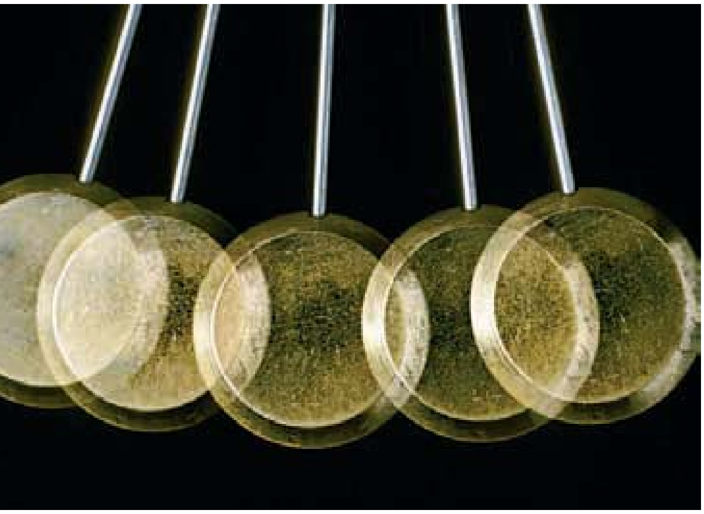
MOVIMIENTO PERIÓDICO 13



?Suponga que usted duplica la masa de la péndola de un reloj (que incluye la varilla y la lenteja en su extremo) manteniendo iguales sus dimensiones. ¿El reloj se adelantaría o se atrasaría?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir las oscilaciones en términos de amplitud, periodo, frecuencia y frecuencia angular.
- Cómo efectuar cálculos de movimiento armónico simple, un tipo de oscilación importante.
- Cómo utilizar los conceptos de energía para analizar el movimiento armónico simple.
- Cómo aplicar estas ideas de movimiento armónico simple en diferentes situaciones físicas.
- Cómo analizar los movimientos de un péndulo simple.
- Qué es un péndulo físico y cómo calcular las propiedades de su movimiento.
- Qué determina la duración de una oscilación.
- Cómo una fuerza aplicada a un oscilador en la frecuencia adecuada puede causar una respuesta o resonancia muy grande.

Muchos tipos de movimiento se repiten una y otra vez: la vibración de un cristal de cuarzo en un reloj de pulso, la péndola oscilante de un reloj con pedestal, las vibraciones sonoras producidas por un clarinete o un tubo de órgano y el movimiento periódico de los pistones de un motor de combustión. A esta clase de movimiento le llamamos **movimiento periódico** u **oscilación**, y será el tema del presente capítulo. Su comprensión será indispensable para nuestro estudio posterior de las ondas, el sonido, la corriente alterna y la luz.

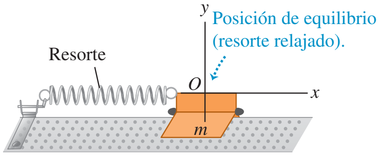
Un cuerpo que tiene un movimiento periódico se caracteriza por una posición de equilibrio estable; cuando se le aleja de esa posición y se suelta, entra en acción una fuerza o torca para volverlo al equilibrio. Sin embargo, para cuando llega ahí, ya ha adquirido cierta energía cinética que le permite continuar su movimiento hasta detenerse del otro lado, de donde será impulsado nuevamente hacia su posición de equilibrio. Imagine una pelota que rueda de un lado a otro dentro de un tazón redondo, o un péndulo que oscila pasando por su posición vertical.

En este capítulo, nos concentraremos en dos ejemplos sencillos de sistemas con movimiento periódico: los sistemas resorte-masa y los péndulos. También veremos por qué algunas oscilaciones tienden a detenerse con el tiempo, y otras tienen desplazamientos cada vez mayores con respecto al equilibrio cuando actúan fuerzas periódicamente variables.

13.1 Descripción de la oscilación

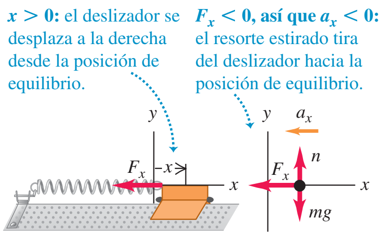
Uno de los sistemas más simples que puede tener movimiento periódico se muestra en la figura 13.1. Un cuerpo con masa m se mueve sobre una guía horizontal sin fricción, como una pista o riel de aire, de modo que sólo puede desplazarse en el eje x. El cuerpo está conectado a un resorte de masa despreciable que puede estirarse o comprimirse. El extremo izquierdo del resorte está fijo, y el derecho está unido al cuerpo. La fuerza del resorte es la única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo; las fuerzas normal y gravitacional verticales en este caso suman cero.

13.1 Sistema que puede tener movimiento periódico.

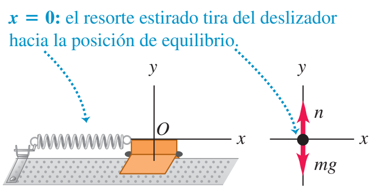


13.2 Modelo de movimiento periódico. Cuando el cuerpo está desplazado con respecto a la posición de equilibrio en $x = 0$, el resorte ejerce una fuerza de restitución dirigida hacia la posición de equilibrio.

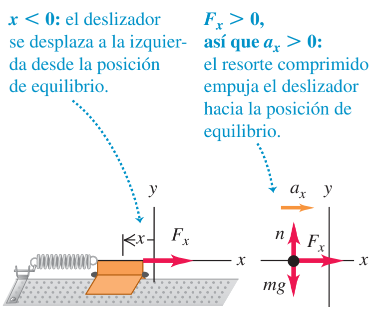
a)



b)



c)



Lo más sencillo es definir nuestro sistema de coordenadas con el origen O en la posición de equilibrio, donde el resorte no está estirado ni comprimido. Así, x es la componente x del **desplazamiento** del cuerpo con respecto al equilibrio y también es el cambio de longitud del resorte. La componente x de la fuerza que el resorte ejerce sobre el cuerpo es F_x y la componente x de la aceleración, a_x, está dada por $a_x = F_x/m$.

La figura 13.2 muestra el cuerpo para tres desplazamientos diferentes del resorte. Siempre que el cuerpo se desplaza con respecto a su posición de equilibrio, la fuerza del resorte tiende a regresarlo a dicha posición. Llamamos a una fuerza con esa característica **fuerza de restitución**. Sólo puede haber oscilación si hay una fuerza de restitución que tiende a regresar el sistema a la posición de equilibrio.

Analicemos cómo se da la oscilación en este sistema. Si desplazamos el cuerpo a la derecha hasta $x = A$ y lo soltamos, la fuerza total y la aceleración son hacia la izquierda. La rapidez aumenta al aproximarse el cuerpo a la posición de equilibrio O. Cuando el cuerpo está en O, la fuerza total que actúa sobre él es cero (figura 13.2b) pero, a causa de su movimiento, *rebasa* la posición de equilibrio. En el otro lado de esa posición, el cuerpo se sigue moviendo a la izquierda, pero la fuerza total y la aceleración son a la derecha (figura 13.2c); por lo tanto, la rapidez disminuye hasta que el cuerpo se detiene. Después demostraremos que, con un resorte ideal, el punto en el que se detiene es $x = -A$. Ahora el cuerpo acelera hacia la derecha, rebasa otra vez el equilibrio, y se detiene en el punto inicial $x = A$, listo para repetir todo el proceso. ¡El cuerpo está oscilando! Si no hay fricción u otra fuerza que elimine energía mecánica del sistema, el movimiento se repetirá eternamente; la fuerza de restitución tirará perpetuamente del cuerpo hacia la posición de equilibrio, la cual, el cuerpo rebasará una y otra vez.

En situaciones diferentes, la fuerza puede depender de diversas maneras del desplazamiento x con respecto al equilibrio, pero *siempre* habrá oscilación si la fuerza es de *restitución* y tiende a volver el sistema al equilibrio.

Amplitud, periodo, frecuencia y frecuencia angular

Veamos algunos términos que usaremos al analizar movimientos periódicos de todo tipo:

La **amplitud** del movimiento, denotada con A, es la magnitud máxima del desplazamiento con respecto al equilibrio; es decir, el valor máximo de $|x|$ y siempre es positiva. Si el resorte de la figura 13.2 es ideal, el rango global del movimiento es $2A$. La unidad de A en el SI es el metro. Una vibración completa, o **ciclo**, es un viaje redondo (de ida y vuelta), digamos de A a $-A$ y de regreso a A, o bien, de O a A, regresando por O hasta $-A$ y volviendo a O. El movimiento de un lado al otro (digamos, de $-A$ a A) es medio ciclo.

El **periodo**, T, es el tiempo que tarda un ciclo, y siempre es positivo. La unidad del periodo en el SI es el segundo, aunque a veces se expresa como “segundos por ciclo”.

La **frecuencia**, f, es el número de ciclos en la unidad de tiempo, y siempre es positiva. La unidad de la frecuencia en el SI es el hertz:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s} = 1 \text{ s}^{-1}$$

Esta unidad se llama así en honor al físico alemán Heinrich Hertz (1857-1894), un pionero en la investigación de las ondas electromagnéticas.

La **frecuencia angular**, ω, es 2π veces la frecuencia:

$$\omega = 2\pi f$$

Pronto veremos para qué sirve ω; representa la rapidez de cambio de una cantidad angular (no necesariamente relacionada con un movimiento rotacional) que siempre se mide en radianes, de modo que sus unidades son rad/s. Puesto que f está en ciclos/s, podemos considerar que el número 2π tiene unidades de rad/ciclo.

Por las definiciones de periodo T y frecuencia f, es evidente que uno es el recíproco del otro:

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f} \qquad \text{(relaciones entre frecuencia y periodo)} \qquad (13.1)$$

También, por la definición de ω,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(frecuencia angular)} \tag{13.2}$$

Ejemplo 13.1 Periodo, frecuencia y frecuencia angular

Un transductor ultrasónico (una especie de altavoz) empleado para el diagnóstico médico oscila con una frecuencia de 6.7 MHz $= 6.7 \times 10^6$ Hz. ¿Cuánto tarda cada oscilación, y qué frecuencia angular tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestras incógnitas son el periodo T y la frecuencia angular ω.

PLANTEAR: Nos dan la frecuencia f, así que podemos obtener esas variables empleando las ecuaciones (13.1) y (13.2), respectivamente.

EJECUTAR: Por las ecuaciones: (13.1) y (13.2),

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6.7 \times 10^6\ \text{Hz}} = 1.5 \times 10^{-7}\ \text{s} = 0.15\ \mu\text{s}$$

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f = 2\pi(6.7 \times 10^6\ \text{Hz})\\ &= (2\pi\ \text{rad/ciclo})(6.7 \times 10^6\ \text{ciclos/s})\\ &= 4.2 \times 10^7\ \text{rad/s}\end{aligned}$$

EVALUAR: Ésta es una vibración muy rápida, con f y ω grandes y T pequeño. Una vibración lenta tiene f y ω pequeñas, y T grande.

Evalúe su comprensión de la sección 13.1 Un cuerpo como el de la figura 13.2 oscila de un lado a otro. Para cada uno de los siguientes valores, de la velocidad v_x y la aceleración a_x del cuerpo, indique si el desplazamiento x es positivo, negativo o cero. *a)* $v_x > 0$ y $a_x > 0$; *b)* $v_x > 0$ y $a_x < 0$; *c)* $v_x < 0$ y $a_x > 0$; *d)* $v_x < 0$ y $a_x < 0$; *e)* $v_x = 0$ y $a_x < 0$; *f)* $v_x > 0$ y $a_x = 0$.

MP

13.2 Movimiento armónico simple

El tipo de oscilación más sencillo sucede cuando la fuerza de restitución F_x es *directamente proporcional* al desplazamiento x con respecto al equilibrio. Esto ocurre si el resorte de las figuras 13.1 y 13.2 es ideal y obedece la ley de Hooke. La constante de proporcionalidad entre F_x y x es la constante de fuerza k. (De ser necesario, repase la ley de Hooke y la definición de la constante de fuerza en la sección 6.3.) En ambos lados de la posición de equilibrio, F_x y x siempre tienen signos opuestos. En la sección 6.3, representamos la fuerza que actúa *sobre* un resorte ideal estirado como $F_x = kx$. La componente x de la fuerza que el resorte ejerce *sobre el cuerpo* es el negativo de ésta, así que la componente x de la fuerza F_x sobre el cuerpo es

$$F_x = -kx \qquad \text{(fuerza de restitución ejercida por un resorte ideal)} \tag{13.3}$$

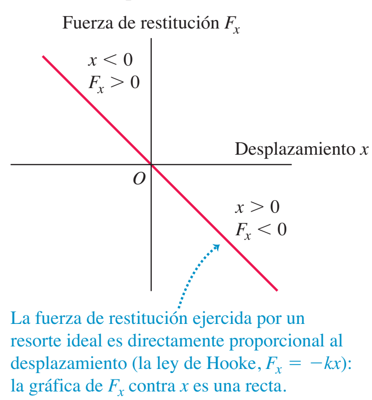
Esta ecuación da la magnitud y el signo correctos de la fuerza, ya sea x positivo, negativo o cero (figura 13.3). La constante de fuerza k siempre es positiva y tiene unidades de N/m (también resultan útiles las unidades de kg/s^2). Estamos suponiendo que no hay fricción, así que la ecuación (13.3) da la fuerza *total* que actúa sobre el cuerpo.

Si la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio, según la ecuación (13.3), la oscilación se denomina **movimiento armónico simple**, *que se abrevia* **MAS**. La aceleración $a_x = d^2x/dt^2 = F_x/m$ de un cuerpo en MAS está dada por

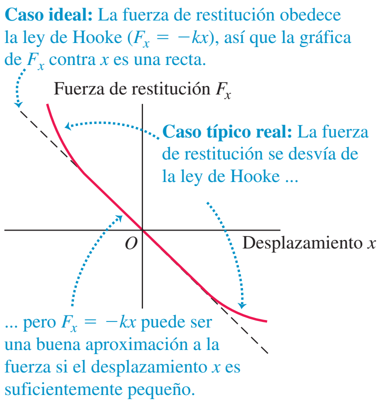
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \text{(movimiento armónico simple)} \tag{13.4}$$

El signo menos indica que la aceleración y el desplazamiento siempre tienen signos opuestos. Esta aceleración *no* es constante, así que olvídese de usar las ecuaciones para aceleración constante del capítulo 2. En breve veremos cómo resolver esta

13.3 Un resorte ideal ejerce una fuerza de restitución que obedece la ley de Hooke, $F_x = -kx$. La oscilación con una fuerza de restitución así se denomina movimiento armónico simple.



13.4 En casi todas las oscilaciones reales, se aplica la ley de Hooke dado que el cuerpo no se aleja tanto del equilibrio. En tal caso, las oscilaciones tienen amplitud pequeña y son casi armónicas simples.



ecuación para obtener el desplazamiento x en función del tiempo. Un cuerpo que está en movimiento armónico simple se denomina **oscilador armónico**.

¿Por qué es importante el movimiento armónico simple? Tenga presente que no todos los movimientos periódicos son armónicos simples; en el movimiento periódico en general, la relación entre la fuerza de restitución y el desplazamiento es más complicada que la ecuación (13.3). No obstante, en muchos sistemas, la fuerza de restitución es *aproximadamente* proporcional al desplazamiento si éste es lo suficiente pequeño (figura 13.4). Es decir, si la amplitud es pequeña, las oscilaciones de tales sistemas son más o menos armónicas simples y, por lo tanto, la ecuación (13.4) las describe aproximadamente. Así, podemos usar el MAS como modelo aproximado de muchos movimientos periódicos distintos, como la vibración del cristal de cuarzo de un reloj de pulso, el movimiento de un diapasón, la corriente eléctrica en un circuito de corriente alterna, y las vibraciones de los átomos en moléculas y sólidos.

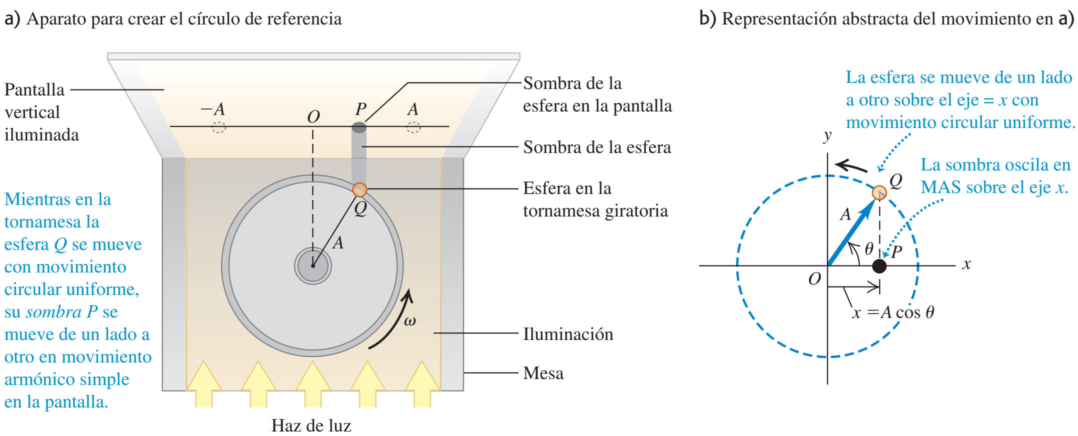
Movimiento circular y ecuaciones del MAS

Para explorar las propiedades del movimiento armónico simple, debemos expresar el desplazamiento x del cuerpo oscilante en función del tiempo, $x(t)$. La segunda derivada de esta función, d^2x/dt^2, debe ser igual a $(-k/m)$ multiplicado por la función misma, como lo pide la ecuación (13.4). Como vimos, las fórmulas para aceleración constante de la sección 2.4 no son útiles aquí, porque la aceleración cambia constantemente al cambiar el desplazamiento x. En cambio, obtendremos $x\,(t)$ aprovechando la notable similitud entre el MAS y otra forma de movimiento que ya estudiamos detalladamente.

La figura 13.5a muestra la vista superior de un disco horizontal de radio A con una esfera pegada a su borde en el punto Q. El disco gira con rapidez angular constante ω (que se mide en rad/s), así que la esfera tiene movimiento circular uniforme. Un haz de luz horizontal incide en el disco y proyecta la sombra de la esfera en una pantalla. La sombra en el punto P oscila conforme la esfera se mueve en un círculo. Luego instalamos un cuerpo sujeto a un resorte ideal, como la combinación de las figuras 13.1 y 13.2, de modo que el cuerpo oscile paralelo a la sombra. Demostraremos que el movimiento del cuerpo y el movimiento de la sombra de la esfera son *idénticos*, cuando la amplitud de la oscilación del cuerpo es igual al radio del disco A, y si la frecuencia angular $2\pi f$ del cuerpo oscilante es igual a la rapidez angular ω del disco. Esto es, *el movimiento armónico simple es la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro.*

Podemos comprobar esta notable afirmación calculando la aceleración de la sombra en P y comparándola con la aceleración de un cuerpo en MAS, dada por

13.5 a) Relación entre movimiento circular uniforme y movimiento armónico simple. b) La sombra de la esfera se mueve exactamente como un cuerpo que oscila unido a un resorte ideal.



la ecuación (13.4). El círculo en el que la esfera se mueve, de modo que su proyección coincide con el movimiento del cuerpo oscilante se denomina **círculo de referencia**; llamaremos a Q el *punto de referencia*. Tomamos el círculo de referencia en el plano xy, con el origen O en el centro del círculo (figura 13.5b). En el instante t, el vector OQ del origen al punto de referencia Q forma un ángulo θ con el eje $+x$. Al girar Q en el círculo de referencia con rapidez angular constante ω, el vector OQ gira con la misma rapidez angular. Un vector giratorio así se denomina **fasor**. (Este término estaba en uso mucho antes de inventarse el arma del mismo nombre del programa de TV "Viaje a las estrellas". El método de fasores para analizar oscilaciones es útil en muchas áreas de la física. Usaremos los fasores cuando estudiemos los circuitos de corriente alterna en el capítulo 31 y la interferencia de la luz en los capítulos 35 y 36.)

La componente x del fasor en el instante t es la coordenada x del punto Q:

$$x = A\cos\theta \tag{13.5}$$

Ésta es también la coordenada x de la sombra P, que es la *proyección* de Q sobre el eje x. Por lo tanto, la velocidad x de la sombra P en el eje x es igual a la componente x del vector de velocidad del punto de referencia Q (figura 13.6a) y aceleración x de P es igual a la componente x del vector de aceleración de Q (figura 13.6b). Puesto que Q está en movimiento circular uniforme, su vector de aceleración $\vec{a}_Q$ siempre apunta hacia O. Además, la magnitud de $\vec{a}_Q$ es constante y es igual a la velocidad angular al cuadrado multiplicada por el radio del círculo (véase la sección 9.3):

$$a_Q = \omega^2 A \tag{13.6}$$

La figura 13.6b muestra que la componente x de $\vec{a}_Q$ es $a_x = -a_Q\cos\theta$. Combinando esto con las ecuaciones (13.5) y (13.6), vemos que la aceleración del punto P es

$$a_x = -a_Q\cos\theta = -\omega^2 A\cos\theta \qquad \text{o bien} \tag{13.7}$$

$$a_x = -\omega^2 x \tag{13.8}$$

La aceleración del punto P es directamente proporcional al desplazamiento x y siempre tiene el signo opuesto. Éstas son precisamente las características distintivas del movimiento armónico simple.

La ecuación (13.8) es *exactamente* igual a la ecuación (13.4) para la aceleración de un oscilador armónico, siempre que la rapidez angular ω del punto de referencia Q esté relacionada con la constante de fuerza k y la masa m del cuerpo oscilante por

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{o bien,} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.9}$$

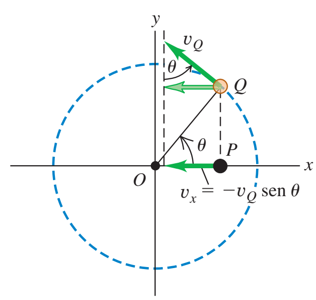
Hemos estado usando el mismo símbolo ω para la *rapidez* angular del punto de referencia Q y la *frecuencia* angular del punto oscilante P. La razón es que ¡estas cantidades son iguales! Si Q completa una revolución en un tiempo T, P completa un ciclo de oscilación en el mismo tiempo; por lo tanto, T es el periodo de la oscilación. Durante el tiempo T, el punto Q gira 2π radianes, así que su rapidez angular es $\omega = 2\pi/T$. Ésta es la ecuación (13.2) para la frecuencia angular de P, lo cual verifica nuestra afirmación acerca de las dos interpretaciones de ω. Por ello, introdujimos la frecuencia angular en la sección 13.1; es la cantidad que conecta la oscilación y el movimiento circular. Así, reinterpretamos la ecuación (13.9) como una expresión de la frecuencia angular del movimiento armónico simple para un cuerpo de masa m, sobre el que actúa una fuerza de restitución con constante de fuerza k:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(movimiento armónico simple)} \tag{13.10}$$

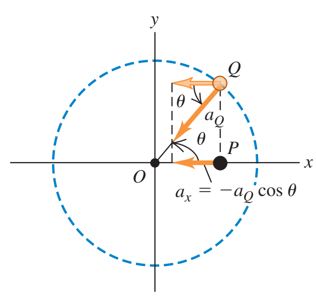
Cuando un cuerpo comienza a oscilar en un MAS, no podemos elegir el valor de ω, pues está predeterminado por los valores de k y m. Las unidades de k son N/m, o

13.6 a) La velocidad x y b) la aceleración de x de la sombra de la esfera representada por el punto P (véase la figura 13.5) son las componentes x de los vectores de velocidad y aceleración, respectivamente, de la esfera Q.

a) Uso del círculo de referencia para determinar la velocidad x del punto P



b) Uso del círculo de referencia para determinar la aceleración x del punto P



bien, kg/s^2, así que k/m está en $(kg/s^2)/kg = s^{-2}$. Cuando obtenemos la raíz cuadrada en la ecuación (13.10), obtenemos s^{-1} o, mejor dicho, rad/s, porque se trata de una frecuencia *angular* (recuerde que el radián no es una unidad verdadera).

