 *torr*, en honor a Evangelista Torricelli, inventor del barómetro de mercurio. Sin embargo, estas unidades dependen de la densidad del mercurio, que varía con la temperatura, y del valor de g, que varía con el lugar, y por ello se prefiere el pascal como unidad de presión.

Un dispositivo común para medir la presión arterial, llamado *esfigmomanómetro*, usa un manómetro lleno de mercurio. Las lecturas de la presión arterial, como 130/80, se refieren a las presiones manométricas máxima y mínima en las arterias, medidas en mm Hg o torr. La presión arterial varía con la altura en el cuerpo; el punto de referencia estándar es la parte superior del brazo, a la altura del corazón.

Muchos tipos de medidores de presión usan un recipiente flexible sellado (figura 14.10). Un cambio en la presión adentro o afuera del recipiente provoca un cambio en sus dimensiones, que se detecta óptica, eléctrica o mecánicamente.

a)



b)

14.10 a) Medidor de presión de Bourdon. Al aumentar la presión dentro del tubo metálico en forma de espiral, éste se endereza y desvía la aguja unida a él. b) Medidor de presión tipo Bourdon empleado en un tanque de gas comprimido.

Ejemplo 14.4 Historia de dos fluidos

Un tubo de manómetro se llena parcialmente con agua. Después se vierte aceite (que no se mezcla con el agua y tiene menor densidad que el agua) en el brazo izquierdo del tubo hasta que la interfaz aceite-agua está en el punto medio del tubo. Ambos brazos del tubo están abiertos al aire. Determine la relación entre las alturas h_{aceite} y h_{agua}.

SOLUCIÓN

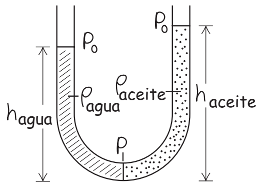
IDENTIFICAR: La relación entre presión y profundidad en un fluido sólo es válida para los fluidos de densidad uniforme. Por lo tanto, no podemos escribir una sola ecuación para el aceite y el agua juntos. Lo que sí podemos hacer es escribir una relación presión-profundidad para cada fluido por separado. Advierta que ambas columnas de fluido tienen la misma presión en la base (donde están en contacto y en equilibrio, así que las presiones deben ser iguales) y en la parte superior (donde ambas están en contacto con la atmósfera y en equilibrio con ella).

PLANTEAR: La figura 14.11 ilustra la situación. Sea p_0 la presión atmosférica, y p la presión en el fondo del tubo. Las densidades de los dos fluidos son ρ_{agua} y ρ_{aceite} (que es menor que ρ_{agua}). Usamos la ecuación (14.6) para cada fluido.

EJECUTAR: Para los dos fluidos, la ecuación (14.6) se convierte en

$$p = p_0 + \rho_{\text{agua}} g h_{\text{agua}}$$
$$p = p_0 + \rho_{\text{aceite}} g h_{\text{aceite}}$$

14.11 Nuestro esquema para este problema.



Puesto que la presión p en la base del tubo es la misma para ambos fluidos, igualamos las dos expresiones y despejamos h_{aceite} en términos de h_{agua}. Puede demostrarse que el resultado es

$$h_{\text{aceite}} = \frac{\rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{aceite}}} h_{\text{agua}}$$

EVALUAR: Puesto que el aceite es menos denso que el agua, la razón $\rho_{\text{agua}}/\rho_{\text{aceite}}$ es mayor que la unidad y h_{aceite} es mayor que h_{agua} (como se observa en la figura 14.11). Es decir, se necesita una mayor altura de aceite menos denso para producir la misma presión p en la base del tubo.

Evalúe su comprensión de la sección 4.2 El mercurio es menos denso a altas temperaturas que a bajas temperaturas. Suponga que saca al exterior un barómetro de mercurio que estaba dentro de un refrigerador bien sellado, en un caluroso día de verano, y observa que la columna de mercurio se mantiene a la misma altura en el tubo. En comparación con la presión del aire en el interior del refrigerador, la presión del aire en el exterior es i) mayor, ii) menor o iii) igual. (Ignore el pequeño cambio en las dimensiones del tubo de vidrio debido al cambio de temperatura.)

14.3 Flotación

La **flotación** es un fenómeno muy conocido: un cuerpo sumergido en agua parece pesar menos que en el aire. Si el cuerpo es menos denso que el fluido, entonces flota. El cuerpo humano normalmente flota en el agua, y un globo lleno de helio flota en el aire.

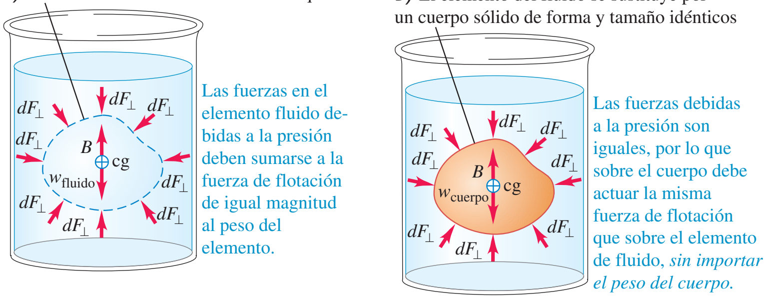
El principio de Arquímedes establece lo siguiente: si un cuerpo está parcial o totalmente sumergido en un fluido, éste ejerce una fuerza hacia arriba sobre el cuerpo igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo.

Para demostrar este principio, consideremos una porción arbitraria de fluido en reposo. En la figura 14.12a, el contorno irregular es la superficie que delimita esta porción de fluido. Las flechas representan las fuerzas que el fluido circundante ejerce sobre la superficie de frontera.

Todo el fluido está en equilibrio, así que la suma de todas las componentes y de fuerza sobre esta porción de fluido es cero. Por lo tanto, la suma de todas las componentes y de las fuerzas de *superficie* debe ser una fuerza hacia arriba de igual magnitud que el peso mg del fluido dentro de la superficie. Además, la suma de las torcas sobre la porción de fluido debe ser cero, así que la línea de acción de la componente y resultante de las fuerzas superficiales debe pasar por el centro de gravedad de esta porción de fluido.

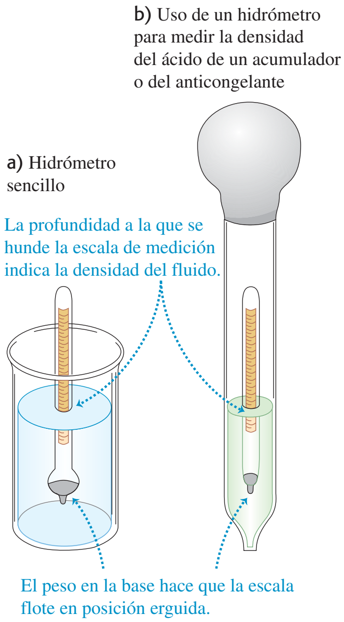
a) Elemento arbitrario de un fluido en equilibrio

b) El elemento del fluido se sustituye por un cuerpo sólido de forma y tamaño idénticos



14.12 Principio de Arquímedes.

14.13 Medición de la densidad de un fluido.



Ahora retiramos el fluido que está dentro de la superficie y lo sustituimos por un cuerpo sólido cuya forma es idéntica (figura 14.12b). La presión en cada punto es exactamente la misma que antes, de manera que la fuerza total hacia arriba ejercida por el fluido sobre el cuerpo también es la misma, igual en magnitud al peso *mg* del fluido que se desplazó para colocar el cuerpo. Llamamos a esta fuerza ascendente la **fuerza de flotación** que actúa sobre el cuerpo sólido. La línea de acción de la fuerza de flotación pasa por el centro de gravedad del fluido desplazado (que no necesariamente coincide con el centro de gravedad del cuerpo).

Si un globo flota en equilibrio en el aire, su peso (incluido el gas en su interior) debe ser igual al del aire desplazado por el globo. La carne de un pez es más densa que el agua; sin embargo, el pez puede flotar mientras está sumergido porque tiene una cavidad llena de gas dentro de su cuerpo. Esto hace que la densidad *media* del pez sea igual a la del agua, de manera que su peso neto es igual al peso del agua que desplaza. Un cuerpo cuya densidad media es *menor* que la de un líquido puede flotar parcialmente sumergido en la superficie superior libre del líquido. Cuanto mayor es la densidad del líquido menor será la porción sumergida del cuerpo. Si nadamos en agua de mar (densidad 1030 kg/m^3), flotamos más que en agua dulce (1000 kg/m^3). ?

Otro ejemplo conocido es el hidrómetro, empleado para medir la densidad de los líquidos (figura 14.13a). El flotador calibrado se hunde en el fluido hasta que el peso del fluido que desplaza es exactamente igual a su propio peso. El hidrómetro flota *más alto* en los líquidos más densos que en los líquidos menos densos, y tiene una escala en el tallo superior que permite leer directamente la densidad. La figura 14.13b ilustra un tipo de hidrómetro de uso común para medir la densidad del ácido de un acumulador o del anticongelante. La base del tubo grande se sumerge en el líquido; se aprieta el bulbo para expulsar el aire y luego se suelta, como si fuera un gotero gigante. El líquido sube por el tubo exterior, y el hidrómetro flota en la muestra de líquido.

Ejemplo 14.5 Flotación

Una estatua de oro sólido de 15.0 kg de peso está siendo levantada de un barco hundido (figura 14.14a). ¿Qué tensión hay en el cable cuando la estatua está *a*) en reposo y totalmente sumergida, y *b*) en reposo y fuera del agua?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Cuando la estatua está sumergida, experimenta una fuerza de flotación hacia arriba igual en magnitud al peso del fluido desplazado. Para calcular la tensión, observamos que la estatua está en equilibrio (en reposo) y consideramos las tres fuerzas que actúan sobre ella: su peso, la fuerza de flotación y la tensión en el cable.

PLANTEAR: La figura 14.14b ilustra el diagrama de cuerpo libre de la estatua en equilibrio. La incógnita es la tensión T. Nos dan el peso mg y podemos calcular la fuerza de flotación B usando el principio de Arquímedes. Haremos esto para dos casos: *a*) cuando la estatua está sumergida en el agua y *b*) cuando está fuera del agua e inmersa en el aire.

EJECUTAR: *a*) Para calcular la fuerza de flotación, primero calculamos el volumen de la estatua usando la densidad del oro de la tabla 14.1:

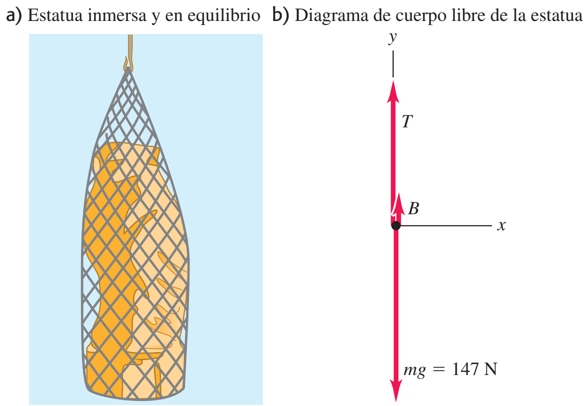
$$V = \frac{m}{\rho_{\text{oro}}} = \frac{15.0\ \text{kg}}{19.3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3} = 7.77 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

Usando otra vez la tabla 14.1, calculamos el peso de ese volumen de agua de mar:

$$\begin{aligned} w_{\text{am}} &= m_{\text{am}}g = \rho_{\text{am}}Vg \\ &= (1.03 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(7.77 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2) \\ &= 7.84\ \text{N} \end{aligned}$$

Esto es igual a la fuerza de flotación B.

14.14 ¿Cuál es la tensión en el cable que levanta la estatua?



La estatua está en reposo, así que la fuerza externa neta que actúa sobre ella es igual a cero. De acuerdo con la figura 14.14b,

$$\sum F_y = B + T + (-mg) = 0$$

$$\begin{aligned} T &= mg - B = (15.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) - 7.84\ \text{N} \\ &= 147\ \text{N} - 7.84\ \text{N} = 139\ \text{N} \end{aligned}$$

Si hay una balanza de resorte unida al extremo superior del cable, marcará 7.84 N menos de lo que marcaría si la estatua no estuviera sumergida en agua de mar. Por ello, la estatua sumergida parece pesar 139 N, cerca del 5% menos que su peso real de 147 N.

b) La densidad del aire es de cerca de 1.2 kg/m^3, así que la fuerza de flotación del aire sobre la estatua es

$$B = \rho_{\text{aire}} V g = (1.2\ \text{kg/m}^3)(7.77 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)$$
$$= 9.1 \times 10^{-3}\ \text{N}$$

Esto es sólo 62 millonésimas del peso real de la estatua. Este efecto es menor que la precisión de nuestros datos, así que lo despreciamos. Por lo tanto, la tensión en el cable con la estatua en el aire es igual al peso de la estatua, 147 N.

EVALUAR: Advierta que la fuerza de flotación es proporcional a la densidad del *fluido*, no a la densidad de la estatua. Cuanto más denso es el fluido, mayor será la fuerza de flotación y menor será la tensión en el cable. Si el fluido tuviera la misma densidad que la estatua, la fuerza de flotación sería igual al peso de la estatua y la tensión sería cero (el cable se aflojaría). Si el fluido fuera más denso que la estatua, la tensión sería *negativa*: la fuerza de flotación sería mayor que el peso de la estatua, y se requeriría una fuerza hacia abajo para evitar que la estatua se elevara.

Tensión superficial

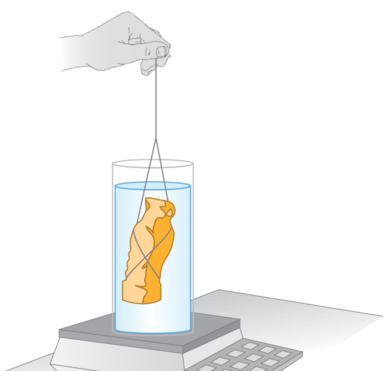
Un objeto menos denso que el agua, como una pelota de playa inflada con aire, flota con una parte de su volumen bajo la superficie. Por otra parte, un *clip* puede descansar *sobre* una superficie de agua aunque su densidad es varias veces mayor que la del agua. Esto es un ejemplo de **tensión superficial**: la superficie del líquido se comporta como una membrana en tensión (figura 14.15). La tensión superficial se debe a que las moléculas del líquido ejercen fuerzas de atracción entre sí. La fuerza neta sobre una molécula dentro del volumen del líquido es cero, pero una molécula en la superficie es atraída hacia el volumen (figura 14.16). Por esa razón, el líquido tiende a reducir al mínimo su área superficial, tal como lo hace una membrana estirada.

La tensión superficial explica por qué las gotas de lluvia en caída libre son esféricas (*no* con forma de lágrima): una esfera tiene menor área superficial para un volumen dado que cualquier otra forma. También explica por qué se usa agua jabonosa caliente en el lavado de la ropa. Para lavarla bien, se debe hacer pasar el agua por los diminutos espacios entre las fibras (figura 14.17). Esto implica aumentar el área superficial del agua, lo que es difícil por la tensión superficial. La tarea se facilita aumentando la temperatura del agua y añadiendo jabón, pues ambas cosas reducen la tensión superficial.

La tensión superficial es importante para una gota de agua de 1 mm de diámetro, que tiene un área relativamente grande en comparación con su volumen. (Una esfera de radio r tiene área $4\pi r^2$ y volumen $(4\pi/3)r^3$. La razón entre la superficie y el área es $3/r$, y aumenta al disminuir el radio.) En cambio, si la cantidad de líquido es grande, la razón entre superficie y volumen es relativamente pequeña y la tensión superficial es insignificante en comparación con las fuerzas de presión. En el resto del capítulo, sólo consideraremos volúmenes grandes de fluidos, así que ignoraremos los efectos de la tensión superficial.

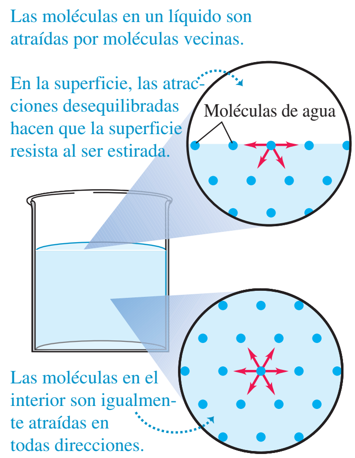
Evalúe su comprensión de la sección 14.3 Usted coloca un recipiente con agua de mar sobre una báscula y toma nota de la lectura que indica la báscula. Ahora usted suspende la estatua del ejemplo 14.5 en el agua (figura 14.18). ¿Cómo cambia la lectura de la báscula? i) Se incrementa en 7.84 N; ii) disminuye en 7.84 N; iii) permanece igual; iv) ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

14.18 ¿Cómo cambia la lectura de la báscula cuando la estatua se sumerge en el agua?

