10 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL

? Si el acróbata no está tocando el suelo, ¿cómo puede alterar su rapidez de rotación? ¿Qué principio físico se aplica aquí?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza produzca una torca.
- De qué manera la torca total sobre un cuerpo afecta su movimiento rotacional.
- Cómo analizar el movimiento de un cuerpo que gira y se mueve como un todo por el espacio.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y potencia para cuerpos giratorios.
- Cuál es el significado del momento angular de una partícula o de un cuerpo rígido.
- De qué manera el momento angular de un sistema cambia con el tiempo.
- Por qué un giróscopo que gira describe un movimiento extraño llamado precesión.

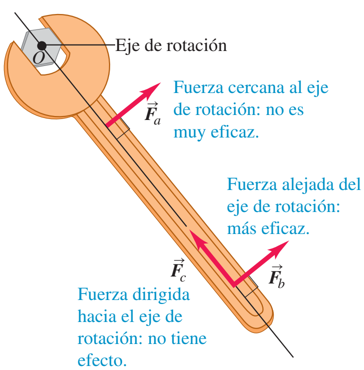
En los capítulos 4 y 5 aprendimos que una fuerza neta aplicada a un cuerpo imparte una aceleración a ese cuerpo. Sin embargo, ¿qué se requiere para impartir una aceleración *angular* a un cuerpo? Es decir, ¿qué se necesita para poner a girar un cuerpo estacionario o para detener un cuerpo que está dando vueltas? Se requiere una fuerza, pero debe aplicarse de tal manera que proporcione una acción de torcer o de dar vuelta.

En este capítulo definiremos una nueva cantidad física, la *torca*, que describe la acción de torsión o giro debido a una fuerza. Veremos que la torca total que actúa sobre un cuerpo rígido determina su aceleración angular, así como la fuerza total sobre un cuerpo determina su aceleración lineal. También examinaremos el trabajo y la potencia en el movimiento rotacional con la finalidad de entender los problemas del tipo de cómo el eje giratorio de un auto transmite energía. Por último, desarrollaremos un nuevo principio de conservación, la *conservación del momento angular*, que es muy útil para entender la rotación de cuerpos tanto rígidos como no rígidos. Terminaremos el capítulo con el estudio de los *giróscopos*, que son dispositivos giratorios que al parecer desafían el sentido común y no se caen cuando creemos que deberían hacerlo, aunque en realidad su comportamiento se ajusta perfectamente a la dinámica del movimiento rotacional.

10.1 Torca

Sabemos que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden afectar su **movimiento de traslación**, es decir, el movimiento del cuerpo como un todo a través del espacio. Ahora queremos aprender qué aspectos de una fuerza determinan qué tan eficaz es ésta para provocar o modificar el movimiento *rotacional*. La magnitud y dirección de la fuerza son importantes, pero también lo es la posición del punto de aplicación. En la figura 10.1, se está usando una llave inglesa para aflojar un tornillo apretado. La fuerza $\vec{F}_b$, aplicada cerca del extremo del mango, es más eficaz que una fuerza igual $\vec{F}_a$ aplicada cerca del tornillo. La fuerza $\vec{F}_c$ no sirve de nada. Se aplica en el mismo punto y tiene la misma magnitud que $\vec{F}_b$, pero está dirigida a lo largo del

10.1 ¿Cuál de estas tres fuerzas de igual magnitud tiene mayor probabilidad de aflojar el tornillo apretado?



mango. La medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para causar o alterar la rotación de un cuerpo se denomina *torca*. Decimos que $\vec{F}_a$ genera una torca sobre un punto O a la llave de la figura 10.1 $\vec{F}_b$ genera una torca mayor sobre O y $\vec{F}_c$ no genera ninguna torca sobre O.

La figura 10.2 muestra tres ejemplos de cómo calcular la torca. En la figura el cuerpo puede girar alrededor de un eje que es perpendicular al plano de la figura y pasa por el punto O. Sobre el cuerpo actúan tres fuerzas: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, y $\vec{F}_3$, en el plano de la figura. La tendencia de $\vec{F}_1$, a causar una rotación alrededor de O depende de su magnitud F_1 y también de la distancia *perpendicular* l_1 entre el punto O y la **línea de acción** de la fuerza (la línea sobre la que está el vector de fuerza). Llamamos a l_1 el **brazo de palanca** (o en ocasiones se le denomina como **brazo de momento**) de $\vec{F}_1$ alrededor de O. El esfuerzo de torsión es directamente proporcional tanto a F_1 y como a l_1. Definimos a la **torca** de $\vec{F}_1$ con respecto a O como el producto $F_1 l_1$. Usaremos la letra griega τ (tau) para la torca. En general, para una fuerza de magnitud F cuya línea de acción está a una distancia perpendicular l del punto O, la torca es

$$\tau = Fl \tag{10.1}$$

Los físicos prefieren el término "torca", mientras que los ingenieros prefieren el término "momento o par de torsión" solo (a menos que estén hablando de un eje giratorio). Los dos grupos usan "brazo de palanca" o "brazo de momento" para la distancia l.

El brazo de palanca de $\vec{F}_1$ en la figura 10.2 es la distancia perpendicular l_1 y el de $\vec{F}_2$ es la distancia perpendicular l_2. La línea de acción de $\vec{F}_3$ pasa por el punto O, así que el brazo de palanca de $\vec{F}_3$ es cero y su torca con respecto a O es cero. Por lo mismo, $\vec{F}_c$ en la figura 10.1 tiene una torca cero con respecto al punto O, en tanto que $\vec{F}_b$ tiene mayor torca que $\vec{F}_a$ porque su brazo de palanca es mayor.

CUIDADO **La torca siempre se mide en torno a un punto O** Observe que la torca *siempre* se define con referencia a un punto específico. Si cambiamos de posición este punto, la torca de cada fuerza puede cambiar. Por ejemplo, la torca de $\vec{F}_3$ en la figura 10.2 es cero con respecto al punto O, pero no con respecto al punto A. Al describir la torca de una fuerza, no basta llamarlo "la torca de $\vec{F}$"; debemos decir "el momento de torsión de $\vec{F}$ con respecto al punto X" o "la torca de $\vec{F}$ alrededor del punto X".

En la figura 10.2, la fuerza $\vec{F}_1$ tiende a causar rotación *antihoraria* alrededor de O, mientras que $\vec{F}_2$ tiende a causar rotación *horaria*. Para distinguir entre estas dos posibilidades, necesitamos elegir un sentido de rotación positivo. Si elegimos que *las torcas antihorarias sean positivas y las torcas en sentido horario sean negativas*, las torcas de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ con respecto a O son

$$\tau_1 = +F_1 l_1 \qquad \tau_2 = -F_2 l_2$$

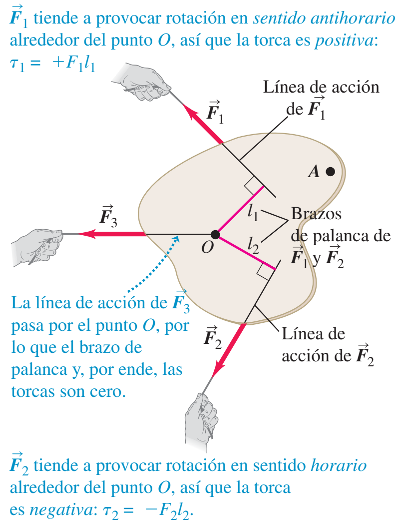
La figura 10.2 muestra esta elección para el signo de la torca. A menudo usaremos el símbolo ⟲+ para indicar el sentido de rotación positivo que elegimos.

La unidad de la torca en el SI es el newton-metro. Al hablar de trabajo y energía llamamos a esta combinación joule; sin embargo, la torca *no* es trabajo ni energía, así que debemos expresarlo en newton-metros, *no* joules.

La figura 10.3 muestra una fuerza $\vec{F}$ que se aplica en un punto P descrito por un vector de posición $\vec{r}$ con respecto al punto elegido O. Hay varias formas de calcular la torca de esta fuerza:

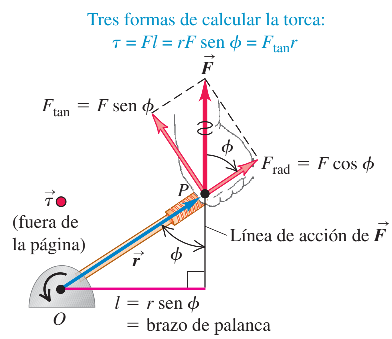
1. Determine el brazo de palanca l y use $\tau = Fl$.
2. Calcule el ángulo ϕ entre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$; el brazo de palanca es $r \operatorname{sen}\phi$, así que $\tau = rF \operatorname{sen}\phi$.
3. Represente $\vec{F}$ en términos de una componente radial F_{rad} en la dirección de $\vec{r}$ y una componente tangencial F_{tan} perpendicular a $\vec{r}$. (Decimos tangencial porque si el cuerpo gira, el punto donde actúa la fuerza se mueve en un círculo, y esta componente es tangente a ese círculo.) Entonces, $F_{tan} = F \operatorname{sen}\phi$ y

10.2 La torca de una fuerza alrededor de un punto es el producto de la magnitud de la fuerza y su brazo de palanca.

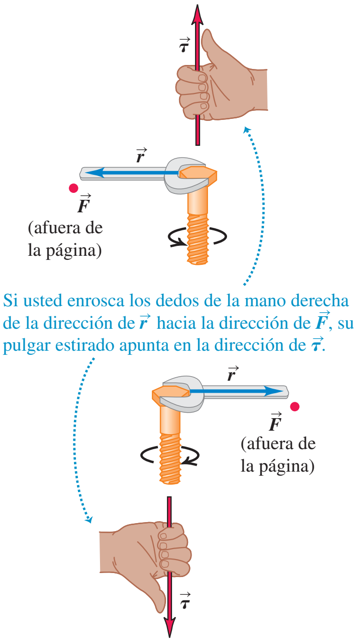


ActivPhysics ONLINE
7.1 Cálculo de torcas

10.3 Tres formas de calcular la torca de la fuerza $\vec{F}$ en torno al punto O. En esta figura, $\vec{r}$ y $\vec{F}$ están en el plano de la página y el vector de la torca $\vec{\tau}$ apunta afuera de la página hacia el lector.



10.4 El vector de la torca, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ se dirige sobre el eje del tornillo, perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. Vemos que los dedos de la mano derecha se enroscan en la dirección de la rotación que la torca tiende a causar.



$\tau = r(F \operatorname{sen} \phi) = F_{tan} r$. La componente F_{rad} *no* tiene torca con respecto a O porque su brazo de palanca con respecto a ese punto es cero (compare con las fuerzas $\vec{F}_c$ de la figura 10.1 y $\vec{F}_3$ de la figura 10.2).

Resumiendo estas expresiones de la torca , tenemos

$$\tau = Fl = rF \operatorname{sen} \phi = F_{tan} r \qquad \text{(magnitud de la torca)} \tag{10.2}$$

La torca como vector

En la sección 9.1, vimos que la velocidad y la aceleración angulares pueden representarse como vectores; lo mismo sucede con la torca ; observe que la cantidad $rF \operatorname{sen} \phi$ de la ecuación (10.2) es la magnitud del *producto vectorial* $\vec{r} \times \vec{F}$ que definimos en la sección 1.10. (Repase esa definición.) Ahora generalizamos la definición de torca de la siguiente manera: si una fuerza $\vec{F}$ actúa en un punto que tiene un vector de posición $\vec{r}$ con respecto a un origen O, como en la figura 10.3, la torca $\vec{\tau}$ de la fuerza con respecto a O es la cantidad *vectorial*

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{(definición del vector torca)} \tag{10.3}$$

La torca definida en la ecuación (10.2) es sólo la magnitud del vector torca $\vec{r} \times \vec{F}$. La dirección de $\vec{\tau}$ es perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. En particular, si $\vec{r}$ y $\vec{F}$ están en un plano perpendicular al eje de rotación, como en la figura 10.3, el vector torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ tiene la dirección del eje de rotación, y su sentido está dado por la regla de la mano derecha (figura 1.29). Las relaciones de dirección se muestran en la figura 10.4.

En los diagramas donde intervienen $\vec{r}$, $\vec{F}$ y $\vec{\tau}$, es común que uno de los vectores esté orientado en una dirección perpendicular a la página. (De hecho, por la naturaleza misma del producto cruz, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ *debe* ser perpendicular al plano de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$.) Usaremos un punto (•) para representar un vector que apunta hacia afuera de la página (véase la figura 10.3) y una cruz (×) para representar un vector que apunta hacia adentro de la página.

En las siguientes secciones, normalmente nos interesará la rotación de un cuerpo alrededor de un eje orientado en cierta dirección constante. En tal caso, sólo interesa la componente de la torca sobre ese eje, que normalmente llamaremos la torca con respecto al *eje* especificado.

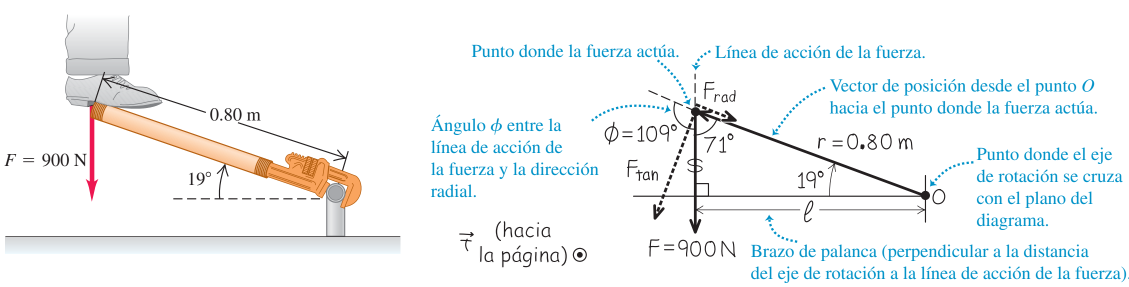
Ejemplo 10.1 Aplicación de una torca

Un plomero aficionado, que no puede aflojar una junta, ensarta un tramo de tubo en el mango de su llave de tuercas y aplica todo su peso de 900 N al extremo del tubo parándose sobre él. La distancia del centro de la junta al punto donde actúa el peso es de 0.80 m, y el mango y el tubo forman un ángulo de 19° con la horizontal (figura 10.5a). Calcule la magnitud y la dirección de la torca que el plomero aplica en torno al centro de la junta.

10.5 a) Un plomero aficionado trata de aflojar una junta parándose en una extensión del mango de la llave de tuercas. b) Diagrama vectorial para calcular la torca con respecto a O.

a) Diagrama de la situación

b) Diagrama de cuerpo



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La figura 10.5b muestra los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ y el ángulo entre ellos ($\phi = 109°$). Usaremos lo que sabemos acerca de estos vectores para calcular el vector de la torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (10.1) o la (10.2) para obtener la magnitud de la torca y la regla de la mano derecha con la ecuación (10.3), para hallar su dirección.

EJECUTAR: Para usar la ecuación (10.1), primero calculamos el brazo de palanca l. Como muestra la figura 10.5b:

$$l = (0.80\text{ m})\,\text{sen}\,109° = (0.80\text{ m})\,\text{sen}\,71° = 0.76\text{ m}$$

La ecuación (10.1) nos dice que la magnitud de la torca es

$$\tau = Fl = (900\text{ N})(0.76\text{ m}) = 680\text{ N}\cdot\text{m}$$

O bien, por la ecuación (10.2),

$$\tau = rF\,\text{sen}\,\phi = (0.80\text{ m})(900\text{ N})(\text{sen}\,109°) = 680\text{ N}\cdot\text{m}$$

También podemos calcular F_{tan}, la componente tangencial de $\vec{F}$, que actúa perpendicular a $\vec{r}$ (es decir, perpendicular al tubo). El vector $\vec{r}$ está a 19° de la horizontal, así que una perpendicular a $\vec{r}$ está orientada a 19° de la vertical. Puesto que $\vec{F}$ es vertical, esto implica que $F_{\text{tan}} = F(\cos 19°) = (900\text{ N})(\cos 19°) = 851\text{ N}$. La torca es

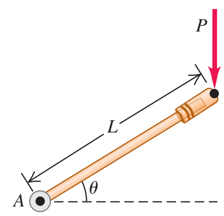
$$\tau = F_{\text{tan}}r = (851\text{ N})(0.80\text{ m}) = 680\text{ N}\cdot\text{m}$$

Si usted enrosca los dedos de su mano derecha de la dirección de $\vec{r}$ (en el plano de la figura 10.5b, hacia la izquierda y hacia arriba) a la dirección de $\vec{F}$ (verticalmente hacia abajo), su pulgar derecho apuntará hacia adentro del plano de la figura. Ésta es la dirección de la torca $\vec{\tau}$.

EVALUAR: Ya verificamos la magnitud obtenida de τ calculándola de tres formas distintas. Para comprobar la dirección de la torca, observamos que la fuerza de la figura 10.5 tiende a producir una rotación en sentido antihorario en torno a O. Si enroscamos los dedos de la mano derecha en dirección antihoraria, nuestro pulgar apuntará hacia afuera del plano de la figura 10.5 lo cual es, en efecto, la dirección de la torca.