Según las ecuaciones (13.1) y (13.2), la frecuencia f y el periodo T son

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(movimiento armónico simple)} \qquad (13.11)$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(movimiento armónico simple)} \qquad (13.12)$$

Por la ecuación (13.12), vemos que una masa mayor m, con su mayor inercia, tiene menos aceleración, se mueve más lentamente y tarda más en completar un ciclo (figura 13.7). En cambio, un resorte más rígido (con mayor constante de fuerza k) ejerce una mayor fuerza para una deformación x dada, causando una mayor aceleración, velocidades más altas y ciclos más cortos.

13.7 Cuanto mayor sea la masa m de los brazos de un diapasón, más baja será la frecuencia de oscilación $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$ y más bajo será el tono del sonido producido por el diapasón.

CUIDADO **No confunda frecuencia con frecuencia angular** Podemos meternos en problemas si no distinguimos entre frecuencia f y frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. La frecuencia nos indica cuántos ciclos de oscilación se dan por segundo; mientras que la frecuencia angular nos dice a cuántos radianes por segundo corresponde esto en el círculo de referencia. Al resolver problemas, fíjese bien si el objetivo es obtener f o bien ω.

Periodo y amplitud en el MAS

Las ecuaciones (13.11) y (13.12) muestran que el periodo y la frecuencia del movimiento armónico simple están determinadas solamente por la masa m y la constante de fuerza k. *En el movimiento armónico simple, el periodo y la frecuencia no dependen de la amplitud A*. Para valores dados de m y k, el tiempo de una oscilación completa es el mismo, sea la amplitud grande o pequeña. La ecuación (13.3) muestra por qué esto es lógico. Una mayor A implica que la masa alcanza valores mayores de $|x|$ y se somete a fuerzas de restitución mayores. Esto aumenta la rapidez media del cuerpo durante un ciclo completo, lo cual compensa exactamente la necesidad de recorrer una mayor distancia, de modo que el tiempo total es el mismo.

En esencia las oscilaciones de un diapasón son movimiento armónico simple; ello implica que siempre vibra con la misma frecuencia, sea cual fuere la amplitud. Esto permite usar el diapasón como estándar para tono musical. Si no fuera por esta característica del movimiento armónico simple, sería imposible hacer que los relojes mecánicos y electrónicos que conocemos fueran exactos, o tocar afinadamente la mayoría de los instrumentos musicales. Si encontramos un cuerpo oscilante cuyo periodo *sí* depende de la amplitud, su movimiento *no* es armónico simple.

Ejemplo 13.2 Frecuencia angular, frecuencia y periodo del MAS

Un resorte se monta horizontalmente con su extremo izquierdo fijo. Conectando una balanza de resorte al extremo libre y tirando hacia la derecha (figura 13.8a), determinamos que la fuerza de estiramiento es proporcional al desplazamiento y que una fuerza de 6.0 N causa un desplazamiento de 0.030 m. Quitamos la balanza y conectamos un deslizador de 0.50 kg al extremo, tiramos de él hasta moverlo 0.020 m por una pista de aire sin fricción, lo soltamos y vemos cómo oscila. *a*) Determine la constante de fuerza del resorte. *b*) Calcule la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo de la oscilación.

SOLUCIÓN

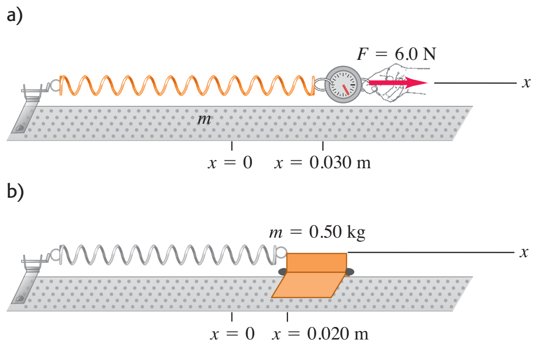
IDENTIFICAR: Dado que la fuerza del resorte (con magnitud igual a la fuerza de estiramiento) es proporcional al desplazamiento, el movimiento es armónico simple.

PLANTEAR: Obtendremos el valor de la constante de fuerza k usando la ley de Hooke, la ecuación (13.3) y los valores de ω, f y T, usando las ecuaciones (13.10), (13.11) y (13.12), respectivamente.

EJECUTAR: *a*) Cuando $x = 0.030$ m, la fuerza que el resorte ejerce sobre la balanza de resorte es $F_x = -6.0$ N. Por la ecuación (13.3),

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{-6.0\text{ N}}{0.030\text{ m}} = 200\text{ N/m} = 200\text{ kg/s}^2$$

13.8 a) La fuerza ejercida *sobre* el resorte (indicada por el vector $\vec{F}$) tiene componente x: $F_x = +6.0$ N. La fuerza ejercida *por* el resorte tiene componente x: $F_x = -6.0$ N. *b*) Un deslizador está unido al mismo resorte y se le permite oscilar.



b) Usando $m = 0.50$ kg en la ecuación (13.10), vemos que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\text{ kg/s}^2}{0.50\text{ kg}}} = 20\text{ rad/s}$$

La frecuencia f es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\text{ rad/s}}{2\pi\text{ rad/ciclo}} = 3.2\text{ ciclos/s} = 3.2\text{ Hz}$$

El periodo T es el recíproco de la frecuencia f:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3.2\text{ ciclos/s}} = 0.31\text{ s}$$

El periodo por lo regular se da en "segundos", en vez de en "segundos por ciclo".

EVALUAR: La amplitud de la oscilación es de 0.020 m, la distancia a la derecha que movimos el deslizador conectado al resorte antes de soltarlo. No necesitamos esta información para calcular la frecuencia angular, la frecuencia ni el periodo porque, en el MAS, ninguna de esas cantidades depende de la amplitud.

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

Aún necesitamos obtener el desplazamiento x en función del tiempo para un oscilador armónico. La ecuación (13.4) para un cuerpo en movimiento armónico simple en el eje x es idéntica a la ecuación (13.8), para la coordenada x del punto de referencia en movimiento circular uniforme con rapidez angular constante $\omega = \sqrt{k/m}$. Se sigue que la ecuación (13.5), $x = A\cos\theta$, describe la coordenada x para ambas situaciones. Si, en $t = 0$, el fasor OQ forma un ángulo ϕ (letra griega phi) con el eje $+x$, entonces en cualquier instante posterior t, este ángulo será $\theta = \omega t + \phi$. Sustituimos esto en la ecuación (13.5) para obtener

ActivPhysics ONLINE

9.1 Ecuaciones y gráficas de posición
9.2 Descripción del movimiento vibratorio
9.5 Mono tira a Tarzán

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{(desplazamiento del MAS)} \qquad (13.13)$$

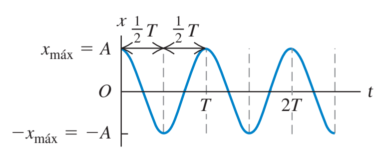
donde $\omega = \sqrt{k/m}$. La figura 13.9 muestra una gráfica de la ecuación (13.13) para el caso específico en que $\phi = 0$. El desplazamiento x es una función periódica de t, como se espera en el MAS. También podríamos haber escrito la ecuación (13.13) en términos de la función seno en vez de coseno, usando la identidad $\cos\alpha = \text{sen}(\alpha + \pi/2)$. *En el movimiento armónico simple, la posición es una función periódica senoidal del tiempo.* Hay muchas otras funciones periódicas, pero ninguna tan continua y simple como una función seno o coseno.

El valor del coseno siempre está entre -1 y 1, así que en la ecuación (13.13) x siempre está entre $-A$ y A. Esto confirma que A es la amplitud del movimiento.

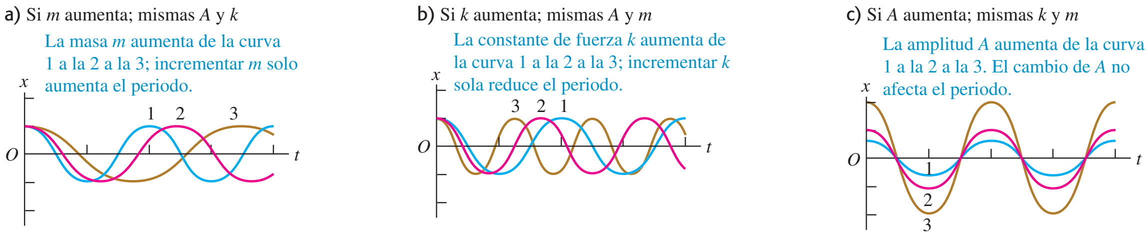
El periodo T es lo que tarda un ciclo de oscilación (figura 13.9). La función coseno se repite cada vez que la cantidad entre paréntesis de la ecuación (13.13) aumenta en 2π radianes. Si comenzamos en $t = 0$, el tiempo T para completar un ciclo está dado por

$$\omega T = \sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \qquad \text{o bien,} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

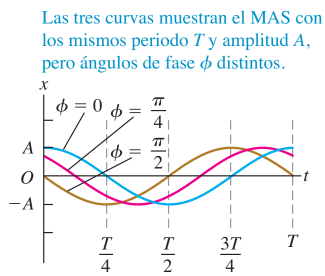
13.9 Gráica de x en función de t [véase la ecuación (13.13)] para el movimiento armónico simple. El caso que se muestra tiene $\phi = 0$.



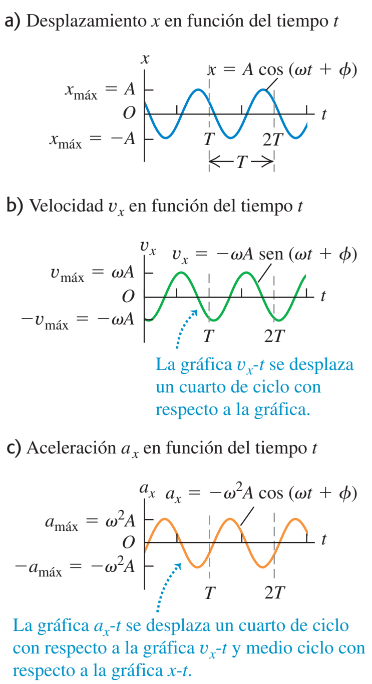
13.10 Variaciones del movimiento armónico simple. En todos los casos, $\phi = 0$ [véase la ecuación (13.13)].



13.11 Variaciones del MAS: desplazamiento contra tiempo para el mismo oscilador armónico pero ángulos de fase ϕ distintos.



13.12 Gráficas para el MAS: a) de x contra t, b) de v_x contra t y c) de a_x contra t. En estas gráficas, $\phi = \pi/3$.



que es la ecuación (13.12). Un cambio de m o de k altera el periodo de oscilación, como se muestra en las figuras 13.10a y 13.10b. El periodo no depende de la amplitud A (figura 13.10c).

La constante ϕ de la ecuación (13.13) es el **ángulo de fase**, que nos indica en qué punto del ciclo se encontraba el movimiento cuando $t = 0$ (o en qué parte del círculo estaba el punto Q en $t = 0$). Denotamos la posición en $t = 0$ con x_0. Sustituyendo $t = 0$ y $x = x_0$ en la ecuación (13.13) obtenemos

$$x_0 = A\cos\phi \qquad (13.14)$$

Si $\phi = 0$, entonces $x_0 = A\cos 0 = A$, por lo tanto, la partícula parte del desplazamiento positivo máximo. Si $\phi = \pi$, entonces $x_0 = A\cos\pi = -A$, por lo tanto, la partícula parte del desplazamiento *negativo* máximo. Si $\phi = \pi/2$, entonces $x_0 = A\cos(\pi/2) = 0$, por lo tanto, la partícula parte del origen. La figura 13.11 muestra el desplazamiento x contra el tiempo para diferentes ángulos de fase.

Obtenemos la velocidad v_x y la aceleración a_x en función del tiempo para un oscilador armónico derivando la ecuación (13.13) con respecto al tiempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \qquad \text{(velocidad en el MAS)} \qquad (13.15)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{(aceleración en el MAS)} \qquad (13.16)$$

La velocidad v_x oscila entre $v_{máx} = +\omega A$ y $-v_{máx} = -\omega A$, y la aceleración a_x oscila entre $a_{máx} = +\omega^2 A$ y $-a_{máx} = -\omega^2 A$ (figura 13.12). Si comparamos la ecuación (13.16) con la ecuación (13.13) y recordamos que $\omega^2 = k/m$ [ecuación (13.9)], vemos que

$$a_x = -\omega^2 x = -\frac{k}{m}x$$

que es la ecuación (13.4) para el movimiento armónico simple. Esto confirma que es correcta la ecuación (13.13) para x en función del tiempo.

Ya antes deducimos geométricamente la ecuación (13.16), tomando la componente x del vector de aceleración del punto de referencia Q. Esto se hizo en la figura 13.6b y la ecuación (13.7) (recuerde que $\theta = \omega t + \phi$). Del mismo modo, podríamos haber derivado la ecuación (13.15) tomando la componente x del vector de velocidad de Q (figura 13.6b). Dejamos los detalles al lector (véase el problema 13.85).

Observe que la gráfica senoidal de desplazamiento contra tiempo (figura 13.12a) está desplazada un cuarto de periodo con respecto a la de velocidad contra tiempo (figura 13.12b) y medio periodo con respecto a la de aceleración contra tiempo (figura 13.12c). La figura 13.13 muestra porque ocurre así. Cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio y el desplazamiento es cero, la velocidad es $v_{máx}$ o bien $-v_{máx}$

(dependiendo de la dirección de movimiento) y la aceleración es cero. Cuando el cuerpo está en su desplazamiento máximo positivo ($x = +A$) o negativo ($x = -A$), la velocidad es cero y el cuerpo está momentáneamente en reposo. En estos puntos, la fuerza de restitución $F_x = -kx$ y la aceleración del cuerpo tienen su magnitud máxima. En $x = +A$ la aceleración es negativa e igual a $-a_{\text{máx}}$. En $x = -A$, la aceleración es positiva: $a_x = +a_{\text{máx}}$.

Si conocemos la posición y la velocidad iniciales x_0 y v_{0x} del cuerpo oscilante, podemos determinar la amplitud A y el ángulo de fase ϕ como sigue. v_{0x} es la velocidad inicial en $t = 0$; si sustituimos $v_x = v_{0x}$ y $t = 0$ en la ecuación (13.15), vemos que

$$v_{0x} = -\omega A \operatorname{sen}\phi \qquad (13.17)$$

Para calcular ϕ, divida la ecuación (13.17) entre la ecuación (13.14). Esto elimina A y produce una ecuación de la que podemos despejar ϕ:

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-\omega A \operatorname{sen}\phi}{A\cos\phi} = -\omega\tan\phi$$

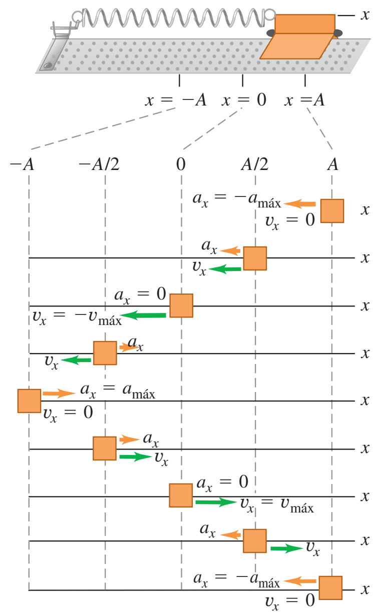
$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) \qquad \text{(ángulo de fase del MAS)} \qquad (13.18)$$

También es fácil calcular la amplitud A si conocemos x_0 y v_{0x}. Bosquejaremos la deducción y dejaremos los detalles al lector. Eleve al cuadrado la ecuación (13.14); luego divida la ecuación (13.17) entre ω, elévela al cuadrado y súmela al cuadrado de la ecuación (13.14). El miembro derecho será $A^2(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi)$, que es igual a A^2. El resultado final es

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}} \qquad \text{(amplitud del MAS)} \qquad (13.19)$$

Observe que si el cuerpo tiene tanto un desplazamiento inicial x_0 como una velocidad inicial v_{0x} distinta de cero, la amplitud A *no* es igual al desplazamiento inicial. Eso es lógico. Si el cuerpo parte de un x_0 positivo y se le imparte una velocidad positiva v_{0x}, llegará *más lejos* que x_0 antes de regresar.

13.13 Cómo varían la velocidad v_x y la aceleración a_x durante un ciclo en un MAS.



Estrategia para resolver problemas 13.1 Movimiento armónico simple I: Descripción del movimiento

MP

IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Un sistema oscilante tiene movimiento armónico simple (MAS) *únicamente* si la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento. Asegúrese de que esto se cumpla en la situación del problema antes de tratar de aplicar cualquiera de los resultados de esta sección. Como siempre, identifique las incógnitas.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Identifique las cantidades conocidas y desconocidas, y determine cuáles son las incógnitas.
2. Resulta útil distinguir dos clases de cantidades. Las *propiedades básicas* del sistema incluyen la masa m y la constante de fuerza k. También incluyen cantidades derivadas de m y k, como el periodo T, la frecuencia f y la frecuencia angular ω. Las *propiedades del movimiento* describen cómo se comporta el sistema cuando se pone en movimiento de una forma específica, e incluyen la amplitud A, la velocidad máxima $v_{\text{máx}}$, el ángulo de fase ϕ y los valores de x, v_x y a_x en un instante dado.
3. Si es necesario, defina un eje x como en la figura 13.13, con la posición de equilibrio en $x = 0$.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Use las ecuaciones dadas en las secciones 13.1 y 13.2 para obtener las incógnitas.
2. Si necesita calcular el ángulo de fase, tenga cuidado de expresarlo en radianes. La cantidad ωt de la ecuación (13.13) está naturalmente en radianes, por lo que ϕ debe estarlo también.
3. Si necesita hallar los valores de x, v_x y a_x en diversos instantes, use las ecuaciones (13.11), (13.15) y (13.16), respectivamente. Si se dan la posición x_0 y la velocidad inicial v_{0x}, se puede determinar el ángulo de fase y la amplitud a partir de las ecuaciones (13.18) y (13.19). Si el cuerpo tiene un desplazamiento inicial positivo x_0 pero velocidad inicial cero ($v_{0x} = 0$), la amplitud es $A = x_0$ y el ángulo de fase es $\phi = 0$. Si el cuerpo tiene velocidad inicial positiva v_{0x} pero ningún desplazamiento inicial ($x_0 = 0$), la amplitud es $A = v_{0x}/\omega$ y el ángulo de fase es $\phi = -\pi/2$.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe sus resultados para asegurarse de que sean congruentes. Por ejemplo, suponga que usó la posición y la velocidad iniciales para obtener expresiones generales para x y v_x en el instante t. Si sustituye $t = 0$ en estas expresiones, deberá obtener los valores correctos de x_0 y v_{0x}.

Ejemplo 13.3 Descripción del MAS

Volvamos al sistema de masa y resorte horizontal que consideramos en el ejemplo 13.2, con $k = 200$ N/m y $m = 0.50$ kg. Esta vez impartiremos al cuerpo un desplazamiento inicial de $+0.015$ m y una velocidad inicial de $+0.40$ m/s. *a*) Determine el periodo, la amplitud y el ángulo de fase del movimiento. *b*) Escriba ecuaciones para desplazamiento, velocidad y aceleración en función del tiempo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Igual que en el ejemplo 13.2, las oscilaciones son de un MAS y podemos usar las expresiones desarrolladas en esta sección.

PLANTEAR: Nos dan los valores de k, m, x_0 y v_{0x}. Con base en ellos, calcularemos las incógnitas T, A y ϕ y las expresiones para x, v_x y a_x en función del tiempo.

EJECUTAR: *a*) El periodo es exactamente el mismo del ejemplo 13.2, $T = 0.31$ s. En el movimiento armónico simple, el periodo no depende de la amplitud, sólo de los valores de k y m. En el ejemplo 13.2, determinamos que $\omega = 20$ rad/s, así que, por la ecuación (13.19),

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}} \\ &= \sqrt{(0.015\ \mathrm{m})^2 + \frac{(0.40\ \mathrm{m/s})^2}{(20\ \mathrm{rad/s})^2}} \\ &= 0.025\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Para obtener el ángulo de fase ϕ, usamos la ecuación (13.18):

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) \\ &= \arctan\left(-\frac{0.40\ \mathrm{m/s}}{(20\ \mathrm{rad/s})(0.015\ \mathrm{m})}\right) = -53^\circ = -0.93\ \mathrm{rad} \end{aligned}$$

b) El desplazamiento, la velocidad y la aceleración en cualquier instante están dados por las ecuaciones (13.13), (13.15) y (13.16), respectivamente. Sustituyendo los valores, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= (0.025\ \mathrm{m})\cos[(20\ \mathrm{rad/s})t - 0.93\ \mathrm{rad}] \\ v_x &= -(0.50\ \mathrm{m/s})\,\mathrm{sen}[(20\ \mathrm{rad/s})t - 0.93\ \mathrm{rad}] \\ a_x &= -(10\ \mathrm{m/s^2})\cos[(20\ \mathrm{rad/s})t - 0.93\ \mathrm{rad}] \end{aligned}$$

La velocidad varía senoidalmente entre -0.50 m/s y $+0.50$ m/s. La aceleración varía senoidalmente entre -10 m/s^2 y $+10$ m/s^2.

EVALUAR: Puede comprobar los resultados para x y v_x en función del tiempo sustituyendo $t = 0$ y evaluando el resultado. Deberá obtener $x = x_0 = 0.015$ m y $v_x = v_{0x} = 0.40$ m/s. ¿Es así?

Evalúe su comprensión de la sección 13.2 Se une un deslizador a un resorte, como se indica en la figura 13.13. Si el deslizador se mueve a $x = 0.10$ m y se suelta del reposo en el tiempo $t = 0$, oscilará con amplitud $A = 0.10$ m y ángulo de fase $\phi = 0$. *a*) Suponga ahora que en $t = 0$ el deslizador está en $x = 0.10$ m y se mueve a la derecha como se indica en la figura 13.13. En esta situación, la amplitud ¿es mayor, menor o igual que 0.10 m? El ángulo de fase ¿es mayor, menor o igual que cero? *b*) Suponga ahora que en $t = 0$ el deslizador está en $x = 0.10$ m y se mueve a la izquierda como se muestra en la figura 13.13. En esta situación, ¿la amplitud es mayor, menor o igual que 0.10 m? ¿El ángulo de fase es mayor, menor o igual que cero?

ActivPhysics ONLINE

9.3 Energía de vibración
9.4 Dos formas de medir la masa del joven Tarzán
9.6 Liberación de un esquiador que vibra I
9.7 Liberación de un esquiador que vibra II
9.8 Sistemas vibratorios de uno y dos resortes
9.9 Vibrojuego

13.3 Energía en el movimiento armónico simple

Podemos aprender aún más acerca del movimiento armónico simple usando consideraciones de energía. Examinemos otra vez el cuerpo que oscila en el extremo de un resorte en las figuras 13.2 y 13.3. Ya señalamos que la fuerza del resorte es la única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo. La fuerza ejercida por un resorte ideal es conservativa y las fuerzas verticales no efectúan trabajo, así que se *conserva* la energía mecánica total del sistema. También supondremos que la masa del resorte es despreciable.