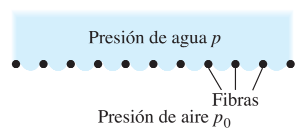


14.15 La superficie del agua actúa como membrana sometida a tensión, y permite a este insecto tejedor o zapatero de agua caminar literalmente sobre el agua.

14.16 Una molécula en la superficie es atraída hacia el volumen del líquido, y esto tiende a reducir el área superficial del líquido.



14.17 La tensión superficial dificulta el paso del agua por aberturas pequeñas. La presión requerida p del agua puede reducirse usando agua caliente con jabón, lo que reduce la tensión superficial.

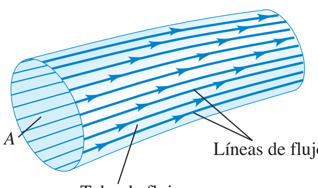


14.4 Flujo de fluido

Ahora ya estamos preparados para considerar el *movimiento* de un fluido. El flujo de fluidos suele ser extremadamente complejo, como se aprecia en las corrientes de los rápidos de los ríos o en las flamas de una fogata, pero algunas situaciones se pueden representar con modelos idealizados relativamente simples. Un **fluido ideal** es *incompresible* (su densidad no puede cambiar) y no tiene fricción interna (llamada **viscosidad**). Los líquidos son aproximadamente incompresibles en casi todas las situaciones, y también podemos tratar un gas como incompresible si las diferencias de presión de una región a otra no son muy grandes. La fricción interna en un fluido causa esfuerzos de corte cuando dos capas adyacentes de fluido se mueven una en relación con la otra, como cuando un fluido fluye dentro de un tubo o alrededor de un obstáculo. En algunos casos, podemos despreciar estas fuerzas de corte en comparación con las fuerzas debidas a la gravedad y a diferencias de presión.

El trayecto de una partícula individual en un fluido en movimiento se llama **línea de flujo**. Si el patrón global de flujo no cambia con el tiempo, entonces tenemos un **flujo estable**. En un flujo estable, cada elemento que pasa por un punto dado sigue la misma línea de flujo. En este caso, el "mapa" de las velocidades del fluido en distintos puntos del espacio permanece constante, aunque la velocidad de una partícula específica pueda cambiar tanto en magnitud como en dirección durante su movimiento. Una **línea de corriente** es una curva cuya tangente en cualquier punto tiene la dirección de la velocidad del fluido en ese punto. Si el patrón de flujo cambia con el tiempo, las líneas de corriente no coinciden con las de flujo. Consideraremos sólo situaciones de flujo estable, en las que las líneas de flujo y las de corriente son idénticas.

14.19 Tubo de flujo delimitado por líneas de flujo. En flujo estable, el fluido no puede cruzar las paredes de un tubo de flujo.



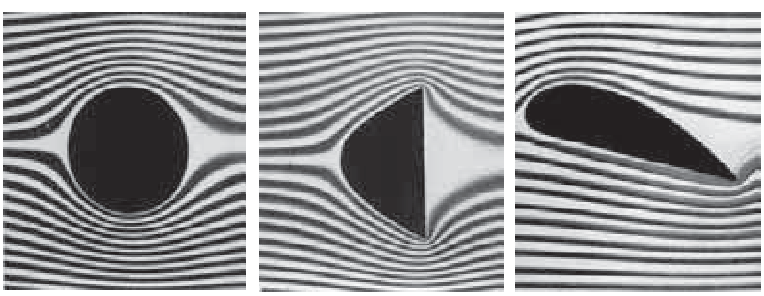
Las líneas de flujo que pasan por el borde de un elemento de área imaginario, como el área A en la figura 14.19, forman un tubo llamado **tubo de flujo**. De acuerdo con la definición de línea de flujo, si el flujo es estable, el fluido no puede cruzar las paredes laterales de un tubo de flujo; los fluidos de diferentes tubos de flujo no pueden mezclarse.

La figura 14.20 ilustra patrones de flujo de fluidos de izquierda a derecha alrededor de varios obstáculos. Las fotografías se tomaron inyectando un tinte en el agua que fluye entre dos placas de vidrio cercanas. Estos patrones son representativos del **flujo laminar**, en el que capas adyacentes de fluido se deslizan suavemente una sobre otra, y el flujo es estable. (Una *lámina* es una hoja delgada.) Si la tasa de flujo es suficientemente alta, o si las superficies de frontera causan cambios abruptos en la velocidad, el flujo puede volverse irregular y caótico. Esto se llama **flujo turbulento** (figura 14.21). En flujo turbulento no hay un patrón de estado estable; el patrón de flujo cambia continuamente.

La ecuación de continuidad

La masa de un fluido en movimiento no cambia al fluir. Esto conduce a una relación cuantitativa importante llamada **ecuación de continuidad**. Considere una porción de un tubo de flujo entre dos secciones transversales estacionarias con áreas A_1 y A_2 (fi-

14.20 Flujo laminar alrededor de obstáculos con diferente forma.



14.21 El flujo de humo que sale de estas varas de incienso es laminar hasta cierto punto; luego se vuelve turbulento.

gura 14.22). Los valores de la rapidez del fluido en estas secciones son v_1 y v_2, respectivamente. No fluye fluido a través de los costados del tubo porque la velocidad del fluido es tangente a la pared en todos sus puntos. Durante un breve intervalo de tiempo dt, el fluido en A_1 se mueve una distancia $v_1\,dt$, así que un cilindro de fluido de altura $v_1\,dt$ y volumen $dV_1 = A_1 v_1\,dt$ fluye hacia el tubo a través de A_1. Durante ese mismo lapso, un cilindro de volumen $dV_2 = A_2 v_2\,dt$ sale del tubo a través de A_2.

Consideremos primero el caso de un fluido incompresible cuya densidad ρ tiene el mismo valor en todos los puntos. La masa dm_1 que fluye al tubo por A_1 en el tiempo dt es $dm_1 = \rho A_1 v_1\,dt$. De manera similar, la masa dm_2 que sale por A_2 en el mismo tiempo es $dm_2 = \rho A_2 v_2\,dt$. En flujo estable, la masa total en el tubo es constante, así que $dm_1 = dm_2$ y

$$\rho A_1 v_1\,dt = \rho A_2 v_2\,dt \qquad \text{o bien,}$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \text{(ecuación de continuidad, fluido incompresible)} \qquad (14.10)$$

El producto Av es la *tasa de flujo de volumen* dV/dt, la rapidez con que el volumen cruza una sección del tubo:

$$\frac{dV}{dt} = Av \qquad \text{(tasa de flujo de volumen)} \qquad (14.11)$$

La tasa de flujo de *masa* es el flujo de masa por unidad de tiempo a través de una sección transversal, y es igual a la densidad ρ multiplicada por la tasa de flujo de volumen dV/dt.

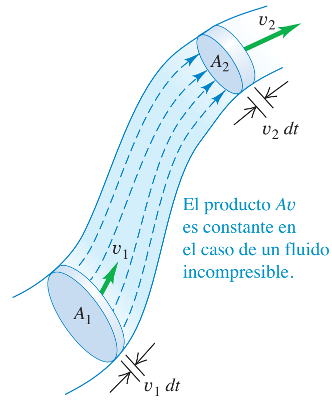
La ecuación (14.10) indica que la tasa de flujo de volumen tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de cualquier tubo de flujo. Si la sección transversal de un tubo de flujo disminuye, la rapidez aumenta, y viceversa. La parte profunda de un río tiene mayor área transversal y una corriente más lenta que la parte superficial, pero las tasas de flujo de volumen son iguales en los dos puntos. El chorro de agua que sale de un grifo se adelgaza al adquirir rapidez durante su caída, pero dV/dt tiene el mismo valor en todo el chorro. Si un tubo de agua de 2 cm de diámetro se conecta a un tubo de 1 cm de diámetro, la rapidez de flujo es cuatro veces más grande en el segundo tubo que en el primero.

Podemos generalizar la ecuación (14.10) para el caso en que el fluido *no* es incompresible. Si ρ_1 y ρ_2 son las densidades en las secciones 1 y 2, entonces

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \qquad \text{(ecuación de continuidad, fluido compresible)} \qquad (14.12)$$

Si el fluido es más denso en el punto 2 que en el punto 1 ($\rho_1 > \rho_2$), la tasa de flujo de volumen en el punto 2 será menor que en el punto 1 ($A_2 v_2 < A_1 v_1$). Dejamos los detalles al lector (véase el ejercicio 14.38). Si el fluido es incompresible, de manera que ρ_1 y ρ_2 siempre son iguales, la ecuación (14.12) se reduce a la ecuación (14.10).

14.22 Tubo de flujo con área de sección transversal cambiante. Si el fluido es incompresible, el producto Av tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo del tubo.



Ejemplo 14.6 Flujo de fluido incompresible

Como parte de un sistema de lubricación para maquinaria pesada, un aceite con densidad de 850 kg/m^3 se bombea a través de un tubo cilíndrico de 8.0 cm de diámetro a razón de 9.5 litros por segundo. *a*) Calcule la rapidez del aceite y la tasa de flujo de masa. *b*) Si el diámetro del tubo se reduce a 4.0 cm, ¿qué nuevos valores tendrán la rapidez y la tasa de flujo de volumen? Suponga que el aceite es incompresible.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El punto clave es que el fluido es incompresible, de manera que podemos basarnos en la ecuación de continuidad para relacionar la tasa de flujo de masa, la tasa de flujo de volumen, el área del tubo de flujo y la rapidez de flujo.

PLANTEAR: Usaremos la definición de tasa de flujo de volumen, ecuación (14.11), para determinar la rapidez v_1 en la sección de 8.0 cm de diámetro. La tasa de flujo de masa es el producto de la densidad y la tasa de flujo de volumen. La ecuación de continuidad para flujo incompresible, ecuación (14.10), nos permite obtener la rapidez v_2 en la sección de 4.0 cm de diámetro.

EJECUTAR: *a*) La tasa de flujo de volumen dV/dt es igual al producto $A_1 v_1$, donde A_1 es el área de sección transversal del tubo de 8.0 cm de diámetro (y radio de 4.0 cm). Por lo tanto,

$$v_1 = \frac{dV/dt}{A_1} = \frac{(9.5\ \text{L/s})(10^{-3}\ \text{m}^3/\text{L})}{\pi(4.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2} = 1.9\ \text{m/s}$$

continúa

La tasa de flujo de masa es $\rho\, dV/dt = (850 \text{ kg/m}^3)(9.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}) = 8.1 \text{ kg/s}$.

b) Puesto que el aceite es incompresible, la tasa de flujo de volumen tiene el *mismo* valor (9.5 L/s) en ambas secciones del tubo. De acuerdo con la ecuación (14.10),

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1 = \frac{\pi(4.0 \times 10^{-2}\text{ m})^2}{\pi(2.0 \times 10^{-2}\text{ m})^2}(1.9 \text{ m/s}) = 7.6 \text{ m/s}$$

EVALUAR: La segunda sección de tubo tiene la mitad del diámetro y la cuarta parte del área transversal de la primera sección. Por consiguiente, la rapidez debe ser cuatro veces mayor en la segunda sección, y eso es precisamente lo que indica nuestro resultado ($v_2 = 4v_1$).

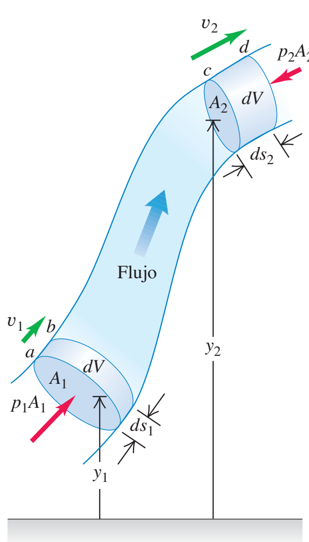
Evalúe su comprensión de la sección 14.4 Una cuadrilla de mantenimiento está trabajando en una sección de una carretera de tres carriles, dejando un solo carril abierto al tránsito. El resultado es un flujo de tránsito mucho más lento (un embotellamiento). ¿Los automóviles en la carretera se comportan como i) moléculas de un fluido incompresible o ii) moléculas de un fluido compresible?

14.5 Ecuación de Bernoulli

Según la ecuación de continuidad, la rapidez de flujo de un fluido puede variar a lo largo de las trayectorias del fluido. La presión también puede variar; depende de la altura, al igual que en la situación estática (sección 14.2) y también de la rapidez de flujo. Podemos deducir una relación importante, llamada *ecuación de Bernoulli*, que relaciona la presión, la rapidez de flujo y la altura para el flujo de un fluido ideal. La ecuación de Bernoulli es una herramienta indispensable para analizar los sistemas de plomería, las plantas hidroeléctricas y el vuelo de los aviones.

La dependencia de la presión con respecto a la rapidez se deduce de la ecuación de continuidad, ecuación (14.10). Si un fluido incompresible fluye por un tubo con sección transversal variable, su rapidez *debe* cambiar, así que un elemento de fluido debe tener una aceleración. Si el tubo es horizontal, la fuerza que causa esta aceleración debe ser aplicada por el fluido circundante. Esto implica que la presión *debe* ser diferente en regiones con diferente sección transversal; si fuera la misma en todos lados, la fuerza neta sobre cada elemento de fluido sería cero. Cuando un tubo horizontal se estrecha y un elemento de fluido se acelera, debe estarse moviendo hacia una región de menor presión para tener una fuerza neta hacia delante que lo acelere. Si la altura también cambia, esto provoca una diferencia de presión adicional.

14.23 Deducción de la ecuación de Bernoulli. El trabajo neto realizado sobre un elemento de fluido por la presión del fluido circundante es igual al cambio en la energía cinética más el cambio en la energía potencial gravitacional.



Deducción de la ecuación de Bernoulli

Para deducir la ecuación de Bernoulli, aplicamos el teorema del trabajo y la energía al fluido en una sección de un tubo de flujo. En la figura 14.23, consideramos el elemento de fluido que en algún instante inicial está entre las dos secciones transversales a y c. Los valores de la rapidez en los extremos inferior y superior son v_1 y v_2. En un pequeño intervalo de tiempo dt, el fluido que está en a se mueve a b, una distancia $ds_1 = v_1\, dt$, y el fluido que está inicialmente en c se mueve a d, una distancia $ds_2 = v_2\, dt$. Las áreas transversales en los dos extremos son A_1 y A_2, como se indica. El fluido es incompresible, así que, por la ecuación de continuidad [ecuación (14.10)], el volumen de fluido dV que pasa por *cualquier* sección transversal durante el tiempo dt es el mismo. Es decir, $dV = A_1\, ds_1 = A_2\, ds_2$.

Calculemos el *trabajo* efectuado sobre este elemento de fluido durante dt. Suponemos que la fricción interna del fluido es despreciable (es decir, no hay viscosidad), así que las únicas fuerzas no gravitacionales que efectúan trabajo sobre el elemento fluido se deben a la presión del fluido circundante. Las presiones en los dos extremos son p_1 y p_2; la fuerza sobre la sección transversal en a es p_1A_1, y la fuerza en c es p_2A_2. El trabajo neto dW efectuado sobre el elemento por el fluido circundante durante este desplazamiento es, por lo tanto,

$$dW = p_1A_1\, ds_1 - p_2A_2\, ds_2 = (p_1 - p_2)\, dV \tag{14.13}$$

El segundo término tiene signo negativo porque la fuerza en c se opone al desplazamiento del fluido.

El trabajo dW se debe a fuerzas distintas de la fuerza de gravedad conservadora, así que es igual al cambio en la energía mecánica total (energía cinética más energía potencial gravitacional) asociada al elemento fluido. La energía mecánica para el fluido entre las secciones b y c no cambia. Al principio de dt, el fluido entre a y b tiene volumen $A_1\,ds_1$, masa $\rho A_1\,ds_1$ y energía cinética $\frac{1}{2}\rho(A_1\,ds_1)v_1^2$. Al final de dt, el fluido entre c y d tiene energía cinética $\frac{1}{2}\rho(A_2\,ds_2)v_2^2$. El cambio neto de energía cinética dK durante dt es

$$dK = \frac{1}{2}\rho\,dV(v_2^2 - v_1^2) \tag{14.14}$$

¿Y qué hay del cambio en la energía potencial gravitacional? Al iniciar dt, la energía potencial para la masa que está entre a y b es $dm\,gy_1 = \rho\,dV\,gy_1$. Al final de dt, la energía potencial para la masa que está entre c y d es $dm\,gy_2 = \rho\,dV\,gy_2$. El cambio neto de energía potencial dU durante dt es

$$dU = \rho\,dV\,g(y_2 - y_1) \tag{14.15}$$

Combinando las ecuaciones (14.13), (14.14) y (14.15) en la ecuación de energía $dW = dK + dU$, obtenemos

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)\,dV &= \frac{1}{2}\rho\,dV(v_2^2 - v_1^2) + \rho\,dV\,g(y_2 - y_1) \\ p_1 - p_2 &= \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1) \end{aligned} \tag{14.16}$$

Ésta es la **ecuación de Bernoulli**, y dice que el trabajo efectuado sobre una unidad de volumen de fluido por el fluido circundante es igual a la suma de los cambios de las energías cinética y potencial por unidad de volumen que ocurren durante el flujo. También podemos interpretar la ecuación (14.16) en términos de presiones. El primer término de la derecha es la diferencia de presión asociada al cambio de rapidez del fluido; el segundo término a la derecha es la diferencia de presión adicional causada por el peso del fluido y la diferencia de altura de los dos extremos.