Evalúe su comprensión de la sección 10.1 La figura muestra una fuerza P que se aplica a un extremo de una palanca de longitud L. ¿Cuál es la magnitud de la torca de esta fuerza en torno al punto A? i) $PL\,\text{sen}\,\theta$; ii) $PL\cos\theta$; iii) $PL\tan\theta$.

MP



10.2 Torca y aceleración angular de un cuerpo rígido

Ahora podemos deducir la relación fundamental de la dinámica rotacional de un cuerpo rígido. Demostraremos que la aceleración angular de un cuerpo rígido en rotación es directamente proporcional a la suma de las componentes de la torca sobre el eje de rotación. El factor de proporcionalidad es el momento de inercia.

Para deducir esta relación, imaginamos otra vez que el cuerpo se compone de un gran número de partículas. Elegimos como eje de rotación el eje z; la primera partícula tiene masa m_1 y distancia r_1 con respecto a este eje (figura 10.6). La *fuerza total* $\vec{F}_1$ que actúa sobre la partícula tiene una componente en la dirección radial $F_{1,\text{rad}}$, una componente $F_{1,\text{tan}}$ que es tangente al círculo de radio r_1 en que se mueve la partícula al girar el cuerpo, y una componente F_{1z} sobre el eje de rotación. La segunda ley de Newton para la componente tangencial es

$$F_{1,\text{tan}} = m_1 a_{1,\text{tan}} \tag{10.4}$$

Podemos expresar la aceleración tangencial de la primera partícula en términos de la aceleración angular α_z, usando la ecuación (9.14): $a_{1,\text{tan}} = r_1\alpha_z$. Con esta relación y multiplicando ambos miembros de la ecuación (10.4) por r_1 obtenemos

$$F_{1,\text{tan}}r_1 = m_1 r_1^2 \alpha_z \tag{10.5}$$

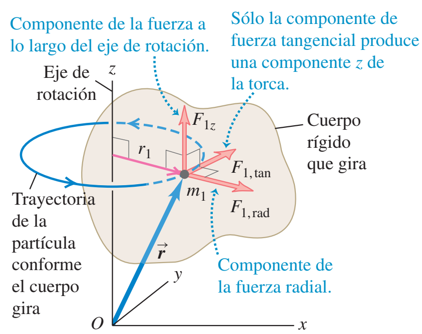
Por la ecuación (10.2), $F_{1,\text{tan}}r_1$ no es más que la *torca* de la fuerza total con respecto al eje de rotación (igual a la componente τ_{1z} del vector de la torca sobre dicho eje). El subíndice z nos recuerda que la torca afecta la rotación en torno al eje z, de la misma manera que el subíndice de F_{1z} nos recuerda que esta fuerza afecta el movimiento de la partícula 1 a lo largo del eje z.

Las componentes $F_{1,\text{rad}}$ y F_{1z} no contribuyen a la torca alrededor del eje z, pues ninguna tiende a modificar la rotación de la partícula alrededor de ese eje. Por lo tanto, $\tau_{1z} = F_{1,\text{tan}}r_1$ es la torca total que actúa sobre la partícula con respecto al eje de

ActivPhysics ONLINE

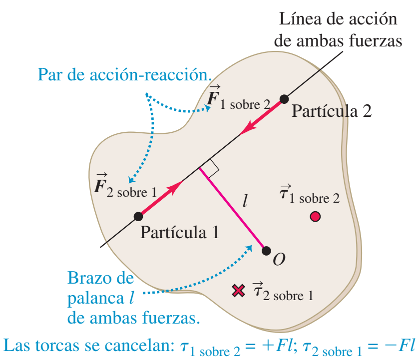
7.8 Rotojuego: enfoque de dinámica
7.9 Escalera que cae
7.10 Mujer y elevador de volante: enfoque de dinámica

10.6 Puesto que un cuerpo rígido gira en torno al eje z, una fuerza total $\vec{F}_1$ actúa sobre una de las partículas del cuerpo. Sólo la componente de la fuerza $F_{1,\text{tan}}$ puede afectar la rotación, ya que sólo $F_{1,\text{tan}}$ ejerce una torca alrededor de O con una componente z (a lo largo del eje de rotación).



10.7 Para aflojar o apretar un tornillo, es preciso impartirle una aceleración angular y, por lo tanto, aplicar una torca. Esto se facilita si se usa un destornillador con mango de radio grande, pues así se aumenta el brazo de palanca de la fuerza que aplicamos con la mano.

10.8 Dos partículas de un cuerpo rígido ejercen fuerzas iguales y opuestas una sobre la otra. Si estas fuerzas actúan a lo largo de la línea que va de una partícula a la otra, los brazos de palanca de las dos fuerzas son iguales y las torcas causados por ellas son iguales y opuestos. Sólo las torcas *externas* afectan la rotación de un cuerpo rígido.



rotación. Además, $m_1 r_1^2$ es I_1, el momento de inercia de la partícula alrededor del eje de rotación. De esta manera, rescribimos la ecuación (10.5) como:

$$\tau_{1z} = I_1\alpha_z = m_1 r_1^2 \alpha_z$$

Escribimos una ecuación similar para cada partícula del cuerpo y luego sumamos todas las ecuaciones:

$$\tau_{1z} + \tau_{2z} + \cdots = I_1\alpha_z + I_2\alpha_z + \cdots = m_1 r_1^2 \alpha_z + m_2 r_2^2 \alpha_z + \cdots$$

es decir,

$$\sum \tau_{iz} = \left(\sum m_i r_i^2\right)\alpha_z \tag{10.6}$$

El miembro izquierdo de la ecuación (10.6) es la suma de todas las torcas en torno al eje de rotación que actúan sobre todas las partículas. El miembro derecho es $I = \sum m_i r_i^2$, el momento de inercia total alrededor del eje de rotación, multiplicado por la aceleración angular α_z, la cual es la misma para todas las partículas porque se trata de un cuerpo *rígido*. Así, para el cuerpo rígido entero, tenemos el *análogo rotacional de la segunda ley de Newton*:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \tag{10.7}$$

(análogo rotacional de la segunda ley de Newton para un cuerpo rígido)

Así como la segunda ley de Newton dice que la fuerza total que actúa sobre una partícula es igual a la masa de la partícula multiplicada por su aceleración, la ecuación (10.7) dice que la torca total que actúa sobre un cuerpo rígido es igual al momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación multiplicado por su aceleración angular (figura 10.7).

Observe que como en nuestra deducción supusimos que la aceleración angular α_z es la misma para todas las partículas del cuerpo, la ecuación (10.7) *sólo* es válida para cuerpos *rígidos*. Si el cuerpo no es rígido, como un tanque de agua que gira o un remolino de aire, la aceleración angular es diferente para diferentes partículas del cuerpo. Además, como en la deducción utilizamos la ecuación (9.14), $a_{\tan} = r\alpha_z$, α_z debe medirse en rad/s^2.

La torca que actúa sobre cada partícula se debe a la fuerza neta que actúa sobre esa partícula, la cual es la suma vectorial de fuerzas externas e internas (véase la sección 8.2). Según la tercera ley de Newton, las fuerzas *internas* que cualquier par de partículas del cuerpo rígido ejercen una sobre la otra son iguales y opuestas (figura 10.8). Si estas fuerzas actúan sobre la línea que une las dos partículas, sus brazos de palanca con respecto a cualquier eje también serán iguales. Así, las torcas para tales fuerzas son iguales y opuestos, y suman cero. De hecho, *todas* las torcas internas suman cero, y la suma $\sum \tau_z$ de la ecuación (10.7) incluye sólo las torcas de las fuerzas *externas*.

Es común que una fuerza externa importante que actúa sobre un cuerpo sea su *peso*. Esta fuerza no se concentra en un solo punto: actúa sobre todas las partículas del cuerpo. No obstante, resulta que, si el valor de $\vec{g}$ es el mismo en todos los puntos, siempre obtenemos la torca correcta (alrededor de cualquier eje dado), si suponemos que todo el peso se concentra en el *centro de masa* del cuerpo. Demostraremos esto en el capítulo 11, pero mientras tanto lo usaremos en algunos problemas de este capítulo.

Estrategia para resolver problemas 10.1 Dinámica rotacional de cuerpos rígidos

Nuestra estrategia para resolver problemas de dinámica rotacional es muy similar a la Estrategia para resolver problemas 5.2 (sección 5.2) para resolver problemas donde interviene la segunda ley de Newton.

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ecuación $\sum \tau_z = I\alpha_z$ es útil en todos los casos en que las torcas actúan sobre un cuerpo rígido; es decir, siempre que fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido de manera tal que alteran el estado de rotación del cuerpo.

En algunos casos, podría preferirse un enfoque de energía, como se hizo en la sección 9.4; sin embargo, cuando la incógnita es una fuerza, una torca, una aceleración, una aceleración angular o un tiempo transcurrido, casi siempre es más conveniente usar $\sum \tau_z = I\alpha_z$.

PLANTEAR *el problema* empleando estos pasos:

1. Haga un dibujo de la situación y elija el cuerpo o los cuerpos que va a analizar.
2. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo, marcando las cantidades desconocidas con símbolos algebraicos. Una nueva consideración es que se debe mostrar con exactitud la *forma* del cuer-

continúa

po, incluyendo todas las dimensiones y los ángulos que se necesitarán para los cálculos de una torca.

3. Elija ejes de coordenadas para cada cuerpo e indique un sentido de rotación positivo para cada cuerpo que gire. Si hay una aceleración lineal, lo más sencillo suele ser elegir un eje positivo en su dirección. Si ya conoce el sentido de α_z, se simplificarán los cálculos si se elige ése como sentido de rotación positivo.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Para cada cuerpo del problema, decida si sufre movimiento de rotación, movimiento de rotación o ambos. Por consiguiente, aplique $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ (como en la sección 5.2), $\sum\tau_z = I\alpha_z$, o ambas al cuerpo. Asegúrese de escribir ecuaciones de movimiento aparte para cada cuerpo.
2. Podría haber relaciones *geométricas* entre los movimientos de dos o más cuerpos, como cuando un hilo se desenrolla de una polea girándola, o cuando un neumático gira sin resbalar (lo que veremos en la sección 10.3). Exprésela en forma algebraica, por lo regular como relaciones entre dos aceleraciones lineales, o una aceleración lineal y una angular.
3. Verifique que el número de ecuaciones coincida con el número de incógnitas. Resuelva las ecuaciones para obtener la o las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que los signos algebraicos de sus resultados sean lógicos. Por ejemplo, suponga que el problema se refiere a un carrete de hilo. Si se está sacando hilo del carrete, ¡las respuestas *no* deberán decirnos que el carrete gira en el sentido en que el hilo se enrolla! Siempre que pueda, verifique los resultados para casos especiales o valores extremos. Pregúntese: "¿es lógico este resultado?"

Ejemplo 10.2 Cable que se desenrolla I

La figura 10.9a muestra la situación que analizamos en el ejemplo 9.8 (sección 9.4) usando métodos de energía. Se enrolla un cable varias veces en un cilindro sólido uniforme de 50 kg con diámetro de 0.120 m, que puede girar sobre su eje. Se tira del cable con una fuerza de 9.0 N. Suponiendo que el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar, ¿qué aceleración tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La incógnita es la aceleración del cable, que no podemos obtener directamente empleando el método de energía de la sección 9.4 (pues en él no interviene la aceleración). En vez de ello, aplicaremos dinámica rotacional al cilindro. Para obtener la aceleración del cable, buscaremos una relación entre el movimiento del cable y el movimiento del borde del cilindro.

PLANTEAR: El cilindro gira en sentido antihorario cuando se tira del cable, así que tomamos como sentido de rotación positivo el antihorario. La fuerza neta que actúa sobre el cilindro debe ser cero porque su centro de masa permanece en reposos (figura 10.9b). El peso (de magnitud Mg) y la fuerza normal (de magnitud n) ejercidos por los cojinetes del cilindro actúan sobre líneas que pasan por el eje de rotación y, por lo tanto, dichas fuerzas no producen una torca con respecto a ese eje. La única torca alrededor del eje de rotación se debe a la fuerza F.

EJECUTAR: La fuerza F tiene un brazo de palanca que es igual al radio R del cilindro: $l = R = 0.060$ m, así que la torca debido a F es $\tau_z = FR$. (Esta torca es positiva porque tiende a producir una rotación antihoraria.) Por el ejemplo 9.8, el momento de inercia del cilindro en torno al eje de rotación es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Por lo tanto, la ecuación (10.7) nos da la aceleración *angular* del cilindro:

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{FR}{MR^2/2} = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9.0\text{ N})}{(50\text{ kg})(0.060\text{ m})} = 6.0\text{ rad/s}^2$$

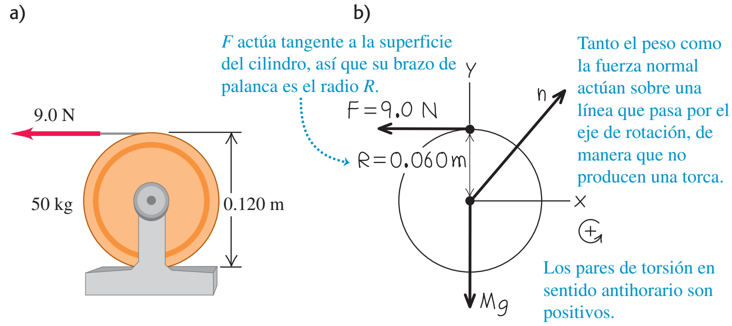
(Verifique que estas unidades sean correctas. Podemos añadir "rad" a nuestro resultado porque el radián es una cantidad adimensional.)

Para obtener la aceleración *lineal* del cable, necesitamos una relación cinemática. En la sección 9.3 señalamos que la aceleración de un cable que se desenrolla de un cilindro es igual a la componente tangencial de aceleración de un punto en la superficie del cilindro donde el cable es tangente a él. Dicha aceleración tangencial está dada por la ecuación (9.14):

$$a_x = R\alpha = (0.060\text{ m})(6.0\text{ rad/s}^2) = 0.36\text{ m/s}^2$$

EVALUAR: ¿Puede usar este resultado, junto con una ecuación del capítulo 2, para determinar la rapidez del cable una vez que se ha desenrollado 2.0 m? Inténtelo y compare su resultado con el ejemplo 9.8, donde obtuvimos esta rapidez usando consideraciones de trabajo y energía.

10.9 a) Cilindro y cable. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre para el cilindro.



Ejemplo 10.3 Cable que se desenrolla II

Repasemos la situación que analizamos en el ejemplo 9.9 (sección 9.4) usando métodos de energía. Calcule ahora la aceleración del bloque de masa m.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aplicaremos dinámica traslacional al bloque que cuelga y dinámica rotacional al cilindro. Puesto que el cable no resbala sobre el cilindro, existe una relación entre la aceleración lineal del bloque (nuestra incógnita) y la aceleración angular del cilindro.

PLANTEAR: En la figura 10.10 esbozamos la situación y dibujamos un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo. Tomamos el sentido de rotación antihorario como positivo para el cilindro, y la dirección hacia abajo de la coordenada y como positiva para el objeto.

EJECUTAR: La segunda ley de Newton aplicada al objeto da

$$\sum F_y = mg + (-T) = ma_y$$

Para el cilindro, el peso Mg y la fuerza normal n (ejercida por el cojinete) no tienen torcas con respecto al eje de rotación porque actúan sobre líneas que pasan por ese eje, igual que en el ejemplo 10.2. La única torca es la debida a la tensión del cable T. Aplicando la ecuación (10.7) al cilindro tenemos

$$\sum \tau_z = RT = I\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z$$

Al igual que en el ejemplo 10.2, la aceleración del cable es igual a la aceleración tangencial de un punto en el borde del cilindro que, según la ecuación (9.14), es $a_y = a_{\tan} = R\alpha_z$. Usamos esto para sustituir $R\alpha_z$ por a_y en la ecuación anterior del cilindro y luego dividimos entre R; el resultado es

$$T = \frac{1}{2}Ma_y$$

Ahora sustituimos esta expresión para T en la segunda ley de Newton para el objeto y despejamos la aceleración a_y:

$$mg - \frac{1}{2}Ma_y = ma_y$$

$$a_y = \frac{g}{1 + M/2m}$$

EVALUAR: La aceleración es positiva (en la dirección hacia abajo) y menor que g, como debería ser ya que el cable está frenando al objeto. Para saber cuánta fuerza ejerce el cable, sustituimos nuestra expresión para a_y en la segunda ley de Newton para el objeto, obteniendo así T:

$$T = mg - ma_y = mg - m\left(\frac{g}{1 + M/2m}\right) = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

La tensión en el cable *no* es igual al peso mg del objeto; si así fuera, el objeto no podría acelerar.