La energía cinética del cuerpo es $K = \frac{1}{2}mv^2$ y la energía potencial del resorte es $U = \frac{1}{2}kx^2$, igual que en la sección 7.2. (Sería útil repasar esa sección.) No hay fuerzas no conservativas que efectúen trabajo, así que se conserva la energía mecánica total $E = K + U$:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \tag{13.20}$$

(Dado que el movimiento es unidimensional, $v^2 = v_x^2$.)

La energía mecánica total E también está relacionada directamente con la amplitud A del movimiento. Cuando el cuerpo llega al punto $x = A$, su desplazamiento es máximo con respecto al equilibrio, se detiene momentáneamente antes de volver hacia la posición de equilibrio. Es decir, cuando $x = A$ (o bien, $-A$), $v_x = 0$. Aquí, la energía es sólo potencial, y $E = \frac{1}{2}kA^2$. Puesto que E es constante, esta cantidad es igual a $\frac{1}{2}kA^2$ en cualquier otro punto. Combinando esta expresión con la ecuación (13.20), obtenemos

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante} \quad \text{(energía mecánica total en un MAS)} \tag{13.21}$$

Podemos verificar esta ecuación sustituyendo x y v_x de las ecuaciones (13.13) y (13.15), y usando $\omega^2 = k/m$ de la ecuación (13.9):

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m[-\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)]^2 + \frac{1}{2}k[A\cos(\omega t + \phi)]^2 \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$

(Recuerde que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.) Por lo tanto, nuestras expresiones para el desplazamiento y la velocidad en un MAS son congruentes con la conservación de la energía, como debe ser.

Podemos usar la ecuación (13.21) para calcular la velocidad v_x del cuerpo en cierto desplazamiento x:

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \tag{13.22}$$

El signo $\pm$ implica que, para un valor de x dado, el cuerpo se puede estar moviendo en cualquiera de las dos direcciones. Por ejemplo, cuando $x = \pm A/2$,

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - \left(\pm\frac{A}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{k}{m}}A$$

La ecuación (13.22) también muestra que la rapidez *máxima* $v_{máx}$ se da en $x = 0$. Utilizando la ecuación (13.10), $\omega = \sqrt{k/m}$, encontramos que

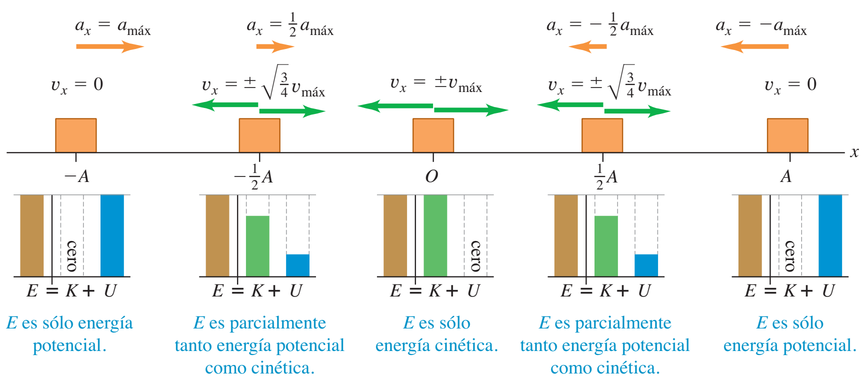
$$v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A \tag{13.23}$$

Esto concuerda con la ecuación (13.15), que mostró que v_x oscila entre $-\omega A$ y $+\omega A$.

Interpretación de E, K y U en el MAS

La figura 13.14 muestra las energías E, K y U en $x = 0$, $x = \pm A/2$ y $x = \pm A$. La figura 13.15 es una representación gráfica de la ecuación (13.21); la energía (cinética, potencial y total) se gráfica verticalmente, y la coordenada x, horizontalmente. La curva

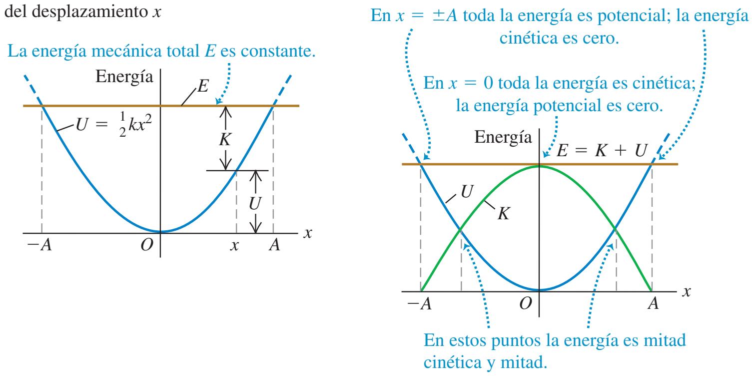
13.14 Gráfica de E, K y U contra desplazamiento en un MAS. La velocidad del cuerpo *no* es constante, de manera que las imágenes del cuerpo en posiciones equidistantes no están igualmente espaciadas en el tiempo.



13.15 Energía cinética K, energía potencial U y energía mecánica total E en función de la posición en un MAS. Para cada valor de x, la suma de K y U es igual al valor constante de E. ¿Puede usted demostrar que en $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}A$, la energía es mitad cinética y mitad potencial?

a) La energía potencial U y la energía mecánica total E para un cuerpo en un MAS en función del desplazamiento x

b) La misma gráfica que en **a)**, ahora muestra también la energía cinética K



parabólica de la figura 13.15a representa la energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$. La línea horizontal representa la energía mecánica total E, que es constante y no varía con x. En cualquier valor de x entre $-A$ y A, la distancia vertical entre el eje x y la parábola es U; dado que $E = K + U$, la distancia vertical restante hasta la línea horizontal es K. La figura 13.15b muestra tanto K como U en función de x. La línea horizontal para E interseca la curva de energía potencial en $x = -A$ y $x = A$, donde la energía es sólo potencial, la energía cinética es cero y el cuerpo está momentáneamente en reposo antes de invertir su dirección. Al oscilar el cuerpo entre $-A$ y A, la energía se transforma continuamente de potencial a cinética, y viceversa.

La figura 13.15a muestra la relación entre la amplitud A y la energía mecánica total correspondiente, $E = \frac{1}{2}kA^2$. Si tratáramos de hacer que x fuera mayor que A (o menor que $-A$), U sería mayor que E y K tendría que ser negativa. Esto es imposible, así que x no puede ser mayor que A ni menor que $-A$.

Estrategia para resolver problemas 13.2 Movimiento armónico simple II: Energía

La ecuación de energía (ecuación 13.21) es una relación alterna útil entre velocidad y posición, sobre todo cuando también se calculan cantidades de energía. Si el problema implica una relación entre posición, velocidad y aceleración sin referencia al tiempo, suele ser más fácil usar la ecuación (13.4) (de la segunda ley de Newton) o la (13.21) (de la conservación de la energía), que usar la expresión general para x, v_x y a_x en función de t [ecuaciones (13.13), (13.15) y (13.16), respectivamente]. Dado que en la ecuación de energía intervienen x^2 y v_x^2, no podemos conocer el signo de x ni de v_x; debemos inferirlo de la situación. Por ejemplo, si el cuerpo se mueve de la posición de equilibrio hacia al punto de desplazamiento positivo máximo, x y v_x serán positivas.

Ejemplo 13.4 Velocidad, aceleración y energía de un MAS

En la oscilación descrita en el ejemplo 13.2, $k = 200$ N/m, $m = 0.50$ kg y la masa oscilante se suelta del reposo en $x = 0.020$ m. *a*) Calcule las velocidades máxima y mínima que alcanza el cuerpo al oscilar. *b*) Calcule la aceleración máxima. *c*) Determine la velocidad y la aceleración cuando el cuerpo se ha movido a la mitad del camino hacia el centro desde su posición inicial. *d*) Determine las energías total, potencial y cinética en esta posición.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Observe que el problema se refiere al movimiento en diversas *posiciones* del movimiento, no en *instantes* específicos. Esto nos sugiere que podemos usar las relaciones de energía que deducimos en esta sección, despejando de ellas las incógnitas.

PLANTEAR: La figura 13.13 muestra que elegimos el eje x. El desplazamiento máximo con respecto al equilibrio es $A = 0.020$ m. En cualquier posición x, usaremos las ecuaciones (13.22) y (13.4) para obtener la velocidad v_x y la aceleración a_x, respectivamente. Teniendo la velocidad y la posición, usaremos la ecuación (13.21) para obtener las energías K, U y E.

EJECUTAR: *a*) La velocidad v_x para cualquier desplazamiento x está dada por la ecuación (13.22):

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

La velocidad máxima se da cuando el cuerpo se mueve hacia la derecha y pasa por la posición de equilibrio, donde $x = 0$:

$$v_x = v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}}(0.020\ \text{m}) = 0.40\ \text{m/s}$$

La velocidad mínima (es decir, la más negativa) ocurre cuando el cuerpo se mueve hacia la izquierda y pasa por $x = 0$; su valor es $-v_{\text{máx}} = -0.40$ m/s.

b) Por la ecuación (13.4),

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

La aceleración máxima (más positiva) se da en el valor más negativo de x: $x = -A$; por lo tanto,

$$a_{\text{máx}} = -\frac{k}{m}(-A) = -\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}(-0.020\ \text{m}) = 8.0\ \text{m/s}^2$$

La aceleración mínima (más negativa) es $-8.0\ \text{m/s}^2$ y ocurre en $x = +A = +0.020$ m.

c) En un punto a la mitad del camino hacia el centro desde la posición inicial, $x = A/2 = 0.010$ m. Por la ecuación (13.22),

$$v_x = -\sqrt{\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}}\sqrt{(0.020\ \text{m})^2 - (0.010\ \text{m})^2} = -0.35\ \text{m/s}$$

Elegimos la raíz cuadrada negativa porque el cuerpo se mueve de $x = A$ hacia $x = 0$. Por la ecuación (13.4),

$$a_x = -\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}(0.010\ \text{m}) = -4.0\ \text{m/s}^2$$

En este punto, la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo, así que la rapidez está aumentando. En la figura 13.14, se muestran las condiciones en $x = 0$, $\pm A/2$ y $\pm A$.

d) La energía total tiene el mismo valor en todos los puntos durante el movimiento:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0.020\ \text{m})^2 = 0.040\ \text{J}$$

La energía potencial es

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0.010\ \text{m})^2 = 0.010\ \text{J}$$

y la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}(0.50\ \text{kg})(-0.35\ \text{m/s})^2 = 0.030\ \text{J}$$

EVALUAR: En el punto $x = A/2$, la energía es una cuarta parte energía potencial y tres cuartas partes energía cinética. Puede comprobar este resultado examinando la figura 13.15b.

Ejemplo 13.5 Energía y momento lineal del MAS

Un bloque con masa M, conectado a un resorte horizontal con constante de fuerza k, se mueve en movimiento armónico simple con amplitud A_1. En el instante en que el bloque pasa por su posición de equilibrio, un trozo de masilla con masa m se deja caer verticalmente sobre el bloque desde una altura pequeña y se adhiere a él. *a*) Calcule la amplitud y el periodo ahora. *b*) Repita el inciso *a*) suponiendo que la masilla se deja caer sobre el bloque en un extremo de su trayectoria.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El problema implica el movimiento en una posición dada, no un instante dado, así que usaremos métodos de energía para resolverlo. Antes de que la masilla toque el bloque, la energía mecánica del bloque y resorte son constantes. El contacto entre la masilla y el bloque es un choque totalmente inelástico (véase la sección 8.3); se conserva la componente horizontal del momento lineal, pero disminuye la energía cinética. Después del choque, la energía mecánica se mantiene constante con un valor diferente.

PLANTEAR: La figura 13.16 muestra las coordenadas que elegimos. En cada parte, consideraremos qué sucede antes, durante y después del choque. Calculamos la amplitud A_2 después del choque considerando la energía final del sistema, y obtenemos el periodo T_2 después del choque empleando la relación entre periodo y masa.

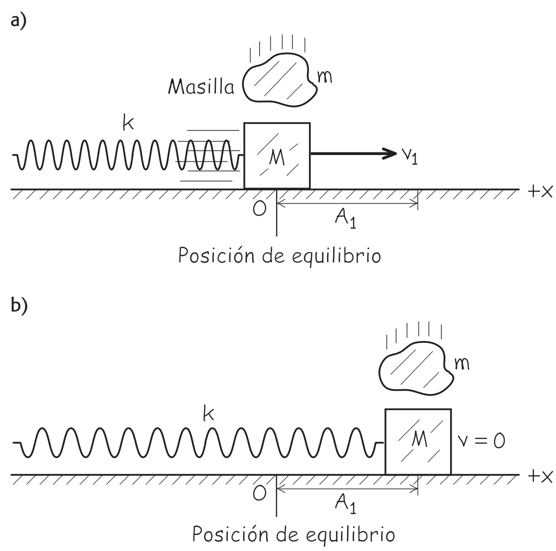
EJECUTAR: *a*) Antes del choque, la energía mecánica total del bloque y el resorte es $E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2$. Puesto que el bloque está en la posición de equilibrio, $U = 0$ y la energía es puramente cinética (figura 13.16a). Si v_1 es la rapidez del bloque en la posición de equilibrio, tenemos

$$E_1 = \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 \qquad \text{así que} \qquad v_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}A_1$$

Durante el choque, se conserva la componente x del momento lineal del sistema de bloque y masilla. (¿Por qué?) Justo antes del choque, esta componente es la suma de Mv_1 (para el bloque) y cero (para la masilla). Justo después del choque, el bloque y la masilla se mueven juntos con rapidez v_2, y su componente x del momento lineal combinada es $(M + m)v_2$. Por la conservación del momento lineal,

$$Mv_1 + 0 = (M + m)v_2 \qquad \text{así que} \qquad v_2 = \frac{M}{M + m}v_1$$

13.16 Nuestro diagrama para este problema.



continúa

El choque dura muy poco, así que poco después el bloque y la masilla aún están en la posición de equilibrio. La energía sigue siendo exclusivamente cinética, pero *menor* que antes del choque:

$$E_2 = \frac{1}{2}(M+m)v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{M+m}v_1^2 = \frac{M}{M+m}\left(\frac{1}{2}Mv_1^2\right)$$
$$= \left(\frac{M}{M+m}\right)E_1$$

Dado que E_2 es igual a $\frac{1}{2}kA_2^2$, donde A_2 es la amplitud después del choque, tenemos

$$\frac{1}{2}kA_2^2 = \left(\frac{M}{M+m}\right)\frac{1}{2}kA_1^2$$
$$A_2 = A_1\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

Cuanto mayor sea la masa m de la masilla, menor será la amplitud final.

Determinar el periodo de oscilación después del choque es la parte sencilla. Usando la ecuación (13.12), tenemos

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

b) Al caer la masilla sobre el bloque, éste está momentáneamente en reposo (figura 13.16b). La componente x del momento lineal es cero tanto antes como después del choque. El bloque tenía energía cinética cero justo antes del choque, y el bloque y la masilla tienen cero energía cinética inmediatamente después. Toda la energía es energía potencial almacenada en el resorte, por lo que la adición de la masa extra *no afecta* la energía mecánica. Es decir,

$$E_2 = E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2$$

y la amplitud después del choque es la misma ($A_2 = A_1$). El periodo sí cambia al agregarse la masilla; su valor no depende de cómo se agregó la masa, sólo de la masa total. Así, T_2 es el mismo que obtuvimos en el inciso *a*), $T_2 = 2\pi\sqrt{(M+m)/k}$.

EVALUAR: ¿Por qué se pierde energía en el inciso *a*) pero no en el *b*)? La diferencia es que, en el inciso *a*), la masilla se desliza contra el bloque en movimiento durante el choque, lo cual disipa energía por fricción cinética.

Evalúe su comprensión de la sección 13.3 *a*) Para duplicar la energía total de un sistema masa-resorte en oscilación, ¿en qué factor se debe aumentar la amplitud? i) 4; ii) 2; iii) $\sqrt{2} = 1.414$; iv) $\sqrt[4]{2} = 1.189$. *b*) ¿En qué factor cambiará la frecuencia como resultado de tal incremento de amplitud? i) 4; ii) 2; iii) $\sqrt{2} = 1.414$; iv) $\sqrt[4]{2} = 1.189$; v) no cambia.

MP

13.4 Aplicaciones del movimiento armónico simple

Hasta ahora, hemos examinado globalmente *una* situación donde hay movimiento armónico simple (MAS): un cuerpo conectado a un resorte ideal horizontal. No obstante, el MAS puede presentarse en cualquier sistema donde haya una fuerza de restitución que sea directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio, según la ecuación (13.3), $F_x = -kx$. Dicha fuerza se origina de diferentes maneras y en distintas situaciones, por lo que debe determinarse la constante de fuerza k para cada caso, examinando la fuerza neta que actúa sobre el sistema. Una vez hecho esto, es fácil calcular la frecuencia angular ω, la frecuencia f y el periodo T; basta con sustituir el valor de k en las ecuaciones (13.10), (13.11) y (13.12), respectivamente. Utilicemos estas ideas para examinar varios ejemplos de movimiento armónico simple.

MAS vertical

Suponga que colgamos un resorte con constante de fuerza k (figura 13.17a) y suspendemos de él un cuerpo de masa m. Las oscilaciones ahora serán verticales; ¿seguirán siendo MAS? En la figura 13.17b, el cuerpo cuelga en reposo, en equilibrio. En esta posición, el resorte se estira una distancia Δl apenas suficiente para que la fuerza vertical $k\,\Delta l$ del resorte sobre el cuerpo equilibre su peso mg:

$$k\,\Delta l = mg$$

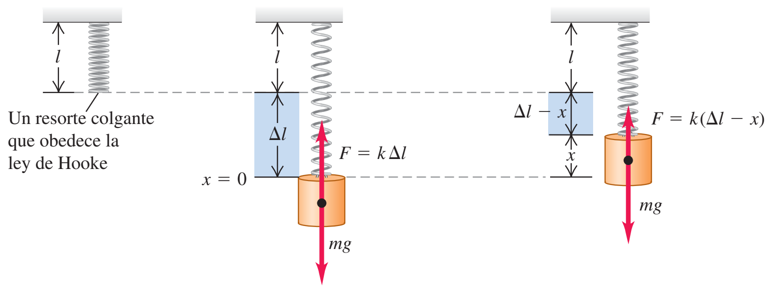
Sea $x = 0$ la posición de equilibrio, con la dirección $+x$ hacia arriba. Cuando el cuerpo está una distancia x *arriba* de su posición de equilibrio (figura 13.17c), la extensión del resorte es $\Delta l - x$. Entonces, la fuerza hacia arriba que ejerce sobre el cuerpo es $k(\Delta l - x)$, y la componente x total de la fuerza sobre el cuerpo es

$$F_{net} = k(\Delta l - x) + (-mg) = -kx$$

a)

b) Cuerpo suspendido del resorte. Está en equilibrio cuando el resorte está estirado lo suficiente como para que la fuerza hacia arriba del resorte tenga la misma magnitud que el peso del objeto.

c) Si el cuerpo se mueve con respecto al equilibrio, la fuerza neta sobre él será proporcional a su desplazamiento. Las oscilaciones son las de un MAS.

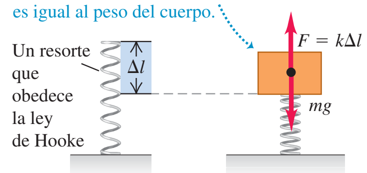


13.17 Un cuerpo se adhiere a un resorte colgante.

esto es, una fuerza total hacia abajo de magnitud kx. Asimismo, cuando el cuerpo está *debajo* de la posición de equilibrio, hay una fuerza total hacia arriba de magnitud kx. En ambos casos, hay una fuerza de restitución de magnitud kx. Si el cuerpo se pone en movimiento vertical, oscilará en MAS con la misma frecuencia angular que si fuera horizontal, $\omega = \sqrt{k/m}$. Por lo tanto, el MAS vertical no difiere en su esencia del horizontal. El único cambio real es que la posición de equilibrio $x = 0$ ya no corresponde al punto donde el resorte no está estirado. Las mismas ideas son válidas cuando un cuerpo con peso mg se coloca sobre un resorte compresible (figura 13.18) y lo comprime una distancia Δl.

13.18 Si el peso mg comprime el resorte una distancia Δl, la constante de fuerza es $k = mg/\Delta l$ y la frecuencia angular para un MAS vertical es $\omega = \sqrt{k/m}$; igual que si el cuerpo estuviera suspendido del resorte (véase la figura 13.17).

Se coloca un cuerpo en la parte superior del resorte, y está en equilibrio cuando la fuerza hacia arriba ejercida por el resorte comprimido es igual al peso del cuerpo.



Ejemplo 13.6 MAS vertical en un automóvil viejo

Los amortiguadores de un automóvil viejo con masa de 1000 kg están gastados. Cuando una persona de 980 N se sube lentamente al auto en su centro de gravedad, el auto baja 2.8 cm. Cuando el auto, con la persona a bordo, cae en un bache, comienza a oscilar verticalmente en MAS. Modele el auto y la persona como un solo cuerpo en un solo resorte, y calcule el periodo y la frecuencia de la oscilación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La situación es similar a la de la figura 13.18.

PLANTEAR: La compresión del resorte cuando se agrega el peso adicional nos da la constante de fuerza, que podemos usar para obtener el periodo y la frecuencia (las incógnitas).

EJECUTAR: Cuando la fuerza aumenta en 980 N, el resorte se comprime otros 0.028 m, y la coordenada x del auto cambia en -0.028 m. Por lo tanto, la constante de fuerza efectiva (incluido el efecto de toda la suspensión) es

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{980\ \text{N}}{-0.028\ \text{m}} = 3.5 \times 10^4\ \text{kg/s}^2$$

La masa de la persona es $w/g = (980\ \text{N})/(9.8\ \text{m/s}^2) = 100$ kg. La masa oscilante *total* es $m = 1000\ \text{kg} + 100\ \text{kg} = 1100$ kg. El periodo T es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1100\ \text{kg}}{3.5 \times 10^4\ \text{kg/s}^2}} = 1.11\ \text{s}$$

y la frecuencia es

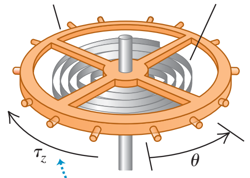
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.11\ \text{s}} = 0.90\ \text{Hz}$$

EVALUAR: Una oscilación persistente con un periodo aproximado de un segundo es muy molesta. El propósito de los amortiguadores es eliminar tales oscilaciones (véase la sección 13.7).

MAS angular

La figura 13.19 muestra la rueda de balance de un reloj mecánico. La rueda tiene un momento de inercia I alrededor de su eje. Un resorte en espiral ejerce una torca de restitución τ_z proporcional al desplazamiento angular θ con respecto a la posición de equilibrio. Escribimos $\tau_z = -\kappa\theta$, donde κ (la letra griega kappa) es una constante llamada *constante de torsión.* Empleando la analogía rotacional de la segunda

13.19 Rueda de balance de un reloj mecánico. El resorte ejerce una torca de restitución que es proporcional al desplazamiento angular θ, por lo tanto, el movimiento es MAS angular.



ley de Newton para un cuerpo rígido, $\Sigma\tau_z = I\alpha_z = I\,d^2\theta/dt^2$, la ecuación del movimiento es

$$-\kappa\theta = I\alpha \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

La forma de esta ecuación es idéntica a la de la ecuación (13.4) para la aceleración en movimiento armónico simple, sustituyendo x por θ y k/m por κ/I. Así, estamos tratando con una forma de movimiento armónico simple *angular*. La frecuencia angular ω y la frecuencia f están dadas por las ecuaciones (13.10) y (13.11), respectivamente, con la misma sustitución:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad \text{(MAS angular)} \tag{13.24}$$

El movimiento está descrito por la función

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \phi)$$

donde Θ (theta mayúscula) juega el rol de una amplitud angular.