También podemos expresar la ecuación (14.16) en una forma más práctica:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad \text{(ecuación de Bernoulli)} \tag{14.17}$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos *cualesquiera* del tubo de flujo, así que también podemos escribir

$$p + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \tag{14.18}$$

Observe que si el fluido *no* se mueve ($v_1 = v_2 = 0$), la ecuación (14.17) se reduce a la relación de presión que dedujimos para un fluido en reposo [ecuación (14.5)].

CUIDADO **El principio de Bernoulli se aplica sólo en ciertas situaciones** Subrayamos de nuevo que la ecuación de Bernoulli sólo es válida para un flujo estable de un fluido incompresible sin fricción interna (sin viscosidad). Es una ecuación sencilla y fácil de usar; ¡cuide de no aplicarla en situaciones en que no es válida!

Estrategia para resolver problemas 14.1 Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli se deduce del teorema del trabajo y la energía, así que no debe sorprender que gran parte de las estrategias sugeridas en la sección 7.1 se apliquen aquí.

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Primero, asegúrese de que el flujo del fluido sea estable y que el fluido sea incompresible y no tenga fricción interna. Este caso es una idealización, pero se acerca mucho a la realidad en el caso de fluidos que fluyen por tubos suficientemente grandes y en el de flujos dentro de grandes cantidades de fluido (por ejemplo, el aire que fluye alrededor de un avión o el agua que fluye alrededor de un pez).

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Siempre comience por identificar claramente los puntos 1 y 2 a los que se refiere la ecuación de Bernoulli.
2. Defina su sistema de coordenadas, sobre todo el nivel en que $y = 0$.

continúa

3. Elabore listas de las cantidades conocidas y desconocidas de la ecuación (14.17). Las variables son p_1, p_2, v_1, v_2, y_1 y y_2, y las constantes son ρ y g. Defina qué incógnitas debe determinar.

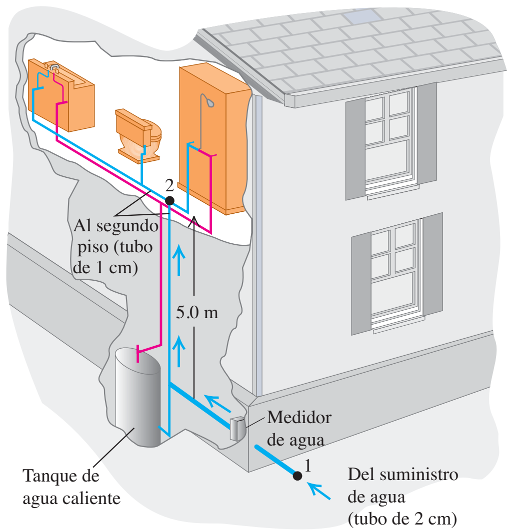
EJECUTAR *la solución* como sigue: Escriba la ecuación de Bernoulli y despeje las incógnitas. En algunos problemas, habrá que usar la ecuación de continuidad, ecuación (14.10), para tener una relación entre los dos valores de rapidez en términos de áreas transversales de tubos o recipientes. O tal vez se tienen ambos valores de rapidez y hay que determinar una de las áreas. Tal vez necesite también la ecuación (14.11) para calcular la tasa de flujo de volumen.

EVALUAR *la respuesta:* Como siempre, verifique que los resultados sean lógicos desde el punto de vista de la física. Compruebe que las unidades sean congruentes. En el SI, la presión está en Pa, la densidad en kg/m^3 y la rapidez en m/s. Recuerde también que las presiones deben ser todas absolutas o todas manométricas.

Ejemplo 14.7 Presión de agua en el hogar

En una casa entra agua por un tubo con diámetro interior de 2.0 cm a una presión absoluta de 4.0×10^5 Pa (unas 4 atm). Un tubo de 1.0 cm de diámetro va al cuarto de baño del segundo piso, 5.0 m más arriba (figura 14.24). La rapidez de flujo en el tubo de entrada es de 1.5 m/s. Calcule la rapidez de flujo, la presión y la tasa de flujo de volumen en el cuarto de baño.

14.24 ¿Qué presión tiene el agua en el cuarto de baño del segundo piso de esta casa?



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Suponemos que el agua fluye a una tasa constante. El tubo tiene un diámetro relativamente grande, de manera que es razonable ignorar la fricción interna. El agua es más bien incompresible, por lo que es una buena aproximación utilizar la ecuación de Bernoulli.

PLANTEAR: Tomamos los puntos 1 y 2 en el tubo de entrada y el cuarto de baño, respectivamente. Nos dan la rapidez v_1 y la presión p_1, en el tubo de entrada, y los diámetros de los tubos en los puntos 1 y 2 (con lo cual podemos calcular las áreas A_1 y A_2). Tomamos $y_1 = 0$ (en la entrada) y $y_2 = 5.0$ m (en el cuarto de baño). Las dos primeras incógnitas son la rapidez v_2 y la presión p_2. Puesto que tenemos más de una incógnita, usamos tanto la ecuación de Bernoulli como la ecuación de continuidad para un fluido incompresible. Una vez que obtengamos v_2, calcularemos la tasa de flujo de volumen v_2A_2 en el punto 2.

EJECUTAR: La rapidez v_2 en el cuarto de baño se obtiene de la ecuación de continuidad, ecuación (14.10):

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1 = \frac{\pi(1.0\text{ cm})^2}{\pi(0.50\text{ cm})^2}(1.5\text{ m/s}) = 6.0\text{ m/s}$$

Nos dan p_1 y v_1, y podemos obtener p_2 con la ecuación de Bernoulli, ecuación (14.16):

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 - \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) - \rho g(y_2 - y_1) = 4.0 \times 10^5\text{ Pa} \\ &\quad - \frac{1}{2}(1.0 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(36\text{ m}^2/\text{s}^2 - 2.25\text{ m}^2/\text{s}^2) \\ &\quad - (1.0 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(9.8\text{ m/s}^2)(5.0\text{ m}) \\ &= 4.0 \times 10^5\text{ Pa} - 0.17 \times 10^5\text{ Pa} - 0.49 \times 10^5\text{ Pa} \\ &= 3.3 \times 10^5\text{ Pa} = 3.3\text{ atm} = 48\text{ lb/in}^2 \end{aligned}$$

La tasa de flujo de volumen es

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= A_2v_2 = \pi(0.50 \times 10^{-2}\text{ m})^2(6.0\text{ m/s}) \\ &= 4.7 \times 10^{-4}\text{ m}^3/\text{s} = 0.47\text{ L/s} \end{aligned}$$

EVALUAR: Ésta es una tasa de flujo razonable para un lavabo o ducha. Advierta que, al cerrar el agua, v_1 y v_2 son cero, el término $\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$ de la ecuación de la presión desaparece, y la presión sube a 3.5×10^5 Pa.

Ejemplo 14.8 Rapidez de salida

La figura 14.25 ilustra un tanque de almacenamiento de gasolina con área transversal A_1, lleno hasta una altura h. El espacio arriba de la gasolina contiene aire a p_0 y la gasolina sale por un tubo corto de área A_2. Deduzca expresiones para la rapidez de flujo en el tubo y la tasa de flujo de volumen.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Podemos considerar todo el volumen de líquido en movimiento como un solo tubo de flujo de un fluido incompresible con fricción interna despreciable. Por lo tanto, podemos usar el principio de Bernoulli.

PLANTEAR: Los puntos 1 y 2 en la figura 14.25 están en la superficie de la gasolina y en el tubo corto de salida, respectivamente. En el punto 1, la presión es p_0; en el punto 2, la presión es la atmosférica, p_{atm}. Tomamos $y = 0$ en el tubo de salida, así que $y_1 = h$ y $y_2 = 0$. Puesto que A_1 es mucho mayor que A_2, el nivel de la gasolina en el tanque bajará con mucha lentitud, así que prácticamente podemos considerar que v_1 es igual a cero. Obtendremos la variable buscada v_2 con la ecuación (14.17) y la tasa de flujo de volumen con la ecuación (14.11).

EJECUTAR: Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2, tenemos

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(0)$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\left(\frac{p_0 - p_{atm}}{\rho}\right) + 2gh$$

Con $v_1 = 0$, tenemos

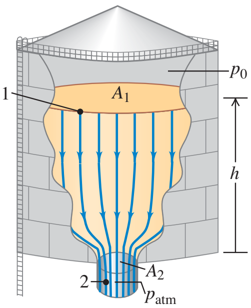
$$v_2^2 = 2\left(\frac{p_0 - p_{atm}}{\rho}\right) + 2gh$$

De acuerdo con la ecuación (14.11), la tasa de flujo de volumen es $dV/dt = v_2 A_2$.

EVALUAR: La rapidez v_2, conocida como *rapidez de salida*, depende tanto de la diferencia de presión ($p_0 - p_{atm}$) como de la altura h del líquido en el tanque. Si el tanque está abierto por arriba a la atmósfera, no habrá exceso de presión: $p_0 = p_{atm}$ y no hay diferencia de presión: $p_0 - p_{atm} = 0$. En ese caso,

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

14.25 Cálculo de la rapidez de salida de gasolina por el fondo de un tanque de almacenamiento.



Esto es, la rapidez de salida por una abertura a una distancia h bajo la superficie del líquido es la *misma* que adquiriría un cuerpo al caer libremente una altura h. Este resultado es el *teorema de Torricelli* y es válido no sólo para una abertura en la base de un recipiente, sino también para un agujero en una pared a una profundidad h bajo la superficie. En este caso, la tasa de flujo de volumen es

$$\frac{dV}{dt} = A_2\sqrt{2gh}$$

Ejemplo 14.9 El medidor Venturi

La figura 14.26 ilustra un *medidor Venturi*, que se usa para medir la rapidez de flujo en un tubo. La parte angosta del tubo se llama *garganta*. Deduzca una expresión para la rapidez de flujo v_1 en términos de las áreas transversales A_1 y A_2 y la diferencia de altura h del líquido en los dos tubos verticales.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El flujo es estable y suponemos que el fluido es incompresible y que tiene fricción interna despreciable. Por lo tanto, podemos utilizar la ecuación de Bernoulli.

PLANTEAR: Aplicamos la ecuación de Bernoulli a las partes ancha (punto 1) y angosta (punto 2) del tubo. La diferencia de altura entre los dos tubos verticales indica la diferencia de presión entre los puntos 1 y 2.

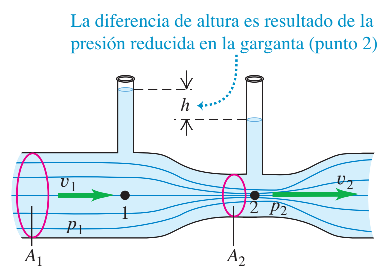
EJECUTAR: Los dos puntos tienen la misma coordenada vertical ($y_1 = y_2$), así que la ecuación (14.17) dice

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

De acuerdo con la ecuación de continuidad, $p_2 = (A_1/A_2)v_1$. Sustituyendo y reordenando, obtenemos

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)$$

14.26 El medidor Venturi.



De acuerdo con la sección 14.2, la diferencia de presión $p_1 - p_2$ también es igual a $\rho g h$, donde h es la diferencia de nivel del líquido en los dos tubos. Combinando esto con el resultado anterior y despejando v_1, obtenemos

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(A_1/A_2)^2 - 1}}$$

EVALUAR: Puesto que A_1 es mayor que A_2, v_2 es mayor que v_1 y la presión p_2 en la garganta es *menor* que p_1. Una fuerza neta a la derecha acelera el fluido al entrar en la garganta, y una fuerza neta a la izquierda lo frena al salir.

Ejemplo conceptual 14.10 Sustentación en el ala de un avión

La figura 14.27a muestra líneas de flujo alrededor de un corte del ala de un avión. Las líneas se aprietan arriba del ala, lo que corresponde a una mayor rapidez de flujo y una presión reducida en esta región, igual que en la garganta del medidor Venturi. La fuerza que actúa hacia arriba sobre el lado inferior del ala es mayor que la que actúa hacia abajo sobre el lado superior; hay una fuerza neta hacia arriba, o *sustentación*. La sustentación no se debe sólo al impulso del aire que incide bajo el ala; de hecho, la presión reducida en la superficie superior del ala es lo que más contribuye a la sustentación. (Esta explicación muy simplificada no considera la formación de vórtices; un análisis más completo los tendría en cuenta.)

También podemos entender la fuerza de sustentación en términos de cambios de cantidad de movimiento. La figura 14.27a indica que hay un cambio neto *hacia abajo* en la componente vertical de la cantidad de movimiento del aire que fluye por el ala, correspondiente a la fuerza descendente que el ala ejerce sobre el aire. La fuerza de reacción que actúa *sobre* el ala es *hacia arriba*, como habíamos visto.

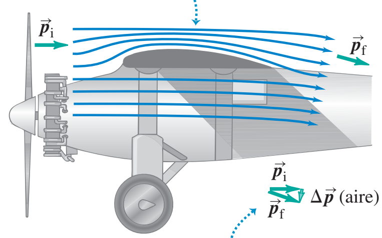
Se observa un patrón de flujo y una fuerza de sustentación similares en las inmediaciones de cualquier objeto saliente cuando hace viento. Cuando sopla un viento bastante intenso, la fuerza de sustentación que actúa sobre la parte superior de un paraguas abierto puede hacer que éste se doble hacia arriba. También actúa una fuerza de sustentación sobre un automóvil que va a gran velocidad porque el aire se mueve sobre el techo curvo del vehículo. Esa sustentación puede reducir la tracción de los neumáticos, y es por ello que muchos automóviles están equipados con un alerón aerodinámico (*spoiler*) en la parte trasera. El alerón se parece a una ala invertida y provee una fuerza descendente que actúa sobre las ruedas traseras.

CUIDADO **Una interpretación equívoca acerca de las alas** Las explicaciones simplificadas de las alas a menudo afirman que el aire viaja más rápido sobre la parte superior de un ala porque "tiene que viajar una mayor distancia". Esta imagen supone que dos moléculas adyacentes de aire que toman direcciones distintas en la parte anterior del ala —una que se dirige por encima de la superficie superior del ala y la otra por debajo de la superficie inferior— deben encontrarse de nuevo en el borde posterior. ¡Pero no es así! La figura 14.27b presenta una simulación de computadora de parcelas de aire que fluyen alrededor del ala de un avión. Las parcelas de aire adyacentes en la parte anterior del ala *no* se encuentran en la parte posterior, porque el flujo sobre la parte superior del ala en realidad es más rápido que en la imagen simplificada (e incorrecta). De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, esta mayor rapidez significa que hay una presión incluso menor por encima del ala (y, por lo tanto, una mayor sustentación) que lo que sugiere la descripción simplificada.

14.27 **a)** Líneas de flujo alrededor del ala de un avión. La cantidad de movimiento de una parcela de aire (relativa al ala) es $\vec{p}_i$ antes de llegar al ala y $\vec{p}_f$ después. **b)** Simulación de la computadora de parcelas de aire que fluyen alrededor del ala de un avión.

a) Líneas de flujo alrededor del ala de un avión

Las líneas de flujo de aire que se desplazan por encima de la parte superior del ala se aprietan, por lo que la rapidez de flujo es mayor y, por consiguiente, la presión es menor.



Una explicación equivalente: la forma del ala imparte una cantidad de movimiento descendente neto al aire, de manera que la fuerza de reacción sobre el avión es hacia arriba.

b) Simulación de computadora del flujo de aire alrededor del ala de un avión

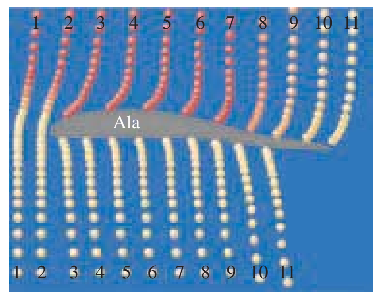


Imagen de parcelas de aire que fluyen alrededor del ala de un avión; en ella se observa que el aire va mucho más rápido por encima de la parte superior que por debajo de la parte inferior (y que las parcelas de aire que están juntas en el borde anterior del ala ¡no se encuentran en el borde posterior!)