Revisemos algunos casos específicos. Si M es mucho mayor que m, la tensión es casi igual a mg, y por lo tanto la aceleración es mucho menor que g. Si M es cero, $T = 0$ y $a_y = g$; entonces, el objeto cae libremente. Si el objeto parte del reposo $(v_{0y} = 0)$ a una altura h sobre el piso, su rapidez y al golpear el piso está dada por $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_yh = 2a_yh$, así que $v_0 = 0$

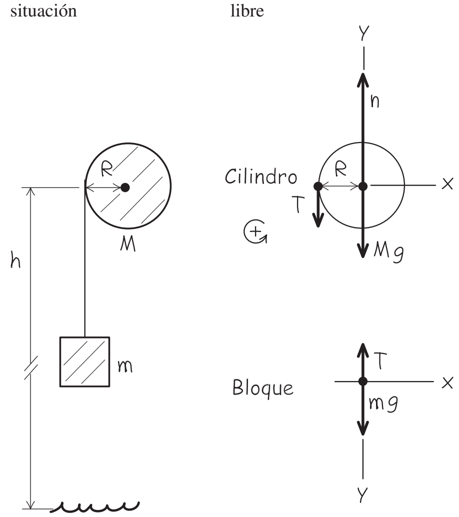
$$v_y = \sqrt{2a_yh} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

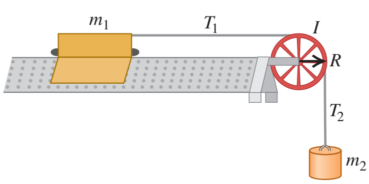
Éste es el mismo resultado que obtuvimos usando consideraciones de energía en el ejemplo 9.9.

10.10 a) Nuestro diagrama de la situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre para el cilindro y el bloque. Suponemos que el cable tiene masa despreciable.

a) Diagrama de la situación

b) Diagramas de cuerpo libre



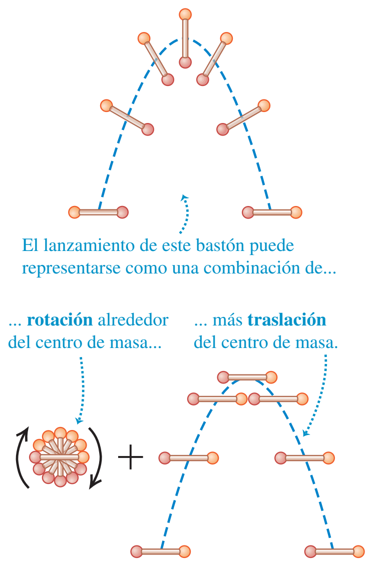


Evalúe su comprensión de la sección 10.2 La figura muestra un deslizador de masa m_1 que se mueve sin fricción sobre un riel de aire horizontal, sujeto a un objeto de masa m_2 con un cordón sin masa. La polea tiene radio R y momento de inercia I en torno a su eje de rotación. Cuando se suelta, el objeto colgante acelera hacia abajo, el deslizador acelera a la derecha y el cordón gira la polea deslizarse ni estirarse. Ordene, de mayor a menor, las magnitudes de las siguientes fuerzas que actúan durante el movimiento. i) la fuerza de tensión (magnitud T_1) en la parte horizontal del cordón; ii) la fuerza de tensión (magnitud T_2) en la parte vertical del cordón; iii) el peso m_2g del objeto colgante.

10.3 Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

Podemos extender nuestro análisis de la dinámica del movimiento rotacional a algunos casos en los que se mueve el eje de rotación. En tal caso, el movimiento del cuerpo es de **traslación y rotación combinados**. La clave para entender estas situaciones es la siguiente: cada posible movimiento de un cuerpo rígido puede representarse como una combinación de *movimiento traslacional del centro de masa* y *rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa*. Esto se cumple aun si el centro de masa se acelera, de modo que no está en reposo en ningún marco inercial. La figura 10.11 ilustra esto para el movimiento de un bastón que se lanza: el centro de masa del bastón sigue una parábola, como si el bastón fuera una partícula situada en el centro de masa. Otros ejemplos de movimientos de traslación y de rotación combinados son una pelota que rueda cuesta abajo y un yoyo que se desenrolla.

10.11 El movimiento de un cuerpo rígido es una combinación de traslación del centro de masa y rotación alrededor de ese centro.



Traslación y rotación combinadas: Relaciones de energía

Demostrar que el movimiento de un cuerpo rígido siempre puede dividirse, en movimientos independientes de traslación del centro de masa y rotación alrededor del centro de masa, rebasa el alcance de este libro; no obstante, podemos comprobar que es cierto para la *energía cinética* de un cuerpo rígido con movimiento tanto traslacional como rotacional. En este caso, la energía cinética del cuerpo es la suma de una parte $\frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2$ asociada al movimiento del centro de masa y una parte $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ asociada a la rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \qquad (10.8)$$

(cuerpo rígido con traslación y rotación)

Para demostrar esto, imaginamos otra vez que el cuerpo rígido se compone de partículas. Consideremos una partícula representativa de masa m_i, como se muestra en la figura 10.12. Su velocidad $\vec{v}_i$ relativa a un marco inercial es la suma vectorial de la velocidad $\vec{v}_{cm}$ del centro de masa y la velocidad $\vec{v}_i{}'$ de la partícula *relativa al centro de masa*:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i{}' \qquad (10.9)$$

La energía cinética K_i de esta partícula en el marco inercial es $\frac{1}{2}m_iv_i^2$, que también podemos expresar como $\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$. Sustituyendo la ecuación (10.9) en esto, obtenemos

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i{}') \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i{}') \\ &= \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i{}' + \vec{v}_i{}' \cdot \vec{v}_i{}') \\ &= \frac{1}{2}m_i(v_{cm}{}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i{}' + v_i'^2) \end{aligned}$$

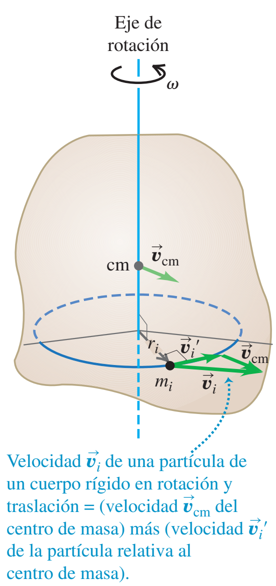
La energía cinética total es la suma $\sum K_i$ para todas las partículas del cuerpo. Si expresamos los tres términos de la ecuación como sumas individuales:

$$K = \sum K_i = \sum\left(\frac{1}{2}m_iv_{cm}{}^2\right) + \sum(m_i\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i{}') + \sum\left(\frac{1}{2}m_iv_i'^2\right)$$

Los primeros dos términos tienen factores comunes que pueden sacarse de la sumatoria:

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)v_{cm}{}^2 + \vec{v}_{cm} \cdot \left(\sum m_i\vec{v}_i{}'\right) + \sum\left(\frac{1}{2}m_iv_i'^2\right) \qquad (10.10)$$

10.12 Cuerpo rígido con movimiento traslacional y rotacional.



Aquí viene la recompensa a nuestro esfuerzo. En el primer término, $\sum m_i$ es la masa total M. El segundo término es cero porque $\sum m_i \vec{v}_i'$ es M multiplicada por la velocidad del centro de masa *relativa al centro de masa*, que es cero por definición. El último término es la suma de las energías cinéticas de las partículas, calculada usando sus rapideces con respecto al centro de masa; ésta es la energía cinética de rotación alrededor de ese centro. Siguiendo los mismos pasos que nos llevaron a la ecuación (9.17) para la energía cinética rotacional de un cuerpo rígido, podemos escribir este último término como $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$, donde I_{cm} es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa y ω es la rapidez angular. Así, la ecuación (10.10) se convierte en la ecuación (10.8):

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

ActivPhysics ONLINE

7.11 Carrera entre un bloque y un disco

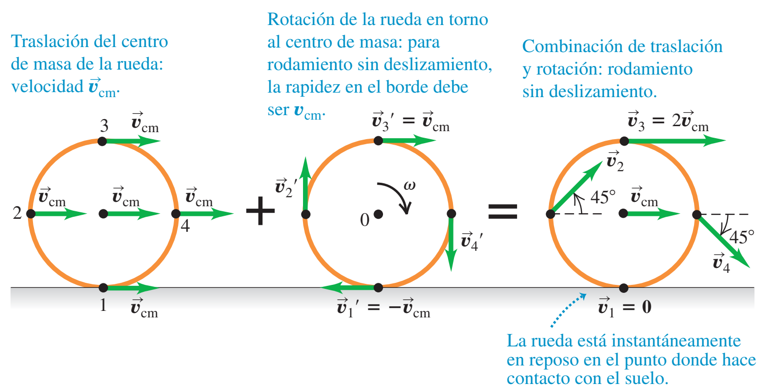
Rodamiento sin deslizamiento

Un caso importante de traslación y rotación combinadas es el de **rodar sin deslizar**, como el movimiento de la rueda que se muestra en la figura 10.13. La rueda es simétrica, así que su centro de masa está en su centro geométrico. Visualizamos el movimiento en un marco de referencia inercial, en el cual la superficie sobre la que se rueda está en reposo. Aquí, el punto de la rueda que toca la superficie debe estar instantáneamente *en reposo* para que no resbale. Por lo tanto, la velocidad $\vec{v}_1'$ del punto de contacto, relativa al centro de masa, debe tener la misma magnitud pero dirección opuesta que la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$. Si el radio de la rueda es R y su rapidez angular alrededor del centro de masa es ω, la magnitud de $\vec{v}_1'$ es $R\omega$; por ello, debemos tener

$$v_{cm} = R\omega \qquad \text{(condición para rodar sin resbalar)} \qquad (10.11)$$

Como muestra la figura 10.13, la velocidad de un punto en la rueda es la suma vectorial de la velocidad del centro de masa y la velocidad del punto relativa al centro de masa. Así, mientras el punto 1 (el de contacto) está momentáneamente en reposo, el punto 3 en la parte de arriba se mueve hacia adelante con el *doble de la rapidez* del centro de masa, y los puntos 2 y 4 a los lados tienen velocidades a 45° con la horizontal.

En un instante dado, podemos pensar que la rueda gira alrededor de un "eje de rotación instantáneo" que pasa por el punto de contacto con el suelo. La velocidad angular ω es la misma para este eje que para un eje que pasa por el centro de masa; un observador en el centro de masa ve que el borde da el mismo número de revoluciones por segundo, como un observador en el borde ve que el centro de masa da alrededor de él. Si vemos así el movimiento de la rueda de la figura 10.13, la energía cinética de la rueda es $K = \frac{1}{2}I_1\omega^2$, donde I_1 es el momento de inercia de la rueda alrededor de un



10.13 El movimiento de una rueda es la suma del movimiento traslacional del centro de masa y el movimiento rotacional de la rueda alrededor del centro de masa.

eje que pasa por el punto 1. Sin embargo, por el teorema de los ejes paralelos, ecuación (9.19), $I_1 = I_{cm} + MR^2$, donde M es la masa total de la rueda e I_{cm} es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa. Usando la ecuación (10.11), la energía cinética de la rueda es

$$K = \frac{1}{2}I_1\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2$$

que es igual a la ecuación (10.8).

CUIDADO **Rodamiento sin deslizamiento** Observe que es importante tener en cuenta que la relación $v_{cm} = R\omega$ se cumple *únicamente* si hay rodamiento sin deslizamiento. Cuando un automóvil de "arrancones" comienza a moverse, los neumáticos traseros están girando con gran rapidez mientras que el vehículo casi no se mueve, así que $R\omega$ es mayor que v_{cm} (figura 10.14). Si el conductor aplica los frenos con demasiada fuerza y el coche derrapa, los neumáticos casi no girarán y $R\omega$ será menor que v_{cm}.

10.14 El humo que se alza de los neumáticos traseros de este auto de arrancones indica que los neumáticos están resbalando sobre el pavimento, así que v_{cm} no es igual a $R\omega$.

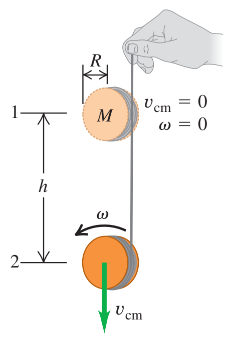
Si un cuerpo rígido cambia de altura al moverse, también debemos considerar la energía potencial gravitacional. Como vimos en la sección 9.4, la energía potencial gravitacional asociada a cualquier cuerpo extendido de masa M, rígido o no, es la misma que si sustituimos el cuerpo por una partícula de masa M situada en el centro de masa del cuerpo. Esto es,

$$U = Mgy_{cm}$$

Ejemplo 10.4 Rapidez de un yoyo burdo

Se hace un yoyo burdo enrollando un cordel varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio R (figura 10.15). Se sostiene el extremo del cordel fijo mientras se suelta el cilindro desde el reposo. El cordel se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Use consideraciones de energía para calcular la rapidez v_{cm} del centro de masa del cilindro sólido después de caer una distancia h.

10.15 Cálculo de la rapidez de un yoyo burdo.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El extremo superior del cordel está fijo, no se tira de él hacia arriba, así que la mano de la figura 10.15 no efectúa trabajo sobre el sistema del cordel y cilindro. Al igual que en el ejemplo 9.8 (sección 9.4), hay fricción entre el cordel y el cilindro pero, como el cordel no resbala sobre la superficie del cilindro, no se pierde energía mecánica y podemos usar la conservación de la energía mecánica..

PLANTEAR: Las energías potenciales son $U_1 = Mgh$ y $U_2 = 0$. El cordel no tiene energía cinética porque no tiene masa. La energía cinética inicial del cilindro es $K_1 = 0$, y la energía cinética final K_2 está dada por la ecuación (10.8). El momento de inercia es $I = \frac{1}{2}MR^2$, y $\omega = v_{cm}/R$ porque el cilindro no resbala en el cordel.

EJECUTAR: Utilizando la ecuación (10.8), la energía cinética en el punto 2 es

$$K_2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$
$$= \frac{3}{4}Mv_{cm}{}^2$$

La energía cinética es $1\frac{1}{2}$ veces mayor que si el yoyo estuviera cayendo a una rapidez v_{cm} sin girar. Dos tercios de la energía cinética total $\left(\frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2\right)$ son traslacionales y un tercio $\left(\frac{1}{4}Mv_{cm}{}^2\right)$ es rotacional. Entonces, la conservación de la energía

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$
$$0 + Mgh = \frac{3}{4}Mv_{cm}{}^2 + 0$$

y

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

EVALUAR: Ésta es menor que la rapidez $\sqrt{2gh}$ que tendría un objeto que se deja caer, porque conforme el cilindro cae un tercio de la energía potencial liberada aparece como energía cinética rotacional.

Ejemplo 10.5 Carrera de cuerpos rodantes

En la demostración de una conferencia de física, un profesor "pone a competir" diversos cuerpos rígidos redondos, soltándolos del reposo desde arriba de un plano inclinado (figura 10.16). ¿Qué forma debe tener un cuerpo para llegar a la base primero?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: De nuevo, podemos usar conservación de la energía porque los cuerpos rígidos no resbalan sobre él plano inclinado. La fricción cinética no efectúa trabajo si los cuerpos ruedan sin resbalar. También podemos despreciar los efectos de la *fricción de rodamiento*, presentada en la sección 5.3, si los cuerpos y la superficie sobre la que ruedan son perfectamente rígidos. (Más adelante explicaremos por qué.)

PLANTEAR: Cada cuerpo parte del reposo desde arriba de una pendiente de altura h, así que $K_1 = 0$, $U_1 = Mgh$ y $U_2 = 0$. La energía cinética en la base del plano está dada por la ecuación (10.8). Si los cuerpos ruedan sin resbalar, $\omega = v_{cm}/R$. Los momentos de inercia de todos los cuerpos redondos de la tabla 9.2 (alrededor de ejes que pasan por su centro de masa) pueden expresarse como $I_{cm} = cMR^2$, donde c es un número puro menor o igual que 1 que depende de la forma del cuerpo. Nuestro objetivo es hallar el valor de c que proporciona al cuerpo la más alta rapidez en la base del plano inclinado.

EJECUTAR: Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 + 0$$

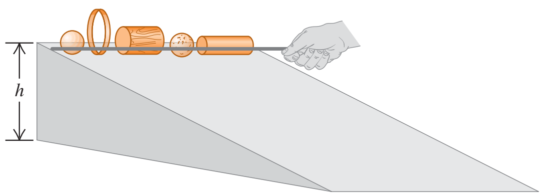
$$= \frac{1}{2}(1 + c)Mv_{cm}{}^2$$

así que la rapidez en la base de la pendiente es

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$

EVALUAR: Este resultado es sorprendente; la rapidez no depende de la masa M del cuerpo ni de su radio R. Todos los cilindros sólidos uniformes tienen la misma rapidez abajo, aun si sus masas y sus radios son diferentes, porque tienen la misma c. Todas las esferas sólidas tienen la misma rapidez, etcétera. Cuanto menor sea c, mayor será la rapidez del cuerpo en la base (y en cualquier punto de la bajada). Los cuerpos con c pequeña siempre vencen a aquellos con c grande, porque menos de su energía cinética se dedica a rotación y más a traslación. Si leemos los valores de c de la tabla 9.2, vemos que el orden de llegada es: cualquier esfera sólida, cualquier cilindro sólido, cualquier esfera hueca de pared delgada y cualquier cilindro hueco de pared delgada.

10.16 ¿Cuál cuerpo baja más rápido y por qué?