Es bueno que el movimiento de una rueda de balance *sea* armónico simple. Si no lo fuera, la frecuencia podría depender de la amplitud, y el reloj se adelantaría o se retrasaría, al ir disminuyendo la tensión del resorte.

*Vibraciones de moléculas

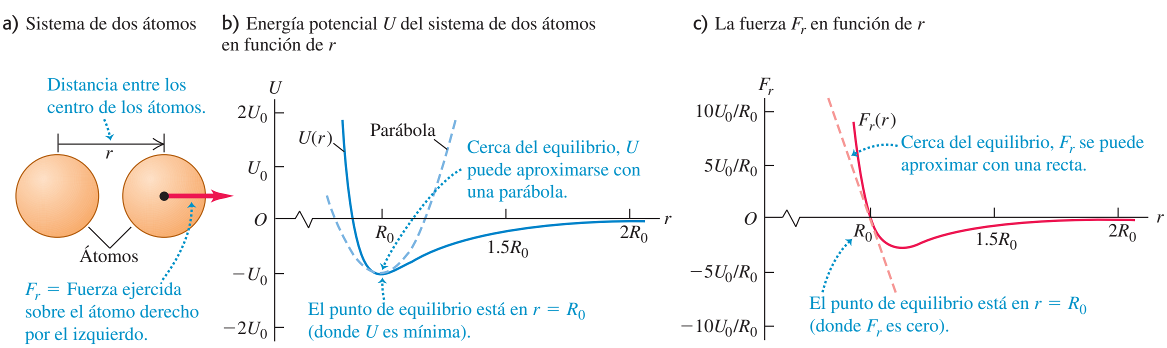
En la siguiente explicación de las vibraciones de las moléculas se usa el teorema binomial. Si el estudiante no está familiarizado con dicho teorema, le recomendamos estudiar la sección adecuada de su libro de matemáticas.

Si dos átomos están separados menos de unos cuantos diámetros atómicos, pueden ejercer fuerzas de atracción entre sí. Por otro lado, si los átomos están tan cercanos que se traslapan sus capas electrónicas, las fuerzas entre ellos son de repulsión. Entre estos límites, hay una separación de equilibrio donde los átomos forman una *molécula*. Si los átomos se desplazan ligeramente del equilibrio, oscilarán.

Como ejemplo, consideremos un tipo de interacción entre átomos llamada *interacción de Van der Waals*. Nuestro objetivo inmediato es estudiar las oscilaciones, así que no entraremos en detalles con respecto al origen de la interacción. Tomemos el centro de un átomo como el origen; el otro estará a una distancia r (figura 13.20a). La distancia de equilibrio entre los centros es $r = R_0$. Se ha observado experimentalmente que tal interacción se puede describir con la función de energía potencial

$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right] \tag{13.25}$$

13.20 a) Dos átomos con sus centros separados una distancia r. b) La energía potencial U de la interacción de Van der Waals en función de r. c) La fuerza F_r sobre el átomo derecho en función de r.



donde U_0 es una constante positiva con unidades de joules. Si los átomos están muy separados, $U = 0$; si están separados por la distancia de equilibrio $r = R_0$, $U = -U_0$. La fuerza sobre el segundo átomo es la derivada negativa de la ecuación (13.25):

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^6}{r^7}\right] = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^7\right] \qquad (13.26)$$

La energía potencial y la fuerza se grafican en las figuras 13.20b y 13.20c, respectivamente. La fuerza es positiva para $r < R_0$ y negativa para $r > R_0$, así que es una fuerza *de restitución*.

Examinemos la fuerza de restitución F_r en la ecuación (13.26). Introducimos la cantidad x para representar el desplazamiento con respecto al equilibrio:

$$x = r - R_0 \qquad \text{así que} \qquad r = R_0 + x$$

En términos de x, la fuerza F_r de la ecuación (13.26) se convierte en

$$\begin{aligned} F_r &= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^7\right] \\ &= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\frac{1}{(1+x/R_0)^{13}} - \frac{1}{(1+x/R_0)^7}\right] \end{aligned} \qquad (13.27)$$

Esto no se parece a la ley de Hooke, $F_x = -kx$, y podríamos precipitarnos a la conclusión de que las oscilaciones moleculares no pueden ser MAS. Sin embargo, limitémonos a oscilaciones de *amplitud pequeña*, de modo que el valor absoluto del desplazamiento x sea pequeño en comparación con R_0 y el valor absoluto de la razón x/R_0 sea mucho menor que 1. Ahora podemos simplificar la ecuación (13.27) usando el *teorema binomial*:

$$(1 + u)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2!}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^3 + \cdots \qquad (13.28)$$

Si $|u|$ es mucho menor que 1, cada término sucesivo de la ecuación (13.28) es mucho menor que el anterior, y podemos aproximar $(1 + u)^n$ con sólo los dos primeros términos. En la ecuación (13.27), u se reemplaza con x/R_0 y n es igual a -13 o -7, de manera que

$$\frac{1}{(1 + x/R_0)^{13}} = (1 + x/R_0)^{-13} \approx 1 + (-13)\frac{x}{R_0}$$

$$\frac{1}{(1 + x/R_0)^{7}} = (1 + x/R_0)^{-7} \approx 1 + (-7)\frac{x}{R_0}$$

$$F_r \approx 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(1 + (-13)\frac{x}{R_0}\right) - \left(1 + (-7)\frac{x}{R_0}\right)\right] = -\left(\frac{72U_0}{R_0^2}\right)x \qquad (13.29)$$

Ésta es la ley de Hooke con constante de fuerza $k = 72U_0/R_0^2$. (Observe que k tiene las unidades correctas, J/m^2 o bien N/m.) Así, las oscilaciones de las moléculas unidas por interacción de Van der Waals pueden ser movimiento armónico simple, si la amplitud es pequeña en comparación con R_0, haciendo válida la aproximación $|x/R_0| \ll 1$ empleada al deducir la ecuación (13.29).

También podemos demostrar que la energía potencial U de la ecuación (13.25) se puede escribir como $U \approx \frac{1}{2}kx^2 + C$, donde $C = -U_0$ y k es de nuevo igual a $72U_0/R_0^2$. La suma de una constante a la energía potencial no afecta la interpretación física, así que el sistema de dos átomos no es fundamentalmente distinto de una masa unida a un resorte horizontal, para el que $U = \frac{1}{2}kx^2$. Se deja la demostración al lector (véase el ejercicio 13.39).

Ejemplo 13.7 Vibración molecular

Dos átomos de argón pueden formar una molécula débilmente unida, Ar_2, gracias a una interacción de Van der Waals con $U_0 = 1.68 \times 10^{-21}$ J y $R_0 = 3.82 \times 10^{10}$ m. Calcule la frecuencia de oscilaciones pequeñas de un átomo alrededor de su posición de equilibrio.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Es como la situación que se muestra en la figura 13.20.

continúa

PLANTEAR: Puesto que las oscilaciones son pequeñas, podemos usar la ecuación (13.11) para obtener la frecuencia del movimiento armónico simple. La constante de fuerza está dada por la ecuación (13.29).

EJECUTAR: La constante de fuerza es

$$k = \frac{72U_0}{R_0^2} = \frac{72(1.68 \times 10^{-21}\ \mathrm{J})}{(3.82 \times 10^{-10}\ \mathrm{m})^2} = 0.829\ \mathrm{J/m^2} = 0.829\ \mathrm{N/m}$$

Ésta es comparable a la constante de fuerza de los resortes de juguete laxos, como Slinky®.

De la tabla periódica de los elementos (véase el Apéndice D), la masa atómica media del argón es

$$(39.948\ \mathrm{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg/1\ u}) = 6.63 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg}.$$

Si uno de los átomos está fijo y el otro oscila, la frecuencia de oscilación es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.829\ \mathrm{N/m}}{6.63 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg}}} = 5.63 \times 10^{11}\ \mathrm{Hz}$$

La masa oscilante es muy pequeña, así que incluso un resorte laxo causa oscilaciones muy rápidas.

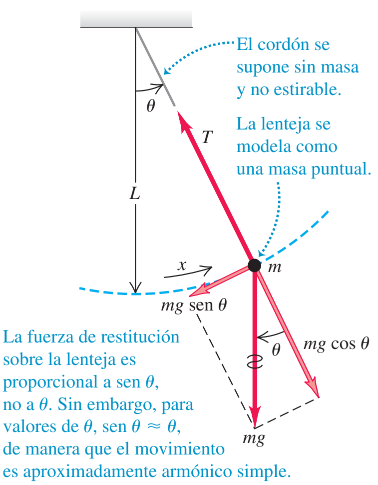
EVALUAR: Sin embargo, la f que calculamos no es del todo correcta. Si no actúa una fuerza externa neta sobre la molécula, su centro de masa (situado a la mitad de la distancia entre los dos átomos) no tiene aceleración. Para que haya aceleración, ambos átomos deben oscilar con la misma amplitud en direcciones opuestas. Nos podemos dar cuenta de esto sustituyendo m por $m/2$ en la expresión para f. (Véase el problema 13.86.) Esto aumenta f en un factor de $\sqrt{2}$, así que $f = \sqrt{2}(5.63 \times 10^{11}\ \mathrm{Hz}) = 7.96 \times 10^{11}\ \mathrm{Hz}$. Una complicación adicional es que, para la escala atómica, debemos usar mecánica cuántica, no newtoniana, para describir la oscilación y otros movimientos; felizmente, la frecuencia tiene el mismo valor en mecánica cuántica.

Evalúe su comprensión de la sección 13.4 Un bloque unido a un resorte ideal colgante oscila verticalmente con un periodo de 10 s en la Tierra. Si usted se lleva el bloque y el resorte a Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es sólo el 40% de la terrestre, ¿cuál será el nuevo periodo de oscilación? i) 10 s: ii) más de 10 s; iii) menos de 10 s.

13.21 Dinámica de un péndulo simple.

a) Un péndulo real

b) Un péndulo simple idealizado



13.5 El péndulo simple

Un **péndulo simple** es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de un cordón sin masa y no estirable. Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio (vertical), oscilará alrededor de dicha posición. Situaciones ordinarias, como una bola de demolición en el cable de una grúa o un niño en un columpio (figura 13.21a) pueden modelarse como péndulos simples.

La trayectoria de la masa puntual (llamada en ocasiones pesa o lenteja) no es una recta, sino el arco de un círculo de radio L igual a la longitud del cordón (figura 13.21b). Usamos como coordenada la distancia x medida sobre el arco. Si el movimiento es armónico simple, la fuerza de restitución debe ser directamente proporcional a x, o bien (porque $x = L\theta$), a θ. ¿Lo es?

En la figura 13.21b, representamos las fuerzas que actúan sobre la masa en términos de componentes tangencial y radial. La fuerza de restitución F_θ es la componente tangencial de la fuerza total:

$$F_\theta = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{13.30}$$

La fuerza de restitución se debe a la gravedad; la tensión T sólo actúa para hacer que la masa puntual describa un arco. La fuerza de restitución es proporcional *no* a θ sino a sen θ, así que el movimiento *no* es armónico simple. Sin embargo, si el ángulo θ es *pequeño*, sen θ es casi igual a θ en radianes (figura 13.22). Por ejemplo, si $\theta = 0.1$ rad (unos 6°), sen $\theta = 0.0998$, una diferencia de sólo 0.2%. Con esta aproximación, la ecuación (13.30) se convierte en

$$F_\theta = -mg\theta = -mg\frac{x}{L} \quad \text{o}$$

$$F_\theta = -\frac{mg}{L}x \tag{13.31}$$

La fuerza de restitución es entonces proporcional a la coordenada para desplazamientos pequeños, y la constante de fuerza es $k = mg/L$. Por la ecuación (13.10), la frecuencia angular ω de un péndulo simple con amplitud pequeña es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(péndulo simple, amplitud pequeña)} \tag{13.32}$$

Las relaciones de frecuencia y periodo correspondientes son

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(péndulo simple, amplitud pequeña)} \tag{13.33}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(péndulo simple, amplitud pequeña)} \tag{13.34}$$

? Observe que en estas expresiones no interviene la *masa* de la partícula. La razón es que la fuerza de restitución, una componente del peso de la partícula, es proporcional a m. Así, la masa aparece en *ambos* miembros de $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ y se cancela. (Se trata del principio físico, es el mismo que hace que dos cuerpos con diferente masa caigan con la misma aceleración en el vacío.) Si la oscilación es pequeña, el periodo de un péndulo para un valor dado de g depende sólo de su longitud.

La dependencia de L y g en las ecuaciones (13.32) a (13.34) es justo lo esperado. Un péndulo largo tiene un periodo más largo que uno corto. Si aumenta g, aumenta la fuerza de restitución, causando un aumento de la frecuencia y una disminución del periodo.

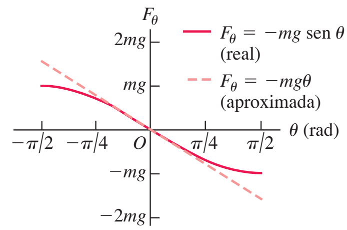
Destacamos nuevamente que el movimiento de un péndulo es *aproximadamente* armónico simple. Si la amplitud no es pequeña, la divergencia con respecto al MAS puede ser considerable. Pero, ¿qué tan pequeña es "pequeña"? El periodo puede expresarse con una serie infinita; si el desplazamiento angular máximo es Θ, el periodo T está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\operatorname{sen}^2\frac{\Theta}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}\operatorname{sen}^4\frac{\Theta}{2} + \cdots\right) \tag{13.35}$$

Podemos calcular el periodo con la precisión deseada tomando suficientes términos de la serie. Compruebe que, si $\Theta = 15°$ (a cada lado de la posición central), el periodo verdadero es más largo que la aproximación dada por la ecuación (13.34) en menos del 0.5%.

La utilidad del péndulo en relojes depende de que el periodo sea *prácticamente* independiente de la amplitud, siempre que ésta sea pequeña. Así, al perder impulso un reloj de péndulo y disminuir un poco la amplitud de las oscilaciones, la exactitud del reloj casi no se altera.

13.22 Si el desplazamiento angular θ es pequeño, la fuerza de restitución para un péndulo simple es $F_\theta = -mg\,\operatorname{sen}\theta$, aproximadamente igual a $-mg\theta$; es decir, es aproximadamente proporcional al desplazamiento θ; por lo tanto, para ángulos pequeños, las oscilaciones son armónicas simples.



ActivPhysics ONLINE
9.10 Frecuencia de péndulo
9.11 Arriesgado paseo con péndulo
9.12 Péndulo físico

Ejemplo 13.8 Un péndulo simple

Calcule el periodo y la frecuencia de un péndulo simple de 1.000 m de longitud en un lugar donde $g = 9.800\ \text{m/s}^2$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que éste es un péndulo simple, utilizaremos las ideas de esta sección.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (13.34) para determinar el periodo T de un péndulo a partir de su longitud, y la ecuación (13.1) para obtener la frecuencia f a partir de T.

EJECUTAR: Por las ecuaciones (13.34) y (13.1),

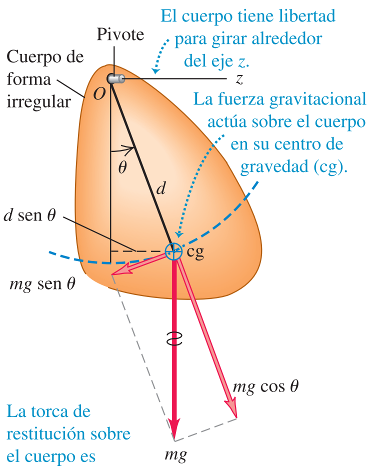
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.000\ \text{m}}{9.800\ \text{m/s}^2}} = 2.007\ \text{s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.007\text{s}} = 0.4983\ \text{Hz}$$

EVALUAR: El periodo es aproximadamente 2 s. De hecho, cuando se estableció el sistema métrico, el segundo se definió como la mitad del periodo de un péndulo de 1 m. Sin embargo, éste no fue un estándar muy adecuado para el tiempo, porque el valor de g varía según el lugar. Ya hablamos de estándares de tiempo más modernos en la sección 1.3.

Evalúe su comprensión de la sección 13.5 Cuando un cuerpo que oscila en un resorte horizontal pasa por su posición de equilibrio, su aceleración es cero (véase la figura 13.2b). Cuando la lenteja de un péndulo oscilatorio simple pasa por su posición de equilibrio, ¿su aceleración también es cero?

13.23 Dinámica de un péndulo físico.



La torca de restitución sobre el cuerpo es proporcional a sen θ, no a θ. Sin embargo, para valores de θ, sen $\theta \approx \theta$, de manera que el movimiento es aproximadamente armónico simple.

13.6 El péndulo físico

Un **péndulo físico** es cualquier péndulo *real* que usa un cuerpo de tamaño finito, en contraste con el modelo idealizado de péndulo *simple* en el que toda la masa se concentra en un punto. Si las oscilaciones son pequeñas, el análisis del movimiento de un péndulo real es tan sencillo como el de uno simple. La figura 13.23 muestra un cuerpo de forma irregular que puede girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por el punto O. En la posición de equilibrio, el centro de gravedad está directamente abajo del pivote; en la posición mostrada en la figura, el cuerpo está desplazado del equilibrio un ángulo θ que usamos como coordenada para el sistema. La distancia de O al centro de gravedad es d, el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación es I y la masa total es m. Cuando el cuerpo se desplaza como se muestra, el peso mg causa una torca de restitución

$$\tau_z = -(mg)(d\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad (13.36)$$

El signo negativo indica que la torca de restitución es en sentido horario, si el desplazamiento es en sentido antihoriario, y viceversa.

Si se suelta el cuerpo, oscila alrededor de su posición de equilibrio. El movimiento no es armónico simple porque la torca τ_z es proporcional a sen θ, no a θ. No obstante, si θ es pequeño, podemos aproximar sen θ con θ en radianes, tal como lo hicimos al analizar el péndulo simple. De esta manera, el movimiento es *aproximadamente* armónico simple. Con esta aproximación:

$$\tau_z = -(mgd)\theta$$

La ecuación de movimiento es $\sum \tau_z = I\alpha_z$, así que

$$-(mgd)\theta = I\alpha_z = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta \qquad (13.37)$$

Si comparamos esto con la ecuación (13.4), vemos que el papel de (k/m) en el sistema masa-resorte lo desempeña aquí la cantidad (mgd/I). Por lo tanto, la frecuencia angular está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad \text{(péndulo físico, amplitud pequeña)} \qquad (13.38)$$

La frecuencia f es $1/2\pi$ veces esto, y el periodo T es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad \text{(péndulo físico, amplitud pequeña)} \qquad (13.39)$$

La ecuación (13.39) es la base de un método común para determinar experimentalmente el momento de inercia de un cuerpo de forma compleja. Primero, se localiza el centro de gravedad del cuerpo por balanceo. Luego, se suspende el cuerpo de modo que oscile libremente alrededor de un eje, y se mide el periodo T de oscilaciones de amplitud pequeña. Por último, usando la ecuación (13.39) puede calcularse el momento de inercia I del cuerpo alrededor de ese eje a partir de T, la masa del cuerpo m y la distancia d del eje al centro de gravedad (véase el ejercicio 13.49). Los investigadores en biomecánica usan este método para calcular los momentos de inercia de las extremidades de un animal. Esta información es importante para analizar cómo camina un animal, como veremos en el segundo de los dos ejemplos que siguen.

Ejemplo 13.9 Péndulo físico contra péndulo simple

Suponga que el cuerpo de la figura 13.23 es una varilla uniforme de longitud L cuyo pivote se encuentra en un extremo. Calcule el periodo de su movimiento.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestra incógnita es el periodo de oscilación de una varilla, la cual actúa como un péndulo físico. Necesitamos conocer el momento de inercia de la varilla para hacerlo.

PLANTEAR: Usaremos la tabla 9.2 (sección 9.4) para hallar el momento de inercia de la varilla; luego, sustituiremos ese valor en la ecuación (13.39) para determinar el periodo de oscilación.

EJECUTAR: Por la tabla 9.2, el momento de inercia de una varilla uniforme respecto a un eje en su extremo es $I = \frac{1}{3}ML^2$. La distancia del pivote al centro del gravedad es $d = L/2$. Por la ecuación (13.39),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{MgL/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

EVALUAR: Si la varilla es un metro ($L = 1.00$ m) y $g = 9.80\ \text{m/s}^2$, entonces,

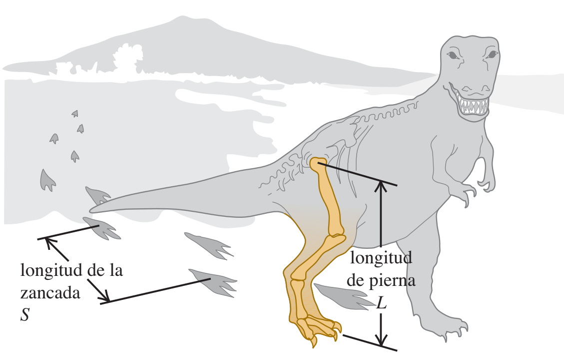
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(1.00\ \text{m})}{3(9.80\ \text{m/s}^2)}} = 1.64\ \text{s}$$

El periodo es menor en un factor de $\sqrt{2/3} = 0.816$ que el de un péndulo simple con la misma longitud, calculado en el ejemplo 13.8. El cg de la varilla está a la mitad de la distancia del pivote que el cg del péndulo simple, lo cual significa que el valor de la torca es de la mitad. Eso por sí mismo daría a la varilla un periodo $\sqrt{2}$ veces mayor que el del péndulo simple. Sin embargo, el momento de inercia de la varilla alrededor de un extremo, $I = \frac{1}{3}ML^2$, es un tercio del que tiene un péndulo simple, el cual por sí mismo haría que el periodo de la varilla fuera de $\sqrt{1/3}$ del que tiene un péndulo simple. El factor del momento de inercia es más importante en este caso, pues es la causa de que la varilla tenga un periodo más corto que en el péndulo simple.

Ejemplo 13.10 *Tyrannosaurus rex* y el péndulo físico

Todos los animales que caminan, incluido el ser humano, tienen un ritmo (paso) natural para caminar, un número de pasos por minuto, que es más cómodo que un ritmo más rápido o más lento. Suponga que este ritmo natural corresponde a la oscilación de las piernas como un péndulo físico. *a*) ¿Cómo depende el paso natural de la longitud L de la pierna, medida de la cadera al pie? Considere la pierna como una varilla uniforme con pivote en la cadera. *b*) Pruebas fósiles demuestran que el *Tyrannosaurus rex*, un dinosaurio bípedo que vivió hace 65 millones de años al final del periodo Cretácico, tenía una longitud de pierna $L = 3.1$ m y una longitud de paso (la distancia de una huella a la siguiente del mismo pie; figura 13.24) $S = 4.0$ m. Estime la rapidez con que caminaba el *T. rex*.

13.24 La rapidez al caminar del *Tyrannosaurus rex* se puede estimar a partir de la longitud de su pierna L y la de su zancada S.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestras incógnitas son *a*) la relación entre el ritmo al caminar y la longitud de la pierna, y *b*) la rapidez con que caminaba el *T. rex*.

PLANTEAR: Trataremos la pierna como un péndulo físico, con el periodo de oscilación que determinamos en el ejemplo 13.9. Cuanto más corto sea el periodo, el ritmo al caminar será más rápido. Podemos obtener la rapidez al caminar a partir del periodo y la longitud de la zancada.