Evalúe su comprensión de la sección 14.5 ¿Cuál es el enunciado más exacto del principio de Bernoulli? i) El aire que se desplaza rápidamente provoca presión más baja. ii) La presión más baja provoca que el aire se desplace rápido. iii) Ambas afirmaciones (i y ii) son igualmente exactas.

*14.6 Viscosidad y turbulencia

Al hablar del flujo de fluidos supusimos que el fluido no tenía fricción interna y que el flujo era laminar. Aunque en muchos casos esos supuestos son válidos, en muchas situaciones físicas importantes los efectos de la viscosidad (fricción interna) y la turbulencia (flujo no laminar) son extremadamente importantes. Examinemos someramente algunas de esas situaciones.

Viscosidad

La **viscosidad** es fricción interna en un fluido. Las fuerzas viscosas se oponen al movimiento de una porción de un fluido en relación con otra. La viscosidad es la razón por la que se dificulta remar una canoa en aguas tranquilas, pero también es lo que hace que funcione el remo. Los efectos de la viscosidad son importantes en el flujo de fluidos en las tuberías, en el flujo de la sangre, en la lubricación de las partes de un motor y en muchas otras situaciones.

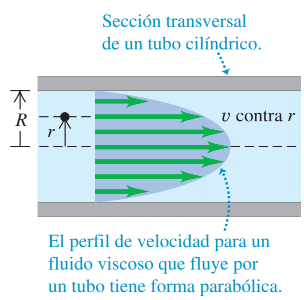
Los fluidos que fluyen con facilidad, como el agua y la gasolina, tienen menor viscosidad que los líquidos "espesos" como la miel o el aceite para motor. Las viscosidades de todos los fluidos dependen mucho de la temperatura, aumentan para los gases y disminuyen para los líquidos al subir la temperatura (figura 14.28). Un objetivo importante en el diseño de aceites para lubricar motores es *reducir* tanto como sea posible la variación de la viscosidad con la temperatura.

14.28 La lava es un ejemplo de fluido viscoso. La viscosidad disminuye al aumentar la temperatura: cuanto más caliente está la lava, más fácilmente fluye.

Un fluido viscoso tiende a adherirse a una superficie sólida que está en contacto con ella. Siempre hay una *capa de frontera* delgada de fluido cerca de la superficie, en la que el fluido está casi en reposo respecto a ella. Por eso, las partículas de polvo pueden adherirse al aspa de un ventilador aun cuando esté girando rápidamente, y por eso no podemos limpiar bien un auto con sólo dirigir el chorro de agua de una manguera hacia él.

La viscosidad tiene efectos importantes sobre el flujo de los líquidos a través de tuberías, y esto incluye el flujo de la sangre por el sistema circulatorio. Pensemos primero en un fluido con cero viscosidad para poder aplicar la ecuación de Bernoulli, ecuación (14.17). Si los dos extremos de un tubo cilíndrico largo están a la misma altura ($y_1 = y_2$) y la rapidez de flujo es la misma en ambos extremos ($v_1 = v_2$), la ecuación de Bernoulli nos indica que la presión es la misma en ambos extremos. Sin embargo, este resultado simplemente no es válido si tomamos en cuenta la viscosidad. Para ver por qué, considere la figura 14.29, que muestra el perfil de rapidez de flujo para el flujo laminar de un fluido viscoso en un tubo cilíndrico largo. Debido a la viscosidad, la rapidez es *cero* en las paredes del tubo (a las que se adhiere el fluido) y máxima en el centro del tubo. El movimiento semeja muchos tubos concéntricos que se deslizan unos en relación con otros, con el tubo central moviéndose más rápidamente y el más exterior en reposo. Las fuerzas viscosas entre los tubos se oponen a este deslizamiento, de manera que si queremos mantener el flujo, deberemos aplicar una mayor presión atrás del flujo que adelante de él. Por eso también necesitamos seguir apretando un tubo de pasta dentífrica o un envase de salsa de tomate (ambos fluidos viscosos) para que siga saliendo el fluido del interior. Los dedos aplican detrás del flujo una presión mucho mayor que la presión atmosférica al frente del flujo.

14.29 Perfil de velocidad para un fluido viscoso en un tubo cilíndrico.



La diferencia de presión requerida para mantener una tasa determinada de flujo de volumen a través de un tubo cilíndrico de longitud L y radio R resulta ser proporcional a L/R^4. Si disminuimos R a la mitad, la presión requerida aumenta $2^4 = 16$ veces; si disminuimos R en un factor de 0.90 (una reducción del 10%), la diferencia de presión requerida aumentará en un factor de $(1/0.90)^4 = 1.52$ (un aumento del 52%). Esta sencilla relación explica el vínculo entre una dieta alta en colesterol (que tiende a reducir el diámetro de las arterias) y una presión arterial elevada. Debido a la dependencia R^4, incluso un leve estrechamiento de las arterias puede elevar considerablemente la presión arterial y forzar el músculo cardiaco.

Turbulencia

Si la rapidez de un fluido que fluye excede cierto valor crítico, el flujo deja de ser laminar. El patrón de flujo se vuelve muy irregular y complejo, y cambia continuamente con el tiempo; no hay patrón de estado estable. Este flujo irregular y caótico se denomina **turbulencia**. La figura 14.21 muestra el contraste entre flujo laminar y turbulento para humo que asciende en el aire. La ecuación de Bernoulli *no* es aplicable a regiones de turbulencia, pues el flujo no es estable.

El hecho de que un flujo sea laminar o turbulento depende en parte de la viscosidad del fluido. Cuanto mayor es la viscosidad, mayor es la tendencia del fluido a fluir en capas y es más probable que el flujo sea laminar. (Cuando hablamos de la ecuación de Bernoulli en la sección 14.5, supusimos que el flujo era laminar y que el fluido tenía cero viscosidad. De hecho, se requiere *un poco* de viscosidad para asegurar que el flujo sea laminar.)

Para un fluido de cierta viscosidad, la rapidez de flujo es un factor determinante para que exista turbulencia. Un patrón de flujo que es estable a baja velocidad se vuelve inestable de repente cuando se alcanza una rapidez crítica. Las irregularidades en el patrón de flujo pueden deberse a asperezas en la pared del tubo, variaciones en la densidad del fluido y muchos otros factores. Si la rapidez de flujo es baja, estas perturbaciones se eliminan por amortiguamiento; el patrón de flujo es *estable* y tiende a mantener su naturaleza laminar (figura 14.30a). Sin embargo, cuando se alcanza la rapidez crítica, el patrón de flujo se vuelve inestable; las perturbaciones ya no se amortiguan, sino que crecen hasta destruir el patrón de flujo laminar (figura 14.30b).

El flujo de sangre normal en la aorta humana es laminar, pero una alteración pequeña, como una patología cardiaca, puede hacer que el flujo se vuelva turbulento. La turbulencia hace ruido; por ello, escuchar el flujo sanguíneo con un estetoscopio es un procedimiento de diagnóstico útil.

14.30 El flujo de agua de un grifo es a) laminar cuando sale a baja rapidez, pero b) turbulento cuando tiene rapidez suficientemente alta.

Ejemplo conceptual 14.11 La curva

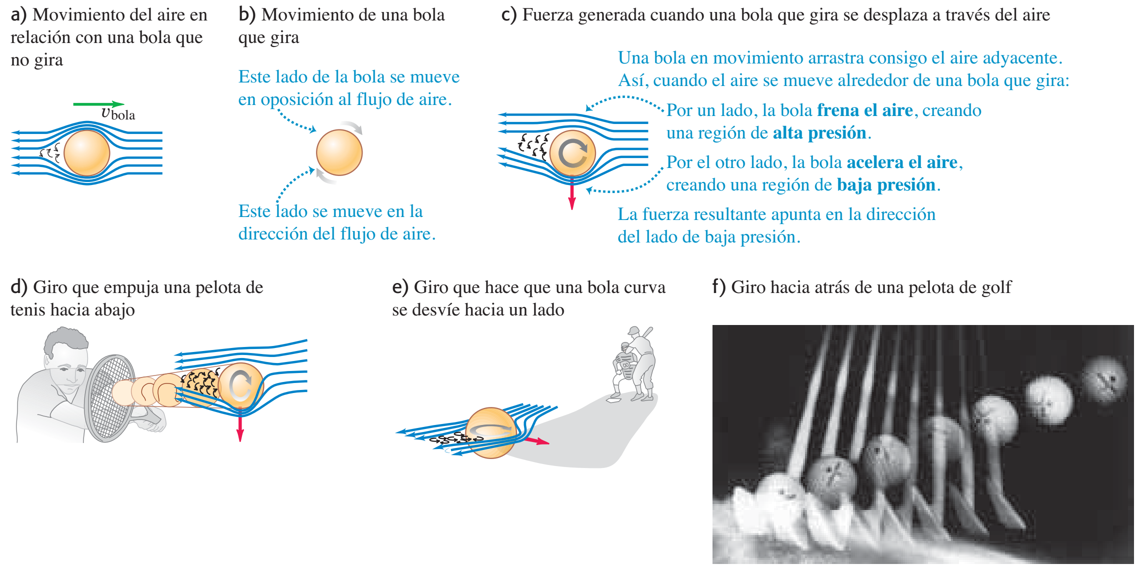
¿Un lanzamiento de curva en béisbol es *realmente* una curva? Sin duda, y la razón es la turbulencia. La figura 14.31a muestra una bola que se mueve en el aire de izquierda a derecha. Para un observador que se mueve junto con el centro de la bola, la corriente de aire parece moverse de derecha a izquierda, como indican las líneas de flujo de la figura. Las velocidades suelen ser altas (cerca de 160 km/h), así que hay una región de flujo *turbulento* detrás de la bola.

La figura 14.31b ilustra una bola que *gira* con "top spin". Las capas de aire cerca de la superficie de la bola son llevadas en la dirección del giro por la fricción entre la bola y el aire, así como por la fricción interna (viscosidad) del aire. La rapidez del aire en relación con la superficie de la bola se hace menor en la parte de arriba de la bola que en la parte de abajo, y la turbulencia se presenta más hacia delante en el lado de arriba que en el de abajo. Esta asimetría provoca una diferencia de presión; la presión media en la parte de arriba de la bola ahora es mayor que abajo. La fuerza neta desvía la bola hacia abajo, como se observa en la figura 14.31c. Por esa razón se usa el "top spin" en tenis para evitar que un servicio rápido se salga de la cancha (figura 14.31d).

En un lanzamiento de curva en béisbol, la bola gira alrededor de un eje casi vertical, y la desviación real es hacia un lado. En un caso así, la figura 14.31c es una vista *superior* de la situación. Una curva lanzada por un lanzador zurdo se curva *hacia* un bateador diestro, y es más difícil golpearla (figura 14.31e).

Un efecto similar se presenta con las pelotas de golf, que siempre tienen un "giro hacia atrás" por el impacto con la cara inclinada del palo. La diferencia de presión resultante entre la parte de arriba y de abajo de la bola provoca una fuerza de sustentación que mantiene la bola en el aire mucho más tiempo del que sería posible sin el giro. Un golpe fuerte bien dado parece hacer que la bola "flote" o incluso se curve *hacia arriba* durante la parte inicial del vuelo. Éste es un efecto real, no una ilusión. Los hoyuelos de la pelota desempeñan un papel fundamental; la viscosidad del aire hace que una bola sin hoyuelos tenga una trayectoria mucho más corta que una con hoyuelos a la que se imprimen la misma velocidad y giro iniciales. La figura 14.31f ilustra el giro hacia atrás de una pelota de golf justo después de ser golpeada por un palo.

14.31 a) a e) Análisis del movimiento de una pelota que gira a través del aire. f) Fotografía estroboscópica de una pelota de golf golpeada por un palo. La imagen se tomó a 1000 destellos por segundo. La bola gira aproximadamente una vez cada ocho imágenes, lo que corresponde a una rapidez angular de 125 rev/s, o 7500 rpm.



Evalúe su comprensión de la sección 14.6 ¿Cuánta más presión deberá aplicar una enfermera con el pulgar para administrar una inyección con una aguja hipodérmica cuyo diámetro interno mide 0.30 mm, en comparación con una aguja con diámetro interno de 0.60 mm? Suponga que las dos agujas tienen la misma longitud y que la tasa de flujo de volumen es la misma en ambos casos. i) El doble; ii) 4 veces más; iii) 8 veces más; iv) 16 veces más; v) 32 veces más.

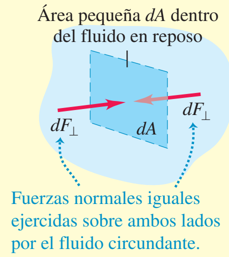
CAPÍTULO 14 RESUMEN

Densidad y presión: Densidad es masa por unidad de volumen. Si una masa m de material homogéneo tiene un volumen V, su densidad ρ es el cociente de la razón m/V. La gravedad específica es la razón entre la densidad de un material y la del agua. (Véase el ejemplo 14.1.)

Presión es fuerza normal por unidad de área. La ley de Pascal establece que la presión aplicada a la superficie de un fluido encerrado se transmite sin disminución a todas las porciones del fluido. La presión absoluta es la presión total en un fluido; la presión manométrica es la diferencia entre la presión absoluta y la atmosférica. La unidad de presión del SI es el pascal (Pa): 1 Pa = 1 N/m^2. (Véase el ejemplo 14.2.)

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{14.1}$$

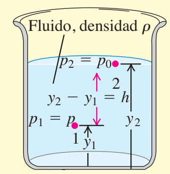
$$p = \frac{dF_\perp}{dA} \tag{14.2}$$



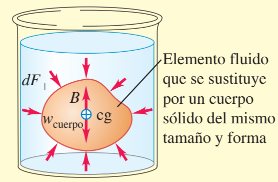
Presiones en un fluido en reposo: La diferencia de presión entre dos puntos 1 y 2 en un fluido estático con densidad uniforme ρ (un fluido incompresible) es proporcional a la diferencia entre las alturas y_1 y y_2. Si la presión en la superficie de un líquido incompresible en reposo es p_0, la presión a una profundidad h es mayor en una cantidad ρgh. (Véanse los ejemplos 14.3 y 14.4.)

$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$
(presión en un fluido de densidad uniforme) (14.5)

$p = p_0 + \rho gh$
(presión en un fluido de densidad uniforme) (14.6)



Flotación: El principio de Arquímedes dice que cuando un cuerpo se sumerge en un fluido, éste ejerce sobre el cuerpo una fuerza de flotación hacia arriba igual al peso del fluido que el cuerpo desplaza. (Véase el ejemplo 14.5.)



Flujo de un fluido: Un fluido ideal es incompresible y no tiene viscosidad (no hay fricción interna). Una línea de flujo es la trayectoria de una partícula de fluido; una línea de corriente es una curva tangente en todo punto al vector de velocidad en ese punto. Un tubo de flujo es un tubo delimitado en sus costados por líneas de flujo. En flujo laminar, las capas de fluido se deslizan suavemente unas sobre otras. En flujo turbulento, hay gran desorden y el patrón de flujo cambia constantemente.

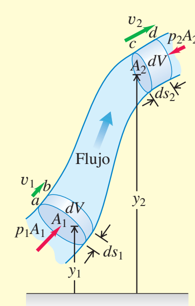
La conservación de la masa en un fluido incompresible se expresa con la ecuación de continuidad, la cual relaciona las rapideces de flujo v_1 y v_2 para dos secciones transversales A_1 y A_2 de un tubo de flujo. El producto Av es igual a la tasa de flujo de volumen, dV/dt, la rapidez con que el volumen cruza una sección del tubo. (Véase el ejemplo 14.6.)

La ecuación de Bernoulli relaciona la presión p, la rapidez de flujo v y la altura y de dos puntos 1 y 2 cualesquiera, suponiendo flujo estable en un fluido ideal. (Véanse los ejemplos 14.7 a 14.10.)

$A_1v_1 = A_2v_2$
(ecuación de continuidad, fluido incompresible) (14.10)

$$\frac{dV}{dt} = Av \tag{14.11}$$
(tasa de flujo de volumen)

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$
(ecuación de Bernoulli) (14.17)



Términos clave

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La carne tanto del tiburón como del pez tropical es más densa que el agua de mar, por lo que, por sí solos, se hundirían. Sin embargo, un pez tropical tiene una cavidad llena de gas en su cuerpo llamada vejiga natatoria, de manera que la densidad *media* del cuerpo del pez es igual a la del agua de mar y el pez ni se hunde ni se eleva. Los tiburones no cuentan con esa cavidad. Por consiguiente, deben nadar constantemente para evitar hundirse usando sus aletas pectorales para dar sustentación, de forma muy similar a las alas de un avión (véase la sección 14.5).

Repuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

14.1 Respuesta: ii), iv), i) y iii) (empatados), v) En cada caso, la densidad media es igual a la masa dividida entre el volumen. Por lo tanto, tenemos
i) $\rho = (4.00\ \text{kg})/(1.60 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 2.50 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$;
ii) $\rho = (8.00\ \text{kg})/(1.60 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 5.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$;
iii) $\rho = (8.00\ \text{kg})/(3.20 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 2.50 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$;
iv) $\rho = (2560\ \text{kg})/(0.640\ \text{m}^3) = 4.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$; **v)** $\rho = (2560\ \text{kg})/(1.28\ \text{m}^3) = 2.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$. Observe que en comparación con el objeto **i)**, el objeto **ii)** tiene el doble de masa, pero el mismo volumen y, por lo tanto, tiene el doble de densidad media. El objeto **iii)** tiene el doble de masa y el doble de volumen que el objeto **i)**, de manera que **i)** y **iii)** tienen la misma densidad media. Por último, el objeto **v)** tiene igual masa que el objeto **iv)**, pero el doble de volumen, de manera que **v)** tiene la mitad de la densidad media de **iv)**.

14.2 Respuesta: ii) Por la ecuación (14.9), la presión exterior es igual al producto ρgh. Cuando se saca el barómetro del refrigerador, la densidad ρ decrece, mientras que la altura h de la columna de mercurio no cambia; por lo tanto, la presión debe ser menor afuera que dentro del refrigerador.

14.3 Respuesta: i) Considere el agua, la estatua y el recipiente juntos como un sistema; el peso total del sistema no depende de si la estatua está sumergida. La fuerza total de soporte, incluyendo la tensión T y la fuerza ascendente F de la báscula sobre el recipiente (igual a la lectura de la báscula) es la misma en ambos casos. Pero en el ejemplo 14.5 vimos que T disminuye en 7.84 N cuando la estatua está sumergida, por lo que la lectura de la báscula debe *disminuir* en 7.84 N. Un punto de vista alternativo indica que el agua ejerce una fuerza de flotación hacia arriba de 7.84 N sobre la estatua, de manera que ésta ejerce una fuerza igual, sólo que hacia abajo, sobre el agua, haciendo que la lectura de la báscula sea 7.84 N mayor que el peso del agua y el recipiente.

14.4 Respuesta: ii) Una carretera cuyo ancho se reduce de tres carriles a uno es como un tubo cuya área transversal se estrecha a un tercio de su valor. Si los vehículos se comportaran como las moléculas de un fluido incompresible, entonces conforme los autos llegaran a la sección de un solo carril, el espaciamiento entre ellos (la "densidad") permanecería igual, pero triplicarían su rapidez. Esto mantendría constante la "tasa de flujo de volumen" (el número de autos por segundo que pasan por un punto de la carretera). En la vida real, los autos se comportan como las moléculas de un fluido *compresible*: quedan más juntos unos de otros (la "densidad" aumenta) y menos autos por segundo pasan por un punto de la carretera (la "tasa de flujo de volumen" disminuye).

14.5 Respuesta: ii) La segunda ley de Newton nos dice que un cuerpo acelera (su velocidad cambia) en respuesta a la fuerza neta. En un flujo de fluido, una diferencia de presión entre dos puntos significa que las partículas del fluido que se mueven entre esos dos puntos experimentan una fuerza, y esta fuerza hace que las partículas del fluido aceleren, es decir, que cambien su rapidez.

14.6 Respuesta: iv) La presión requerida es proporcional a $1/R^4$, donde R es el radio interior de la aguja (la mitad del diámetro interior). Con la aguja de menor diámetro, la presión es mayor en un factor de $[(0.60\ \text{mm})/(0.30\ \text{mm})]^4 = 2^4 = 16$.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P14.1. Un cubo de madera de roble con caras muy lisas normalmente flota en el agua. Suponga que usted sumerge ese cubo por completo y presiona una de sus caras contra el fondo del tanque, de manera que no haya agua debajo de esa cara. ¿El bloque flotará a la superficie? ¿Existe una fuerza de flotación sobre él? Explique su respuesta.

P14.2. Una manguera de hule se conecta a un embudo y el extremo libre se dobla hacia arriba. Si se vierte agua en el embudo, sube al mismo nivel en la manguera que en el embudo, a pesar de que éste tiene mucha más agua. ¿Por qué? ¿Qué es lo que soporta el peso extra del agua en el embudo?

P14.3. Si compara los ejemplos 14.1 y 14.2 de las secciones 14.1 y 14.2, parece que 700 N de aire ejercen una fuerza hacia abajo de 2.0×10^6 N sobre el piso. ¿Cómo es posible?

P14.4. La ecuación (14.7) indica que una razón de área de 100 a 1 puede dar 100 veces más fuerza de salida que de entrada. ¿No viola esto la conservación de la energía? Explique.

P14.5. Tal vez haya notado que, cuanto menor es la presión de un neumático, mayor es el área de contacto entre él y el pavimento. ¿Por qué?

P14.6. Un globo de aire caliente se llena con aire calentado por un quemador en la base. ¿Por qué debe calentarse el aire? ¿Cómo se controla el ascenso y el descenso?

P14.7. Al describir el tamaño de un barco grande, se dice por ejemplo, "desplaza 20,000 toneladas". ¿Qué significa esto? ¿Se puede obtener el peso del barco a partir de este dato?

P14.8. Se deja caer una esfera sólida de aluminio en un balde de agua que descansa en el suelo. La fuerza de flotación es igual al peso del agua desplazada, que es menor que el peso de la esfera, así que ésta se hunde. Si llevamos el balde a un elevador que acelera hacia arriba, el peso aparente del agua aumenta y, por lo tanto, aumenta la fuerza de flotación que actúa sobre la esfera. ¿La aceleración del elevador podría ser tan grande para hacer que la esfera flote en el agua? Explique su respuesta.

P14.9. Un dirigible rígido más ligero que el aire, lleno de helio, no puede elevarse indefinidamente. ¿Por qué no? ¿Qué determina la altitud máxima alcanzable?

P14.10. La presión del aire disminuye al aumentar la altitud. ¿Por qué entonces el aire cerca de la superficie no es succionado continuamente hacia las regiones altas que están a menor presión?

P14.11. Puede probarse la pureza del oro pesándolo en aire y en agua. ¿Cómo? ¿Cree que podría hacer pasar por oro un lingote de material más barato chapeado con oro?

P14.12. Durante la gran inundación del río Mississippi de 1993, los diques en San Luis tendían a romperse primero en la base. ¿Por qué?

P14.13. Un barco carguero viaja del Océano Atlántico (agua salada) al lago Ontario (agua dulce) por el río San Lorenzo. El barco se sume varios centímetros más en el agua del lago que en el océano. Explique por qué.

P14.14. Usted empuja un trozo de madera para que quede bajo la superficie de una alberca. Después de que está sumergido por completo, usted sigue empujándolo más y más profundamente. Conforme usted hace esto, ¿qué sucederá a la fuerza de flotación sobre el trozo de madera? ¿Esta fuerza seguirá aumentando, permanecerá igual o disminuirá? ¿Por qué?

P14.15. Una antigua pregunta reza así: "¿Qué pesa más, una libra de plumas o una de plomo?" Si el peso en libras es la fuerza gravitacional, ¿una libra de plumas equilibrará una libra de plomo en charolas opuestas de una balanza de brazos iguales? Explique, considerando las fuerzas de flotación.

P14.16. Suponga que la puerta de un cuarto embona herméticamente, pero sin fricción en su marco. ¿Cree que podría abrir la puerta si la presión del aire en un lado fuera la presión atmosférica estándar y en el otro difiriera en un 1%? Explique su respuesta.

P14.17. A cierta profundidad en un líquido incompresible, la presión absoluta es p. Al doble de esa profundidad, ¿la presión absoluta será igual a $2p$, mayor que $2p$ o menor que $2p$? Justifique su respuesta.

P14.18. Un trozo de hierro está pegado encima de un bloque de madera. Si éste se coloca en una cubeta de agua con el hierro arriba, flota. Ahora se voltea el bloque para que el hierro quede sumergido bajo el bloque. ¿El bloque flotará o se hundirá? ¿El nivel de agua en la cubeta subirá, bajará o no cambiará? Explique.

P14.19. Se toma una jarra de vidrio vacía y se mete en un tanque de agua con la boca hacia abajo, atrapando el aire dentro de la jarra. Si se mete más la jarra en el agua, ¿la fuerza de flotación que actúa sobre la jarra permanece igual? Si no es así, ¿aumenta o disminuye? Explique su respuesta.

P14.20. Imagine que flota en una canoa en el centro de una alberca. Una amiga está en la orilla, tomando nota del nivel exacto del agua en la pared de la alberca. Usted lleva consigo en la canoa una bola de boliche, la cual deja caer cuidadosamente por la borda. La bola se hunde hasta el fondo de la alberca. ¿El nivel de agua en la alberca sube o baja?

P14.21. Imagine que flota en una canoa en el centro de una alberca. Un ave grande llega volando y se posa en su hombro. ¿El nivel de agua en la alberca sube o baja?

P14.22. A cierta profundidad en el océano incompresible, la presión manométrica es p_g. Al triple de esa profundidad, ¿la presión manométrica será mayor que $3p_g$, igual a $3p_g$ o menor que $3p_g$? Justifique su respuesta.

P14.23. Un cubo de hielo flota en un vaso de agua. Al derretirse el hielo, ¿el nivel de agua en el vaso subirá, bajará o permanecerá igual? Explique.

P14.24. Alguien afirma lo siguiente: "La ecuación de Bernoulli nos dice que, donde la rapidez del fluido es más alta, la presión es más baja, y viceversa". ¿Es verdad siempre esa afirmación, incluso en el caso de un fluido idealizado? Explique.

P14.25. Si en un fluido en flujo estable la velocidad en cada punto es constante, ¿cómo puede acelerar una partícula de fluido?

P14.26. En una exhibición de escaparate, una pelota de ping-pong está suspendida en un chorro de aire expulsado por la manguera de salida de una aspiradora de tanque. La pelota se mueve un poco pero siempre regresa al centro del chorro, aunque éste no sea vertical. ¿Cómo ilustra este comportamiento la ecuación de Bernoulli?

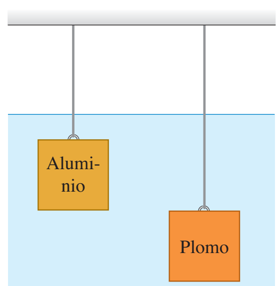
P14.27. Un tornado consiste en un vórtice de aire que gira rápidamente. ¿Por qué la presión es mucho más baja en el centro que afuera? ¿Cómo explica esto la potencia destructiva de un tornado?

P14.28. Los aeropuertos a gran altitud tienen pistas más largas para los despegues y aterrizajes, que los aeropuertos que están al nivel del mar. Una razón para ello es que los motores de los aviones desarrollan menos potencia en el aire enrarecido presente a mayor altitud. Cite otra razón.

P14.29. Cuando un chorro de agua fluye suavemente de un grifo, se adelgaza al caer. Explique este fenómeno.

P14.30. Dos cubos de idéntico tamaño, uno de plomo y el otro de aluminio, están suspendidos a diferentes profundidades por medio de dos alambres en un tanque de agua (figura 14.32). *a*) ¿Cuál de ellos experimenta una mayor fuerza de flotación? *b*) ¿Para cuál de los dos es mayor la tensión en el alambre? *c*) ¿Cuál de ellos experimenta una mayor fuerza sobre su cara inferior? *d*) ¿Para cuál de ellos la diferencia en la presión entre las caras superior e inferior es mayor?

Figura 14.32 Pregunta P14.30.



Ejercicios

Sección 14.1 Densidad

14.1. Usted realiza un trabajo de medio tiempo, y un supervisor le pide traer del almacén una varilla cilíndrica de acero de 85.8 cm de longitud y 2.85 cm de diámetro. ¿Necesitará usted un carrito? (Para contestar, calcule el peso de la varilla.)

14.2. Millas por kilogramo. La densidad de la gasolina es de 737 kg/m^3. Si su nuevo auto híbrido rinde 45.0 millas por galón de gasolina, ¿cuál es el millaje en millas por kilogramo de gasolina? (Véase el Apéndice E.)

14.3. Imagine que compra una pieza rectangular de metal de $5.0 \times 15.0 \times 30.0$ mm y masa de 0.0158 kg. El vendedor le dice que es de oro. Para verificarlo, usted calcula la densidad media de la pieza. ¿Qué valor obtiene? ¿Fue una estafa?

14.4. Lingote de oro. Usted gana la lotería y decide impresionar a sus amigos exhibiendo un cubo de oro de un millón de dólares. En ese momento, el oro tiene un precio de venta de $426.60 por onza troy, y 1.0000 onza troy es igual a 31.1035 g. ¿Qué tan alto debe ser su cubo de un millón de dólares?

14.5. Una esfera uniforme de plomo y una de aluminio tienen la misma masa. ¿Cuál es la razón entre el radio de la esfera de aluminio y el de la esfera de plomo?

14.6. *a*) Calcule la densidad media del Sol. *b*) Calcule la densidad media de una estrella de neutrones que tiene la misma masa que el Sol pero un radio de sólo 20.0 km.

14.7. Un tubo cilíndrico hueco de cobre mide 1.50 m de longitud, tiene un diámetro exterior de 3.50 cm y un diámetro interior de 2.50 cm. ¿Cuánto pesa?

Sección 14.2 Presión en un fluido

14.8. Fumarolas oceánicas. Las fumarolas oceánicas son respiraderos volcánicos calientes que emiten humo en las profundidades del lecho oceánico. En muchas de ellas pululan criaturas exóticas, y algunos biólogos piensan que la vida en la Tierra pudo haberse originado alrededor de esos respiraderos. Las fumarolas varían en profundidad de unos 1500 m a 3200 m por debajo de la superficie. ¿Cuál es la presión manométrica en una fumarola oceánica de 3200 m de profundidad, suponiendo que la densidad del agua no varía? Exprese su respuesta en pascales y atmósferas.

14.9. Océanos en Marte. Los científicos han encontrado evidencia de que en Marte pudo haber existido alguna vez un océano de 0.500 km de profundidad. La aceleración debida a la gravedad en Marte es de 3.71 m/s^2. *a*) ¿Cuál habría sido la presión manométrica en el fondo de tal océano, suponiendo que era de agua dulce? *b*) ¿A qué profundidad de los océanos terrestres se experimenta la misma presión manométrica?

14.10. *a*) Calcule la diferencia en la presión sanguínea entre los pies y la parte superior de la cabeza o coronilla de una persona que mide 1.65 m de estatura. *b*) Considere un segmento cilíndrico de un vaso sanguíneo de 2.00 cm de longitud y 1.50 mm de diámetro. ¿Qué fuerza externa *adicional* tendría que resistir tal vaso sanguíneo en los pies de la persona, en comparación con un vaso similar en su cabeza?

14.11. En la alimentación intravenosa, se inserta una aguja en una vena del brazo del paciente y se conecta un tubo entre la aguja y un depósito de fluido (densidad 1050 kg/m^3) que está a una altura h sobre el brazo. El depósito está abierto a la atmósfera por arriba. Si la presión manométrica dentro de la vena es de 5980 Pa, ¿qué valor mínimo de h permite que entre fluido en la vena? Suponga que el diámetro de la aguja es suficientemente grande como para despreciar la viscosidad (véase la sección 14.6) del fluido.

14.12. Un barril contiene una capa de aceite de 0.120 m sobre 0.250 m de agua. La densidad del aceite es de 600 kg/m^3. *a*) ¿Qué presión manométrica hay en la interfaz aceite-agua? *b*) ¿Qué presión manométrica hay en el fondo del barril?

14.13. Los neumáticos de un automóvil de 975 kg están inflados a "32.0 libras". *a*) ¿Cuáles son la presión absoluta y manométrica en estos neumáticos en lb/in^2, Pa y atm? *b*) Si los neumáticos fueran perfectamente redondos, ¿la presión en ellos podría ejercer alguna fuerza sobre el pavimento? (Suponga que las paredes del neumático son flexibles, de manera que la presión ejercida por el neumático sobre el pavimento es igual a la presión de aire dentro del neumático.) *c*) Si examinamos los neumáticos de un auto, es obvio que hay cierto aplanamiento en la parte inferior. ¿Cuál es el área total de contacto de la parte aplanada de los cuatro neumáticos con el pavimento?

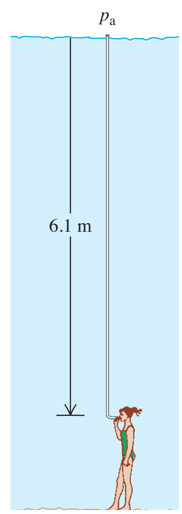
14.14. Se está diseñando una campana de buceo que resista la presión del mar a 250 m de profundidad. *a*) ¿Cuánto vale la presión manométrica a esa profundidad? (Desprecie el cambio en la densidad del agua con la profundidad.) *b*) A esa profundidad, ¿qué fuerza neta ejercen el agua exterior y el aire interior sobre una ventanilla circular de 30.0 cm de diámetro si la presión dentro de la campana es la que hay en la superficie del agua? (Desprecie la pequeña variación de presión sobre la superficie de la ventanilla.)