Traslación y rotación combinadas: Dinámica

También podemos analizar los movimientos traslacional y rotacional combinados de un cuerpo rígido desde la perspectiva de la dinámica. En la sección 8.5 mostramos que, para un cuerpo de masa total M, la aceleración $\vec{a}_{cm}$ del centro de masa es igual a la de una masa puntual M sobre la que actúan todas las fuerzas externas a las que está sujeto el cuerpo:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \tag{10.12}$$

El movimiento rotacional alrededor del centro de masa se describe mediante el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, ecuación (10.7):

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \tag{10.13}$$

10.17 El eje de una rueda de bicicleta pasa por el centro de masa de la rueda y es un eje de simetría. Por lo tanto, la rotación de la rueda está descrita por la ecuación (10.13), siempre que la bicicleta no dé la vuelta ni se incline hacia un lado (lo cual alteraría la orientación del eje).

donde I_{cm} es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y $\sum\tau_z$ incluye todas las torcas externas con respecto a este eje. No es evidente de inmediato que la ecuación (10.13) sea aplicable al movimiento de un cuerpo rígido en traslación; después de todo, nuestra deducción de $\sum\tau_z = I\alpha_z$ en la sección 10.2 dio por hecho que el eje de rotación era estacionario. No obstante, la ecuación (10.13) es válida *aún si el eje de rotación se mueve*, siempre y cuando se satisfagan estas condiciones:

1. El eje que pasa por el centro de masa debe ser un eje de simetría.
2. El eje no debe cambiar de dirección.

Estas condiciones se satisfacen en muchos tipos de rotación (figura 10.17). Cabe señalar que, en general, este eje de rotación móvil *no* está en reposo en un marco de referencia inercial.

Ahora podemos resolver problemas de dinámica donde intervengan cuerpos rígidos con movimientos traslacional y rotacional simultáneos, siempre que el eje de rotación cumpla las dos condiciones anteriores. La Estrategia de resolución de problemas 10.1 (sección 10.2) es igualmente útil aquí, y le recomendamos repasarla. Tenga presente que, si un cuerpo tiene movimientos traslacional y rotacional al mismo tiempo, necesitamos dos ecuaciones de movimiento independientes *para el mismo cuerpo*. Una de éstas, la ecuación (10.12), describe la traslación del centro de masa. La otra, ecuación (10.13), describe la rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa.

Ejemplo 10.6 Aceleración de un yoyo burdo

Para el yoyo burdo del ejemplo 10.4 (figura 10.18a), calcule la aceleración hacia abajo del cilindro y la tensión en el cordel.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La figura 10.18b es un diagrama de cuerpo libre del yoyo, donde se indican las direcciones de las coordenadas positivas. Con estas coordenadas, las incógnitas son $a_{\text{cm-}y}$ y T.

PLANTEAR: Usaremos las ecuaciones (10.12) y (10.13), junto con la condición que el cordel no resbale en el cilindro.

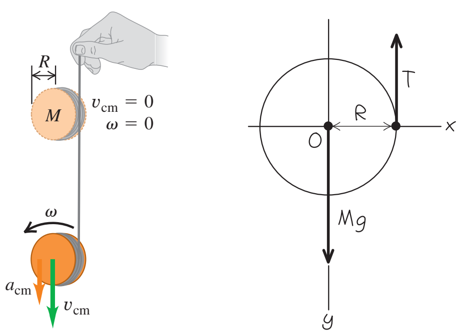
EJECUTAR: La ecuación para la traslación del centro de masa es

$$\sum F_y = Mg + (-T) = Ma_{\text{cm-}y} \qquad (10.14)$$

10.18 Dinámica de un yoyo burdo (véase la figura 10.15).

a) El yoyo

b) Diagrama de cuerpo libre del yoyo



El momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa es $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$. Sólo la fuerza de tensión tiene una torca con respecto a dicho eje, así que la ecuación para la rotación alrededor de él es

$$\sum \tau_z = TR = I_{\text{cm}}\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z \qquad (10.15)$$

El cordel se desenrolla sin resbalar, así que $v_{\text{cm-}z} = R\omega_z$ por la ecuación (10.11); la derivada de esta relación con respecto al tiempo es

$$a_{\text{cm-}y} = R\alpha_z \qquad (10.16)$$

Ahora usamos la ecuación (10.16) para eliminar α_z de la ecuación (10.15) y despejamos las ecuaciones (10.14) y (10.15) simultáneamente para obtener T y $a_{\text{cm-}y}$. Estos resultados son sencillísimos:

$$a_{\text{cm-}y} = \frac{2}{3}g \qquad T = \frac{1}{3}Mg$$

Usando la fórmula de aceleración constante $v_{\text{cm-}y}{}^2 = v_{\text{cm-}0y}{}^2 + 2a_{\text{cm-}y}h$, podemos demostrar que la rapidez del yoyo después de caer una distancia h es $v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$, como determinamos en el ejemplo 10.4.

EVALUAR: Desde el punto de vista de la dinámica, la fuerza de tensión es fundamental: hace que la aceleración del yoyo sea menor que g, y su torca hace girar al yoyo. No obstante, cuando analizamos esta situación usando métodos de energía en el ejemplo 10.4, ¡no tuvimos que considerar la tensión! Puesto que no se perdió ni se ganó energía mecánica, desde el punto de vista energético el cordel sólo es importante porque ayuda a convertir parte de la energía potencial gravitacional en energía cinética rotacional.

Ejemplo 10.7 Aceleración de una esfera rodante

Una bola de bolos sólida rueda sin resbalar por la rampa de retorno junto a la mesa de boliche (figura 10.19a). La rampa forma un ángulo β con la horizontal. ¿Qué aceleración tiene la bola y cuál es la magnitud de la fuerza de fricción sobre ésta? Trate la bola como esfera sólida uniforme, despreciando los agujeros.

SOLUCIÓN

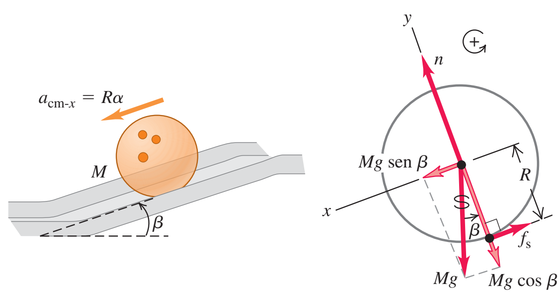
IDENTIFICAR: Las incógnitas son la aceleración del centro de masa de la bola y la magnitud de la fuerza de fricción. El diagrama de cuerpo libre de la figura 10.19b muestra que sólo la fuerza de fricción ejerce una torca en torno al centro de masa.

PLANTEAR: Al igual que en el ejemplo 10.6, usaremos la ecuación (10.12) para describir el movimiento traslacional; y la ecuación (10.13), para el movimiento rotacional.

10.19 Una bola de bolos baja rodando una rampa.

a) La bola de bolos

b) Diagrama de cuerpo libre de la bola de bolos



continúa

EJECUTAR: De la tabla 9.2, el momento de inercia de una esfera sólida es $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$. Las ecuaciones de movimiento para traslación y para rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa son, respectivamente,

$$\sum F_x = Mg\,\mathrm{sen}\,\beta + (-f) = Ma_{\mathrm{cm}\text{-}x} \qquad (10.17)$$

$$\sum \tau_z = fR = I_{\mathrm{cm}}\alpha_z = \left(\frac{2}{5}MR^2\right)\alpha_z \qquad (10.18)$$

Si la bola rueda sin resbalar, tenemos la misma relación cinemática $a_{\mathrm{cm}\text{-}x} = R\alpha_z$ que en el ejemplo 10.6. Usamos esto para eliminar α_z de la ecuación (10.18):

$$fR = \frac{2}{5}MRa_{\mathrm{cm}\text{-}x}$$

Ésta y la ecuación (10.17) son dos ecuaciones para dos incógnitas, $a_{\mathrm{cm}\text{-}x}$ y f. Despejamos f de la ecuación (10.17), sustituimos en la ecuación anterior para eliminar f y luego despejamos $a_{\mathrm{cm}\text{-}x}$ para obtener

$$a_{\mathrm{cm}\text{-}x} = \frac{5}{7}g\,\mathrm{sen}\,\beta$$

La aceleración es $\frac{5}{7}$ de lo que sería si la bola pudiera *deslizarse* sin fricción por la rampa, como el trineo del ejemplo 5.10 (sección 5.2). Por último, sustituimos esto en la ecuación (10.17) y despejamos f:

$$f = \frac{2}{7}Mg\,\mathrm{sen}\,\beta$$

EVALUAR: Como la bola no resbala en el punto de contacto instantáneo con la rampa, f es una fuerza de fricción *estática*; evita el deslizamiento y da a la bola su aceleración angular. Podemos deducir una ecuación para el coeficiente de fricción estática μ_s mínimo necesario para evitar el deslizamiento. La fuerza normal es $n = Mg\cos\beta$. La fuerza máxima de fricción estática es $\mu_s n$, así que el coeficiente de fricción debe ser de, por lo menos,

$$\mu_s = \frac{f}{n} = \frac{\frac{2}{7}Mg\,\mathrm{sen}\,\beta}{Mg\cos\beta} = \frac{2}{7}\tan\beta$$

Si el plano no está muy inclinado, β es pequeña, y no se requiere un valor de μ_s grande para evitar el deslizamiento. Al aumentar el ángulo, aumenta el valor requerido de μ_s, como indicaría la intuición. Si la bola comienza a resbalar, las ecuaciones (10.17) y (10.18) siguen siendo válidas; pero ya no se cumple que $v_{\mathrm{cm}\text{-}x} = R\omega_z$ y $a_{\mathrm{cm}\text{-}x} = R\alpha_z$; sólo tenemos dos ecuaciones para tres incógnitas ($a_{\mathrm{cm}\text{-}x}$, α_z y f). La resolución del problema de rodamiento *con* deslizamiento requiere considerar la fricción *cinética* (véase el problema de desafío 10.101).

Si la bola desciende una distancia vertical h al bajar por la rampa, su desplazamiento sobre la rampa es $h/\mathrm{sen}\,\beta$. El lector deberá ser capaz de demostrar que la rapidez de la bola en la base de la rampa sería $v_{\mathrm{cm}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$, que es el resultado que obtuvimos en el ejemplo 10.5 con $c = \frac{2}{5}$.

Si la bola rodara de *subida*, la fuerza de fricción también estaría dirigida pendiente arriba, como en la figura 10.19b. ¿Sabe usted por qué?

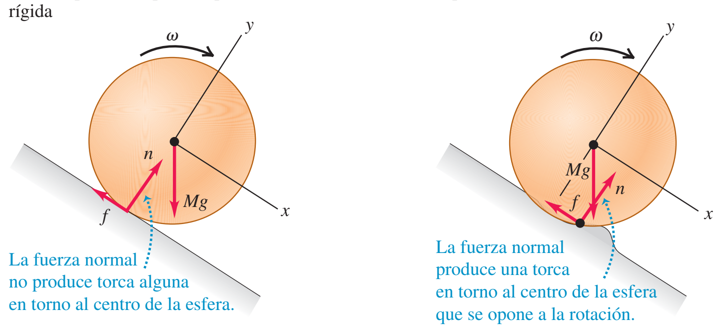
Fricción de rodamiento

En el ejemplo 10.5 dijimos que podemos despreciar la fricción de rodamiento, si tanto el cuerpo como la superficie sobre la que rueda son perfectamente rígidos. En la figura 10.20a una esfera perfectamente rígida baja rodando una pendiente perfectamente rígida. La línea de acción de la fuerza normal pasa por el centro de la esfera, así que la torca es cero; no hay deslizamiento en el punto de contacto, así que la fricción no efectúa trabajo. La figura 10.20b muestra una situación más realista donde la superficie "se amontona" delante de la esfera y ésta rueda en una zanja poco profunda. Debido a tales deformaciones, las fuerzas de contacto sobre la esfera ya no actúan en un solo punto, sino en un área, concentrándose en el frente de la esfera como se indica. En consecuencia, la fuerza normal ejerce ahora una torca que se opone a la rotación. Además, hay cierto deslizamiento de la esfera en la superficie debido a la deformación, causando pérdida de energía mecánica. La combinación de estos dos efectos es el fenómeno de *fricción de rodamiento*, que también ocurre si el cuerpo que rueda es deformable, como el neumático de un automóvil. Es común que el cuerpo que rueda y la superficie tengan la suficiente rigidez como para despreciar la fricción de rodamiento, y esto es lo que hemos hecho en los ejemplos de la sección.

10.20 Rodamiento descendente sobre a) una superficie perfectamente rígida y b) una superficie deformable. En el inciso b), la deformación se muestra muy exagerada.

a) Esfera perfectamente rígida que baja rodando por una superficie perfectamente rígida

b) Esfera rígida que rueda sobre una superficie deformable



Evalúe su comprensión de la sección 10.3 Suponga que el cilindro sólido que utilizó como yoyo en el ejemplo 10.6 se remplaza con un cilindro hueco de los mismos masa y radio. *a*) La aceleración del yoyo i) aumentará, ii) disminuirá o iii) permanecerá igual? *b*) La tensión en el cordel i) aumentará, ii) disminuirá o iii) permanecerá igual?

10.4 Trabajo y potencia en movimiento rotacional

Cuando pedaleamos una bicicleta, aplicamos fuerzas a un cuerpo en rotación y efectuamos trabajo sobre él. Algo similar ocurre en otras situaciones de la vida real, como el eje de un motor que gira, e impulsa una herramienta de potencia o un vehículo. Podemos expresar el trabajo en términos de la torca y el desplazamiento angular.

Suponga que una fuerza tangencial $\vec{F}_{\text{tan}}$ actúa en el borde de un disco pivoteado; por ejemplo, una niña que corre empujando un carrusel sencillo (figura 10.21a). La rueda gira un ángulo infinitesimal $d\theta$ alrededor de un eje fijo durante un tiempo infinitesimal dt (figura 10.21b). El trabajo dW efectuado por $\vec{F}_{\text{tan}}$ mientras un punto del borde se mueve una distancia ds es $dW = F_{\text{tan}}\, ds$. Si $d\theta$ se mide en radianes, entonces, $ds = R\, d\theta$ y

$$dW = F_{\text{tan}} R\, d\theta$$

Ahora $F_{\text{tan}}R$ es la *torca* τ_z debido a la fuerza $\vec{F}_{\text{tan}}$, así que

$$dW = \tau_z\, d\theta \qquad (10.19)$$

El trabajo total W efectuado por la torca durante un desplazamiento angular de θ_1 a θ_2 es

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z\, d\theta \qquad \text{(trabajo efectuado por una torca)} \qquad (10.20)$$

Si la torca es *constante* y el cambio de ángulo es finito $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$,

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta \quad \text{(trabajo efectuado por una torca constante)} \qquad (10.21)$$

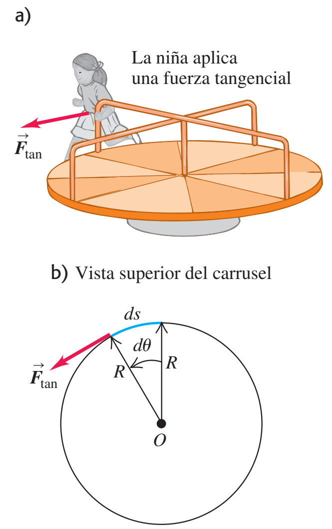
El trabajo efectuado por una torca *constante* es el producto de la torca y el desplazamiento angular. Si la torca se expresa en $(\text{N} \cdot \text{m})$ y el desplazamiento angular en radianes, el trabajo está en joules. La ecuación (10.21) es el análogo rotacional de la ecuación (6.1), $W = Fs$, y la ecuación (10.20) es el análogo de la ecuación (6.7), $W = \int F_x\, dx$, para el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento rectilíneo.

Si la fuerza de la figura 10.21 tuviera una componente axial (paralela al eje de rotación) o radial (dirigida hacia el eje o alejándose de éste), dicha componente no efectuaría trabajo, porque el desplazamiento del punto de aplicación sólo tiene componente tangencial. Una componente de fuerza axial o radial tampoco contribuiría a la torca alrededor del eje de rotación, así que las ecuaciones (10.20) y (10.21) son correctas para *cualquier* fuerza, independientemente de sus componentes.