EJECUTAR: *a*) Por el ejemplo 13.9, el periodo de oscilación de la pierna es $T = 2\pi\sqrt{2L/3g}$, que es proporcional a $\sqrt{L}$. Cada periodo (una oscilación de ida y vuelta de la pierna) corresponde a *dos* pasos, así que el ritmo al caminar en pasos por unidad de tiempo es dos veces la frecuencia de oscilación $f = 1/T$. Por lo tanto, el ritmo al caminar es proporcional a $1/\sqrt{L}$. Los animales con piernas cortas (un valor de L pequeño) como los ratones o perros chihuahueños caminan con ritmo rápido; los seres humanos, las jirafas y otros animales con piernas largas (un valor de L grande) caminan más lentamente.

b) Según nuestro modelo del ritmo del andar natural, el tiempo que el *T. rex* tarda en dar una zancada es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(3.1\ \text{m})}{3(9.8\ \text{m/s}^2)}} = 2.9\ \text{s}$$

La distancia que se mueve en este tiempo es la longitud de zancada S, así que la rapidez al andar es

$$v = \frac{S}{T} = \frac{4.0\ \text{m}}{2.9\ \text{s}} = 1.4\ \text{m/s} = 5.0\ \text{km/h} = 3.1\ \text{mi/h}$$

¡Ésta es más o menos la rapidez con que camina un ser humano!

continúa

EVALUAR: Nuestra estimación debe tener cierto error porque una varilla uniforme no es un buen modelo de una pierna. Las piernas de muchos animales, entre ellos el *T. rex* y las personas, no son uniformes; hay mucho más masa entre la cadera y la rodilla que entre ésta y el pie. Así, el centro de masa está a menos de $L/2$ de la cadera; una estimación razonable sería $L/4$. Por ello, el momento de inercia es *significativamente* menor que $ML^2/3$, tal vez del orden de $ML^2/15$. Pruebe estas cifras con el análisis del ejemplo 13.9; obtendrá un periodo de oscilación más corto y una rapidez al andar aún mayor para el *T. rex*.

Evalúe su comprensión de la sección 13.6 El centro de gravedad de un péndulo simple de masa m y longitud L se ubica en la posición de la lenteja del péndulo, a una distancia L del punto del pivote. El centro de gravedad de una varilla uniforme de la misma masa m y longitud $2L$ que pivotea en un extremo está también a una distancia L del punto del pivote. ¿Cómo se compara el periodo de esta varilla uniforme con el periodo de un péndulo simple? i) La varilla tiene un periodo más largo; ii) la varilla tiene un periodo más corto; iii) la varilla tiene el mismo periodo.

13.7 Oscilaciones amortiguadas

Los sistemas oscilantes idealizados que hasta ahora hemos visto no tienen fricción; no hay fuerzas no conservativas, la energía mecánica total es constante y un sistema puesto en movimiento sigue oscilando eternamente sin disminución de la amplitud.

13.25 Si una campana que oscila se deja de impulsar, tarde o temprano las fuerzas amortiguadoras (resistencia del aire y fricción en el punto de suspensión) harán que deje de oscilar.

Sin embargo, los sistemas del mundo real siempre tienen fuerzas disipadoras, y las oscilaciones cesan con el tiempo, a menos que un mecanismo reponga la energía mecánica disipada (figura 13.25). Un reloj mecánico de péndulo sigue andando porque la energía potencial almacenada en el resorte, o en un sistema de pesos colgantes, repone la energía mecánica perdida por fricción en el pivote y los engranes. A final de cuentas, el resorte perderá su tensión o los pesos llegarán al fondo de su trayecto. Al no haber más energía disponible, la amplitud de las oscilaciones del péndulo disminuirá, y el reloj se detendrá.

La disminución de la amplitud causada por fuerzas disipadoras se denomina **amortiguamiento**, y el movimiento correspondiente se llama **oscilación amortiguada**. El caso más sencillo para un análisis detallado es un oscilador armónico simple, con una fuerza de amortiguamiento por fricción directamente proporcional a la *velocidad* del cuerpo oscilante. Este comportamiento se observa en la fricción por flujo de fluidos viscosos, como en los amortiguadores de los automóviles o el deslizamiento entre superficies lubricadas con aceite. Así, sobre el cuerpo actúa una fuerza adicional debida a la fricción, $F_x = -bv_x$, donde $v_x = dx/dt$ es la velocidad y b es una constante que describe la intensidad de la fuerza amortiguadora. El signo menos indica que la fuerza siempre tiene dirección opuesta a la velocidad. La fuerza *total* que actúa sobre el cuerpo es, entonces,

$$\sum F_x = -kx - bv_x \qquad (13.40)$$

y la segunda ley de Newton para el sistema es

$$-kx - bv_x = ma_x \qquad \text{o bien,} \qquad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (13.41)$$

La ecuación (13.41) es una ecuación diferencial en x; sería igual a la ecuación (13.4), que da la aceleración en un MAS, si no fuera por el término adicional $-bdx/dt$. La resolución de esta ecuación es un problema sencillo en ecuaciones diferenciales, pero no entraremos aquí en detalles. Si la fuerza de amortiguamiento es relativamente pequeña, el movimiento está descrito por

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega' t + \phi) \quad \text{(oscilador con poco amortiguamiento)} \qquad (13.42)$$

La frecuencia angular de la oscilación ω' está dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad \text{(oscilador con poco amortiguamiento)} \qquad (13.43)$$

El lector puede verificar que la ecuación (13.42) es una solución de la ecuación (13.41) calculando la primera y segunda derivadas de x, sustituyéndolas en la ecuación (13.41) y verificando si los miembros derecho e izquierdo son iguales. Este procedimiento es sencillo aunque algo tedioso.

El movimiento descrito por la ecuación (13.42) difiere del caso no amortiguado en dos aspectos. Primero, la amplitud $Ae^{-(b/2m)t}$ no es constante, sino que disminuye con el tiempo a causa del factor exponencial decreciente $e^{-(b/2m)t}$. La figura 13.26 es una gráfica de la ecuación (13.42) para el caso $\phi = 0$; muestra que, cuanto mayor sea el valor de b, la amplitud disminuirá más rápidamente.

Segundo, la frecuencia angular ω', dada por la ecuación (13.43), ya no es igual a $\omega = \sqrt{k/m}$, sino un poco menor, y se vuelve cero si b es tan grande que

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad b = 2\sqrt{km} \tag{13.44}$$

Si se satisface la ecuación (13.44), la condición se denomina **amortiguamiento crítico**. El sistema ya no oscila, sino que vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar cuando se le desplaza y suelta.

Si b es mayor que $2\sqrt{km}$, la condición se denomina **sobreamortiguamiento**. Aquí tampoco hay oscilación, pero el sistema regresa al equilibrio más lentamente que con amortiguamiento crítico. En este caso, las soluciones de la ecuación (13.41) tienen la forma

$$x = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}$$

donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales y a_1 y a_2 son constantes determinadas por m, k y b.

Si b es menor que el valor crítico, como en la ecuación (13.42), la condición se llama **subamortiguamiento**. El sistema oscila con amplitud constantemente decreciente.

En un diapasón o cuerda de guitarra que vibra, normalmente queremos el mínimo amortiguamiento posible. En cambio, el amortiguamiento es benéfico en las oscilaciones de la suspensión de un automóvil. Los amortiguadores proveen una fuerza amortiguadora dependiente de la velocidad para que, cuando el auto pase por un bache, no siga rebotando eternamente (figura 13.27). Para optimizar la comodidad de los pasajeros, el sistema debería estar críticamente amortiguado o un poco subamortiguado. Demasiado amortiguamiento sería contraproducente: si la suspensión está sobreamortiguada y el auto cae en otro bache, justo después del primero, los resortes de la suspensión todavía estarán comprimidos un poco por el primer golpe, y no podrán absorber plenamente el impacto.

Energía en oscilaciones amortiguadas

En oscilaciones amortiguadas, la fuerza amortiguadora no es conservativa; la energía mecánica del sistema no es constante, sino que disminuye continuamente, acercándose a cero después de un tiempo largo. Si queremos deducir una expresión para la rapidez de cambio de energía, primero escribimos una expresión para la energía mecánica total E en cualquier instante:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Para calcular la rapidez de cambio de esta cantidad, la derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{dE}{dt} = mv_x\frac{dv_x}{dt} + kx\frac{dx}{dt}$$

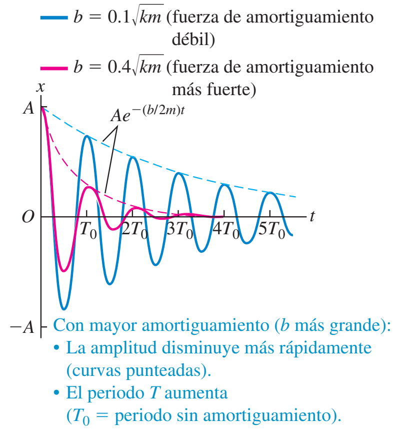
Pero $dv_x/dt = a_x$ y $dx/dt = v_x$, así que

$$\frac{dE}{dt} = v_x(ma_x + kx)$$

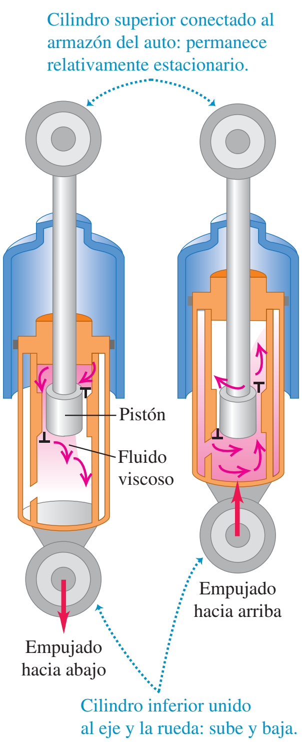
Por la ecuación (13.41), $ma_x + kx = -b\,dx/dt = -bv_x$, así que

$$\frac{dE}{dt} = v_x(-bv_x) = -bv_x^2 \qquad \text{(oscilaciones amortiguadoras)} \tag{13.45}$$

13.26 Gráfica de desplazamiento contra tiempo para un oscilador con poco amortiguamiento [véase la ecuación (13.42)] y ángulo de fase $\phi = 0$. Se muestran curvas para dos valores de la constante de amortiguamiento b.



13.27 Amortiguador de automóvil. El fluido viscoso causa una fuerza amortiguadora que depende de la velocidad relativa de los dos extremos de la unidad.



El miembro derecho de la ecuación (13.45) es **negativo**, siempre que el cuerpo que oscila esté en movimiento, sea la velocidad v_x positiva o negativa. Esto indica que conforme el cuerpo se mueve la energía disminuye, aunque no con rapidez uniforme. El término $-bv_x^2 = (-bv_x)v_x$ (fuerza multiplicada por velocidad) es la rapidez con que la fuerza amortiguadora efectúa trabajo (negativo) sobre el sistema (es decir, la *potencia* amortiguadora). Esto es igual a la rapidez de cambio de la energía mecánica total del sistema.

Se observa un comportamiento similar en circuitos eléctricos que contienen inductancia, capacitancia y resistencia. Hay una frecuencia de oscilación natural, y la resistencia desempeña el papel de la constante de amortiguamiento b. Estudiaremos estos circuitos con detalle en los capítulos 30 y 31.

Evalúe su comprensión de la sección 13.7 Un avión vuela en línea recta a una altitud constante. Si una ráfaga de viento golpea la punta del aparato y la eleva, la punta se balanceará verticalmente hasta que finalmente regrese a su altitud original. ¿Tales oscilaciones son i) no amortiguadas, ii) subamortiguadas, iii) críticamente amortiguadas o iv) sobreamortiguadas?

MP

13.8 Oscilaciones forzadas y resonancia

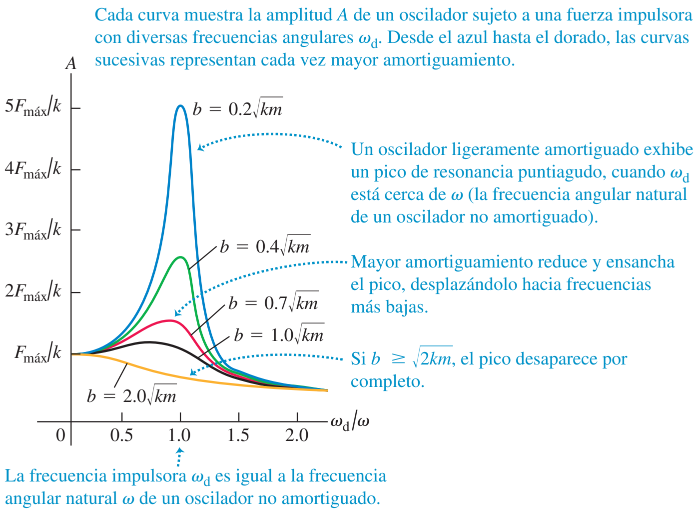
Un oscilador amortiguado aislado dejará de moverse tarde o temprano; no obstante, podemos mantener una oscilación de amplitud constante aplicando una fuerza que varíe con el tiempo periódica o cíclicamente, con periodo y frecuencia definidos. Por ejemplo, considere a su primo Morton en un columpio. Usted puede mantenerlo oscilando con amplitud constante dándole un empujoncito a la vez en cada ciclo. Llamamos a esta fuerza adicional **fuerza impulsora**.

Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

Si aplicamos una fuerza impulsora que varíe periódicamente con frecuencia angular ω_d a un oscilador armónico amortiguado, el movimiento resultante se llama **oscilación forzada**, o bien, *oscilación impulsada*, y es diferente del movimiento que se da cuando el sistema se desplaza del equilibrio y luego se deja suelto, en cuyo caso el sistema oscilará con una **frecuencia angular natural** ω' determinada por m, k y b, como en la ecuación (13.43). En una oscilación forzada, en cambio, la frecuencia angular con que la masa oscila es igual a la frecuencia angular impulsora, ω_d, la cual *no* tiene que ser igual a la frecuencia angular ω' con que el sistema oscilaría sin una fuerza impulsora. Si usted sujeta las cuerdas del columpio de Morton, puede obligar al columpio a oscilar con cualquier frecuencia que desee.

Suponga que se obliga al oscilador a vibrar con una frecuencia angular ω_d casi *igual* a la frecuencia angular ω' que tendría sin fuerza impulsora. ¿Qué sucede? El oscilador tiende naturalmente a oscilar con $\omega = \omega'$, y esperaríamos que la amplitud de la oscilación resultante fuera mayor que cuando las dos frecuencias son muy diferentes. Análisis y experimentos detallados muestran que esto es lo que sucede. El caso más fácil de analizar es una fuerza que varía *senoidalmente*, digamos $F(t) = F_{máx} \cos \omega_d t$. Si variamos la frecuencia ω_d de la fuerza impulsora, la amplitud de la oscilación forzada resultante variará de manera interesante (figura 13.28). Si hay muy poco amortiguamiento (b pequeño), la amplitud tendrá un pico marcado conforme la frecuencia angular impulsora ω_d se acerca a la frecuencia angular de oscilación natural ω'. Si se aumenta el amortiguamiento (b mayor), el pico se ensancha y se hace más bajo, desplazándose hacia menores frecuencias.

Podríamos deducir una expresión que muestre cómo la amplitud A de la oscilación forzada depende de la frecuencia de una fuerza impulsora senoidal, con valor máximo



13.28 Gráfica de la amplitud A de oscilación forzada en función de la frecuencia angular ω_d de la fuerza impulsora. El eje horizontal indica el cociente de ω_d y la frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$ de un oscilador no amortiguado. Cada curva tiene un valor distinto de la constante de amortiguamiento b.

$F_{máx}$. Ello implicaría resolver ecuaciones diferenciales para las que aún no estamos preparados, aunque el resultado sería:

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}} \quad \text{(amplitud de un oscilador impulsado)} \qquad (13.46)$$

Si $k - m\omega_d^2 = 0$, el primer término bajo el radical es cero, y A tiene un máximo cerca de $\omega_d = \sqrt{k/m}$. La altura de la curva en este punto es proporcional a $1/b$; cuanto menor sea el amortiguamiento, más alto será el pico. En el extremo de baja frecuencia, con $\omega_d = 0$, obtenemos $A = F_{máx}/k$. Esto corresponde a una fuerza *constante* $F_{máx}$ y un desplazamiento constante $A = F_{máx}/k$ con respecto al equilibrio, como esperaríamos.

Resonancia y sus consecuencias

El hecho de que haya un pico de amplitud a frecuencias impulsoras cercanas a la frecuencia natural del sistema se denomina **resonancia**. En física, abundan los ejemplos de resonancia; uno es aumentar las oscilaciones de un niño en un columpio, empujando con una frecuencia igual a la frecuencia natural del columpio. Un ruido vibratorio en un automóvil que se escucha sólo a cierta rapidez del motor o de rotación de las ruedas es un ejemplo muy conocido. Los altavoces de bajo precio a menudo emiten un retumbo o zumbido molesto, cuando una nota musical coincide con la frecuencia de resonancia del cono del altavoz o de la carcasa. En el capítulo 16 estudiaremos otros ejemplos de resonancia que implican sonido. La resonancia también ocurre en los circuitos eléctricos, como veremos en el capítulo 31. Un circuito sintonizado en una radio o un televisor responden vigorosamente a ondas con frecuencias cercanas a su frecuencia de resonancia, y aprovechamos esto para seleccionar una estación específica y rechazar las demás.

La resonancia en los sistemas mecánicos puede ser destructiva. Una compañía de soldados una vez destruyó un puente marchando sobre él al mismo paso; la frecuencia de sus pasos era cercana a una frecuencia de vibración natural del puente, y la oscilación resultante tuvo suficiente amplitud para desgarrar el puente. Desde entonces, se ha ordenado a los soldados que rompan el paso antes de cruzar un puente. Hace algunos años, las vibraciones de los motores de cierto avión tuvieron justo la frecuencia adecuada para resonar con las frecuencias naturales de las alas. Las oscilaciones iban creciendo y a veces se caían las alas.

Casi todo mundo ha visto la película del colapso del puente colgante de Tacoma Narrows en 1940 (figura 13.29). Esto suele citarse como ejemplo de resonancia impulsada por el viento, pero hay dudas al respecto. El viento no tenía que variar

13.29 El puente Tacoma Narrows se desplomó cuatro meses y seis días después de abrirse al tráfico. El claro principal tenía 2800 pies de longitud y 39 pies de ancho, con vigas de acero de 8 pies de altura para darle rigidez en ambos costados. La amplitud máxima de las vibraciones torsionales fue de 35°; la frecuencia fue de cerca de 0.2 Hz.

periódicamente con una frecuencia cercana a la natural del puente. El flujo de aire por el puente era turbulento, y se formaban remolinos en el aire con una frecuencia regular que dependía de la rapidez de flujo. Es concebible que esta frecuencia haya coincidido con una frecuencia natural del puente; sin embargo, la causa quizás haya sido algo más sutil llamado *oscilación autoexcitada*, donde las fuerzas aerodinámicas causadas por un viento *constante* al soplar sobre el puente tendieron a alejarlo más del equilibrio, en momentos en que ya se estaba alejando del equilibrio. Es como si tuviéramos una fuerza amortiguadora como el término $-bv_x$ de la ecuación (13.40), pero con el signo invertido. En vez de extraer energía mecánica del sistema, esta fuerza antiamortiguadora bombea energía a él, aumentando las oscilaciones hasta amplitudes destructivas. La ecuación diferencial aproximada es la (13.41) con el signo del término en b invertido, y la solución oscilante es la ecuación (13.42) con un signo *positivo* en el exponente. Puede verse que nos aguardan problemas. Los ingenieros han aprendido a estabilizar los puentes suspendidos, tanto estructural como aerodinámicamente, con la finalidad de evitar tales desastres.

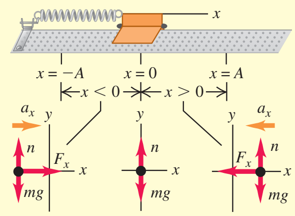
Evalúe su comprensión de la sección 13.8 Al impulsarse con una frecuencia cercana a su frecuencia natural, un oscilador con muy poco amortiguamiento tiene mucho mayor respuesta, que el mismo oscilador más amortiguamiento. Cuando se impulsa con una frecuencia que es mucho mayor o mucho menor que la frecuencia natural, ¿qué oscilador tendrá la mayor respuesta: i) aquel con muy poco amortiguamiento o ii) el que tiene más amortiguamiento?

CAPÍTULO 13 RESUMEN

Movimiento periódico: Un movimiento periódico se repite en un ciclo definido; se presenta siempre que un cuerpo tiene una posición de equilibrio estable y una fuerza de restitución que actúa cuando el cuerpo se desplaza del equilibrio. El periodo T es lo que tarda un ciclo. La frecuencia f es el número de ciclos por unidad de tiempo. La frecuencia angular ω es 2π veces la frecuencia. (Véase el ejemplo 13.1.)

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f} \tag{13.1}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{13.2}$$



Movimiento armónico simple: Si en el movimiento periódico la fuerza de restitución F_x es directamente proporcional al desplazamiento x, el movimiento se denomina armónico simple (MAS). En muchos casos, esta condición se satisface si el desplazamiento con respecto al equilibrio es pequeño. La frecuencia angular, la frecuencia y el periodo en un MAS no dependen de la amplitud, sólo dependen de la masa m y la constante de fuerza k. En un MAS, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración son funciones senoidales del tiempo; la amplitud A y el ángulo de fase ϕ de la oscilación están determinados por la posición y velocidad iniciales del cuerpo. (Véanse los ejemplos 13.2, 13.3, 13.6 y 13.7.)

$$F_x = -kx \tag{13.3}$$

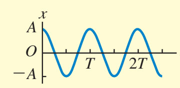
$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{k}{m}x \tag{13.4}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.10}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.11}$$

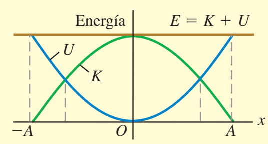
$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{13.12}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{13.13}$$



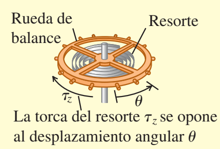
Energía en movimiento armónico simple: La energía se conserva en un MAS. La energía total se puede expresar en términos de la constante de fuerza k y la amplitud A. (Véanse los ejemplos 13.4 y 13.5.)

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante} \tag{13.21}$$



Movimiento armónico simple angular: En el MAS angular, la frecuencia y la frecuencia angular están relacionados con el momento de inercia I y la constante de torsión κ.

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \tag{13.24}$$

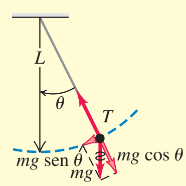


Péndulo simple: Un péndulo simple consiste en una masa puntual m en el extremo de un cordón sin masa de longitud L. Su movimiento es aproximadamente armónico simple si la amplitud es lo bastante pequeña; entonces, la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo dependen sólo de g y L, no de la masa ni de la amplitud. (Véase el ejemplo 13.8.)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{13.32}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{13.33}$$

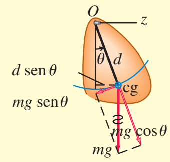
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{13.34}$$



Péndulo físico: Un péndulo físico es un cuerpo suspendido de un eje de rotación. La frecuencia angular y el periodo para oscilaciones de amplitud pequeña son independientes de la amplitud, aunque dependen de la masa m, la distancia d del eje de rotación a su centro de gravedad, y del momento de inercia I con respecto al eje. (Véanse los ejemplos 13.9 y 13.10.)