14.15. ¿Qué presión manométrica debe producir una bomba para subir agua del fondo del Gran Cañón (elevación 730 m) a Indian Gardens (elevación 1370 m)? Exprese sus resultados en pascales y en atmósferas.

14.16. El líquido del manómetro de tubo abierto de la figura 14.9a es mercurio, $y_1 = 3.00$ cm y $y_2 = 7.00$ cm. La presión atmosférica es de 980 milibares. *a*) ¿Qué presión absoluta hay en la base del tubo en U? *b*) ¿Y en el tubo abierto 4.00 cm abajo de la superficie libre? *c*) ¿Qué presión absoluta tiene el aire del tanque? *d*) ¿Qué presión manométrica tiene el gas en pascales?

14.17. Hay una profundidad máxima a la que un buzo puede respirar por un "snorkel" (figura 14.33) pues, al aumentar la profundidad, aumenta la diferencia de presión que tiende a colapsar los pulmones del buzo. Como el *snorkel* conecta los pulmones con la atmósfera, la presión en ellos es la atmosférica. Calcule la diferencia de presión interna-externa cuando los pulmones del buzo están a 6.1 m de profundidad. Suponga que el buzo está en agua dulce. (Un buzo que respira el aire comprimido de un tanque puede operar a mayores profundidades que uno que usa *snorkel*, porque la presión del aire dentro de los pulmones aumenta hasta equilibrar la presión externa del agua.)

Figura 14.33 Ejercicio 14.17.



14.18. Un cilindro alto con área transversal de 12.0 cm^2 se llenó parcialmente con mercurio hasta una altura de 5.00 cm. Se vierte lentamente agua sobre el mercurio (estos dos líquidos no se mezclan). ¿Qué volumen de agua deberá agregarse para aumentar al doble la presión manométrica en la base del cilindro?

14.19. Un lago en el norte de Yukón, Canadá, está cubierto con una capa de hielo de 1.75 m de espesor. Calcule la presión absoluta y la presión manométrica a una profundidad de 2.50 m en el lago.

14.20. Un recipiente cerrado se llena parcialmente con agua. En un principio, el aire arriba del agua está a presión atmosférica (1.01×105 Pa) y la presión manométrica en la base del recipiente es de 2500 Pa. Después, se bombea aire adicional al interior, aumentando la presión del aire sobre el agua en 1500 Pa. *a*) Calcule la nueva presión manométrica en el fondo. *b*) ¿Cuánto deberá reducirse el nivel del agua en el recipiente (extrayendo agua a través de una válvula en el fondo) para que la presión manométrica en el fondo vuelva a ser de 2500 Pa? La presión del aire sobre el agua se mantiene a 1500 Pa sobre la presión atmosférica.

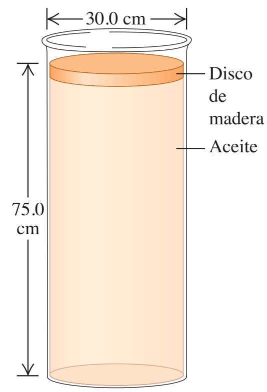
14.21. Un cortocircuito deja sin electricidad a un submarino que está 30 m bajo la superficie del mar. Para escapar, la tripulación debe empujar hacia fuera una escotilla en el fondo que tiene un área de 0.75 m^2

y pesa 300 N. Si la presión interior es de 1.0 atm, ¿qué fuerza hacia abajo se debe ejercer sobre la escotilla para abrirla?

14.22. Exploración de Venus. La presión superficial en Venus es de 92 atm, y la aceleración debida a la gravedad ahí es de 0.894 g. En una futura misión exploratoria, un tanque cilíndrico vertical de benceno está sellado en el extremo superior, pero aun así sigue presurizado a 92 atm justo por encima del benceno. El tanque tiene un diámetro de 1.72 m, y la columna de benceno mide 11.50 m de alto. Ignore los efectos debidos a la temperatura extremadamente alta de Venus. *a*) Calcule la fuerza total ejercida sobre la superficie interior de la base del tanque. *b*) ¿Qué fuerza ejerce la atmósfera de Venus sobre la superficie exterior de la base del tanque? *c*) Calcule la fuerza total interior que ejerce la atmósfera sobre las paredes verticales del tanque.

14.23. Un disco cilíndrico de madera que pesa 45.0 N y tiene un diámetro de 30.0 cm flota sobre un cilindro de aceite cuya densidad es de 0.850 g/cm^3 (figura 14.34). El cilindro de aceite mide 75.0 cm de alto y tiene un diámetro igual al cilindro de madera. *a*) Calcule la presión manométrica en la parte superior de la columna de aceite. *b*) Ahora suponga que alguien coloca un peso de 83.0 N en la parte superior del disco de madera, pero el aceite no se escurre alrededor del borde de la madera. ¿Cuál es el *cambio* en la presión i) en la base del aceite y ii) a la mitad de la columna de aceite?

Figura 14.34 Ejercicio 14.23.



14.24. Elevador hidráulico I. Para el elevador hidráulico que se ilustra en la figura 14.8, ¿cuál debe ser la razón entre el diámetro del recipiente bajo el auto y el diámetro del recipiente donde se aplica la fuerza F_1, de manera que el auto de 1520 kg pueda ser levantado con una fuerza F_1 de sólo 125 N?

14.25. Elevador hidráulico II. El pistón de un elevador hidráulico para autos tiene 0.30 m de diámetro. ¿Qué presión manométrica, en pascales y en atm, se requiere para levantar un auto de 1200 kg?

Sección 14.3 Flotación

14.26. Una plancha de hielo flota en un lago de agua dulce. ¿Qué volumen mínimo debe tener para que una mujer de 45.0 kg pueda ponerse de pie sobre ella sin mojarse los pies?

14.27. Una muestra de mineral pesa 17.50 N en el aire, pero, si se cuelga de un hilo ligero y se sumerge por completo en agua, la tensión en el hilo es de 11.20 N. Calcule el volumen total y la densidad de la muestra.

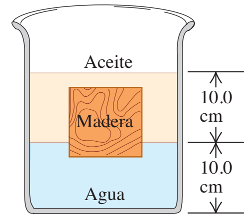
14.28. Usted está preparando un aparato para hacer una visita a un planeta recientemente descubierto llamado Caasi, el cual tiene océanos de glicerina y una aceleración superficial debida a la gravedad de 4.15 m/s^2. Si el aparato flota en los océanos de la Tierra con el 25.0% de su volumen sumergido, ¿qué porcentaje se sumergirá en los océanos de glicerina de Caasi?

14.29. Un objeto con densidad media ρ flota sobre un fluido de densidad ρ_{fluido}. *a*) ¿Qué relación debe haber entre las dos densidades? *b*) A la luz de su respuesta en el inciso *a*), ¿cómo pueden flotar barcos de acero en el agua? *c*) En términos de ρ y ρ_{fluido}, ¿qué fracción del objeto está sumergida y qué fracción está sobre el fluido? Verifique que sus respuestas den el comportamiento correcto en el límite donde $\rho \to \rho_{\text{fluido}}$ y donde $\rho \to 0$. *d*) Durante un paseo en yate, un primo suyo recorta una pieza rectangular (dimensiones: 5.0 × 4.0 × 3.0 cm) de un salvavidas y la tira al mar, donde flota. La masa de la pieza es de 42 g. ¿Qué porcentaje de su volumen está sobre la superficie del océano?

14.30. Una esfera hueca de plástico se mantiene por debajo de la superficie de un lago de agua dulce mediante una cuerda anclada al fondo del lago. La esfera tiene un volumen de 0.650 m^3 y la tensión en la cuerda es de 900 N. *a*) Calcule la fuerza de flotación que ejerce el agua sobre la esfera. *b*) ¿Cuál es la masa de la esfera? *c*) La cuerda se rompe y la esfera se eleva a la superficie. Cuando la esfera llega al reposo, ¿qué fracción de su volumen estará sumergida?

14.31. Un bloque cúbico de madera de 10.0 cm por lado flota en la interfaz entre aceite y agua con su superficie inferior 1.50 cm bajo la interfaz (figura 14.35). La densidad del aceite es de 790 kg/m^3. *a*) ¿Qué presión manométrica hay en la superficie superior del bloque? *b*) ¿Y en la cara inferior? *c*) ¿Qué masa y densidad tiene el bloque?

Figura 14.35 Ejercicio 14.31.



14.32. Un lingote de aluminio sólido pesa 89 N en el aire. *a*) ¿Qué volumen tiene? *b*) El lingote se cuelga de una cuerda y se sumerge por completo en agua. ¿Qué tensión hay en la cuerda (el peso *aparente* del lingote en agua)?

14.33. Una roca cuelga de un hilo ligero. Cuando está en el aire, la tensión en el hilo es de 39.2 N. Cuando está totalmente sumergida en agua, la tensión es de 28.4 N. Cuando está totalmente sumergida en un líquido desconocido, la tensión es de 18.6 N. Determine la densidad del líquido desconocido.

Sección 14.4 Flujo de fluido

14.34. Corre agua hacia una fuente, llenando todos los tubos a una tasa constante de 0.750 m/s^3. *a*) ¿Qué tan rápido saldrá por un agujero de 4.50 cm de diámetro? *b*) ¿Con qué rapidez saldrá si el diámetro del agujero es tres veces más grande?

14.35. Una regadera tiene 20 agujeros circulares cuyo radio es de 1.00 mm. La regadera está conectada a un tubo de 0.80 cm de radio. Si la rapidez del agua en el tubo es de 3.0 m/s, ¿con qué rapidez saldrá de los agujeros de la regadera?

14.36. Fluye agua por un tubo de sección transversal variable, llenándolo en todos sus puntos. En el punto 1, el área transversal del tubo es de 0.070 m^2, y la rapidez del fluido es de 3.50 m/s. ¿Qué rapidez tiene el fluido en puntos donde el área transversal es de *a*) 0.105 m^2? *b*) ¿0.047 m^2? *c*) Calcule el volumen de agua descargada del extremo abierto del tubo en 1.00 h.

14.37. Fluye agua por un tubo circular de sección transversal variable, llenándolo en todos sus puntos. *a*) En un punto, el radio del tubo de 0.150 m. ¿Qué rapidez tiene el agua en este punto si la tasa estable de flujo de volumen en el tubo es de 1.20 m^3/s? *b*) En otro punto, la rapidez del agua es de 3.80 m/s. ¿Qué radio tiene el tubo en este punto?

14.38. *a*) Deduzca la ecuación (14.12). *b*) Si la densidad aumenta en 1.50% del punto 1 al 2, ¿qué sucede con la tasa de flujo de volumen?

Sección 14.5 Ecuación de Bernoulli

14.39. Un tanque sellado que contiene agua de mar hasta una altura de 11.0 m contiene también aire sobre el agua a una presión manométrica de 3.00 atm. Sale agua del tanque a través de un agujero pequeño en el fondo. Calcule la rapidez de salida del agua.

14.40. Se corta un agujero circular de 6.00 mm de diámetro en el costado de un tanque grande de agua, 14.0 m debajo del nivel del agua en el tanque. El tanque está abierto al aire por arriba. Calcule *a*) la rapidez de salida del agua y *b*) el volumen descargado por segundo.

14.41. ¿Qué presión manométrica se requiere en una toma municipal de agua para que el chorro de una manguera de bomberos conectada a ella alcance una altura vertical de 15.0 m? (Suponga que la toma tiene un diámetro mucho mayor que la manguera.)

14.42. En un punto de una tubería, la rapidez del agua es de 3.00 m/s y la presión manométrica es de 5.00×10^4 Pa. Calcule la presión manométrica en otro punto de la tubería, 11.0 m más abajo, si el diámetro del tubo ahí es el doble que en el primer punto.

14.43. Sustentación en un avión. El aire fluye horizontalmente por las alas de una avioneta de manera que su rapidez es de 70.0 m/s arriba del ala y 60.0 m/s debajo. Si las alas de la avioneta tienen un área de 16.2 m^2, considerando la parte superior e inferior, ¿qué fuerza vertical neta ejerce el aire sobre la nave? La densidad del aire es de 1.20 kg/m^3.

14.44. Una bebida no alcohólica (principalmente agua) fluye por una tubería de una planta embotelladora con una tasa de flujo de masa que llenaría 220 latas de 0.355 L por minuto. En el punto 2 del tubo, la presión manométrica es de 152 kPa y el área transversal es de 8.00 cm^2. En el punto 1, 1.35 m arriba del punto 2, el área transversal es de 2.00 cm^2. Calcule *a*) la tasa de flujo de masa; *b*) la tasa de flujo de volumen; *c*) la rapidez de flujo en los puntos 1 y 2; *d*) la presión manométrica en el punto 1.

14.45. En cierto punto de una tubería horizontal, la rapidez del agua es de 2.50 m/s y la presión manométrica es de 1.80×10^4 Pa. Calcule la presión manométrica en un segundo punto donde el área transversal es el doble que en el primero.

14.46. Un sistema de riego de un campo de golf descarga agua de un tubo horizontal a razón de 7200 cm^3/s. En un punto del tubo, donde el radio es de 4.00 cm, la presión absoluta del agua es de 2.40×10^5 Pa. En un segundo punto del tubo, el agua pasa por una constricción cuyo radio es de 2.00 cm. ¿Qué presión absoluta tiene el agua al fluir por esa constricción?

Problemas

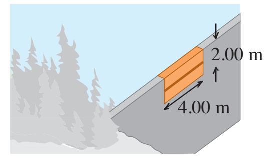
14.47. En una demostración en la clase, el profesor separa con facilidad dos cascos hemisféricos de acero (diámetro D) usando las asas con las que están provistos. Luego los une, extrae el aire hasta una presión absoluta p, y se los da a un fisicoculturista que está sentado en la última fila del salón para que los separe. *a*) Si la presión atmosférica es p_0, ¿qué fuerza deberá ejercer el fisicoculturista sobre cada casco? *b*) Evalúe su respuesta para el caso en que $p = 0.025$ atm y $D = 10.0$ cm.

14.48. El punto más profundo conocido de los océanos es la Fosa de las Marianas, con una profundidad de 10.92 km. *a*) Suponiendo que el agua es incompresible, ¿qué presión hay a esa profundidad? Use la densidad del agua de mar. *b*) La presión real es de 1.16×10^8 Pa; su valor calculado será menor porque la densidad en realidad varía con la profundidad. Usando la compresibilidad del agua y la presión real, calcule la densidad del agua en el fondo de la fosa. ¿Cuál es el cambio porcentual que se registra en la densidad del agua?

14.49. Una piscina mide 5.0 m de longitud, 4.0 m de ancho y 3.0 m de profundidad. Calcule la fuerza que ejerce el agua contra *a*) el fondo y *b*) cualquiera de las paredes. (*Sugerencia:* calcule la fuerza que actúa sobre una tira horizontal delgada a una profundidad h, e integre a lo alto del extremo de la piscina.) No incluya la fuerza debida a la presión del aire.

14.50. El borde superior de una compuerta en una presa está al nivel de la superficie del agua. La compuerta mide 2.00 m de altura y 4.00 m de ancho, y pivota sobre una línea horizontal que pasa por su centro (figura 14.36). Calcule la torca en torno al pivote causado por la fuerza que ejerce el agua. (*Sugerencia:* use un procedimiento similar al del problema 14.49: calcule la torca de una tira horizontal delgada a una profundidad h e integre a lo alto de la compuerta.)

Figura 14.36 Problema 14.50.



14.51. Fuerza y torca sobre una presa. Una presa tiene forma de sólido rectangular. El lado que da al lago tiene área A y altura H. La superficie del lago de agua dulce detrás de la presa llega al borde superior de ésta. *a*) Demuestre que la fuerza horizontal neta ejercida por el agua sobre la presa es $\frac{1}{2}\rho gHA$, es decir, la presión manométrica media sobre la cara de la presa multiplicada por el área (véase el problema 14.49). *b*) Demuestre que la torca que ejerce el agua alrededor de un eje que corre a lo largo de la base de la presa es $\rho gH^2A/6$. *c*) ¿Cómo dependen la fuerza y la torca del tamaño del lago?

14.52. Submarinos en Europa. Algunos científicos están ansiosos por enviar un submarino de control remoto a Europa, una de las lunas de Júpiter, para investigar si hay vida en sus océanos debajo de la capa de hielo. La masa de Europa, según las mediciones, es de 4.78×10^{22} kg, su diámetro es de 3130 km y no tiene una atmósfera apreciable. Suponga que la capa de hielo en la superficie no es suficientemente gruesa para ejercer una fuerza sustancial sobre el agua. Si las ventanillas del submarino que se está diseñando miden 25.0 cm por lado y cada una puede soportar una fuerza interna máxima de 9750 N, ¿cuál es la profundidad máxima a la que el submarino puede sumergirse de manera segura?