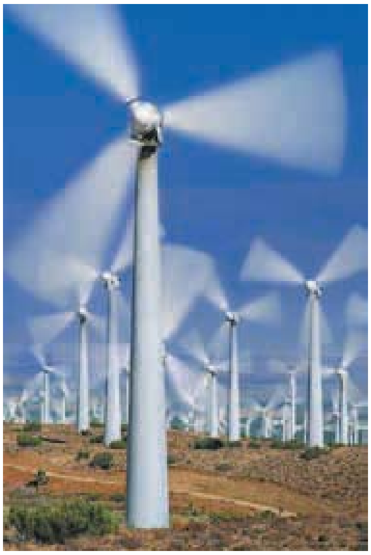
Si una torca efectúa trabajo sobre un cuerpo rígido que gira, la energía cinética cambia en una cantidad igual a ese trabajo. Podemos demostrar esto usando exactamente el mismo procedimiento que en las ecuaciones (6.11) a (6.13) para la energía cinética traslacional una partícula. Sea τ_z la torca neta sobre el cuerpo, de modo que, por la ecuación (10.7), $\tau_z = I\alpha_z$, suponiendo que el cuerpo es rígido y, por lo tanto, tiene momento de inercia I constante. Transformamos el integrando de la ecuación (10.20) en una integral sobre ω_z así:

$$\tau_z d\theta = (I\alpha_z)\, d\theta = I\frac{d\omega_z}{dt}\, d\theta = I\frac{d\theta}{dt}\, d\omega_z = I\omega_z\, d\omega_z$$

10.21 Una fuerza tangencial aplicada a un cuerpo en rotación efectúa trabajo.



10.22 La energía cinética rotacional de un aerogenerador es igual al trabajo total efectuado para ponerlo a girar.



Dado que τ_z es la torca total, la integral de la ecuación (10.20) es el trabajo *total* efectuado sobre el cuerpo rígido en rotación. Así, la ecuación se convierte en

$$W_{tot} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z \, d\omega_z = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad (10.22)$$

El cambio de energía cinética rotacional de un cuerpo *rígido* es igual al trabajo efectuado por fuerzas ejercidas desde afuera del cuerpo (figura 10.22). Esta ecuación es análogo a la ecuación (6.13), el teorema trabajo-energía para una partícula.

¿Qué hay con la *potencia* asociada al trabajo efectuado por una torca sobre un cuerpo en rotación? Si dividimos ambos miembros de la ecuación (10.19) entre el intervalo dt durante el que se da el desplazamiento angular:

$$\frac{dW}{dt} = \tau_z \frac{d\theta}{dt}$$

Sin embargo, dW/dt es la rapidez con que se efectúa trabajo, o *potencia* P, y $d\theta/dt$ es velocidad angular ω_z, así que

$$P = \tau_z \omega_z \qquad (10.23)$$

Si una torca τ_z (con respecto al eje de rotación) actúa sobre un cuerpo que gira con velocidad angular ω_z, su potencia (rapidez con que efectúa trabajo) es el producto de τ_z y ω_z. Esto es el análogo de la relación $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ que desarrollamos en la sección 6.4 para el movimiento de partículas.

Ejemplo 10.8 Potencia de motores y torca

La potencia desarrollada por el motor de un automóvil se anuncia como 200 hp a 6000 rpm. Calcule la torca correspondiente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la relación entre potencia, velocidad angular y la torca (la incógnita).

PLANTEAR: Nos dan la potencia desarrollada P y la velocidad angular ω_z, así que podemos obtener la torca con la ecuación (10.23).

EJECUTAR: Primero debemos convertir la potencia a watts, y la velocidad angular a rad/s:

$$P = 200 \text{ hp} = 200 \text{ hp}\left(\frac{746 \text{ W}}{1 \text{ hp}}\right) = 1.49 \times 10^5 \text{ W}$$

$$\omega_z = 6000 \text{ rev/min} = \left(\frac{6000 \text{ rev}}{1 \text{ min}}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)$$
$$= 628 \text{ rad/s}$$

Por la ecuación (10.23),

$$\tau_z = \frac{P}{\omega_z} = \frac{1.49 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m/s}}{628 \text{ rad/s}} = 237 \text{ N}\cdot\text{m}$$

EVALUAR: Podríamos aplicar esta torca usando una llave de tuercas de 0.25 m de largo y aplicando una fuerza de 948 N (213 lb) al extremo de su mango. ¿Podría el lector hacerlo?

Ejemplo 10.9 Cálculo de potencia a partir de la torca

Un motor eléctrico ejerce una torca constante de $10 \text{ N}\cdot\text{m}$ sobre una piedra de amolar montada en un eje. El momento de inercia de la piedra es de $2.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ y el sistema parte del reposo. Calcule el trabajo efectuado por el motor en 8.0 segundos y la energía cinética al final de este lapso. ¿Qué potencia media desarrolló el motor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que la torca es constante, la piedra de amolar tiene una aceleración angular constante α_z. Si podemos calcular el valor de α_z, obtendremos el ángulo $\Delta\theta$ que la piedra gira en 8 s [lo cual, por la ecuación (10.21), nos da el trabajo efectuado W] y la velocidad angular ω_z en ese momento (que nos da la energía cinética K). Podemos obtener la potencia media P_{med} dividiendo el trabajo efectuado entre el tiempo.

PLANTEAR: Usamos la versión rotacional de la segunda ley de Newton, $\sum\tau_z = I\alpha_z$, para obtener la aceleración angular α_z. Entonces usamos las ecuaciones de cinemática de la sección 9.2 para calcular $\Delta\theta$ y ω_z y a partir de estos valores calcular W, K y P_{med}.

EJECUTAR: Tenemos $\sum\tau_z = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$ (la única torca que actúa se debe al motor) e $I = 2.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, así que, por $\sum\tau_z = I\alpha_z$, la aceleración angular es de 5.0 rad/s^2. Por la ecuación (9.11), el ángulo total que el sistema gira en 8.0 s es

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_z t^2 = \frac{1}{2}(5.0 \text{ rad/s}^2)(8.0 \text{ s})^2 = 160 \text{ rad}$$

y el trabajo total efectuado por la torca es

$$W = \tau_z \Delta\theta = (10\ \text{N}\cdot\text{m})(160\ \text{rad}) = 1600\ \text{J}$$

Por las ecuaciones (9.7) y (9.17), la velocidad angular y la energía cinética en $t = 8.0$ s son

$$\omega_z = \alpha_z t = (5.0\ \text{rad/s}^2)(8.0\ \text{s}) = 40\ \text{rad/s}$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega_z^2 = \frac{1}{2}(2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(40\ \text{rad/s})^2 = 1600\ \text{J}$$

La energía cinética inicial era cero, de manera que el trabajo efectuado es igual al incremento en la energía cinética [véase la ecuación (10.22)].

La potencia media es

$$P_{\text{med}} = \frac{1600\ \text{J}}{8.0\ \text{s}} = 200\ \text{J/s} = 200\ \text{W}$$

EVALUAR: Podemos comprobar el valor que obtuvimos para la potencia *media* considerando la potencia *instantánea*, $P = \tau_z\omega_z$. Observe que, dado que ω_z aumenta continuamente, P también aumenta continuamente; su valor es cero en $t = 0$ y aumenta a (10 N · m) (40 rad/s) = 400 W en $t = 8.0$ s. La velocidad angular y la potencia aumentan uniformemente con el tiempo, así que la potencia *media* es la mitad de este valor máximo, es decir, 200 W.

Evalúe su comprensión de la sección 10.4 Se aplican torcas iguales a dos cilindros distintos, uno de los cuales tiene un momento de inercia dos veces mayor que el del otro. Los dos cilindros están inicialmente en reposo. Después de una rotación completa, ¿cuál cilindro tiene mayor energía cinética? i) El cilindro con el momento de inercia mayor; ii) el cilindro con el momento de inercia menor; iii) ambos cilindros tienen la misma energía cinética.

10.5 Momento angular

Todas las cantidades rotacionales que hemos visto en los capítulos 9 y 10 son análogas a un momento lineal o cantidad en el movimiento traslacional de una partícula. El análogo del momento lineal o *cantidad de movimiento* de una partícula en movimiento rotacional, es el **momento angular**, una cantidad vectorial denotada con $\vec{L}$. Su relación con el momento lineal o cantidad de movimiento $\vec{p}$ (que a veces llamaremos *cantidad de movimiento lineal* o momento lineal por claridad) es exactamente la misma que entre la torca y la fuerza, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Para una partícula de masa constante m, velocidad $\vec{v}$, momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$, y vector de posición $\vec{r}$ relativo al origen O de un marco inercial, definimos el momento angular $\vec{L}$ como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \text{(momento angular de una partícula)} \qquad (10.24)$$

El valor de $\vec{L}$ depende del origen O elegido, ya que en él interviene el vector de posición de la partícula relativo al origen. Las unidades del momento angular son kg · m²/s.

En la figura 10.23, una partícula se mueve en el plano xy; se muestran su vector de posición $\vec{r}$ y su momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. El vector momento angular $\vec{L}$ es perpendicular al plano xy. La regla de la mano derecha para productos vectoriales nos indica que su dirección es en el eje $+z$, y su magnitud es

$$L = mvr\,\text{sen}\,\phi = mvl \qquad (10.25)$$

donde l es la distancia perpendicular desde la línea de $\vec{v}$ a O. Esta distancia hace las veces de "brazo de palanca" para el vector de momento lineal.

Si una fuerza neta $\vec{F}$ actúa sobre una partícula, cambian su velocidad y su momento lineal, y también puede cambiar su momento angular. Podemos demostrar que la *rapidez de cambio* del momento angular es igual a la torca de la fuerza neta. Derivamos la ecuación (10.24) con respecto al tiempo usando la regla de la derivada de un producto:

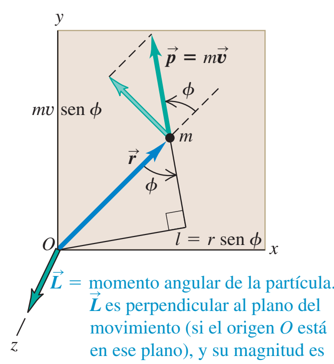
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

El primer término es cero porque contiene el producto vectorial de $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ consigo mismo. En el segundo término sustituimos $m\vec{a}$ por la fuerza neta $\vec{F}$, obteniendo

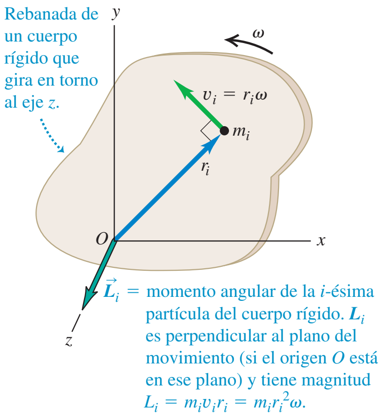
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad \text{(para una partícula sobre la que actúa una fuerza neta } \vec{F}\text{)} \qquad (10.26)$$

La rapidez de cambio del momento angular de una partícula es igual a la torca de la fuerza neta que actúa sobre ella. Compare este resultado con la ecuación

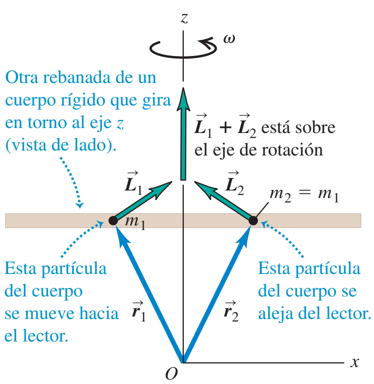
10.23 Cálculo del momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$ de una partícula de masa m que se mueve en el plano xy.



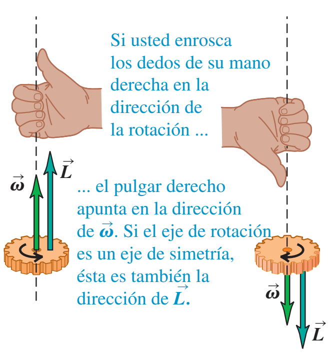
10.24 Cálculo del momento angular de una partícula de masa m_i en un cuerpo rígido que gira con rapidez angular ω. (Compare con la figura 10.23.)



10.25 Dos partículas con la misma masa están situadas simétricamente a cada lado del eje de rotación de un cuerpo rígido. Aunque los vectores de momento angular $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ de las dos partículas no están a lo largo del eje de rotación, su suma vectorial $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$ sí lo está.



10.26 En la rotación alrededor de un eje de simetría, $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$ son paralelas y están sobre el eje. Las direcciones de ambos vectores están dadas por la regla de la mano derecha (compare con la figura 9.5).



(8.3), que dice que la rapidez de cambio $d\vec{p}/dt$ de la cantidad de movimiento *lineal* o *momento lineal* de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre ella.

Momento angular de un cuerpo rígido

Podemos usar la ecuación (10.25) para calcular el momento angular total de un *cuerpo rígido* que gira en torno al eje z con rapidez angular ω. Consideremos primero una rebanada del cuerpo que está en el plano xy (figura 10.24). Cada partícula de la rebanada se mueve en un círculo centrado en el origen, y en cada instante su velocidad $\vec{v}_i$ es perpendicular a su vector de posición $\vec{r}_i$, como se indica. Por consiguiente, en la ecuación (10.25), $\phi = 90°$ para toda partícula. Una partícula de masa m_i que está a una distancia r_i de O tiene una rapidez v_i igual a $r_i\omega$. Por la ecuación (10.25), la magnitud L_i de su momento angular es

$$L_i = m_i(r_i\omega)r_i = m_i r_i^2 \omega \tag{10.27}$$

La dirección del momento angular de cada partícula, dada por la regla de la mano derecha para el producto vectorial, es sobre el eje $+z$.

El momento angular *total* de la rebanada que está en el plano xy es la suma $\sum L_i$ de los momentos angulares L_i de las partículas. Haciendo la sumatoria de la ecuación (10.27), tenemos

$$L = \sum L_i = \left(\sum m_i r_i^2\right)\omega = I\omega$$

donde I es el momento de inercia de la rebanada alrededor del eje z.

Podemos efectuar este mismo cálculo para las demás rebanadas del cuerpo, todas paralelas al plano xy. Para los puntos que no están en ese plano, surge una complicación porque los vectores $\vec{r}$ tienen componentes en la dirección z además de las direcciones x y y; esto da al momento angular de cada partícula una componente perpendicular al eje z. Pero *si el eje z es un eje de simetría*, las componentes perpendiculares de partículas en lados opuestos de este eje suman cero (figura 10.25). Así, cuando un cuerpo gira alrededor de un eje de simetría, su vector de momento angular $\vec{L}$ queda sobre el eje de simetría y su magnitud es $L = I\omega$.

El vector de velocidad angular $\vec{\omega}$ también está sobre el eje de rotación, como vimos al final de la sección 9.1. Así, para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría, $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ tienen la misma dirección (figura 10.26), y tenemos la relación *vectorial*

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{(para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría)} \tag{10.28}$$

Por la ecuación (10.26), la rapidez de cambio del momento angular de una partícula es igual a la torca de la fuerza neta que actúa sobre ella. Para cualquier sistema de partículas (incluidos cuerpos rígidos y no rígidos), la rapidez de cambio del momento *total* es igual a la suma de las torcas de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas. Las torcas de las fuerzas *internas* suman cero si las fuerzas actúan sobre la línea que va de una partícula a otra, como en la figura 10.8, así que la suma de las torcas sólo incluye las torcas de las fuerzas *externas*. (Hubo una cancelación similar cuando hablamos del movimiento del centro de masa en la sección 8.5.) Si el momento angular total del sistema de partículas es $\vec{L}$ y la suma de las torcas externas es $\sum\vec{\tau}$, entonces

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(para cualquier sistema de partículas)} \tag{10.29}$$

Por último, si el sistema de partículas es un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría (el eje z), $L_z = I\omega_z$ e I es constante. Si el eje tiene dirección fija en el espacio, los vectores $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ sólo cambian en magnitud, no de dirección. En tal caso, $dL_z/dt = I\,d\omega_z/dt = I\alpha_z$, es decir,

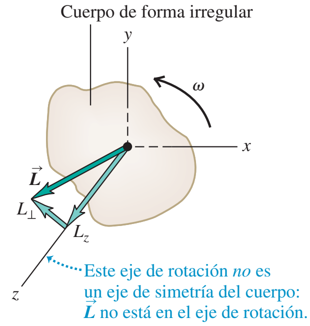
$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

que es otra vez nuestra relación básica para la dinámica de la rotación de un cuerpo rígido. Si el cuerpo *no* es rígido, I puede cambiar; en tal caso, L cambiará aun si ω es constante. Para un cuerpo que no es rígido, la ecuación (10.29) seguirá siendo válida, pero la ecuación (10.7) no.

Si el eje de rotación *no* es un eje de simetría, el momento angular en general *no* es paralela al eje (figura 10.27). Al girar el cuerpo, el vector de momento angular $\vec{L}$ describe un cono alrededor del eje de rotación. Dado que $\vec{L}$ cambia, debe estar actuando una torca externa neta sobre el cuerpo, aún cuando la magnitud de la velocidad angular ω sea constante. Si el cuerpo es una rueda desbalanceada de un automóvil, esta torca provendrá de la fricción en los cojinetes, que hace que éstos se desgasten. "Balancear" una rueda implica distribuir la masa de modo que el eje de rotación sea un eje de simetría; así, $\vec{L}$ apuntará a lo largo del eje de rotación y no se requerirá una torca neta para que la rueda siga girando.

En rotación de eje fijo, solemos usar el término "momento angular del cuerpo" para referirnos sólo a la *componente* de $\vec{L}$ sobre el eje de rotación del cuerpo (el eje z en la figura 10.27), con un signo positivo o negativo para indicar el sentido de rotación, igual que con la velocidad angular.

10.27 Si el eje de rotación de un cuerpo rígido no es un eje de simetría, $\vec{L}$ no está en general sobre el eje de rotación. Aun si $\vec{\omega}$ es constante, la dirección de $\vec{L}$ cambia, y se requiere una torca neta para mantener la rotación.