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (13.38)$$

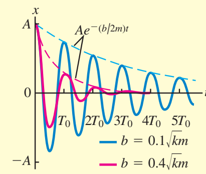
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (13.39)$$



Oscilaciones amortiguadas: Si a un oscilador armónico simple se le aplica una fuerza $F_x = -bv_x$ proporcional a la velocidad, el movimiento se denomina oscilación amortiguada. Si $b < 2\sqrt{km}$ (condición de subamortiguamiento), el sistema oscila con amplitud decreciente y una frecuencia angular ω' que es más baja de la que tendría sin amortiguamiento. Si $b = 2\sqrt{km}$ (condición de amortiguamiento crítico) o $b > 2\sqrt{km}$ (condición de sobreamortiguamiento), cuando el sistema se desplaza regresa a su posición de equilibrio sin oscilar.

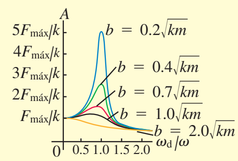
$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos\omega' t \quad (13.42)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (13.43)$$



Oscilaciones impulsadas y resonancia: Si a un oscilador armónico amortiguado se aplica una fuerza impulsora que varía senoidalmente, el movimiento resultante se denomina oscilación forzada. La amplitud es función de la frecuencia impulsora ω_d y alcanza un máximo con una frecuencia impulsora cercana a la frecuencia natural del sistema. Este comportamiento se denomina resonancia.

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}} \quad (13.46)$$



Términos clave

movimiento periódico (oscilación), *419*
desplazamiento, *420*
fuerza de restitución, *420*
amplitud, *420*
ciclo, *420*
periodo, *420*
frecuencia, *420*
frecuencia angular, *420*
movimiento armónico simple (MAS), *421*
oscilador armónico, *422*
círculo de referencia, *423*
fasor, *423*
ángulo de fase, *426*
péndulo simple, *436*
péndulo físico, *438*
amortiguamiento, *440*
oscilación amortiguada, *440*
amortiguamiento crítico, *441*
sobreamortiguamiento, *441*
subamortiguamiento, *441*
fuerza impulsora, *442*
oscilación forzada, *442*
frecuencia angular natural, *442*
resonancia, *443*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Ninguna de ellas; el reloj seguiría marcando correctamente el tiempo. Si la masa de su varilla es despreciable, el péndulo es simple y su periodo es independiente de la masa [véase la ecuación (13.34)]. Si se incluye la masa de la varilla, se trata de un péndulo físico. Un aumento de su masa m al doble también duplica su momento de inercia I, así que la razón I/m no cambia y el periodo $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$ [ecuación (13.39)] sigue siendo el mismo.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

13.1 Respuestas: ***a)*** $x < 0$**,** ***b)*** $x > 0$**,** ***c)*** $x < 0$**,** ***d)*** $x > 0$**,** ***e)*** $x = 0$**,** ***f)*** $x > 0$ La figura 13.2 muestra que la componente x de la fuerza total F_x y la aceleración a_x son ambas positivas cuando $x < 0$ (así que el cuerpo se desplaza hacia la izquierda y el resorte se comprime); mientras que F_x y a_x son ambas negativas cuando $x > 0$ (así que el cuerpo se desplaza hacia la derecha y el resorte se estira). Por lo tanto, F_x y a_x siempre tienen signos *opuestos*. Esto es válido si el objeto se mueve a la derecha ($v_x > 0$), a la izquierda ($v_x < 0$), o no se mueve ($v_x = 0$), ya que la fuerza ejercida por el resorte depende de si se comprime o se estira, y con qué distancia. Esto explica las respuestas *a)* a *e)*. Si la aceleración es cero como en *f)*, la fuerza total también debe ser cero y por ello el resorte debe estar relajado: $x = 0$.

13.2 Respuestas: ***a)*** $A > 0.10$ **m,** $\phi < 0$**;** ***b)*** $A > 0.10$ **m,** $\phi > 0$ En ambas situaciones, la velocidad v_{0x} inicial ($t = 0$) no es cero, de manera que de la ecuación (13.19) la amplitud $A = \sqrt{x_0^2 + (v_{0x}^2/\omega^2)}$ es mayor que la coordenada inicial $x_0 = 0.10$ m. A partir de la ecuación (13.18), el ángulo de fase es $\phi = \arctan(-v_{0x}/\omega x_0)$, el cual es positivo si la cantidad $-v_{0x}/\omega x_0$ (el argumento de la función arcotangente) es positivo, y es negativo si $-v_{0x}/\omega x_0$ es negativo. En el inciso *a)* x_0 y v_{0x} son ambos positivos, así que $-v_{0x}/\omega x_0 < 0$ y $\phi < 0$. En el inciso *b)* x_0 es positivo y v_{0x} es negativo, por lo que $-v_{0x}/\omega x_0 > 0$ y $\phi > 0$.

13.3 Respuestas: a) iii), b) v) Para aumentar la energía total $E = \frac{1}{2}kA^2$ en un factor de 2, la amplitud A debe aumentar en un factor de $\sqrt{2}$. Puesto que es MAS, un cambio de amplitud no afecta la frecuencia.

13.4 Respuesta: i) El periodo de oscilación de un cuerpo de masa m unido a un resorte colgante de constante de fuerza k está dado por $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, la misma expresión que para el cuerpo unido al resorte horizontal. Ni m ni k cambian cuando el aparato se lleva a Marte, por lo que no cambia el periodo. La única diferencia es que en el equilibrio, el resorte se estirará una distancia más corta en Marte que en la Tierra, debido a la gravedad más débil.

13.5 Respuesta: no Al igual que para un objeto que oscila en un resorte, en la posición de equilibrio la *rapidez* de la lenteja del péndulo no cambia instantáneamente (es donde la rapidez es máxima, así que su derivada en este tiempo es cero). Sin embargo, la *dirección* del movimiento es variable porque la lenteja del péndulo sigue una trayectoria circular. Por ello, la lenteja debe tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria y hacia el centro del círculo (véase la sección 3.4). Para originar esta aceleración en la posición de equilibrio cuando el cordón es vertical, la fuerza de tensión hacia arriba en esta posición debe ser mayor que el peso de la lenteja. Esto provoca una fuerza total hacia arriba sobre la lenteja y una aceleración hacia arriba y al centro de la trayectoria circular.

13.6 Respuesta: i) El periodo de un péndulo físico está dado por la ecuación (13.39), $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$. La distancia $d = L$ desde el pivote hasta el centro de gravedad es la misma tanto para la varilla como para el péndulo simple, cuando la masa es m. Esto significa que para cualquier ángulo de desplazamiento θ actúa la misma torca de restitución sobre la varilla y sobre el péndulo simple. Sin embargo, la varilla tiene un momento de inercia mayor: $I_{\text{varilla}} = \frac{1}{3}m(2L)^2 = \frac{4}{3}mL^2$ e $I_{\text{simple}} = mL^2$ (toda la masa del péndulo está a una distancia L del pivote). Por lo tanto, la varilla tiene un periodo mayor.

13.7 Respuesta: ii) Las oscilaciones son subamortiguadas con una amplitud decreciente en cada ciclo de oscilación, como las que se grafican en la figura 13.26. Si las oscilaciones fueran no amortiguadas, continuarían con la misma amplitud indefinidamente. Si fueran críticamente amortiguadas, la punta no se balancearía verticalmente, sino que suavemente regresaría a su posición de equilibrio original sin sobreamortiguamiento.

13.8 Respuesta: i) La figura 13.28 muestra que la curva de amplitud contra frecuencia impulsora se mueve hacia arriba con *todas* las frecuencias, conforme el valor de la constante de amortiguamiento b disminuye. Así, para valores fijos de k y m, el oscilador con el amortiguamiento mínimo (el menor valor de b) tendrá la respuesta más grande en cualquier frecuencia impulsora.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P13.1. Un objeto se mueve con MAS de amplitud A en el extremo de un resorte. Si la amplitud se duplica, ¿qué sucede con la distancia total que el objeto recorre en un periodo? ¿Qué sucede con el periodo? ¿Qué sucede con la rapidez máxima del objeto? Analice la relación entre estas respuestas.

P13.2. Piense en varios ejemplos cotidianos de movimiento que sea, al menos, aproximadamente armónico simple. ¿Cómo difiere cada uno del MAS?

P13.3. ¿Un diapasón u otro instrumento de afinación similar tiene MAS? ¿Por qué es algo esencial para los músicos?

P13.4. Una caja que contiene un guijarro se conecta a un resorte horizontal ideal y oscila sobre una mesa de aire sin fricción. Cuando la caja ha alcanzado su distancia máxima a partir del punto de equilibrio, repentinamente el guijarro se sale por arriba sin perturbar la caja. ¿Las siguientes características del movimiento aumentarán, disminuirán o permanecerán igual en el movimiento subsecuente de la caja? Justifique cada respuesta. *a*) Frecuencia, *b*) periodo; *c*) amplitud; *d*) la energía cinética máxima de la caja; *e*) la rapidez máxima de la caja.

P13.5. Si un resorte uniforme se corta a la mitad, ¿qué constante de fuerza tendrá cada mitad? Justifique su respuesta. ¿Cómo diferiría la frecuencia del MAS usando la misma masa y medio resorte, en vez del resorte completo?

P13.6. En el análisis del MAS de este capítulo se despreció la masa del resorte. ¿Cómo cambia esta masa las características del movimiento?

P13.7. Dos deslizadores idénticos en un riel de aire están conectados por un resorte ideal. ¿Podría tal sistema ser un MAS? Explique su respuesta. ¿Cómo sería el periodo en comparación con el de un solo deslizador unido a un resorte, donde el otro extremo está unido rígidamente a un objeto estacionario? Explique su respuesta.

P13.8. Imagine que lo capturan unos extraterrestres, lo meten en su nave y lo duermen con un sedante. Tiempo después, despierta y se encuentra encerrado en un compartimento pequeño sin ventanas. Lo único que le dejaron es su reloj digital, su anillo escolar y su largo collar de cadena de plata. Explique cómo podría determinar si todavía estuviera en la Tierra o si habría sido transportado a Marte.

P13.9. El sistema de la figura 13.17 se monta en un elevador. ¿Qué le sucede al periodo del movimiento (aumenta, disminuye o no cambia), cuando el elevador *a*) acelera hacia arriba a 5.0 m/s^2; *b*) se mueve hacia arriba a 5.0 m/s constantes; *c*) acelera hacia abajo a 5.0 m/s^2? Justifique su respuesta.

P13.10. Si un péndulo tiene un periodo de 2.5 s en la Tierra, ¿qué periodo tendría en una estación espacial en órbita terrestre? Si una masa colgada de un resorte vertical tiene un periodo de 5.0 s en la Tierra, ¿qué periodo tendrá en la estación espacial? Justifique sus respuestas.

P13.11. Un péndulo simple se monta en un elevador. ¿Qué le sucede al periodo del péndulo (aumenta, disminuye o no cambia), cuando el elevador *a*) acelera hacia arriba a 5.0 m/s^2; *b*) se mueve hacia arriba a 5.0 m/s constantes; *c*) acelera hacia abajo a 5.0 m/s^2; *d*) acelera hacia abajo a 9.8 m/s^2? Justifique sus respuestas.

P13.12. ¿Qué debe hacerse a la longitud del cordón de un péndulo simple para *a*) duplicar su frecuencia, *b*) duplicar su periodo, *c*) duplicar su frecuencia angular?

P13.13. Si un reloj de péndulo se sube a la cima de una montaña, ¿se adelanta o se atrasa? Explique, suponiendo que marca la hora correcta a menor altitud.

P13.14. Si la amplitud de un péndulo simple aumenta, ¿debería aumentar o disminuir su periodo? Mencione un argumento cualitativo; no se base en la ecuación (13.35). ¿Su argumento también es válido para un péndulo físico?

P13.15. ¿Porqué los perros pequeños (como los chihuahueños) caminan con zancadas más rápidas que los perros grandes (como los daneses)?

P13.16. ¿En qué punto del movimiento de un péndulo simple es máxima la tensión en el cordón? ¿Y mínima? En cada caso, explique su razonamiento.

P13.17. ¿Un estándar de tiempo podría basarse en el periodo de cierto péndulo estándar? ¿Qué ventajas y desventajas tendría tal estándar con respecto al estándar actual descrito en la sección 1.3?

P13.18. Para un péndulo simple, diferencie claramente entre ω (la velocidad angular) y ω la frecuencia angular). ¿Cuál es constante y cuál es variable?

P13.19. Un deslizador está conectado a un resorte ideal fijo y oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción. Se coloca una moneda encima del deslizador y oscila con éste. ¿En qué puntos del movimiento es máxima la fuerza de fricción sobre la moneda? ¿En qué puntos es mínima? Justifique sus respuestas.

P13.20. Al diseñar estructuras en una región de alta sismicidad, ¿qué relación debe haber entre las frecuencias naturales de oscilación de una estructura y las frecuencias típicas de terremoto? ¿Por qué? ¿La estructura debe tener mucho o poco amortiguamiento?

Ejercicios

Sección 13.1 Descripción de la oscilación

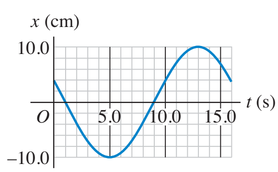
13.1. Una cuerda de piano produce una nota la medio vibrando primordialmente a 220 Hz. *a*) Calcule su periodo y frecuencia angular. *b*) Calcule el periodo y la frecuencia angular de una soprano que canta un la una octava más arriba, que tiene el doble de la frecuencia de la cuerda de piano.

13.2. Si un objeto en una superficie horizontal sin fricción se une a un resorte, se desplaza y después se suelta, oscilará. Si se desplaza 0.120 m de su posición de equilibrio y se suelta con rapidez inicial cero, después de 0.800 s su desplazamiento es de 0.120 m en el lado opuesto, habiendo pasado la posición de equilibrio una vez durante este intervalo. Calcule *a*) la amplitud, *b*) el periodo y *c*) la frecuencia.

13.3. La punta de un diapasón efectúa 440 vibraciones completas en 0.500 s. Calcule la frecuencia angular y el periodo del movimiento.

13.4. En la figura 13.30 se muestra el desplazamiento de un objeto oscilante en función del tiempo. Calcule *a*) la frecuencia, *b*) la amplitud, *c*) el periodo y *d*) la frecuencia angular de este movimiento.

Figura **13.30** Ejercicio 13.4.



Sección 13.2 Movimiento armónico simple

13.5. Una pieza de una máquina está en MAS con frecuencia de 5.00 Hz y amplitud de 1.80 cm. ¿Cuánto tarda la pieza en ir de $x = 0$ a $x = -1.80$ cm?

13.6. En un laboratorio de física, se conecta un deslizador de riel de aire de 0.200 kg al extremo de un resorte ideal de masa despreciable y se pone a oscilar. El tiempo transcurrido entre la primera vez que el deslizador pasa por la posición de equilibrio y la segunda vez que pasa por este punto es de 2.60 s. Determine la constante de fuerza del resorte.

13.7. Un cuerpo de masa desconocida se une a un resorte ideal con constante de fuerza de 120 N/m. Se observa que vibra con una frecuencia de 6.00 Hz. Calcule *a*) el periodo del movimiento; *b*) la frecuencia angular; y *c*) la masa del cuerpo.

13.8. Cuando una masa de 0.750 kg oscila en un resorte ideal, la frecuencia es de 1.33 Hz. *a*) ¿Cuál será la frecuencia si se agregan 0.220 kg a la masa original, y *b*) y si se restan de la masa original? Intente resolver este problema *sin* calcular la constante de fuerza del resorte.

13.9. Un oscilador armónico tiene una masa de 0.500 kg unida a un resorte ideal con constante de fuerza de 140 N/m. Calcule *a*) el periodo, *b*) la frecuencia y *c*) la frecuencia angular de las oscilaciones.

13.10. Tirón. Una cuerda de guitarra vibra con una frecuencia de 440 Hz. Un punto en su centro se mueve en MAS con amplitud de 3.0 mm y ángulo de fase cero. *a*) Escriba una ecuación para la posición del centro de la cuerda en función del tiempo. *b*) ¿Qué magnitud máxima tienen la velocidad y la aceleración del centro de la cuerda? *c*) La derivada de la aceleración con respecto al tiempo es una cantidad llamada *tirón*. Escriba una ecuación para el tirón del centro de la cuerda en función del tiempo, y calcule el valor máximo de la magnitud del tirón.

13.11. Un bloque de 2.00 kg, que se desliza sin fricción, se conecta a un resorte ideal con constante de fuerza de 300 N/m. En $t = 0$, el resorte no está estirado ni comprimido, y el bloque se mueve en la dirección negativa a 12.0 m/s. Calcule *a*) la amplitud y *b*) el ángulo de fase. *c*) Escriba una ecuación para la posición en función del tiempo.

13.12. Repita el ejercicio 13.11, pero suponga que en $t = 0$ el bloque tiene una velocidad de -4.00 m/s y un desplazamiento de $+0.200$ m.

13.13. La punta de la aguja de una máquina de coser se mueve en MAS, sobre el eje x con una frecuencia de 2.5 Hz. En $t = 0$, sus componentes de posición y velocidad son, respectivamente, $+1.1$ cm y -15 cm/s. *a*) Calcule la componente de aceleración de la aguja en $t = 0$. *b*) Escriba ecuaciones para las componentes de posición, velocidad y aceleración de la punta en función del tiempo.

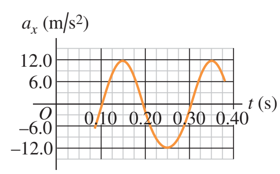
13.14. Un objeto está en MAS con periodo de 1.200 s y una amplitud de 0.600 m. En $t = 0$, el objeto está en $x = 0$. ¿A qué distancia está el objeto de la posición de equilibrio cuando $t = 0.480$ s?

13.15. Peso de los astronautas. Este procedimiento se utiliza realmente para “pesar” a los astronautas en el espacio. Se une una silla de 42.5 kg a un resorte y se le deja oscilar cuando está vacía, la silla tarda 1.30 s en efectuar una vibración completa. En cambio, con un astronauta sentado en ella, sin tocar el piso con sus pies, la silla tarda 2.54 s en completar un ciclo. ¿Cuál debe ser la masa del astronauta?

13.16. Un objeto de 0.400 kg en MAS tiene $a_x = -2.70$ m/s^2 cuando $x = 0.300$ m. ¿Cuánto tarda una oscilación?

13.17. Sobre una pista de aire horizontal sin fricción, un deslizador oscila en el extremo de un resorte ideal, cuya constante de fuerza es 2.50 N/cm. En la figura 13.31 la gráfica muestra la aceleración del deslizador en función del tiempo. Calcule *a*) la masa del deslizador; *b*) el desplazamiento máximo del deslizador desde el punto de equilibrio; *c*) la fuerza máxima que el resorte ejerce sobre el deslizador.

Figura **13.31** Ejercicio 13.17.



13.18. La velocidad de una masa de 0.500 kg en un resorte está dada en función del tiempo por $v_x(t) = (3.60\ \text{cm/s})\,\text{sen}[(4.71\ \text{s}^{-1})t - \pi/2]$. Calcule *a*) el periodo, *b*) la amplitud, *c*) la aceleración máxima de la masa y *d*) la constante de fuerza del resorte.

13.19. El desplazamiento en función del tiempo de una masa de 1.50 kg en un resorte está dado por la ecuación

$$x(t) = (7.40\ \text{cm})\cos[(4.16\ \text{s}^{-1})t - 2.42].$$

Calcule *a*) el tiempo que tarda una vibración completa; *b*) la constante de fuerza del resorte; *c*) la rapidez máxima de la masa; *d*) la fuerza máxima que actúa sobre la masa; *e*) la posición, rapidez y aceleración de la masa en $t = 1.00$ s; *f*) y la fuerza que actúa sobre la masa en ese momento.

13.20. Un objeto está en MAS con periodo de 0.300 s y una amplitud de 6.00 cm. En $t = 0$, el objeto está instantáneamente en reposo en $x = 6.00$ cm. Calcule el tiempo que el objeto tarda en ir de $x = 6.00$ cm a $x = -1.50$ cm.

Sección 13.3 Energía en el movimiento armónico simple

13.21. Las puntas de un diapasón rotulado con 392 Hz están vibrando con una amplitud de 0.600 mm. *a*) ¿Qué rapidez máxima tiene una punta? *b*) Una mosca común (*Musca domestica*) con masa de 0.0270 g está sujeta en el extremo de una de las puntas. Al vibrar la punta, ¿qué energía cinética máxima tiene la mosca? Suponga que el efecto de la masa de la mosca sobre la frecuencia de oscilación es despreciable.

13.22. Un oscilador armónico tiene frecuencia angular ω y amplitud A. *a*) Calcule la magnitud del desplazamiento y de la velocidad cuando la energía potencial elástica es igual a la energía cinética. (Suponga que $U = 0$ en el equilibrio.) *b*) ¿Cuántas veces sucede eso en cada ciclo? ¿Cada cuándo sucede? *c*) En un instante en que el desplazamiento es igual a $A/2$, ¿qué fracción de la energía total del sistema es cinética y qué fracción es potencial?

13.23. Un deslizador de 0.500 kg, conectado al extremo de un resorte ideal con constante de fuerza $k = 450$ N/m, está en MAS con una amplitud de 0.040 m. Calcule *a*) la rapidez máxima del deslizador; *b*) su rapidez cuando está en $x = -0.015$ m; *c*) la magnitud de su aceleración máxima; *d*) su aceleración en $x = -0.015$ m; *e*) su energía mecánica total en cualquier punto de su movimiento.

13.24. Una porrista ondea su pompón en MAS con amplitud de 18.0 cm y frecuencia de 0.850 Hz. Calcule *a*) la magnitud máxima de la aceleración y de la velocidad; *b*) la aceleración y rapidez cuando la coordenada del pompón es $x = +9.0$ cm; *c*) el tiempo que tarda en moverse directamente de la posición de equilibrio a un punto situado a 12.0 cm de distancia. *d*) ¿Cuáles de las cantidades pedidas en los incisos *a*), *b*) y *c*) pueden obtenerse empleando el enfoque de energía de la sección 13.3 y cuáles no? Explique su respuesta.

13.25. Para la situación descrita en el inciso *a*) del ejemplo 13.5, ¿qué masa m deberá tener la masilla para que la amplitud después del choque sea la mitad de la amplitud original? Con ese valor de m, ¿qué fracción de la energía mecánica original se convierte en calor?

13.26. Un juguete de 0.150 kg está en MAS en el extremo de un resorte horizontal con constante de fuerza $k = 300$ N/m. Cuando el objeto está a 0.0120 m de su posición de equilibrio, tiene una rapidez de 0.300 m/s. Calcule *a*) la energía total del objeto en cualquier punto de su movimiento; *b*) la amplitud del movimiento; *c*) la rapidez máxima alcanzada por el objeto durante su movimiento.

13.27. Usted observa un objeto que se mueve en MAS. Cuando dicho objeto está desplazado 0.600 m a la derecha de su posición de equilibrio, tiene una velocidad de 2.20 m/s a la derecha y una aceleración de 8.40 m/s^2 a la izquierda. ¿A qué distancia de este punto se desplazará el objeto, antes de detenerse momentáneamente para iniciar su movimiento a la izquierda?

13.28. En una mesa horizontal sin fricción, una caja de 5.20 kg abierta de arriba se sujeta a un resorte ideal, cuya constante de fuerza es de 375 N/m. Dentro de la caja hay una piedra de 3.44 kg. El sistema oscila con una amplitud de 7.50 cm. Cuando la caja ha alcanzado su rapidez máxima, la piedra se sale repentinamente de la caja hacia arriba sin tocar ésta. Calcule *a*) el periodo y *b*) la amplitud del movimiento resultante de la caja. *c*) Sin realizar cálculos, ¿el nuevo periodo es mayor o menor que el periodo original? ¿Cómo lo sabe?