14.53. Un astronauta está de pie en el polo norte de un planeta esféricamente simétrico recién descubierto, cuyo radio es R. En las manos, sostiene un recipiente lleno con un líquido de masa m y volumen V. En la superficie del líquido, la presión es p_0; a una profundidad d bajo la superficie, la presión tiene un valor más grande p. A partir de esta información, determine la masa del planeta.

14.54. Globos en Marte. Se ha propuesto que podría explorarse Marte utilizando globos inflados sostenidos justo arriba de la superficie. La flotación de la atmósfera mantendría los globos en el aire. La densidad de la atmósfera marciana es de 0.0154 kg/m^3 (aunque esto varía con la temperatura). Suponga que se fabrican estos globos de un plástico delgado pero resistente con una densidad tal que cada metro cuadrado tiene una masa de 5.00 g. Los inflamos con un gas muy ligero cuya masa puede despreciarse. *a*) ¿Cuáles deberían ser el radio y la masa de estos globos de manera que se sostengan en el aire justo arriba de la superficie de Marte? *b*) Si liberamos uno de esos globos del inciso *a*) en la Tierra, donde la densidad atmosférica es de 1.20 kg/m^3, ¿cuál sería su aceleración inicial suponiendo que el globo tiene el mismo tamaño que en Marte? ¿Ascendería o descendería? *c*) Si en Marte estos globos tienen cinco veces el radio determinado en el inciso *a*), ¿qué peso de un paquete de instrumentos podrían cargar?

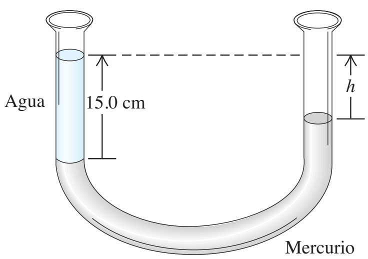
14.55. La Tierra no tiene densidad uniforme; es más densa en el centro y menos densa en la superficie. Una aproximación a su densidad es $\rho(r) = A - Br$, donde $A = 12{,}700$ kg/m^3 y $B = 1.50 \times 10^{-3}$ kg/m^4. Utilice $R = 6.37 \times 10^6$ m para el radio de la Tierra aproximada como una esfera. *a*) Los indicios geológicos sugieren que las densidades son 13,100 kg/m^3 en el centro y 2400 kg/m^3 en la superficie. ¿Qué valores da el modelo de aproximación lineal para las densidades en estos dos lugares? *b*) Imagine que divide la Tierra en capas esféricas concéntricas. Cada capa tiene radio r, espesor dr, volumen $dV = 4\pi r^2\,dr$ y masa $dm = \rho(r)dV$. Integrando de $r = 0$ a $r = R$, demuestre que la masa de la Tierra en este modelo es $M = \frac{4}{3}\pi R^3\left(A - \frac{3}{4}BR\right)$. *c*) Demuestre que los valores dados para A y B dan la masa de la Tierra con un error de menos del 0.4%. *d*) En la sección 12.6 vimos que un casco esférico uniforme no contribuye a g en su interior. Demuestre que

$g(r) = \frac{4}{3}\pi G r\left(A - \frac{3}{4}Br\right)$ dentro de la Tierra en este modelo. *e*) Verifique que la expresión del inciso *d*) da $g = 0$ en el centro de la Tierra y $g = 9.85$ m/s^2 en la superficie. *f*) Demuestre que, en este modelo, *g* *no* disminuye de manera uniforme con la profundidad, sino que tiene un máximo de $4\pi GA^2/9B = 10.01$ m/s^2 en $r = 2A/3B = 5640$ km.

14.56. En el ejemplo 12.10 (sección 12.6) vimos que, dentro de un planeta con densidad uniforme (una suposición poco realista para la Tierra), la aceleración debida a la gravedad aumenta de manera uniforme con la distancia al centro. Es decir, $g(r) = g_s r/R$, donde g_s es la aceleración debida a la gravedad en la superficie, *r* es la distancia al centro del planeta y *R* es el radio del planeta. El interior del planeta puede tratarse aproximadamente como fluido incompresible con densidad ρ. *a*) Sustituya la altura *y* de la ecuación (14.4) por la coordenada radial *r* e integre para determinar la presión dentro de un planeta uniforme en función de *r*. Sea cero la presión en la superficie. (Esto implica despreciar la presión de la atmósfera del planeta.) *b*) Usando este modelo, calcule la presión en el centro de la Tierra. (Use un valor de ρ igual a la densidad media de la Tierra, calculada con la masa y el radio dados en el Apéndice F.) *c*) Los geólogos estiman que la presión en el centro de la Tierra es de aproximadamente 4×10^{11} Pa. ¿Concuerda esto con su cálculo para la presión en $r = 0$? ¿Qué podría explicar las diferencias, si las hay?

14.57. Un tubo en forma de U abierto por ambos extremos contiene un poco de mercurio. Se vierte con cuidado un poco de agua en el brazo izquierdo del tubo hasta que la altura de la columna de agua es de 15.0 cm (figura 14.37). *a*) Calcule la presión manométrica en la interfaz agua-mercurio. *b*) Calcule la distancia vertical *h* entre la superficie del mercurio en el brazo derecho del tubo y la superficie del agua en el brazo izquierdo.

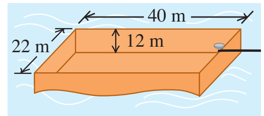
Figura 14.37 Problema 14.57.



14.58. La gran inundación de melaza. En la tarde del 15 de enero de 1919, un día inusitadamente cálido en Boston, se rompió un tanque metálico cilíndrico de 27.4 m de altura y 27.4 m de diámetro usado para almacenar melaza. La melaza fluyó por las calles en una corriente de 9 m de profundidad, matando peatones y caballos y tirando edificios. La melaza tenía una densidad de 1600 kg/m^3. Si el tanque estaba lleno antes del accidente, ¿qué fuerza total ejercía la melaza contra los costados? (*Sugerencia:* considere la fuerza hacia fuera que actúa sobre un anillo de la pared del tanque de anchura *dy* y una profundidad *y* bajo la superficie. Integre para calcular la fuerza total hacia fuera. Suponga que, antes de que el tanque se rompiera, la presión en la superficie de la melaza era igual a la presión del aire afuera del tanque.)

14.59. Un lanchón abierto tiene las dimensiones que se muestran en la figura 14.38. Si el lanchón está hecho con placa de acero de 4.0 cm de espesor en sus cuatro costados y el fondo, ¿qué masa de carbón puede transportar el lanchón en agua dulce sin hundirse? ¿Hay suficiente espacio en el lanchón para contener ese carbón? (La densidad aproximada del carbón es de 1500 kg/m^3.)

Figura 14.38 Problema 14.59.



14.60. Un globo de aire caliente tiene un volumen de 2200 m^3. La tela del globo pesa 900 N. La canasta con su equipo y tanques de propano llenos pesa 1700 N. Si el globo apenas puede levantar otros 3200 N de pasajeros, desayuno y champán cuando la densidad del aire exterior es de 1.23 kg/m^3, ¿qué densidad media tienen los gases calientes del interior?

14.61. Los anuncios de cierto auto aseguran que flota en agua. *a*) Si la masa del auto es de 900 kg y su volumen interior es de 3.0 m^3, ¿qué fracción queda sumergida al flotar? Puede despreciarse el volumen del acero y demás materiales. *b*) Poco a poco se filtra agua y desplaza el aire en el auto. ¿Qué fracción del volumen interior está llena de agua cuando el auto se hunde?

14.62. Un cubo de hielo de 9.70 g flota en un vaso totalmente lleno con 420 cm^3 de agua. Ignore la tensión superficial del agua y su variación de densidad con la temperatura (mientras siga líquida). *a*) ¿Qué volumen de agua desplaza el cubo de hielo? *b*) Una vez derretido el hielo, ¿se habrá desbordado algo de agua? Si así fue, ¿cuánta? Si no, explique por qué. *c*) Suponga que el agua del vaso era muy salada, con densidad de 1050 kg/m^3. ¿Qué volumen de agua salada desplazaría el cubo de hielo de 9.70 g? *d*) Repita el inciso *b*) para el cubo de agua dulce en agua salada.

14.63. Un trozo de madera de 0.600 m de longitud, 0.250 m de ancho y 0.080 m de espesor tiene una densidad de 600 kg/m^3. ¿Qué volumen de plomo debe sujetarse a su base para hundir la madera en agua tranquila de manera que su cara superior esté al ras del agua? ¿Qué masa tiene ese volumen de plomo?

14.64. Un hidrómetro consiste en un bulbo esférico y un tallo cilíndrico con área transversal de 0.400 cm^2 (véase la figura 14.13a). El volumen total es de 13.2 cm^3. Sumergido en agua, el hidrómetro flota con 8.00 cm del tallo sobre la superficie. Sumergido en un líquido orgánico, 3.20 cm del tallo sobresale de la superficie. Calcule la densidad del líquido orgánico. (*Nota:* esto ilustra la precisión de semejante hidrómetro. Variaciones de densidad relativamente pequeñas producen variaciones relativamente grandes en la lectura.)

14.65. Las densidades del aire, el helio y el hidrógeno (a $p = 1.0$ atm y $T = 20°$C) son 1.20 kg/m^3, 0.166 kg/m^3 y 0.0899 kg/m^3, respectivamente. *a*) ¿Qué volumen en metros cúbicos desplaza un dirigible lleno de hidrógeno que tiene una “sustentación” total de 120 kN? (La “sustentación” es la cantidad en que la fuerza de flotación excede el peso del gas que llena el dirigible.) *b*) Calcule la “sustentación” si se usara helio en vez de hidrógeno. A la luz de su respuesta, ¿por qué se usa helio en los modernos dirigibles publicitarios?

14.66. MAS de un objeto flotante. Un objeto de altura *h*, masa *M* y área de sección transversal uniforme *A* flota erguido en un líquido con densidad ρ. *a*) Calcule la distancia vertical de la superficie del líquido a la base del objeto flotante en equilibrio. *b*) Se aplica una fuerza hacia abajo de magnitud *F* a la cara superior del objeto. En la nueva posición de equilibrio, ¿qué tanto más abajo de la superficie del líquido está la base del objeto en comparación con el inciso *a*)? (Suponga que parte del objeto permanece sobre la superficie del líquido.) *c*) Su resultado del inciso *b*) indica que si la fuerza se retira de repente, el objeto oscilará verticalmente en movimiento armónico simple. Calcule el periodo de este movimiento en términos de la densidad ρ del líquido y la masa M y área transversal A del objeto. Ignore el amortiguamiento debido a la fricción del fluido (véase la sección 13.7).

14.67. Una boya cilíndrica de 950 kg y 0.900 m de diámetro flota verticalmente en agua salada. *a*) Calcule la distancia adicional que la boya se hundirá si un hombre de 70.0 kg se pone de pie sobre ella. (Utilice la expresión deducida en el inciso *b*) del problema 14.66.) *b*) Calcule el periodo del MAS vertical que se produce cuando el hombre se lanza al agua. (Utilice la expresión deducida en el inciso *c*) del problema 14.66; igual que en ese problema, desprecie el amortiguamiento por fricción del fluido.)

14.68. Una manguera de bomberos debe ser capaz de lanzar agua hacia la parte superior de un edificio de 35.0 m de altura cuando se apunta recta hacia arriba. El agua entra a esta manguera a una tasa constante de 0.500 m^3/s y sale por una boquilla redonda. *a*) ¿Cuál es el diámetro máximo que esta boquilla puede tener? *b*) Si la única boquilla disponible tiene un diámetro que es el doble de grande, ¿cuál es el punto más alto que puede alcanzar el agua?

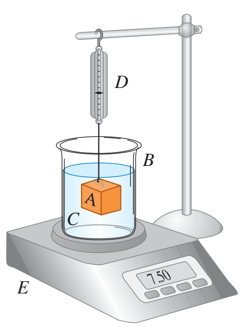
14.69. Se taladra un pequeño agujero en el lado de un tanque cilíndrico vertical de agua que está sobre el piso con su extremo superior abierto al aire. *a*) Si el nivel del agua tiene una altura H, ¿a qué altura por encima de la base debe taladrarse el agujero para que el agua alcance su distancia máxima con respecto a la base del cilindro cuando toque el piso? *b*) ¿Cuál es la distancia máxima que el agua puede alcanzar?

14.70. Un tanque cilíndrico vertical de área transversal A_1 está abierto al aire en su extremo superior y contiene agua hasta una altura h_0. Accidentalmente, un trabajador perfora un agujero de área A_2 en la base del tanque. *a*) Deduzca una ecuación para la altura h del agua como función del tiempo t después de que se perforó el agujero. *b*) ¿Cuánto tiempo tarda el tanque en vaciarse por completo a partir de que se perfora el agujero?

14.71. Un bloque de madera balsa colocado en una charola de una balanza de brazos iguales se equilibra exactamente con una masa de latón de 0.0950 kg en la otra charola. Calcule la masa verdadera de la madera si su densidad es de 150 kg/m^3. Explique por qué podemos despreciar la flotación en aire del latón pero *no* de la madera balsa sin perder exactitud.

14.72. El bloque A de la figura 14.39 cuelga mediante un cordón de la balanza de resorte D y se sumerge en el líquido C contenido en el vaso de precipitados B. La masa del vaso es 1.00 kg; la del líquido es 1.80 kg. La balanza D marca 3.50 kg, y la E, 7.50 kg. El volumen del bloque A es de 3.80×10^{-3} m^3. *a*) ¿Qué densidad tiene el líquido? *b*) ¿Qué marcará cada balanza si el bloque A se saca del líquido?

Figura 14.39 Problema 14.72.



14.73. Un trozo de aluminio totalmente cubierto con una capa de oro forma un lingote que pesa 45.0 N. Si el lingote se suspende de una balanza de resorte y se sumerge en agua, la lectura es de 39.0 N. ¿Qué peso de oro hay en el lingote?

14.74. Una pelota de plástico tiene 12.0 cm de radio y flota en agua con el 16.0% de su volumen sumergido. *a*) ¿Qué fuerza deberemos aplicar a la pelota para sostenerla en reposo totalmente bajo la superficie del agua? *b*) Si se suelta la pelota, ¿qué aceleración tendrá en el instante en que se libera?

14.75. El peso de la corona sólida de un rey es w. Si se suspende de una cuerda ligera y se sumerge por completo en agua, la tensión en la cuerda (peso aparente de la corona) es fw. *a*) Demuestre que la densidad relativa (gravedad específica) de la corona es $1/(1 - f)$. Analice el significado de los límites al acercarse f a 0 y a 1. *b*) Si la corona es de oro sólido y pesa 12.9 N en el aire, ¿qué peso aparente tiene cuando está completamente sumergida en agua? *c*) Repita el inciso *b*) considerando que la corona es de plomo chapeada en oro, pero aún pesa 12.9 N en el aire.

14.76. Un trozo de acero pesa w, su peso aparente (véase el problema 14.75) sumergido por completo en agua es w_{agua}, y sumergido en un fluido desconocido, w_{fluido}. *a*) Demuestre que la densidad del fluido relativa al agua (gravedad específica) es $(w - w_{\text{fluido}})/(w - w_{\text{agua}})$. *b*) ¿Es razonable este resultado para los tres casos de w_{fluido}, mayor, igual o menor que w_{agua}? *c*) El peso aparente de un trozo de acero en agua (densidad $= 1000$ kg/m^3) equivale al 87.2% de su peso. ¿Qué porcentaje de su peso será su peso aparente en ácido fórmico (densidad $=$ 1220 kg/m^3)?

14.77. Imagine que cuela un metal de densidad ρ_{m} en un molde, pero le preocupa que pueda haber cavidades en el colado. El peso del colado es w y la fuerza de flotación cuando está rodeado por completo de agua es B. *a*) Demuestre que el volumen total de las cavidades internas es $V_0 = B/(\rho_{\text{agua}}g) - w/(\rho_{\text{m}}g)$. *b*) Si el metal es cobre, el peso del colado es de 156 N y la fuerza de flotación es de 20 N, ¿qué volumen total de cavidades contiene el colado? ¿A qué fracción corresponde esto del volumen total del colado?

14.78. Un bloque cúbico de madera de 0.100 m por lado y con densidad de 550 kg/m^3 flota en un frasco de agua. Aceite con densidad de 750 kg/m^3 se vierte sobre el agua hasta que la superficie del aceite está 0.035 m por debajo de la cara superior del bloque. *a*) ¿Qué espesor tiene la capa de aceite? *b*) ¿Qué presión manométrica hay en la cara inferior del bloque?