Ejemplo 10.10 Momento angular y torca

Una hélice de turbina del motor a reacción de un avión tiene un momento de inercia de $2.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ alrededor de su eje de rotación. Al arrancar la turbina, su velocidad angular en función del tiempo es

$$\omega_z = (40\ \mathrm{rad/s^3})t^2$$

a) Calcule el momento angular de la hélice en función del tiempo y su valor en $t = 3.0$ s. *b*) Determine la torca neta que actúa sobre la hélice en función del tiempo, y su valor en $t = 3.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que un ventilador, la hélice de una turbina gira alrededor de un eje de simetría (el eje z). Por lo tanto, el vector de momento angular tiene sólo una componente z (L_z), que podemos determinar a partir de la velocidad angular ω_z. Puesto que la dirección del momento angular es constante, la torca neta también tiene sólo una componente τ_z a lo largo del eje de rotación; esto es igual a la derivada de L_z con respecto al tiempo.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (10.28) para obtener L_z a partir de ω_z, y la ecuación (10.29) para calcular τ_z a partir de la derivada de L_z con respecto al tiempo.

EJECUTAR: *a*) La componente del momento angular está sobre el eje de rotación (z):

$$L_z = I\omega_z = (2.5\ \mathrm{kg\cdot m^2})(40\ \mathrm{rad/s^3})t^2 = (100\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^3})t^2$$

(Omitimos "rad" de la respuesta porque el radián es una cantidad adimensional.) En $t = 3.0$ s, $L_z = 900\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$.

b) Por la ecuación (10.29), la componente de la torca neta en el eje de rotación es

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = (100\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^3})(2t) = (200\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^3})t$$

En el instante $t = 3.0$ s,

$$\tau_z = (200\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^3})(3.0\ \mathrm{s}) = 600\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^2} = 600\ \mathrm{N\cdot m}$$

EVALUAR: Para comprobar nuestro resultado, vemos que la aceleración angular de la hélice es $\alpha_z = d\omega_z/dt = (40\ \mathrm{rad/s^2})(2t) = (80\ \mathrm{rad/s^2})t$. Por el equivalente rotacional de la segunda ley de Newton, la torca que actúa sobre la hélice es $\tau_z = I\alpha_z = (2.5\ \mathrm{kg\cdot m^2})(80\ \mathrm{rad/s^2})t = (200\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^3})t$, lo que coincide con nuestro cálculo anterior.

Evalúe su comprensión de la sección 10.5 Una pelota está pegada al extremo de un cordel. Usted sostiene el cordel por el otro extremo y da vueltas a la pelota sobre su mano. *a*) Si la rapidez de la pelota es constante, ¿es constante su momento lineal $\vec{p}$? ¿Por qué? *b*) ¿Es constante su momento angular? ¿Por qué?

10.6 Conservación del momento angular

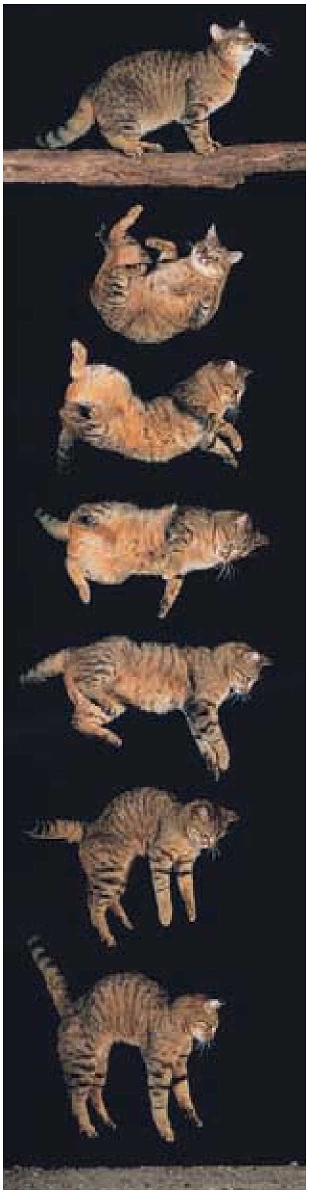
Acabamos de ver que el momento angular puede servir para expresar de otro modo el principio dinámico básico del movimiento rotacional. También es la base del **principio de conservación del momento angular**. Al igual que la conservación de la energía y del momento lineal, este principio es una ley de conservación universal, válida en todas las escalas, desde los sistemas atómicos y nucleares hasta los movimientos de las galaxias. Este principio es consecuencia directa de la ecuación (10.29): $\sum\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Si $\sum\vec{\tau} = \mathbf{0}$, entonces $d\vec{L}/dt = \mathbf{0}$, y $\vec{L}$ es constante.

ActivPhysics ONLINE

7.14 La bola le pega al bate

Si la torca externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante (se conserva).

10.28 Un gato que cae tuerce diversas partes de su cuerpo en direcciones distintas para caer parado. En todo momento durante este proceso, el momento angular total del gato sigue siendo cero.



Un trapecista, un clavadista y un patinador que hacen piruetas en la punta de un patín aprovechan este principio. Suponga que una trapecista acaba de separarse de un columpio con los brazos y las piernas extendidos, y girando en sentido antihorario alrededor de su centro de masa. Al encoger los brazos y las piernas, su momento de inercia I_{cm} con respecto a su centro de masa cambia de un valor grande I_1 a uno mucho menor I_2. La única fuerza externa que actúa sobre ella es su peso, que no tiene torca con respecto a un eje que pasa por su centro de masa. Así, su momento angular $L_z = I_{cm}\omega_z$ permanece constante, y su velocidad angular ω_z aumenta al disminuir I_{cm}. Esto es,

$$I_1\omega_{1z} = I_2\omega_{2z} \qquad \text{(torca externa neta cero)} \tag{10.30}$$

Cuando una patinadora o bailarina gira con los brazos estirados y luego los encoge, su velocidad angular aumenta al disminuir su momento de inercia. En ambos casos, se conserva el momento angular en un sistema donde la torca externa neta es cero.

Si un sistema tiene varias partes, las fuerzas internas que esas partes ejercen entre sí causan cambios en sus momentos angulares; pero el momento *total* no cambia. Por ejemplo, considere dos cuerpos A y B que interactúan entre sí pero con nadie más, como los astronautas de la sección 8.2 (figura 8.8). Suponga que el cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ sobre el cuerpo B; la torca correspondiente (con respecto al punto que elijamos) es $\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B}$. Según la ecuación (10.29), esta torca es igual a la rapidez de cambio del momento angular de B:

$$\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{L}_B}{dt}$$

Al mismo tiempo, el cuerpo B ejerce una fuerza $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ sobre el cuerpo A, con una torca correspondiente $\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A}$, y

$$\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

Por la tercera ley de Newton, $\vec{F}_{B \text{ sobre } A} = -\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$. Además, si las fuerzas actúan en la misma línea, como en la figura 10.8, sus brazos de palanca con respecto al eje elegido son iguales. Así, las *torcas* de estas dos fuerzas son iguales y opuestos, y $\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A} = -\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B}$. Por lo tanto, si sumamos las ecuaciones anteriores tenemos

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \frac{d\vec{L}_B}{dt} = \mathbf{0}$$

o bien, dado que $\vec{L}_A + \vec{L}_B$ es el momento angular *total* $\vec{L}$ del sistema,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathbf{0} \qquad \text{(torca externa neta cero)} \tag{10.31}$$

Es decir, el momento angular total del sistema es constante. Las torcas de las fuerzas internas pueden transferir momento angular de un cuerpo al otro; pero no pueden cambiar el momento angular *total* del sistema (figura 10.28).

Ejemplo 10.11 Cualquiera puede bailar ballet

Un ágil profesor de física se para en el centro de una mesita giratoria con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5.0 kg en cada mano (figura 10.29). Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2.0 s. Calcule la nueva velocidad angular del profesor si él pega las mancuernas a su abdomen. Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de $3.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ con los brazos estirados, y baja a $2.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ si pone las manos en el abdomen. Las mancuernas están a 1.0 m del eje al principio y a 0.20 m al final; trátelas como partículas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Si despreciamos la fricción en la mesita giratoria, ninguna torca externa actuará alrededor del eje vertical (z) así que el momento angular con respecto a ese eje será constante.

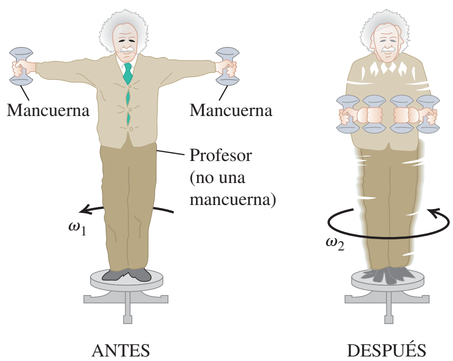
PLANTEAR: Usaremos la ecuación (10.30) para calcular la incógnita (la velocidad angular final ω_{2z}).

EJECUTAR: El momento de inercia del sistema es $I = I_{prof} + I_{manc}$. Cada mancuerna de masa m aporta mr^2 a I_{manc}, donde r es la distancia perpendicular del eje de rotación a la mancuerna. Inicialmente, tenemos

$$I_1 = 3.0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 + 2(5.0\ \text{kg})(1.0\ \text{m})^2 = 13\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_{1z} = \frac{1\ \text{rev}}{2.0\ \text{s}} = 0.50\ \text{rev/s}$$

10.29 Diversión con la conservación del momento angular.



El momento de inercia final es

$$I_2 = 2.2\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 + 2(5.0\ \text{kg})(0.20\ \text{m})^2 = 2.6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Por la ecuación (10.30), la velocidad angular final es

$$\omega_{2z} = \frac{I_1}{I_2}\omega_{1z} = \frac{13\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}{2.6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}(0.50\ \text{rev/s}) = 2.5\ \text{rev/s}$$

Es decir, la velocidad angular aumenta en un factor de 5, en tanto que el momento angular se mantiene constante. Observe que no tuvimos que cambiar "revoluciones" a "radianes" en este cálculo. ¿Por qué?

EVALUAR: Es útil examinar la manera en que cambia la energía cinética en este proceso. Para calcular la energía cinética, debemos expresar ω_1 y ω_2 en rad/s. (¿Por qué?) Tenemos $\omega_{1z} = (0.50\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 3.14\ \text{rad/s}$ y $\omega_{2z} = (2.5\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 15.7\ \text{rad/s}$. La energía cinética inicial es

$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_{1z}^2 = \frac{1}{2}(13\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(3.14\ \text{rad/s})^2 = 64\ \text{J}$$

y la energía cinética final es

$$K_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_{2z}^2 = \frac{1}{2}(2.6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(15.7\ \text{rad/s})^2 = 320\ \text{J}$$

La energía cinética adicional proviene del trabajo que el profesor realizó para pegar sus brazos y las mancuernas al abdomen.

Ejemplo 10.12 Un "choque" rotacional I

La figura 10.30 muestra dos discos. Uno (A) es un volante de motor; el otro (B), una placa de embrague sujeta a un eje de transmisión. Sus momentos de inercia son I_A e I_B. Inicialmente, los discos están girando con rapideces angulares constantes ω_A y ω_B, respectivamente. Luego, juntamos los discos con fuerzas que actúan sobre el eje, con la finalidad de no aplicar una torca a ningún disco. Los discos se frotan entre sí y finalmente alcanzan una rapidez angular final común ω. Deduzca una expresión para ω.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La única torca que actúa sobre cualquiera de los discos es el aplicado por el otro disco; no hay torcas externas. Así, el momento angular total del sistema es la misma antes y después de juntarse los discos. Al final, giran como un solo cuerpo con momento de inercia total $I = I_A + I_B$ y rapidez angular ω, que es nuestra incógnita.

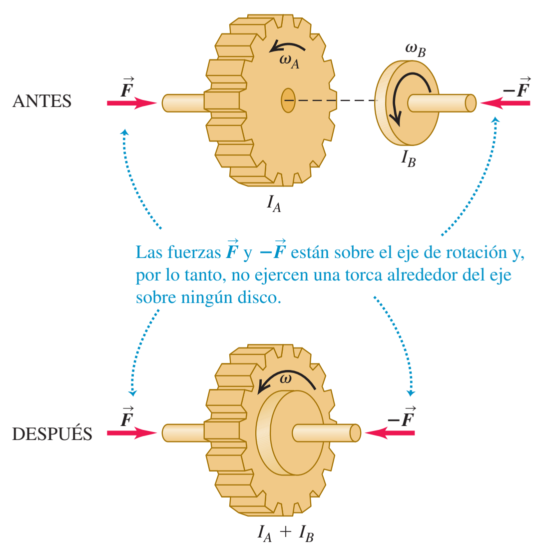
PLANTEAR: La figura 10.30 muestra que todas las velocidades angulares tienen la misma dirección, así que podemos considerar que ω_A, ω_B y ω son componentes de velocidad angular a lo largo del eje de rotación.

EJECUTAR: La conservación del momento angular da

$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega$$

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

10.30 Si la torca externa neta es cero, se conserva el momento angular.



continúa

EVALUAR: Este "choque" entre dos discos es similar a un choque totalmente inelástico (véase la sección 8.3). Cuando dos objetos en movimiento traslacional a lo largo del mismo eje se juntan y quedan adheridos, se conserva el momento lineal del sistema. En la situación de la figura 10.30, dos objetos en movimiento *rotacional* a lo largo del mismo eje se juntan y adhieren, y se conserva el momento *angular*. En un choque totalmente inelástico, disminuye la energía cinética del sistema. En el siguiente ejemplo veremos qué sucede con la energía cinética del "choque" de dos discos que giran.

Ejemplo 10.13 Un "choque" rotacional II

En el ejemplo 10.12, suponga que el volante A tiene masa de 2.0 kg, radio de 0.20 m y rapidez angular inicial de 50 rad/s (unas 500 rpm), y que la placa de embrague B tiene masa de 4.0 kg, radio de 0.10 m y rapidez angular inicial de 200 rad/s. Calcule la rapidez angular final común ω después de juntarse los discos. ¿Qué sucede con la energía cinética durante este proceso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Necesitamos calcular la energía cinética rotacional de cada disco antes del choque y su energía cinética combinada después del choque.

PLANTEAR: Usaremos el resultado del ejemplo 10.12 y la expresión $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ para la energía cinética rotacional.

EJECUTAR: Los momentos de inercia de los dos discos son

$$I_A = \frac{1}{2}m_A r_A^2 = \frac{1}{2}(2.0\ \text{kg})(0.20\ \text{m})^2 = 0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_B = \frac{1}{2}m_B r_B^2 = \frac{1}{2}(4.0\ \text{kg})(0.10\ \text{m})^2 = 0.020\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Del ejemplo 10.12, la rapidez angular final es

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$
$$= \frac{(0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(50\ \text{rad/s}) + (0.020\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(200\ \text{rad/s})}{0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 0.020\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$
$$= 100\ \text{rad/s}$$

La energía cinética antes del choque es

$$K_1 = \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2$$
$$= \frac{1}{2}(0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(50\ \text{rad/s})^2$$
$$+\frac{1}{2}(0.020\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(200\ \text{rad/s})^2$$
$$= 450\ \text{J}$$

La energía cinética después del choque es

$$K_2 = \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}(0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 0.020\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(100\ \text{rad/s})^2 = 300\ \text{J}$$

EVALUAR: Se perdió un tercio de la energía cinética inicial durante este "choque angular", el análogo rotacional de un choque totalmente inelástico. No deberíamos esperar que se conserve la energía cinética, aunque la fuerza externa neta y la torca sean cero, porque actúan fuerzas internas no conservadoras (de fricción) al frotarse los discos y acercarse gradualmente a una velocidad angular común.

Ejemplo 10.14 Momento angular en una acción policiaca

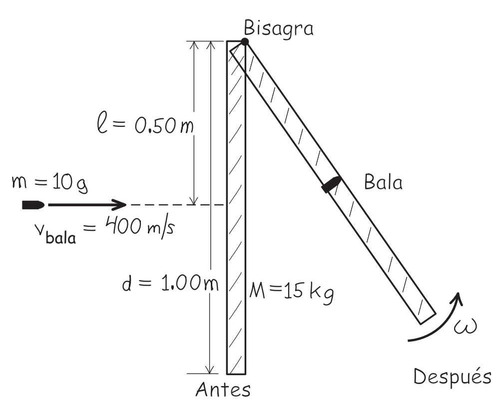
Una puerta de 1.00 m de ancho y masa de 15 kg tiene bisagras en un costado, de modo que puede girar sin fricción sobre un eje vertical. La puerta no está asegurada. Un policía dispara una bala de 10 g de masa con rapidez de 400 m/s al centro exacto de la puerta, en dirección perpendicular al plano de la puerta (figura 10.32). Calcule la rapidez angular de la puerta justo después de que la bala se incrusta en la puerta. ¿Se conserva la energía cinética?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Consideramos la puerta y la bala como un sistema. No hay torca externa alrededor del eje definido por las bisagras, así que se conserva el momento angular con respecto a este eje.