13.29. Dentro de un vehículo de prueba de la NASA, se tira de una esfera de 3.50 kg mediante un resorte ideal horizontal que está unido a una mesa sin fricción. La constante de fuerza del resorte es de 225 N/m. El vehículo tiene una aceleración constante de 5.00 m/s^2, y la esfera no oscila. De repente, cuando la rapidez del vehículo llega a 45.0 m/s, sus motores se apagan, eliminando así su aceleración pero no su velocidad. Calcule *a*) la amplitud y *b*) la frecuencia de las oscilaciones resultantes de la esfera. *c*) ¿Cuál será la rapidez máxima de la esfera en relación con el vehículo?

Sección 13.4 Aplicaciones del movimiento armónico simple

13.30. Un orgulloso pescador de alta mar cuelga un pez de 65.0 kg de un resorte ideal con masa despreciable, estirando el resorte 0.120 m. *a*) Calcule la constante de fuerza del resorte. Ahora se tira del pez 5.00 cm hacia abajo y luego se suelta. *b*) ¿Qué periodo de oscilación tiene el pez? *c*) ¿Qué rapidez máxima alcanzará?

13.31. Un deslizador de 175 g sobre una pista de aire horizontal sin fricción está unido a un resorte ideal fijo, cuya constante de fuerza es de 155 N/m. En el momento en que usted mide el deslizador, éste se mueve a 0.815 m/s y está a 3.00 cm de su posición de equilibrio. Utilice la *conservación de la energía* para calcular *a*) la amplitud del movimiento y *b*) la rapidez máxima del deslizador. *c*) ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones?

13.32. Un gato con masa de 4.00 kg que gusta de las emociones fuertes está unido mediante un arnés a un resorte ideal de masa despreciable y oscila verticalmente en MAS. La amplitud es de 0.050 m y, en el punto más alto del movimiento, el resorte tiene su longitud natural no estirada. Calcule la energía potencial elástica del resorte (suponga que es cero cuando el resorte no está estirado); la energía cinética del gato; la energía potencial gravitacional del sistema relativa al punto más bajo del movimiento; y la suma de estas tres energías cuando el gato está *a*) en su punto más alto, *b*) en su punto más bajo, y *c*) en su posición de equilibrio.

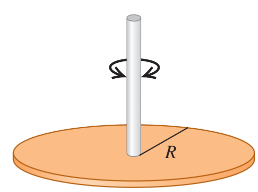
13.33. Una esfera de 1.50 kg y otra de 2.00 kg se pegan entre sí colocando la más ligera debajo de la más pesada. La esfera superior se conecta a un resorte ideal vertical, cuya constante de fuerza es de 165 N/m, y el sistema vibra verticalmente con una amplitud de 15.0 cm. El pegamento que une las esferas es débil y antiguo, y de repente falla cuando las esferas están en la posición más baja de su movimiento. *a*) ¿Por qué es más probable que el pegamento falle en el *punto más bajo*, que en algún otro punto del movimiento? *b*) Calcule la amplitud y la frecuencia de las vibraciones después de que la esfera inferior se despega.

13.34. Un disco uniforme sólido de metal con masa de 6.50 kg y diámetro de 24.0 cm cuelga en un plano horizontal, apoyado en su centro con un alambre metálico vertical. Usted sabe que se requiere una fuerza horizontal de 4.23 N tangente al borde del disco para girarlo 3.34°, y así torcer el alambre. Ahora usted elimina esta fuerza y suelta el disco del reposo. *a*) ¿Cuál es la constante de torsión para el alambre metálico? *b*) ¿Cuáles son la frecuencia y el periodo de las oscilaciones de torsión del disco? *c*) Escriba la ecuación del movimiento para $\theta(t)$ del disco.

13.35. Cierto reloj despertador hace tic cuatro veces cada segundo, y cada tic representa medio periodo. La rueda de balance consiste en un aro delgado con 0.55 cm de radio, conectada al vástago de balance por rayos de masa despreciable. La masa total de la rueda es de 0.90 g. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la rueda con respecto a su eje? *b*) ¿Qué constante de torsión tiene la espiral?

13.36. Un disco metálico delgado con masa de 2.00×10^{-3} kg y radio de 2.20 cm se une en su centro a una fibra larga (figura 13.32). Si se tuerce y suelta, el disco oscila con un periodo de 1.00 s. Calcule la constante de torsión de la fibra.

Figura 13.32 Ejercicio 13.36.



13.37. Imagine que quiere determinar el momento de inercia de una pieza mecánica complicada, con respecto a un eje que pasa por su centro de masa, así que la cuelga de un alambre a lo largo de ese eje. El alambre tiene una constante de torsión de 0.450 $\mathrm{N \cdot m/rad}$. Usted gira un poco la pieza alrededor del eje y la suelta, cronometrando 125 oscilaciones en 265 s. ¿Cuánto vale el momento de inercia buscado?

13.38. La rueda de balance de un reloj vibra con amplitud angular Θ, frecuencia angular ω y ángulo de fase $\phi = 0$. *a*) Deduzca expresiones para la velocidad angular $d\theta/dt$ y la aceleración angular $d^2\theta/dt^2$ en función del tiempo. *b*) Calcule la velocidad angular y la aceleración angular de la rueda de balance, cuando su desplazamiento angular sea Θ, y cuando su desplazamiento sea $\Theta/2$ y θ esté disminuyendo. (*Sugerencia:* haga una gráfica de θ contra *t*.)

***13.39.** Para la interacción de Van der Waals con la función de energía potencial dada por la ecuación (13.25), demuestre que, cuando la magnitud del desplazamiento x con respecto al equilibrio ($r = R_0$) es pequeña, la energía potencial es aproximadamente $U \approx \frac{1}{2}kx^2 - U_0$. [*Sugerencia:* en la ecuación (13.25), sea $r = R_0 + x$ y $u = x/R_0$. Luego, aproxime $(1 + u)^n$ con los primeros *tres* términos de la ecuación (13.28).] Compare k de esta ecuación con la constante de fuerza de la ecuación (13.29) para la fuerza.

***13.40.** Cuando los dos átomos de hidrógeno de una molécula de H_2 se desplazan del equilibrio, una fuerza de restitución $F_x = -kx$, con $k =$ 580 N/m, actúa sobre ellos. Calcule la frecuencia de oscilación de la molécula de H_2. (*Sugerencia:* la masa de un átomo de hidrógeno es 1.008 unidades de masa atómica, es decir, 1 u; vea el Apéndice E. Como en el ejemplo 13.7 de la sección 13.4, use $m/2$ en vez de m en la expresión para f.)

Sección 13.5 El péndulo simple

13.41. Se tira de un péndulo simple de 0.240 m de longitud para moverlo 3.50° a un lado y luego se suelta. *a*) ¿Cuánto tarda la lenteja del péndulo en alcanzar su rapidez máxima? *b*) ¿Cuánto tarda si el ángulo es de 1.75° en vez de 3.50°?

13.42. Un alpinista de 85.0 kg planea balancearse, partiendo del reposo, desde una saliente utilizando una cuerda ligera de 6.50 m de largo. Sujeta un extremo de la cuerda, en tanto que el otro extremo está unido más arriba a la cara de una roca. Como la saliente no está muy lejos de la cara de la roca, la cuerda forma un ángulo pequeño con la vertical. En su punto más bajo de su balanceo, planea soltarse y dejarse caer una distancia corta hacia el suelo. *a*) ¿Cuánto tiempo después de que empieza a balancearse el alpinista alcanzará su punto de oscilación más alto? *b*) Si falla en la primera oportunidad de soltarse, ¿cuánto tiempo después de iniciar su balanceo, el alpinista llegará a su punto más bajo por segunda vez?

13.43. En San Francisco un edificio tiene aditamentos ligeros que consisten en bombillas pequeñas de 2.35 kg con pantallas, que cuelgan del techo en el extremo de cordones ligeros y delgados de 1.50 de longitud. Si ocurre un terremoto leve, ¿cuántas oscilaciones por segundo harán tales aditamentos?

13.44. Un péndulo en Marte. En la Tierra cierto péndulo simple tiene un periodo de 1.60 s. ¿Qué periodo tendrá en Marte, donde $g = 3.71\ \mathrm{m/s^2}$?

13.45. Una manzana pesa 1.00 N. Si la colgamos del extremo de un resorte largo con constante de fuerza de 1.50 N/m y masa despreciable, rebota verticalmente en MAS. Si detenemos el rebote y dejamos que la manzana oscile de lado a lado con un ángulo pequeño, la frecuencia de este péndulo simple es la mitad de la del rebote. (Puesto que el ángulo es pequeño, las oscilaciones de lado a lado no alteran apreciablemente la longitud del resorte.) ¿Qué longitud tiene el resorte no estirado (sin la manzana)?

13.46. Una esfera pequeña de masa m está unida a una varilla sin masa de longitud L con un pivote en el extremo de arriba, formando un péndulo simple. Se tira del péndulo hacia un lado, hasta que la varilla forma un ángulo Θ con la vertical y se suelta del reposo. *a*) Dibuje un diagrama del péndulo justo después de soltarse; incluya vectores que representen las *fuerzas* que actúan sobre la esfera pequeña y la *aceleración* de la esfera. ¡La exactitud es importante! En este punto, ¿qué aceleración lineal tiene la esfera? *b*) Repita el inciso *a*) para el instante en que el ángulo de la varilla con la vertical es $\Theta/2$. *c*) Repita el inciso *a*) para el instante en que la varilla del péndulo está vertical. En ese punto, ¿qué rapidez lineal tiene la esfera?

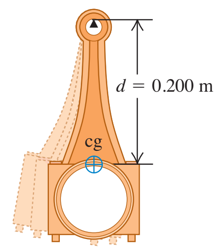
13.47. Después de posarse en un planeta desconocido, una exploradora espacial construye un péndulo simple con longitud de 50.0 cm y determina que efectúa 100 oscilaciones completas en 136 s. ¿Cuánto vale g en ese planeta?

13.48. Un péndulo simple de 2.00 m de largo oscila con un ángulo máximo de 30.0° con la vertical. Obtenga su periodo, *a*) suponiendo una amplitud pequeña, y *b*) utilizando los primeros tres términos de la ecuación (13.35). *c*) ¿Cuál de las respuestas a los incisos *a*) y *b*) es más precisa? Para la que es menos precisa, de qué porcentaje es el error con respecto a la más precisa?

Sección 13.6 El péndulo físico

13.49. Una biela de 1.80 kg de un motor de combustión pivota alrededor de un filo de navaja horizontal como se muestra en la figura 13.33. El centro de gravedad de la biela se encontró por balanceo y está a 0.200 m del pivote. Cuando la biela se pone a oscilar con amplitud corta, completa 100 oscilaciones en 120 s. Calcule el momento de inercia de la biela respecto al eje de rotación en el pivote.

Figura 13.33 Ejercicio 13.49.



13.50. Queremos colgar un aro delgado de un clavo horizontal y hacer que tenga una oscilación completa con ángulo pequeño una vez cada 2.0 s. ¿Qué radio debe tener el aro?

13.51. Demuestre que la expresión para el periodo de un péndulo físico se reduce a la del péndulo simple, si el péndulo físico consiste en una partícula de masa m en el extremo de un cordón sin masa de longitud L.

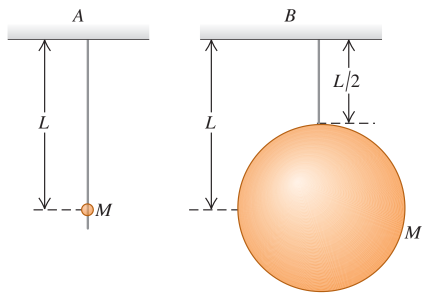
13.52. Una llave inglesa de 1.80 kg tiene su pivote a 0.250 m de su centro de masa y puede oscilar como péndulo físico. El periodo para oscilaciones de ángulo pequeño es de 0.940 s. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la llave con respecto a un eje que pasa por el pivote? *b*) Si la llave inicialmente se desplaza 0.400 rad de la posición de equilibrio, ¿qué rapidez angular tiene al pasar por dicha posición?

13.53. Dos péndulos tienen las mismas dimensiones (longitud L) y masa total (m). El péndulo A es una esfera muy pequeña que oscila en el extremo de una varilla uniforme sin masa. En el péndulo B, la mitad de la masa está en la esfera y la otra mitad en la varilla uniforme. Calcule el periodo de cada péndulo para oscilaciones pequeñas. ¿Cuál tarda más tiempo en una oscilación?

13.54. Un adorno navideño con forma de esfera hueca de masa $M =$ 0.015 kg y radio $R = 0.050$ m se cuelga de una rama con un lazo de alambre unido a la superficie de la esfera. Si el adorno se desplaza una distancia corta y se suelta, oscila como péndulo físico con fricción despreciable. Calcule su periodo. (*Sugerencia:* use el teorema de los ejes paralelos para determinar momento de inercia de la esfera con respecto al pivote en la rama.)

13.55. Cada uno de los dos péndulos que se muestran en la figura 13.34 consiste en una esfera sólida uniforme de masa M sostenida por un cordón sin masa; no obstante, la esfera del péndulo A es muy pequeña, en tanto que la esfera del péndulo B es mucho más grande. Obtenga el periodo de cada péndulo para desplazamientos cortos. ¿Qué esfera tarda más en completar una oscilación?

Figura **13.34** Ejercicio 13.55.



Sección 13.7 Oscilaciones amortiguadas

13.56. Una masa de 2.20 kg oscila sobre un resorte cuya constante de fuerza y periodo son de 250.0 N/m y 0.615 s, respectivamente. *a*) ¿Se trata de un sistema amortiguado o no? ¿Cómo lo sabe? Si es amortiguado, calcule la constante de amortiguamiento b. *b*) ¿El sistema es no amortiguado, subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado? ¿Cómo lo sabe?

13.57. Un ratón de 0.300 kg, nada contento, se mueve en el extremo de un resorte con constante de fuerza $k = 2.50$ N/m, sometido a la acción de una fuerza amortiguadora $F_x = -bv_x$. *a*) Si la constante $b = 0.900$ kg/s, ¿qué frecuencia de oscilación tiene el ratón? *b*) ¿Con qué valor de b el amortiguamiento será crítico?

13.58. Un huevo duro (cocido) de 50.0 g se mueve en el extremo de un resorte cuya constante de fuerza es $k = 25.0$ N/m. Su desplazamiento inicial es de 0.300 m. Una fuerza amortiguadora $F_x = -bv_x$ actúa sobre el huevo, y la amplitud del movimiento disminuye a 0.100 m en 5.00 s. Calcule la constante de amortiguamiento b.

13.59. El movimiento de un oscilador subamortiguado está descrito por la ecuación (13.42). Sea el ángulo de fase $\phi = 0$. *a*) Según la ecuación, ¿cuánto vale x en $t = 0$? *b*) ¿Qué magnitud y dirección tiene la velocidad en $t = 0$? ¿Qué nos dice el resultado acerca de la pendiente de la curva de x contra t cerca de $t = 0$? *c*) Deduzca una expresión para la aceleración a_x en $t = 0$. ¿Para qué valor o intervalo de valores de la constante de amortiguamiento b (en términos de k y m) en $t = 0$, la aceleración es negativa, cero o positiva? Comente cada caso en términos de la forma de la curva de x contra t cerca de $t = 0$.

Sección 13.8 Oscilaciones forzadas y resonancia

13.60. Una fuerza impulsora que varía senoidalmente se aplica a un oscilador armónico amortiguado con constante de fuerza k y masa m. Si la constante de amortiguamiento tiene el valor b_1, la amplitud es A_1 cuando la frecuencia angular impulsora es $\sqrt{k/m}$. En términos de A_1, ¿cuánto vale la amplitud con la misma frecuencia impulsora y la misma amplitud de la fuerza impulsora $F_{máx}$ si la constante de amortiguamiento es *a*) $3b_1$ y *b*) $b_1/2$?

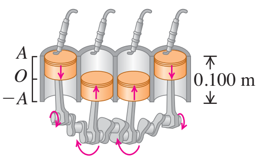
13.61. Una fuerza impulsora que varía senoidalmente se aplica a un oscilador armónico amortiguado. *a*) ¿Qué unidades tiene la constante de amortiguamiento b? *b*) Demuestre que la cantidad $\sqrt{km}$ tiene las mismas unidades que b. *c*) Determine, en términos de $F_{máx}$ y k, la amplitud de $\omega_d = \sqrt{k/m}$ cuando i) $b = 0.2\sqrt{km}$ y ii) $b = 0.4\sqrt{km}$? Compare sus resultados con la figura 13.28.

13.62. Un paquete experimental y su estructura de soporte que se colocarán a bordo de la Estación Espacial Internacional actúan como sistema de resorte-masa subamortiguado con constante de fuerza de 2.1×10^6 N/m y masa de 108 kg. Un requisito de la NASA es que no haya resonancia para oscilaciones forzadas en ninguna frecuencia menor que 35 Hz. ¿Satisface el paquete tal requisito?

Problemas

13.63. MAS en un motor de combustión. El movimiento del pistón de un motor de automóvil (figura 13.35) es aproximadamente armónico simple. *a*) Si la carrera del pistón (el doble de la amplitud) es de 0.100 m y el motor trabaja a 3500 rev/min, ¿qué aceleración tiene el pistón en el extremo de su carrera? *b*) Si el pistón tiene una masa de 0.450 kg, ¿qué fuerza neta debe ejercerse sobre él en ese punto? *c*) ¿Qué rapidez y energía cinética tiene el pistón en el punto medio de su carrera? *d*) ¿Qué potencia media se requiere para acelerar el pistón desde el reposo, hasta la rapidez determinada en el inciso *c*)? *d*) Repita los incisos *b*), *c*) y *d*) con el motor trabajando a 7000 rev/min.

Figura **13.35** Problema 13.63.



13.64. Cuatro pasajeros cuya masa combinada es de 250 kg comprimen 4.00 cm los resortes de un automóvil con amortiguadores vencidos cuando se suben en él. Modele el auto y los pasajeros como un solo cuerpo sobre un solo resorte ideal. Si el automóvil cargado tiene un periodo de vibración de 1.08 s, ¿qué periodo tiene cuando está vacío?

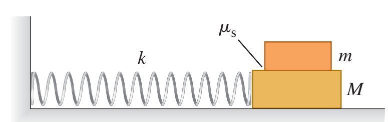
13.65. Un deslizador oscila con MAS y amplitud A_1 en un riel de aire. Usted lo frena hasta reducir la amplitud a la mitad. ¿Qué pasa con sus *a*) periodo, frecuencia y frecuencia angular? *b*) ¿Con su energía mecánica total? *c*) ¿Con su rapidez máxima? *d*) ¿Con su rapidez en $x = \pm A_1/4$? *e*) ¿Y con sus energías cinética y potencial en $x = \pm A_1/4$?

13.66. Un niño malcriado está deslizando su plato de 250 g de un lado a otro, sobre una superficie horizontal en MAS con amplitud de 0.100 m. En un punto a 0.060 m de la posición de equilibrio, la rapidez del plato es de 0.300 m/s. *a*) Calcule el periodo. *b*) Encuentre el desplazamiento cuando la rapidez es de 0.160 m/s. *c*) En el centro del plato hay una rebanada de zanahoria de 10.0 g, que está a punto de resbalar en el extremo de la trayectoria. Calcule el coeficiente de fricción estática entre la rebanada de zanahoria y el plato.

13.67. Una charola (bandeja) horizontal uniforme de 1.50 kg está unida a un resorte ideal vertical con constante de fuerza de 185 N/m y una esfera metálica de 275 g está en la charola. El resorte está debajo de la charola, así que puede oscilar verticalmente. La charola se presiona hacia abajo 15.0 cm por debajo de su posición de equilibrio (llamamos a esto punto A) y se suelta del reposo. *a*) ¿Qué tan alto por encima del punto A estará la charola cuando la esfera metálica salga de la charola? (*Sugerencia:* esto *no* ocurre cuando la esfera y la charola llegan a sus rapideces máximas.) *b*) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que el sistema se libera en el punto A y la esfera sale de la charola? *c*) ¿Qué tan rápido se mueve la esfera justo cuando sale de la charola?

13.68. Un bloque de masa M descansa en una superficie sin fricción y está conectado a un resorte horizontal con constante de fuerza k. El otro extremo del resorte está fijo a una pared (figura 13.36). Un segundo bloque de masa m está sobre el primero. El coeficiente de fricción

Figura **13.36** Problema 13.68.



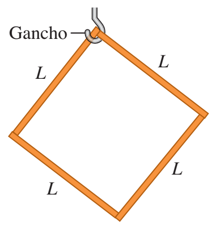
estática entre los bloques es μ_s. Determine la amplitud de oscilación *máxima* que no permite que el bloque superior resbale.

13.69. Una masa de 10.0 kg viaja hacia la derecha con rapidez de 2.00 m/s sobre una superficie horizontal lisa y choca contra una segunda masa de 10.0 kg que inicialmente está en reposo pero unida a un resorte ligero con constante de fuerza de 80.0 N/m. *a*) Calcule la frecuencia, la amplitud y el periodo de las oscilaciones subsecuentes. *b*) ¿Cuánto tiempo tarda el sistema en regresar por primera vez a la posición inmediatamente después del choque?

13.70. Un cohete acelera hacia arriba a 4.00 m/s^2 desde la plataforma de lanzamiento en la Tierra. En su interior, una esfera pequeña de 1.50 kg cuelga del techo mediante un alambre ligero de 1.10 m. Si la esfera se desplaza 8.50° de la vertical y se suelta, encuentre la amplitud y el periodo de las oscilaciones resultantes de este péndulo.

13.71. Un objeto cuadrado de masa m se construye con cuatro varas uniformes idénticas, cada una con longitud L, unidas entre sí. Este objeto se cuelga de su esquina superior en un gancho (figura 13.37). Si se gira ligeramente a la izquierda y luego se suelta, ¿con qué frecuencia oscilará de un lado a otro?

Figura 13.37 Problema 13.71.



13.72. Una fuerza elástica de restitución con constante de fuerza de 10.0 N/m actúa sobre un objeto con masa de 0.200 kg. *a*) Grafique la energía potencial elástica U en función del desplazamiento x dentro de un intervalo de x desde -0.300 m hasta $+0.300$ m. En su gráfica use la escala 1 cm = 0.05 J verticalmente y 1 cm = 0.05 m horizontalmente. El objeto se pone a oscilar con una energía potencial inicial de 0.140 J y una energía cinética inicial de 0.060 J. Conteste las preguntas que siguen consultando la gráfica. *b*) ¿Qué amplitud tiene la oscilación? *c*) ¿Cuánto vale la energía potencial cuando el desplazamiento es de la mitad de la amplitud? *d*) ¿Con qué desplazamiento son iguales las energías cinética y potencial? *e*) ¿Cuánto vale el ángulo de fase ϕ si la velocidad inicial es positiva y el desplazamiento inicial es negativo?

13.73. Una cubeta de 2.00 kg que contiene 10.0 kg de agua cuelga de un resorte ideal vertical, cuya constante de fuerza es de 125 N/m, y oscila verticalmente con una amplitud de 3.00 cm . De repente, la cubeta dimana una fuga en la base, goteando agua a una tasa constante de 2.00 g/s. Cuando la cubeta se vacía y queda a la mitad de su capacidad, calcule *a*) el periodo de oscilación y *b*) la tasa con la que el periodo cambia con respecto al tiempo. ¿El periodo se vuelve más largo o más corto? *c*) ¿Cuál es el sistema de oscilación más corto que este sistema puede tener?