14.79. Bajen anclas. Una ancla de hierro de 35.0 kg y densidad de 7860 kg/m^3 está en la cubierta de una barcaza pequeña con lados verticales que flota en un río de agua dulce. El área del fondo de la barcaza es de 8.00 m^2. El ancla se tira por la borda, pero queda suspendida arriba del fondo del río por una cuerda, cuya masa y volumen son tan pequeños que los podemos despreciar. Al tirarse el ancla y una vez que la barcaza ha dejado de oscilar, ¿la barcaza está más arriba o más abajo en el agua que antes? ¿Qué distancia sube o baja?

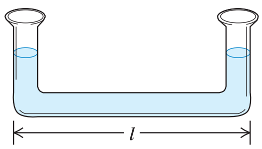
14.80. Suponga que el petróleo crudo de un buque-tanque tiene densidad de 750 kg/m^3. El buque encalla en una barra de arena. Para desencallarlo, el petróleo se bombea a barriles de acero que, cuando están vacíos, tienen una masa de 15.0 kg y capacidad para 0.120 m^3 de petróleo. Puede despreciarse el volumen ocupado por el acero del barril. *a*) Si un rescatista accidentalmente deja caer al mar un barril lleno y sellado, ¿flotará o se hundirá? *b*) Si el barril flota, ¿qué fracción de su volumen estará por arriba de la superficie? Si se hunde, ¿qué tensión mínima habría que ejercer con una cuerda para subir el barril del fondo del océano? *c*) Repita los incisos *a*) y *b*) si la densidad del petróleo es de 910 kg/m^3 y los barriles vacíos tienen una masa de 32.0 kg.

14.81. Un bloque cúbico con densidad ρ_{B} y lados de longitud L flota en un líquido con densidad mayor ρ_{L}. *a*) ¿Qué fracción del volumen del bloque está sobre la superficie del líquido? *b*) El líquido es más denso que el agua (densidad ρ_{A}) y no se mezcla con ella. Si se vierte agua en la superficie del líquido, ¿qué espesor (en términos de L, ρ_{B}, ρ_{L} y ρ_{A}) debe tener la capa de agua para que su superficie esté al ras de la cara superior del bloque? *c*) Calcule la profundidad de la capa de agua en el inciso *b*) si el líquido es mercurio, el bloque está hecho de hierro y la longitud de su lado es de 10.0 cm.

14.82. Una barcaza está en una esclusa rectangular en un río de agua dulce. La esclusa mide 60.0 m. de longitud y 20.0 m de ancho, y las puertas de acero en sus extremos están cerradas. Con la barcaza flotando en la esclusa, una carga de 2.50×10^6 N de chatarra se coloca en la barcaza. El metal tiene una densidad de 9000 kg/m^3. *a*) Cuando la carga, que inicialmente estaba en tierra, se coloca en la barcaza, ¿qué distancia vertical sube el agua en la esclusa? *b*) Ahora la chatarra se tira de la barcaza al agua. ¿El nivel del agua en la esclusa sube, baja o permanece igual? Si sube o baja, ¿cuánto lo hace?

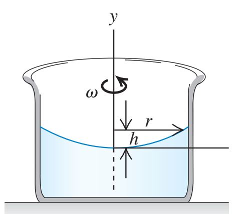
14.83. Un tubo en forma de U con una porción horizontal de longitud l (figura 14.40) contiene un líquido. ¿Qué diferencia de altura hay entre las columnas de líquido en los brazos verticales *a*) si el tubo tiene una aceleración a hacia la derecha? *b*) ¿Y si el tubo se monta en una tornamesa horizontal que gira con rapidez angular ω, con uno de sus brazos verticales en el eje de rotación? *c*) Explique por qué la diferencia de altura no depende de la densidad del líquido ni del área de sección transversal del tubo. ¿Sería lo mismo si los brazos verticales no tuvieran la misma área de sección transversal? ¿Sería lo mismo si la porción horizontal estuviera ahusada de un extremo al otro? Explique.

Figura 14.40 Problema 14.83.



14.84. Un recipiente cilíndrico con un líquido incompresible (de densidad ρ) gira con rapidez angular constante ω alrededor de su eje de simetría, que tomamos como eje y (figura 14.41). *a*) Demuestre que la presión a una altura dada dentro del fluido aumenta en la dirección radial (hacia fuera desde el eje de rotación) de acuerdo con la ecuación $\partial p/\partial r = \rho\omega^2 r$. *b*) Integre esta ecuación diferencial parcial para determinar la presión como función de la distancia del eje de rotación a lo largo de una línea horizontal en $y = 0$. *c*) Combine el resultado del inciso *b*) con la ecuación (14.5) para demostrar que la superficie del líquido en rotación tiene forma *parabólica*, es decir, la altura del líquido está dada por $h(r) = \omega^2 r^2/2g$. (Esta técnica se usa para hacer espejos de telescopio parabólicos; se hace girar vidrio líquido, dejando que se solidifique mientras gira.)

Figura 14.41 Problema 14.84.

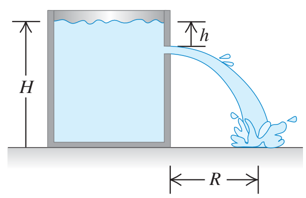


14.85. Un fluido incompresible con densidad ρ está en un tubo de ensayo horizontal con área transversal interior A. El tubo gira en un círculo horizontal en una ultracentrífuga con rapidez angular ω. Las fuerzas gravitacionales son insignificantes. Considere un elemento de volumen del fluido con área A y espesor dr', a una distancia r' del eje de rotación. La presión en su superficie interior es p, y en la exterior, $p + dp$. *a*) Aplique la segunda ley de Newton al elemento de volumen para demostrar que $dp = \rho\omega^2 r' dr'$. *b*) Si la superficie del fluido está en un radio r_0 donde la presión es p_0, demuestre que la presión p a una distancia $r \geq r_0$ es $p = p_0 + \rho\omega^2(r^2 - r_0^2)/2$. *c*) Un objeto con volumen V y densidad ρ_{ob} tiene su centro de masa a una distancia R_{cmob} del eje. Demuestre que la fuerza horizontal neta que actúa sobre el objeto es $\rho V\omega^2 R_{cm}$, donde R_{cm} es la distancia del eje al centro de masa del fluido desplazado. *d*) Explique por qué el objeto se mueve hacia dentro si $\rho R_{cm} > \rho_{ob} R_{cmob}$ y hacia fuera si $\rho R_{cm} < \rho_{ob} R_{cmob}$. *e*) Para objetos pequeños con densidad uniforme, $R_{cm} = R_{cmob}$. ¿Qué sucede con una mezcla de objetos de este tipo con diferentes densidades en una ultracentrífuga?

14.86. Globos sueltos llenos de helio, flotando en un auto con las ventanas y las ventilas cerradas, se mueven en el sentido de la aceleración del auto, pero globos sueltos llenos de aire se mueven en el sentido opuesto. Para comprender por qué, considere sólo las fuerzas horizontales que actúan sobre los globos. Sea a la magnitud de la aceleración hacia delante del auto. Considere un tubo horizontal de aire con área transversal A que se extiende del parabrisas, donde $x = 0$ y $p = p_0$, hacia atrás sobre el eje x. Considere un elemento de volumen de espesor dx en este tubo. La presión en su superficie delantera es p, y en la trasera es $p + dp$. Suponga que el aire tiene una densidad constante ρ. *a*) Aplique la segunda ley de Newton a este elemento para demostrar que $dp = \rho a\, dx$. *b*) Integre el resultado del inciso *a*) para obtener la presión en la superficie delantera en términos de a y x. *c*) Para demostrar que considerar ρ como constante es razonable, calcule la diferencia de presión en atmósferas para una distancia de hasta 2.5 m y una aceleración grande de 5.0 m/s^2. *d*) Demuestre que la fuerza horizontal neta que actúa sobre un globo de volumen V es $\rho V a$. *e*) Si las fuerzas de fricción son insignificantes, demuestre que la aceleración del globo (densidad media ρ_{glo}) es $(\rho/\rho_{glo})a$ y que su aceleración relativa al auto es $a_{rel} = [(\rho/\rho_{glo}) - 1]a$. *f*) Use la expresión para a_{rel} del inciso *e*) para explicar el movimiento de los globos.

14.87. Hay agua hasta una altura H en un tanque abierto grande con paredes verticales (figura 14.42). Se perfora un agujero en una pared a una profundidad h bajo la superficie del agua. *a*) ¿A qué distancia R del pie de la pared tocará el piso el chorro que sale? *b*) ¿A qué distancia sobre la base del tanque debería hacerse un segundo agujero de manera que el chorro que salga por él tenga el mismo alcance que el que sale por el primero?

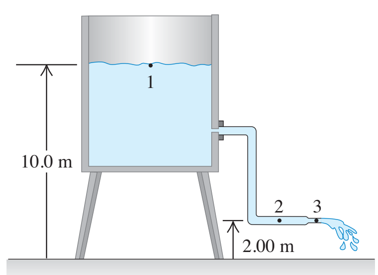
Figura 14.42 Problema 14.87.



14.88. Una cubeta cilíndrica, abierta por arriba, tiene 25.0 cm de altura y 10.0 cm de diámetro. Se perfora un agujero circular con área de 1.50 cm^2 en el centro del fondo de la cubeta. Se vierte agua en la cubeta mediante un tubo situado arriba, a razón de 2.40×10^{-4} m^3/s. ¿A qué altura subirá el agua en la cubeta?

14.89. Fluye agua continuamente de un tanque abierto como en la figura 14.43. La altura del punto 1 es de 10.0 m, y la de los puntos 2 y 3 es de 2.00 m. El área transversal en el punto 2 es de 0.0480 m^2; en el punto 3 es de 0.0160 m^2. El área del tanque es muy grande en comparación con el área transversal del tubo. Suponiendo que puede aplicarse la ecuación de Bernoulli, calcule *a*) la rapidez de descarga en m^3/s; *b*) la presión manométrica en el punto 2.

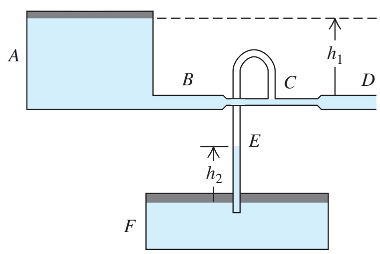
Figura 14.43 Problema 14.89.



14.90. El radio del huracán Emily de 1993 fue de unos 350 km. La rapidez del viento cerca del centro ("ojo") del huracán, cuyo radio fue de unos 30 km, alcanzó cerca de 200 km/h. Al entrar aire del borde del huracán hacia el ojo, su cantidad de movimiento angular se mantuvo casi constante. *a*) Estime la rapidez del viento en el borde del huracán. *b*) Estime la diferencia de presión en el suelo entre el ojo y el borde del huracán. (*Sugerencia:* véase la tabla 14.1.) ¿Dónde es mayor la presión? *c*) Si la energía cinética del aire arremolinado en el ojo pudiera convertirse totalmente en energía potencial gravitacional, ¿cuánto subiría el aire? *d*) De hecho, el aire en el ojo sube a alturas de varios kilómetros. ¿Cómo puede conciliar esto con su respuesta del inciso *c*)?

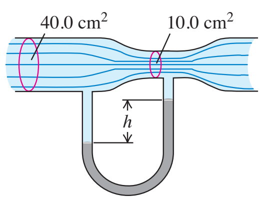
14.91. Dos tanques abiertos muy grandes *A* y *F* (figura 14.44) contienen el mismo líquido. Un tubo horizontal *BCD*, con una constricción en *C* y abierto al aire en *D*, sale del fondo del tanque *A*. Un tubo vertical *E* emboca en la constricción en *C* y baja al líquido del tanque *F*. Suponga flujo de línea de corriente y cero viscosidad. Si el área transversal en *C* es la mitad del área en *D*, y si *D* está a una distancia h_1 bajo el nivel del líquido en *A*, ¿a qué altura h_2 subirá el líquido en el tubo *E*? Exprese su respuesta en términos de h_1.

Figura **14.44** Problema 14.91.



14.92. El tubo horizontal de la figura 14.45 tiene área transversal de 40.0 cm^2 en la parte más ancha y de 10.0 cm^2 en la constricción. Fluye agua en el tubo, cuya descarga es de 6.00×10^{-3} m^3/s (6.00 L/s). Calcule *a*) la rapidez de flujo en las porciones ancha y angosta; *b*) la diferencia de presión entre estas porciones; *c*) la diferencia de altura entre las columnas de mercurio en el tubo con forma de U.

Figura **14.45** Problema 14.92.



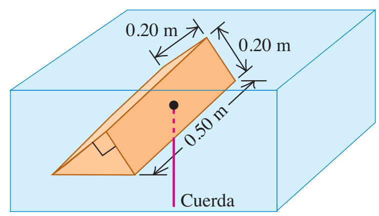
14.93. Un líquido que fluye de un tubo vertical produce un chorro con una forma bien definida. Para obtener la ecuación de esta forma, suponga que el líquido está en caída libre una vez que sale del tubo. Al salir, el líquido tiene rapidez v_0, y el radio del chorro es r_0. *a*) Obtenga una ecuación para la rapidez del líquido en función de la distancia *y* que ha caído. Combinando esto con la ecuación de continuidad, obtenga una expresión para el radio del chorro en función de *y*. *b*) Si fluye agua de un tubo vertical con rapidez de salida de 1.20 m/s, ¿a qué distancia bajo la salida se habrá reducido a la mitad el radio original del chorro?

Problemas de desafío

14.94. Una roca con masa $m = 3.00$ kg cuelga del techo de un elevador con un cordón ligero. La roca está totalmente sumergida en una cubeta con agua que está en el piso del elevador, pero no toca el fondo ni los lados de la cubeta, *a*) Cuando el elevador está en reposo, la tensión en el cordón es de 21.0 N. Calcule el volumen de la piedra. *b*) Deduzca una expresión para la tensión en el cordón cuando el elevador tiene una aceleración de magnitud *a hacia arriba*. Calcule la tensión cuando $a = 2.50$ m/s^2 hacia arriba. *c*) Deduzca una expresión para la tensión en el cordón cuando el elevador tiene una aceleración de magnitud *a hacia abajo*. Calcule la tensión cuando $a = 2.50$ m/s^2 hacia abajo. *d*) Determine la tensión cuando el elevador está en caída libre con aceleración hacia abajo igual a *g*.

14.95. Suponga que un trozo de espuma de poliestireno, $\rho = 180$ kg/m^3, se mantiene totalmente sumergido en agua (figura 14.46). *a*) Calcule la tensión en la cuerda usando el principio de Arquímedes. *b*) Use $p = p_0 + \rho g h$ para calcular directamente la fuerza que ejerce el agua sobre los dos lados inclinados y la base del trozo de poliestireno; luego demuestre que la suma vectorial de estas fuerzas es la fuerza de flotación.

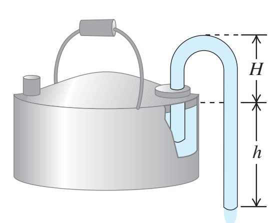
Figura **14.46** Problema de desafío 14.95.



14.96. Un tanque grande con diámetro *D*, abierto al aire, contiene agua hasta una altura *H*. Se perfora un agujero pequeño con diámetro $d (d \ll D)$ en la base del tanque. Ignorando los efectos de viscosidad, calcule el tiempo que el tanque tarda en vaciarse por completo.

14.97. Un *sifón* (figura 14.47) es un dispositivo útil para extraer líquidos de recipientes. Para establecer el flujo, el tubo debe llenarse inicialmente con fluido. Sea ρ la densidad del fluido y p_a la presión atmosférica. Suponga que el área transversal del tubo es la misma en toda su longitud. *a*) Si el extremo inferior del sifón está a una distancia *h* bajo el nivel del líquido en el recipiente, ¿con qué rapidez fluye el líquido por ese extremo? (Suponga que el recipiente tiene un diámetro muy grande e ignore los efectos de viscosidad.) *b*) Una caracterís-

Figura **14.47** Problema de desafío 14.97.



tica curiosa del sifón es que el fluido inicialmente fluye hacia arriba. ¿Qué altura máxima H puede tener el punto alto del tubo sin que deje de haber flujo?

14.98. El siguiente párrafo se tomó de una carta. *Al trazar y nivelar los cimientos de construcciones relativamente largas, los carpinteros de la localidad acostumbran usar una manguera de jardín llena de agua, en cuyos extremos meten tubos de vidrio de 10 a 12 pulgadas de longitud. La teoría es que el agua, buscando un nivel común, tendrá la misma altura en ambos tubos y servirá como nivel. Surge la pregunta de qué pasa si se deja una burbuja de aire en la manguera. Nuestros expertos aseguran que el aire no afecta la lectura de un extremo al otro. Otros dicen que sí habrá una inexactitud importante*. ¿Puede usted dar una respuesta relativamente sencilla a esta pregunta, junto con una explicación? La figura 14.48 bosqueja la situación que causó la disputa.

Figura 14.48 Problema de desafío 14.98.