PLANTEAR: La figura 10.31 muestra nuestro esquema. El momento angular inicial está totalmente en la bala y está dada por la ecuación (10.25). El momento angular final es la de un cuerpo rígido formado por la puerta y la bala incrustada. Igualaremos estas dos cantidades y

10.31 Nuestro esquema para este problema.



despejaremos la rapidez angular ω de la puerta y la bala inmediatamente después del choque.

EJECUTAR: El momento angular inicial de la bala es:

$$L = mvl = (0.010\ \text{kg})(400\ \text{m/s})(0.50\ \text{m}) = 2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

El momento angular final es $I\omega$, donde $I = I_{\text{puerta}} + I_{\text{bala}}$. De la tabla 9.2, para una puerta de anchura d,

$$I_{\text{puerta}} = \frac{Md^2}{3} = \frac{(15\ \text{kg})(1.0\ \text{m})^2}{3} = 5.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia de la bala (con respecto al eje que pasa por las bisagras) es

$$I_{\text{bala}} = ml^2 = (0.010\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 = 0.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

La conservación del momento angular requiere que $mvl = I\omega$, es decir,

$$\omega = \frac{mvl}{I} = \frac{2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{5.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 0.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 0.40\ \text{rad/s}$$

El choque de la bala con la puerta es inelástico porque durante el impacto actúan fuerzas de fricción no conservadoras. Por lo tanto, no esperamos que se conserve la energía cinética. Comprobamos esto calculando las energías cinéticas inicial y final:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.010\ \text{kg})(400\ \text{m/s})^2 = 800\ \text{J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(5.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(0.40\ \text{rad/s})^2 = 0.40\ \text{J}$$

¡La energía cinética final es sólo 1/2000 del valor inicial!

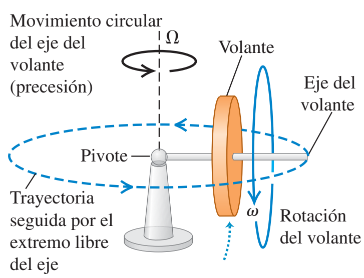
EVALUAR: La rapidez angular final de la puerta es muy baja: a 0.40 rad/s, la puerta tardará 3.9 s en oscilar 90° ($\pi/2$ radianes). ¿Le queda claro al lector que la rapidez aumentaría al doble, si la bala se disparara contra el borde de la puerta cerca de la perilla?

Evalúe su comprensión de la sección 10.6 Si los casquetes polares se derritieran totalmente por el calentamiento global, el hielo derretido se redistribuiría en toda la Tierra. Este cambio haría que la duración del día (el tiempo que la Tierra tarda en girar sobre su eje) i) aumentara, ii) disminuyera o iii) permaneciera igual. (*Sugerencia*: use ideas de momento angular. Suponga que el Sol, la Luna y los planetas ejercen torcas despreciables sobre la Tierra.)

10.7 Giróscopos y precesión

En todas las situaciones que hemos examinado en este capítulo, el eje de rotación se ha mantenido fijo o, si se ha movido, ha mantenido su dirección (como en el rodamiento sin deslizamiento). Se presentan diversos fenómenos físicos nuevos, algunos inesperados, si el eje de rotación puede cambiar de dirección. Por ejemplo, considere un giróscopo de juguete apoyado en un extremo (figura 10.32). Si lo sostenemos con el eje del volante horizontal y lo soltamos, el extremo libre del eje cae debido a la gravedad: si el volante *no* está girando. Pero si el volante *gira*, lo que sucede es muy distinto. Una posibilidad es un movimiento circular uniforme del eje en un plano horizontal, combinado con la rotación del volante alrededor del eje. Este sorprendente movimiento del eje, no intuitivo, se denomina **precesión**. La precesión se observa en la naturaleza, no sólo en máquinas giratorias como los giróscopos. En este momento la Tierra misma está en precesión: su eje de rotación (que pasa por los polos norte y sur) cambia lentamente de dirección, completando un ciclo de precesión cada 26,000 años.

10.32 Giróscopo apoyado en un extremo. El movimiento circular horizontal del volante se llama precesión. La rapidez angular de la precesión es Ω.

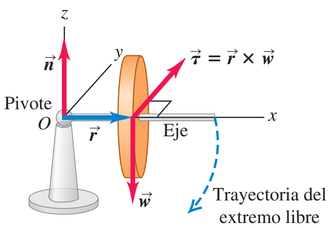


Cuando el volante y su eje están en reposo, caerán a la superficie de la mesa. Cuando el volante gira, éste y su eje "flotan" en el aire mientras se mueven en circulo alrededor del pivote.

Para estudiar el extraño fenómeno de la precesión, debemos recordar que la velocidad angular, el momento angular y la torca son cantidades *vectoriales*. En particular, necesitamos la relación general entre la torca neta $\sum\vec{\tau}$ que actúa sobre un cuerpo y la rapidez de cambio del momento angular del cuerpo $\vec{L}$, dada por la ecuación (10.29) $\sum\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Apliquemos primero esta ecuación al caso en que el volante *no* gira (figura 10.33a). Tomamos el origen O en el pivote y suponemos que el volante es simétrico, con masa M y momento de inercia I alrededor de su eje. El eje del volante inicialmente está sobre el eje x. Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el giróscopo son la fuerza normal $\vec{n}$ que actúa en el pivote (donde suponemos que no hay fricción) y el peso $\vec{w}$ del volante que actúa en su centro de masa, a una distancia r del pivote. La fuerza normal tiene torca cero con respecto al pivote, y el peso tiene una torca $\vec{\tau}$ en la dirección y (figura 10.33a). Al principio, no hay rotación y el momento

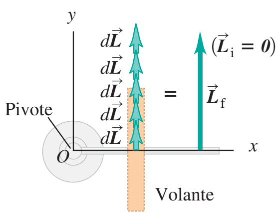
10.33 a) Si el volante de la figura 10.32 no está girando inicialmente, su momento angular inicial es cero. b) En cada intervalo sucesivo de tiempo dt, la torca produce un cambio $d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$ en el momento angular. El volante adquiere un momento angular $\vec{L}$ con la misma dirección que $\vec{\tau}$, y el eje del volante cae.

a) El volante que no gira cae



Cuando el volante no gira, su peso crea una torca alrededor del pivote, haciendo que este caiga una trayectoria circular hasta que su eje descansa en la superficie de la mesa.

b) Vista superior del volante que cae



Al caer el volante gira alrededor de pivote y, por ello, adquiere un momento angular $\vec{L}$. La *dirección* de $\vec{L}$ permanece constante.

angular inicial $\vec{L}_i$ es cero. Por la ecuación (10.29), el *cambio* $d\vec{L}$ el momento angular en un intervalo corto dt después de este instante es

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt \tag{10.32}$$

Este cambio es en la dirección y, la de $\vec{\tau}$. Al transcurrir cada intervalo adicional dt, el momento angular cambia en incrementos $d\vec{L}$ en la dirección y porque la dirección de la torca es constante (figura 10.33b). El aumento constante del momento angular horizontal implica que el giróscopo girará hacia abajo alrededor del eje y con rapidez creciente, hasta tirar la base o golpear la mesa en la que ésta descansa.

Veamos ahora qué sucede si el volante *está* girando inicialmente, de modo que el momento angular inicial $\vec{L}_i$ no es cero (figura 10.34a). Dado que el volante gira alrededor de su eje de simetría, $\vec{L}_i$ está sobre el eje. Sin embargo, cada cambio de momento angular $d\vec{L}$ es perpendicular al eje, porque la torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$ también lo es (figura 10.34b). Esto hace que cambie la *dirección* de $\vec{L}$ pero no su magnitud. Los cambios $d\vec{L}$ siempre están en el plano horizontal xy, así que el vector de momento angular y el eje del volante junto con el cual se mueve siempre son horizontales. En otras palabras, el eje no cae; sólo tiene precesión.

Si esto todavía le parece misterioso, imagine una pelota atada a un cordón. Si la pelota está inicialmente en reposo y tiramos del cordón, la pelota se moverá hacia nosotros. Pero si la bola se está moviendo inicialmente y tiramos continuamente del cordón en una dirección perpendicular al movimiento de la pelota, ésta se moverá en un círculo alrededor de nuestra mano; no se acercará a ella. En el primer caso, la pelota tiene cero momento lineal $\vec{p}$ al principio; cuando aplicamos una fuerza $\vec{F}$ hacia nosotros durante un tiempo dt, la pelota adquiere un momento lineal $d\vec{p} = \vec{F}\,dt$, también hacia nosotros. No obstante, si la pelota ya tiene un momento lineal $\vec{p}$, un cambio en el momento lineal $d\vec{p}$ perpendicular a $\vec{p}$ cambiará la dirección del movimiento, no la rapidez. Sustituya $\vec{p}$ por $\vec{L}$ y $\vec{F}$ por $\vec{\tau}$ en este argumento, y verá que la precesión es simplemente el análogo rotacional del movimiento circular uniforme.

En el instante que se muestra en la figura 10.34a, el giróscopo tiene momento angular $\vec{L}$. Un intervalo corto dt después, el momento angular es $\vec{L} + d\vec{L}$; el cambio infinitesimal en momento angular es $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$, perpendicular a $\vec{L}$. Como muestra el diagrama vectorial de la figura 10.35, esto implica que el eje de volante del giróscopo giró un ángulo pequeño $d\phi$ dado por $d\phi = |d\vec{L}|/|\vec{L}|$. La rapidez con que se mueve el eje, $d\phi/dt$, se denomina **rapidez angular de precesión**; denotando esta cantidad con Ω, tenemos

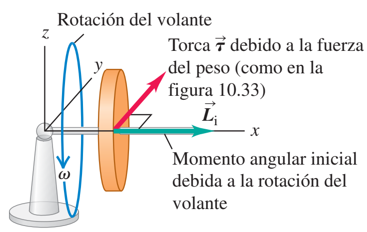
$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|/|\vec{L}|}{dt} = \frac{\tau_z}{L_z} = \frac{wr}{I\omega} \tag{10.33}$$

Así, la rapidez angular de precesión es *inversamente* proporcional a la rapidez angular de giro alrededor del eje. Un giróscopo que gira rápidamente tiene precesión lenta;

10.34 a) El volante está girando inicialmente con momento angular $\vec{L}_i$. Las fuerzas (que no se muestran) son las mismas que en la figura 10.33a. b) Puesto que el momento angular inicial no es cero, cada cambio $d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$ en el momento angular es perpendicular a $\vec{L}$. El resultado es que la magnitud de $\vec{L}$ no cambia, aunque su dirección cambia continuamente.

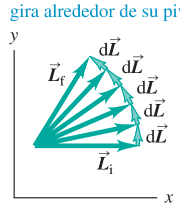
a) Volante giratorio

Cuando el volante gira, el sistema inicia con un momento angular $\vec{L}_i$ paralela al eje de rotación del volante.



b) Vista superior

Ahora el efecto de la torca es provocar el momento angular que tiene precesión alrededor del pivote. El giróscopo gira alrededor de su pivote sin caer.

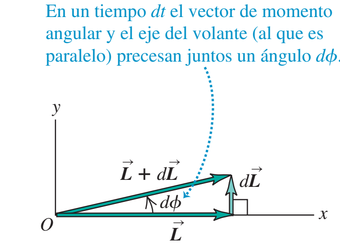


si la fricción en su cojinete hace que el volante se frene, ¡*se incrementa* la rapidez angular de precesión! La rapidez angular de precesión de la Tierra es muy lenta (1 rev/26,000 años), porque su momento angular L_z es grande y la troca τ_z debido a las influencias gravitacionales de la Luna y el Sol es relativamente pequeño.

Al precesar un giróscopo, su centro de masa describe un círculo de radio r en un plano horizontal. Su componente vertical de aceleración es cero, así que la fuerza normal hacia arriba $\vec{n}$ ejercida por el pivote debe ser igual en magnitud al peso. El movimiento circular del centro de masa con rapidez angular Ω requiere una fuerza $\vec{F}$ dirigida hacia el centro del círculo, con magnitud $F = M\Omega^2 r$. Esta fuerza también debe ser proporcionada por el pivote.

Un supuesto clave que hicimos en nuestro análisis del giróscopo fue que el vector momento angular $\vec{L}$ sólo está asociado a la rotación del volante y es puramente horizontal. Sin embargo, también habrá una componente vertical de momento angular asociada a la precesión del giróscopo. Al hacer caso omiso de esto, hemos supuesto tácitamente que la precesión es *lenta*, es decir, que la rapidez angular de precesión Ω es mucho menor que la rapidez angular de rotación ω. Como muestra la ecuación (10.33), un valor grande de ω automáticamente produce un valor pequeño de Ω, así que la aproximación es razonable. Cuando la precesión no es lenta, aparecen efectos adicionales, incluido un bamboleo vertical o *nutación* (oscilación) del eje del volante, superpuesto a la precesión. Podemos ver la nutación en un giróscopo cuando su rotación se hace lenta, de modo que Ω aumenta y la componente vertical de $\vec{L}$ ya no puede despreciarse.

10.35 Vista detallada de parte de la figura 10.34b.



Ejemplo 10.15 Giróscopo en precesión

La figura 10.36a es una vista superior de una rueda de giróscopo cilíndrica que un motor eléctrico puso a girar. El pivote está en O y la masa del eje es insignificante. *a*) Vista de arriba, ¿la precesión es en sentido horario o antihorario? *b*) Si una revolución de precesión tarda 4.0 s, ¿qué rapidez angular tiene la rueda?

SOLUCIÓN

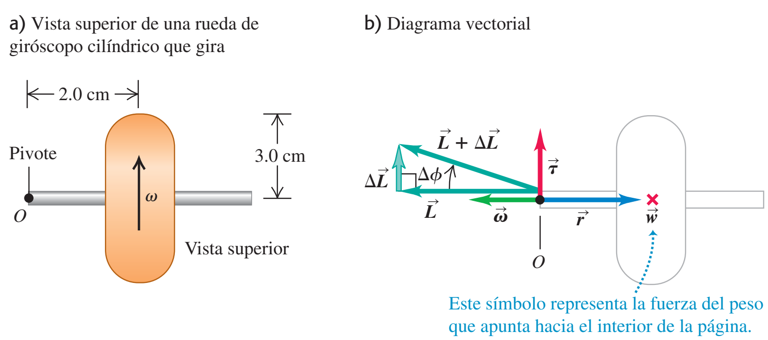
IDENTIFICAR: Esta situación es similar al volante de precesión que se muestra en la figura 10.34.

PLANTEAR: Determinaremos la dirección de precesión empleando la regla de la mano derecha como en la figura 10.34, que muestra el mismo tipo de giróscopo que la figura 10.36. Utilizaremos la relación entre rapidez angular de precesión Ω y la rapidez angular de giro ω, ecuación (10.33), para obtener el valor de ω.

EJECUTAR: *a*) La regla de la mano derecha indica que $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$ son a la izquierda (figura 10.36b). El peso $\vec{w}$ apunta hacia adentro de la página en esta vista superior y actúa en el centro de masa (denotado $\times$); la torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$ es hacia arriba de la página, lo mismo que $d\vec{L}/dt$. La adición de un pequeño $d\vec{L}$ al $\vec{L}$ que tenemos inicialmente altera la dirección de $\vec{L}$ como se muestra, así que la precesión es en sentido horario cuando se ve desde arriba.

b) ¡Tenga cuidado de no confundir ω y Ω! Tenemos que $\Omega = (1\text{ rev})/(4.0\text{ s}) = (2\pi\text{ rad})/(4.0\text{ s}) = 1.57\text{ rad/s}$. El peso es mg, y el

10.36 ¿Qué dirección y qué rapidez tiene la precesión del giróscopo?



continúa

momento de inercia alrededor del eje de simetría de un cilindro sólido de radio R es $I = \frac{1}{2}mR^2$. Despejando ω en la ecuación (10.33):

$$\omega = \frac{wr}{I\Omega} = \frac{mgr}{(mR^2/2)\Omega} = \frac{2gr}{R^2\Omega}$$

$$= \frac{2(9.8\ \text{m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m})}{(3.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2(1.57\ \text{rad/s})} = 280\ \text{rad/s} = 2600\ \text{rev/min}$$

EVALUAR: La rapidez angular de precesión Ω es mucho menor que la rapidez angular de rotación ω, así que tenemos un ejemplo de precesión lenta.

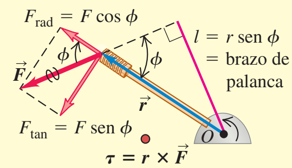
Evalúe su comprensión de la sección 10.7 Suponga que la masa del volante de la figura 10.34 se aumenta al doble pero todas las demás dimensiones y la rapidez angular de rotación no cambian. ¿Qué efecto tendría esto sobre la rapidez angular de precesión Ω? i) Ω aumentaría en un factor de 4; ii) se duplicaría Ω; iii) Ω no se vería afectada; iv) Ω se reduciría a la mitad; v) Ω se reduciría a la cuarta parte.

CAPÍTULO 10 RESUMEN

Torca: Cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un cuerpo, la torca de esa fuerza con respecto a un punto O tiene una magnitud dada por el producto de la magnitud F de la fuerza y el brazo de palanca l. En términos más generales, la torca es un vector $\vec{\tau}$ igual al producto vectorial de $\vec{r}$ (el vector de posición del punto donde actúa la fuerza) y $\vec{F}$. (Véase el ejemplo 10.1.)