13.74. Un alambre colgante tiene 1.80 m de longitud. Cuando una bola de acero de 60.0 kg se suspende del alambre, éste se estira 2.00 mm. Si se tira de la bola hacia abajo una distancia pequeña adicional y se le suelta, ¿con qué frecuencia vibrará? Suponga que el esfuerzo aplicado al alambre es menor que el límite proporcional (véase la sección 11.5).

13.75. Una perdiz de 5.00 kg cuelga de un peral mediante un resorte ideal con masa despreciable. Si se tira de la perdiz para bajarla 0.100 m con respecto a su posición de equilibrio y se suelta, vibra con un periodo de 4.20 s. *a*) ¿Qué rapidez tiene al pasar por su posición de equilibrio? *b*) ¿Qué aceleración tiene cuando está 0.050 m arriba de dicha posición? *c*) Cuando está subiendo, ¿qué tiempo tarda en moverse de un punto 0.050 m debajo de su posición de equilibrio a un punto que está 0.050 m arriba? *d*) La perdiz se detiene y se retira del resorte. ¿Cuánto se acorta éste?

13.76. Un perno de 0.0200 kg se mueve en MAS con amplitud de 0.240 m y periodo de 1.500 s. El desplazamiento del perno es de $+0.240$ m cuando $t = 0$. Calcule *a*) el desplazamiento del perno cuando $t = 0.500$ s; *b*) la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre el perno en $t = 0.500$ s; *c*) el tiempo mínimo que el perno tarda en moverse de su posición inicial al punto donde $x = -0.180$ m; *d*) la rapidez del perno cuando $x = -0.180$ m.

13.77. MAS de una balanza de carnicero. Un resorte con masa despreciable y constante de fuerza $k = 400$ N/m cuelga verticalmente, y una bandeja de 0.200 kg se suspende de su extremo inferior. Un carnicero deja caer un filete de 2.2 kg sobre la bandeja desde una altura de 0.40 m. El choque es totalmente inelástico y el sistema queda en MAS vertical. Calcule *a*) la rapidez de la bandeja y el filete justo después del choque; *b*) la amplitud del movimiento subsecuente; *c*) el periodo de ese movimiento.

13.78. Una viga uniforme de 225 kg se suspende horizontalmente de dos resortes verticales idénticos que sujetan cada extremo de la viga con el techo. Un saco de 175 kg de grava se coloca sobre el punto medio de la viga. Ésta oscila en MAS con amplitud de 40.0 cm y frecuencia de 0.600 ciclos/s. *a*) El saco de grava se cae de la viga cuando ésta tiene su desplazamiento máximo hacia arriba. Calcule la frecuencia y amplitud del MAS subsecuente de la viga. *b*) Suponga ahora que el saco de grava se cae cuando la viga tiene su rapidez máxima. Calcule la frecuencia y amplitud del MAS subsecuente de la viga.

13.79. En el planeta Newtonia, un péndulo simple tiene una lenteja con masa de 1.25 kg y longitud de 185.0 cm cuando se suelta del reposo, tarda 1.42 s en describir un ángulo de 12.5° hasta un punto donde otra vez tiene rapidez cero. Se determinó que la circunferencia de Newtonia es de 51,400 km. Calcule la masa del planeta.

13.80. Una fuerza de 40.0 N estira un resorte vertical 0.250 m. *a*) ¿Qué masa debe colgarse del resorte para que el sistema oscile con un periodo de 1.00 s? *b*) Si la amplitud del movimiento es de 0.050 m y el periodo es el especificado en *a*), ¿dónde está el objeto y en qué dirección se mueve 0.35 s después de haber pasado hacia abajo la posición de equilibrio? *c*) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce el resorte sobre el objeto cuando éste está 0.030 m bajo la posición de equilibrio al subir?

13.81. Que no la deje el barco. En una visita a Minnesota (la "tierra de los 10,000 lagos"), una turista se inscribe en una excursión por uno de los lagos más grandes. Cuando llega al muelle donde está atracado el barco de 1,500 kg, ve que la embarcación oscila verticalmente sobre las olas, en movimiento armónico simple con amplitud de 20 cm. El barco tarda 3.5 s en efectuar un ciclo completo de subida-bajada. Cuando está en su punto más alto, la cubierta está a la misma altura que el muelle estacionario. Al ver cómo se mece el barco, la turista (masa 60 kg) comienza a sentirse mareada (debido en parte a que la noche anterior cenó bacalao noruego), por lo que se niega a subir a bordo, a menos que la cubierta esté a menos de 10 cm del nivel del muelle. ¿De cuánto tiempo dispone para abordar el barco cómodamente durante cada ciclo de movimiento vertical?

13.82. Un ejemplo interesante pero muy poco práctico de oscilación es el movimiento de un objeto que se deja caer por un agujero que va de un lado de la Tierra a otro pasando por el centro. Suponiendo (lo cual no es realista) que la Tierra es una esfera con densidad uniforme, demuestre que el movimiento es armónico simple y calcule el periodo. [*Nota:* la fuerza gravitacional sobre el objeto en función de la distancia r del objeto al centro de la Tierra se dedujo en el ejemplo 12.10 (sección 12.6). El movimiento es MAS si la aceleración a_x y el desplazamiento con respecto al equilibrio x están relacionados por la ecuación (13.8), y el periodo es entonces $T = 2\pi/\omega$.]

13.83. Dos masas puntuales m se sostienen separadas una distancia d. Otra masa puntual M está a la mitad entre ellas. Después, M se desplaza una distancia pequeña x perpendicular a la línea que conecta las dos masas fijas y se libera. *a*) Demuestre que la magnitud de la fuerza de gravedad neta sobre M debida a las masas fijas está dada aproximadamente por $F_{\text{net}} = \dfrac{16\,GmMx}{d^3}$ si $x \ll d$. ¿Cuál es la dirección de esta fuerza? ¿Se trata de una fuerza de restitución? *b*) Demuestre que la masa M oscilará con una frecuencia angular de $(4/d)\sqrt{Gm/d}$ y un periodo $\pi d/2\sqrt{d/Gm}$. *c*) ¿Cuál sería el periodo si $m = 100$ kg y $d = 25.0$ cm? ¿Parece que este periodo se podría medir con facilidad? ¿Qué hace que este experimento sea difícil de realizar en un laboratorio de física común? *d*) ¿M oscilará si se desplaza una distancia pequeña x desde el centro hasta cualquiera de las otras masas fijas? ¿Por qué?

13.84. Para cierto oscilador, la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo de masa m está dada por $F_x = -cx^3$. *a*) ¿Qué función de energía potencial describe este oscilador, si tomamos $U = 0$ en $x = 0$? *b*) El cuerpo se mueve de $x = 0$ a $x = A$ en un cuarto de periodo. Calcule este tiempo y de ahí el periodo. [*Sugerencia:* empiece en la ecuación (13.20), modificada para incluir la función de energía potencial que obtuvo en el inciso *a*), y despeje la velocidad v_x en función de x. Luego, sustituya v_x por dx/dt y separe la variable escribiendo todos los factores que contienen x de un lado y los que contienen t del otro, de manera que pueda integrarse cada lado. En la integral de x, haga el cambio de variables $u = x/A$. La integral resultante puede evaluarse usando métodos numéricos en una computadora y tiene el valor $\int_0^1 du/\sqrt{1-u^4} = 1.31$.] *c*) Según el resultado obtenido en el inciso *b*), ¿el periodo depende de la amplitud A del movimiento? ¿Las oscilaciones son armónicas simples?

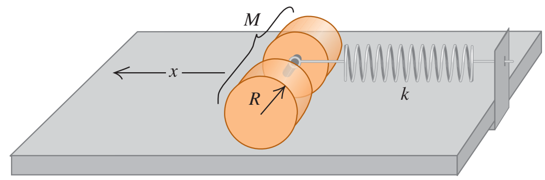
13.85. Considere el círculo de referencia de la figura 13.6. La componente x de la velocidad de Q es la velocidad de P. Calcule esta componente y muestre que la velocidad de P está dada por la ecuación (13.15).

***13.86. Molécula diatómica.** Dos átomos idénticos de una molécula diatómica vibran como osciladores armónicos; no obstante, su centro de masa, que está a la mitad del camino, no se mueve. *a*) Demuestre que, en cualquier instante, los momentos lineales de los átomos con respecto al centro de masa son $\vec{p}$ y $-\vec{p}$. *b*) Demuestre que la energía cinética total K de los dos átomos en cualquier instante es la misma que tiene un solo objeto de masa $m/2$ con momento lineal de magnitud p. (Use $K = p^2/2m$.) Este resultado muestra por qué debe usarse $m/2$ en la expresión para f del ejemplo 13.7 (sección 13.4). *c*) Si los átomos no son idénticos, y tienen masas m_1 y m_2, demuestre que aún se cumple el resultado del inciso *a*), y que la masa del objeto único del inciso *b*) es $m_1m_2/(m_1 + m_2)$. La cantidad $m_1m_2/(m_1 + m_2)$ se denomina *masa reducida* del sistema.

***13.87.** Una aproximación de la energía potencial de una molécula de KCl es $U = A[(R_0^7/8r^8) - 1/r]$, donde $R_0 = 2.67 \times 10^{-10}$ m y $A = 2.31 \times 10^{-28}$ J · m. Use esto para *a*) demostrar que la componente radial de la fuerza sobre cada átomo es $F_r = A[(R_0^7/r^9) - 1/r^2]$ y *b*) demostrar que R_0 es la separación de equilibrio. *c*) Calcule la energía potencial máxima. *d*) Use $r = R_0 + x$ y los primeros dos términos del teorema binomial (ecuación 13.28) para demostrar que $F_r \approx -(7A/R_0^3)x$, de modo que la constante de fuerza de la molécula sea $k = 7A/R_0^3$. *e*) Si los átomos de K y Cl vibran en direcciones opuestas en lados opuestos del centro de masa de la molécula, $m_1m_2/(m_1 + m_2) = 3.06 \times 10^{-26}$ kg es la masa que debe usarse para calcular la frecuencia (véase el problema 13.86). Calcule la frecuencia de las vibraciones de amplitud pequeña.

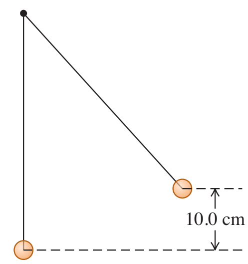
13.88. Dos cilindros sólidos conectados a lo largo de su eje común por una varilla corta y ligera tienen radio R y masa total M, y descansan sobre una mesa horizontal. Un resorte con constante de fuerza k tiene un extremo sujeto a un soporte fijo, y el otro, a un anillo sin fricción en el centro de masa de los cilindros (figura 13.38). Se tira de los cilindros hacia la izquierda una distancia x, estirando el resorte, y se sueltan. Hay suficiente fricción entre la mesa y los cilindros para que éstos rueden sin resbalar al oscilar horizontalmente. Demuestre que el movimiento del centro de masa de los cilindros es armónico simple, y calcule su periodo en términos de M y k. [*Sugerencia:* el movimiento es armónico simple si a_x y x están relacionados por la ecuación (13.8) y por lo tanto, el periodo es $T = 2\pi/\omega$. Aplique $\sum\tau_z = I_{\text{cm}}\alpha_z$ y $\sum F_x = Ma_{\text{cm-}x}$ a los cilindros con la finalidad de relacionar $a_{\text{cm-}x}$ con el desplazamiento x de los cilindros con respecto a su posición de equilibrio.]

Figura 13.38 Problema 13.88.



13.89. En la figura 13.39, la esfera superior se suelta del reposo, choca contra la esfera inferior estacionaria y se pega a ella. Ambos cordones tienen 50.0 cm de longitud. La esfera superior tiene masa de 2.00 kg y está inicialmente 10.0 cm más alta que la inferior, cuya masa es de 3.00 kg. Calcule la frecuencia y el desplazamiento angular máximo del movimiento después del choque.

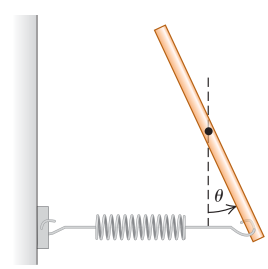
Figura 13.39 Problema 13.89.



13.90. *T. rex.* Modele la pierna del *T. rex* del ejemplo 13.10 (sección 13.6) como dos varillas uniformes con longitud de 1.55 m cada una y unidas rígidamente por un extremo. La varilla inferior tiene masa M, y la superior, $2M$. El objeto compuesto pivota en torno a la parte superior de la varilla de arriba. Calcule el periodo de oscilación de este objeto para oscilaciones de amplitud pequeña. Compare su resultado con el del ejemplo 13.10.

13.91. Una varilla metálica delgada y uniforme con masa M pivota sin fricción sobre un eje que pasa por su punto medio y es perpendicular a la varilla. Un resorte horizontal con constante de fuerza k se conecta al extremo inferior de la varilla, y el otro extremo del resorte se fija a un soporte rígido. La varilla se desplaza un ángulo pequeño Θ con respecto a la vertical (figura 13.40) y se suelta. Demuestre que se mueve en MAS angular y calcule su periodo. (*Sugerencia:* suponga que Θ es suficientemente pequeño para que las aproximaciones sen $\Theta \approx \Theta$ y cos $\Theta \approx 1$ sean válidas. El movimiento es armónico simple si $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\theta$, y el periodo es entonces $T = 2\pi/\omega$.)

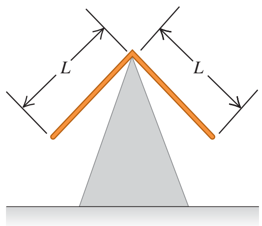
Figura 13.40 Problema 13.91.



13.92. El problema de la campana que suena en silencio. Una campana grande de 34.0 kg cuelga de una viga de madera, de modo que puede oscilar con fricción despreciable. Su centro de masa está 0.60 m bajo el pivote, y su momento de inercia con respecto a un eje en el pivote es de 18.0 kg · m². El badajo es una masa de 1.8 kg que cuelga del extremo de una varilla delgada de longitud L y masa despreciable. El otro extremo de la varilla está sujeto al interior de la campana, de modo que puede oscilar libremente sobre el mismo eje de la campana. ¿Qué longitud L debe tener la varilla para que la campana suene en silencio, es decir, para que el periodo de oscilación de la campana sea igual a la del badajo?

13.93. Dos varillas delgadas idénticas, cada una con masa m y longitud L, se unen en ángulo recto para formar un objeto en forma de L, el cual se balancea sobre la cúspide de un triángulo agudo (figura 13.41). Si el objeto en forma de L se desvía un poco, oscila. Calcule la frecuencia de oscilación.

Figura **13.41** Problema 13.93.



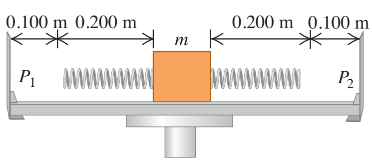
13.94. Se desea construir un péndulo con un periodo de 4.00 s en un lugar donde $g = 9.80 \text{ m/s}^2$. *a*) ¿Qué longitud tiene un péndulo *simple* con este periodo? *b*) Suponga que el péndulo debe montarse en una caja que no puede tener más de 0.50 m de altura. ¿Puede inventar un péndulo con un periodo de 4.00 s que cumpla este requisito?

13.95. Una varilla uniforme de longitud L oscila con ángulo pequeño alrededor de un punto a una distancia x de su centro. *a*) Demuestre que su frecuencia angular es $\sqrt{gx/[(L^2/12) + x^2]}$. *b*) Demuestre que su frecuencia angular máxima se da cuando $x = L/\sqrt{12}$. *c*) ¿Qué longitud tiene la varilla si la frecuencia angular máxima es 2π rad/s?

Problemas de desafío

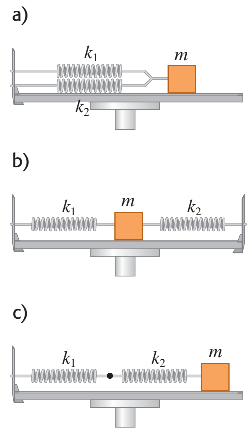
13.96. Dos resortes, ambos con longitud no estirada de 0.200 m, pero con diferentes constantes de fuerza k_1 y k_2, están unidos a extremos opuestos de un bloque de masa m en una superficie plana sin fricción. Ahora los extremos exteriores de los resortes se unen a dos agujas P_1 y P_2 que están a 0.100 m de las posiciones originales de los extremos de los resortes (figura 13.42). Sea $k_1 = 2.00$ N/m, $k_2 = 6.00$ N/m y $m = 0.100$ kg. *a*) Calcule la longitud de cada resorte cuando el bloque está en su nueva posición de equilibrio, después de que los resortes se fijan a las agujas. *b*) Calcule el periodo de vibración del bloque, si se desplaza un poco de su nueva posición de equilibrio y se suelta.

Figura **13.42** Problema de desafío 13.96.



13.97. Constante de fuerza efectiva de dos resortes. Dos resortes con la misma longitud no estirada, pero diferentes constantes de fuerza k_1 y k_2, se unen a un bloque de masa m en una superficie plana sin fricción. Calcule la constante de fuerza efectiva k_{efe} en cada uno de los tres casos: *a*), *b*) y *c*) de la figura 13.43. (La constante de fuerza efectiva está definida por $\sum F_x = -k_{efe}x$.) *d*) Un objeto de masa m, suspendido de un resorte uniforme con constante de fuerza k, vibra con una frecuencia f_1. Si el resorte se parte a la mitad y el mismo objeto se cuelga de una de las mitades, la frecuencia es f_2. Determine la relación f_2/f_1.

Figura **13.43** Problema de desafío 13.97.



13.98. *a*) Determine el cambio ΔT del periodo de un péndulo simple cuando la aceleración debida a la gravedad cambia en Δg. (*Sugerencia:* el nuevo periodo $T + \Delta T$ se obtiene sustituyendo $g + \Delta g$ por g:

$$T + \Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + \Delta g}}$$

Para obtener una expresión aproximada, expanda el factor $(g + \Delta g)^{-1/2}$ usando el teorema binomial (Apéndice B) y conservando sólo los primeros dos términos:

$$(g + \Delta g)^{-1/2} = g^{-1/2} - \frac{1}{2}g^{-3/2}\Delta g + \cdots$$

Los demás términos contienen potencias mayores de Δg y son muy pequeños si Δg es pequeño.) Exprese su resultado como el cambio *fraccionario* del periodo $\Delta T/T$, en términos del cambio fraccionario $\Delta g/g$. *b*) Un reloj de péndulo da la hora correcta en un punto donde $g = 9.8000 \text{ m/s}^2$, pero se atrasa 4.0 s cada día a una altura mayor. Use el resultado del inciso *a*) para calcular el valor aproximado de g en este nuevo lugar.

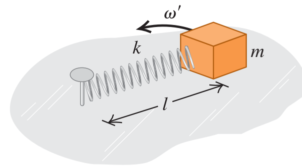
13.99. Resorte con masa. En todos los problemas anteriores del capítulo, hemos supuesto que los resortes tienen masa despreciable aunque, desde luego, ningún resorte carece por completo de masa. Para determinar el efecto de la masa de un resorte, considere un resorte de masa M, con longitud de equilibrio L_0 y constante de fuerza k. Si el resorte se estira o comprime a una longitud L, la energía potencial es $\frac{1}{2}kx^2$, donde $x = L - L_0$. *a*) Considere un resorte como éste con un extremo fijo y el otro en movimiento con rapidez v. Suponga que la rapidez de los puntos a lo largo del resorte varía linealmente con la distancia l al extremo fijo, y que la masa M del resorte está distribuida uniformemente a todo lo largo del resorte. Calcule la energía cinética del resorte en términos de M y v. (*Sugerencia:* divida el resorte en partes de longitud dl; determine la rapidez de cada parte en términos de l, v y L; determine la masa de cada parte en términos de dl, M y L; e integre de 0 a L. El resultado *no* es $\frac{1}{2}Mv^2$, ya que no todo el resorte se mueve con la misma rapidez.) *b*) Obtenga la derivada de la ecuación de conservación de la energía (ecuación 13.21) con respecto al tiempo, para una masa m que se mueve en el extremo de un resorte *sin masa*. Comparando sus resultados con la ecuación (13.8), que define ω, demuestre que la frecuencia angular de oscilación es $\omega = \sqrt{k/m}$. *c*) Aplique el procedimiento del inciso *b*) para obtener la frecuencia angular de oscilación ω del resorte considerado en el inciso *a*). Si la *masa efectiva* M' del resorte está definida por $\omega = \sqrt{k/M'}$, exprese M' en términos de M.

13.100. Una cinta métrica uniforme (con longitud de 1.00 m) cuelga de un eje horizontal por un extremo y oscila como péndulo físico. Un objeto pequeño con masa igual a la de la cinta métrica se sujeta a la misma a una distancia y por debajo del eje. Sea T el periodo del sistema con el cuerpo pegado y T_0 el periodo de la cinta métrica sola. *a*) Determine la relación T/T_0. Evalúe su expresión para valores de y desde 0 hasta 1.0 m en incrementos de 0.1 m, y grafique T/T_0 contra y. *b*) ¿Hay algún valor de y, distinto de $y = 0$, para el que $T = T_0$? Si lo hay, encuéntrelo y explique por qué el periodo no cambia cuando y tiene ese valor.

13.101. Se determina que el periodo de un péndulo físico alrededor de un punto pivote es T. Luego se encuentra otro punto pivote en el lado opuesto del centro de masa que da el mismo periodo. Los dos puntos están separados una distancia L. Use el teorema de ejes paralelos para demostrar que $g = L(2\pi/T)^2$. (Este resultado sugiere una forma de calcular g sin conocer la masa ni ningún momento de inercia del péndulo físico.)

13.102. Resonancia en un sistema mecánico. Una masa m está unida al extremo de un resorte sin masa con constante de fuerza k y longitud no estirada l_0. El otro extremo del resorte puede girar libremente alrededor de un clavo incrustado en una superficie horizontal sin fricción (figura 13.44). Se hace que la masa gire en un círculo con frecuencia angular de ω'. *a*) Calcule la longitud l del resorte en función de ω'. *b*) ¿Cómo cambia el resultado del inciso *a*) cuando ω' se acerca a la frecuencia natural $\omega = \sqrt{k/m}$ del sistema masa-resorte? (Si el resultado le parece extraño, recuerde que los resortes sin masa y las superficies sin fricción no existen; sólo son descripciones aproximadas de resortes y superficies reales. Además, la ley de Hooke misma es sólo una aproximación al comportamiento de los resortes reales; cuanto más se alargue un resorte, más se desviará su comportamiento de la ley de Hooke.)

Figura 13.44 Problema de desafío 13.102.



***13.103. Vibración de una molécula con enlace covalente.** Muchas moléculas diatómicas (de dos átomos) están unidas por *enlaces covalentes* que son mucho más fuertes que la interacción de Van der Waals. Ejemplos de ello son H_2, O_2 y N_2. Los experimentos indican que, en el caso de muchas de tales moléculas, la interacción puede describirse con una fuerza de la forma

$$F_r = A\left[e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}\right]$$

donde A y b son constantes positivas, r es la separación de los centros de los átomos y R_0 es la separación de equilibrio. Para la molécula de hidrógeno (H_2), $A = 2.97 \times 10^{-8}$ N, $b = 1.95 \times 10^{10}\ \text{m}^{-1}$, y $R_0 = 7.4 \times 10^{-11}$ m. Calcule la constante de fuerza para oscilaciones pequeñas alrededor del equilibrio. (*Sugerencia:* use la expansión de e^x dada en el Apéndice B.) Compare su resultado con el valor dado en el ejercicio 13.40.