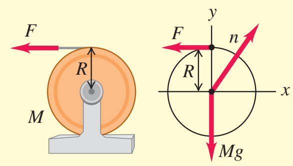
$$\tau = Fl \tag{10.2}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{10.3}$$



Dinámica rotacional: El análogo rotacional de la segunda ley de Newton dice que la torca neta que actúa sobre un cuerpo es igual al producto del momento de inercia del cuerpo y su aceleración angular. (Véanse ejemplos 10.2 y 10.3.)

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \tag{10.7}$$



Traslación y rotación combinadas: Si un cuerpo rígido se mueve en el espacio al tiempo que gira, su movimiento puede considerarse como la conjunción de un movimiento traslacional del centro de masa y un movimiento rotacional en torno a un eje que pasa por el centro de masa. De esta manera, la energía cinética es la suma de una energía cinética traslacional y una rotacional. En dinámica la segunda ley de Newton describe el movimiento del centro de masa y el equivalente rotacional de esa ley describe la rotación en torno al centro de masa. En el caso de un cuerpo que rueda sin resbalar, existe una relación especial entre el movimiento del centro de masa y el movimiento rotacional. (Véanse los ejemplos 10.4 a 10.7.)

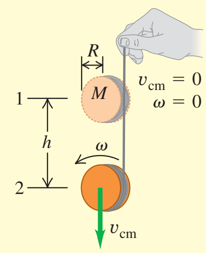
$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \tag{10.8}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \tag{10.12}$$

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \tag{10.13}$$

$$v_{cm} = R\omega \tag{10.11}$$

(rodamiento sin deslizamiento)



Trabajo efectuado por una torca: Si una torca actúa sobre un cuerpo rígido que gira, efectúa trabajo sobre el cuerpo. Ese trabajo puede expresarse como una integral de la torca. El teorema trabajo-energía dice que el trabajo rotacional total efectuado sobre un cuerpo rígido es igual al cambio de energía cinética rotacional. La potencia, o rapidez con que la torca efectúa trabajo, es el producto de la torca y la velocidad angular. (Véanse los ejemplos 10.8 y 10.9.)

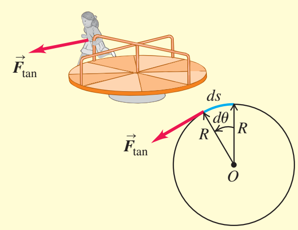
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z \, d\theta \tag{10.20}$$

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta \tag{10.21}$$

(sólo torca constante)

$$W_{tot} = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \tag{10.22}$$

$$P = \tau_z\omega_z \tag{10.23}$$



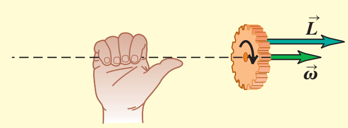
Momento angular: El momento angular de una partícula con respecto a un punto O es el producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ de la partícula con respecto a O y a su momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. Si un cuerpo simétrico gira alrededor de un eje de simetría estacionario, su momento angular es el producto de su momento de inercia y su vector de velocidad angular $\vec{\omega}$. Si el cuerpo no es simétrico o el eje de rotación (z) no es un eje de simetría, la componente del momento angular sobre el eje de rotación es $I\omega_z$. (Véase el ejemplo 10.10.)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{10.24}$$

(partícula)

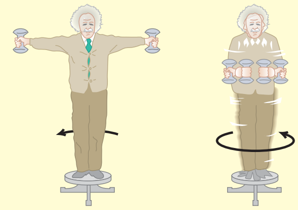
$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{10.28}$$

(cuerpo rígido que gira en torno a un eje de simetría)



Dinámica rotacional y momento angular: La torca externa neta sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio de su momento angular. Si la torca externa neta que actúa sobre el sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante (se conserva). (Véanse ejemplos 10.11 a 10.15.)

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{10.29}$$



Términos clave

movimiento traslacional, *316*
línea de acción, *317*
brazo de palanca (brazo de momento), *317*
torca, *317*
traslación y rotación combinadas, *323*
rodar sin deslizar, *324*
momento angular, *331*
principio de conservación del momento angular, *333*
precesión, *337*
rapidez angular de precesión, *388*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Cuando el acróbata está en el aire, la torca neta que actúa sobre su centro de masa es cero. Por lo tanto, el momento angular de su cuerpo (el producto del momento de inercia I y la rapidez angular ω) en torno al centro de masa se mantiene constante. Al estirar sus extremidades, el acróbata aumenta I, así que ω disminuye; si encoge las extremidades, I disminuye y ω aumenta.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

10.1 Respuesta: ii) La fuerza P actúa a lo largo de una línea vertical, de manera que el brazo de palanca es la distancia horizontal desde A hasta la línea de acción. Ésta es la componente horizontal de la distancia L, que es $L\cos\theta$. Por lo tanto, la magnitud de la torca es el producto de la magnitud de la fuerza P y el brazo de palanca $L\cos\theta$, o $\tau = PL\cos\theta$.

10.2 Respuesta: iii), ii), i) Para que el objeto colgante de masa m_2 acelere hacia abajo, la fuerza neta sobre él debe ser hacia abajo. Por lo tanto, la magnitud $m_2 g$ de la fuerza del peso hacia abajo debe ser mayor que la magnitud T_2 de la fuerza de tensión hacia arriba. Para que la polea tenga aceleración angular en sentido horario, la torca neta sobre la polea debe ser en sentido horario. La tensión T_2 tiende a girar la polea en sentido horario, en tanto que la tensión T_1 tiende a girar la polea en sentido antihorario. Ambas fuerzas de tensión tienen el mismo brazo de palanca R, de manera que hay una torca T_2R en sentido horario y una torca T_1R en sentido antihorario. Para que la torca neta sea en sentido horario, T_2 debe ser mayor que T_1. Por consiguiente, $m_2 g > T_2 > T_1$.

10.3 Respuestas: *a*) ii), *b*) i) Si usted vuelve a realizar los cálculos del ejemplo 10.6 con un cilindro hueco (momento de inercia $I_{cm} = MR^2$ en vez de un cilindro sólido (momento de inercia $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$), usted encontrará $a_{cm\text{-}y} = \frac{1}{2}g$ y $T = \frac{1}{2}Mg$ (en vez de $a_{cm\text{-}y} = \frac{2}{3}g$ y $T = \frac{1}{3}Mg$ para un cilindro sólido). Por lo tanto, la aceleración es menor aunque la tensión sea mayor. Usted puede llegar a la misma conclusión sin efectuar el cálculo. Mayor momento de inercia significa que el cilindro hueco girará más lentamente y, por consiguiente, rodará hacia abajo más lentamente. Para hacer más lento el movimiento descendente, se requiere una mayor fuerza de tensión hacia abajo para oponerse a la fuerza de gravedad hacia abajo.

10.4 Respuesta: iii) Aplicamos la misma torca durante el mismo desplazamiento angular a ambos cilindros. Entonces, por la ecuación (10.21), efectuamos la misma cantidad de trabajo sobre los dos cilindros y les impartimos la misma energía cinética a ambos. (El que tiene menor momento de inercia desarrolla la mayor rapidez angular, aunque eso no es lo que se preguntó. Compare con el ejemplo conceptual 6.5 de la sección 6.2.)

10.5 Respuestas: a) no, b) sí Al dar vuelta al círculo la pelota, la magnitud de $\vec{p} = m\vec{v}$ no cambia (la rapidez es constante), pero su dirección sí lo hace, así que el vector de momento lineal no es constante. Sin embargo, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ *sí es* constante: la pelota mantiene una magnitud constante (la rapidez y la distancia perpendicular entre la mano y la pelota no cambian) y una dirección constante (sobre el eje de rotación, perpendicular al plano de movimiento de la pelota). El momento lineal cambia porque una fuerza neta $\vec{F}$ actúa sobre la pelota (hacia el centro del círculo). El momento angular no cambia porque no hay torca neta; el vector $\vec{r}$ apunta de la mano a la pelota, y la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la pelota apunta hacia la mano, de modo que el producto vectorial $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ es cero.

10.6 Respuesta: i) En ausencia de torcas externas, el momento angular de la Tierra $L_z = I\omega_z$ permanecería constante. El hielo derretido se movería de los polos al ecuador (es decir, se alejaría del eje de rotación del planeta) y el momento de inercia I de la Tierra aumentaría un poco. Por lo tanto, la velocidad angular ω_z disminuiría ligeramente y el día duraría un poco más.

10.7 Respuesta: iii) Aumentar al doble la masa del volante duplicaría tanto su momento de inercia I como su peso w, así que la razón I/w no cambiaría. La ecuación (10.33) dice que la rapidez angular de precesión depende de esta razón, así que el valor de Ω *no* cambiaría.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P10.1. Al apretar los pernos de la cabeza de los cilindros de un motor automotriz, la cantidad crítica es la *torca* aplicada a los pernos. ¿Por qué la torca es más importante que la *fuerza* real aplicada al mango de la llave?

P10.2. ¿Una sola fuerza aplicada a un cuerpo puede alterar tanto su movimiento de traslación como su movimiento rotacional? Explique por qué.

P10.3. Suponga que usted puede usar cualquier tipo de ruedas en el diseño de un carrito de 4 ruedas, sin motor para carreras cuesta abajo, partiendo del reposo. Respetando las reglas de peso total del vehículo y el conductor, ¿conviene usar ruedas grandes y masivas, o ruedas pequeñas y ligeras? ¿Conviene usar ruedas sólidas o ruedas con la mayoría de la masa en el borde? Explique por qué.

P10.4. Un automóvil con tracción en las cuatro ruedas acelera hacia delante partiendo del reposo. Demuestre la dirección en que giran las ruedas del vehículo y cómo esto origina una fuerza de fricción debida al pavimento, que acelera el auto hacia delante.

P10.5. Los ciclistas experimentados dicen que reducir el peso de una bicicleta es más efectivo si se hace en las ruedas que en el cuadro (marco). ¿Por qué reducir el peso en las ruedas sería más fácil para el ciclista que reducir la misma cantidad en el cuadro?

P10.6. Cuanto mayor sea la fuerza que se aplica al frenar conduciendo un auto hacia adelante, más bajará el frente del auto (y más subirá la parte de atrás). ¿Por qué? ¿Qué sucede al acelerar hacia adelante? ¿Por qué los vehículos de arrancones no usan sólo tracción delantera?

P10.7. Cuando una equilibrista camina en la cuerda floja, extiende sus brazos hacia los lados. Esto le facilita recuperarse en caso de inclinarse hacia un lado o hacia el otro. Explique cómo funciona esto. [*Sugerencia:* piense en la ecuación (10.7).]

P10.8. Al encenderse un motor eléctrico, tarda más en alcanzar su rapidez final si hay una rueda de afilar conectada al eje. ¿Por qué?

P10.9. Los buenos cocineros saben si un huevo está crudo o cocido haciéndolo rodar por una pendiente (y atrapándolo abajo). ¿Cómo es posible esto? ¿En qué se fijan?

P10.10. El trabajo efectuado por una fuerza es un producto de fuerza y distancia. La torca debida a una fuerza es un producto de fuerza y distancia. ¿Implica esto que la torca y el trabajo sean equivalentes? Explique por qué.

P10.11. Imagine que usted pertenece a un despacho de ingenieros y un cliente importante le lleva una esfera preciada porque quiere saber si es hueca o sólida. Él ha probado dándole golpecitos, pero eso no lo ha sacado de dudas. Diseñe un experimento sencillo y de bajo costo que pueda efectuar rápidamente, sin dañar la valiosa esfera, para averiguar si es hueca o sólida.

P10.12. Usted hace dos versiones del mismo objeto hecho del mismo material que tiene densidad uniforme. Para una versión, todas las dimensiones son exactamente del doble que la otra. Si actúa la misma torca en ambas versiones, dando a la más pequeña una aceleración angular α, ¿cuál será la aceleración angular de la versión más grande en términos de α?

P10.13. Dos masas idénticas están unidas a poleas sin fricción mediante cordeles muy delgados, enrollados alrededor del borde de la polea, y se liberan partiendo del reposo. Ambas poleas tienen la misma masa y el mismo diámetro, pero una es sólida y la otra es un aro. Conforme las masas caen, ¿en qué caso es mayor la tensión en el cordón, o es la misma en ambos casos? Justifique su respuesta.

P10.14. La fuerza de gravedad actúa sobre el bastón de la figura 10.11. Las fuerzas producen torcas que alteran la velocidad angular de un cuerpo. Entonces, ¿por qué es constante la velocidad angular del bastón en la figura?

P10.15. Cierta esfera sólida uniforme alcanza una altura máxima h_0 cuando rueda cuesta arriba sin deslizarse. ¿Qué altura máxima (en términos de h_0) alcanzará si *a*) se duplica su diámetro, *b*) se duplica su masa, *c*) se duplican tanto su diámetro como su masa, *d*) se duplica su rapidez angular en la base de la pendiente?

P10.16. Una rueda está rodando sin resbalar en una superficie horizontal. En un marco de referencia inercial en el que la superficie está en reposo, ¿hay algún punto de la rueda con velocidad puramente vertical? ¿Hay algún punto con componente horizontal de velocidad opuesta a la velocidad del centro de masa? Explique su respuesta. ¿Cambian sus respuestas si la rueda resbala al rodar? ¿Por qué?

P10.17. Parte de la energía cinética de un automóvil que avanza está en el movimiento rotacional de sus ruedas. Al aplicarse los frenos a fondo en una calle con hielo, las ruedas se "bloquean" y el auto comienza a deslizarse. ¿Qué pasa con la energía cinética rotacional?

P10.18. Un aro, un cilindro sólido uniforme, un casco esférico y una esfera sólida uniforme se sueltan del reposo en la parte alta de una pendiente. ¿En qué orden llegan a la base de la pendiente? ¿Importa si las masas y los radios de los objetos son iguales o no? Explique su respuesta.

P10.19. Una esfera rueda con rapidez v sin resbalar sobre una superficie horizontal, cuando llega a una colina que se alza con un ángulo constante sobre la horizontal. ¿En cuál caso alcanzará mayor altura: si la colina tiene suficiente fricción para evitar deslizamientos o si la colina es perfectamente lisa? En ambos casos, justifique sus respuestas en términos de conservación de la energía y de la segunda ley de Newton.

P10.20. Imagine que, en la Casa de la Risa de una feria, usted está de pie en el centro de una mesa giratoria horizontal grande, que comienza a girar libremente sobre cojinetes sin fricción (ningún motor la impulsa). Si camina hacia el borde de la mesa giratoria, ¿qué pasa con el momento angular combinado de usted y la mesa? ¿Qué sucede con la rapidez de rotación de la mesa? Explique su respuesta.

P10.21. Calentamiento global. Conforme la temperatura en nuestro planeta sigue aumentando, el hielo de los polos se derretirá y se incorporará a los océanos. ¿Qué efecto tendrá esto en la duración del día? (*Sugerencia:* consulte un mapa para ver dónde están los océanos.)

P10.22. Una partícula puntual viaja en línea recta con rapidez constante y la distancia más cercana que parte del origen de las coordenadas es una distancia l. Con respecto a este origen, ¿la partícula tiene momento lineal cero? Conforme la partícula se mueve en línea recta, ¿cambia su momento angular con respecto al origen?

P10.23. En el ejemplo 10.11 (sección 10.6), la rapidez angular ω cambia, lo que implica una aceleración angular distinta de cero. Sin embargo, no hay torca alrededor del eje de rotación, si las fuerzas que el profesor aplica a las mancuernas se dirigen radialmente hacia adentro. Entonces, por la ecuación (10.7), α_z debe ser cero. Explique el error de este razonamiento que lleva a una aparente contradicción.

P10.24. En el ejemplo 10.11 (sección 10.6) la energía cinética rotacional del profesor y las mancuernas aumenta. Sin embargo, como no hay torcas externas, no se efectúa trabajo para alterar la energía cinética rotacional. Entonces, por la ecuación (10.22), ¡la energía cinética no debe cambiar! Explique el error de este razonamiento que lleva a una aparente contradicción. ¿*De dónde* sale la energía cinética adicional?

P10.25. Como vimos en la sección 10.6, el momento angular de una trapecista se conserva al dar vueltas en el aire. ¿Se conserva su momento lineal? ¿Por qué?

P10.26. Si usted detiene un huevo crudo en rotación durante el instante más corto que pueda y lo vuelve a soltar, el huevo comenzará a girar otra vez. Si hace lo mismo con un huevo duro, éste se quedará detenido. Inténtelo y explíquelo.

P10.27. Un helicóptero tiene un rotor principal grande que gira en un plano horizontal y proporciona sustentación. También hay un rotor pequeño en la cola que gira en un plano vertical. ¿Para qué sirve? (*Sugerencia:* si no hubiera rotor de cola, ¿qué pasaría cuando el piloto alterara la rapidez angular del rotor principal?) Algunos helicópteros no tienen rotor de cola pero tienen dos rotores principales grandes que giran en un plano horizontal. ¿Por qué es importante que los dos rotores principales giren en direcciones opuestas?

P10.28. En un diseño de giróscopo común, el volante y su eje se encierran en un marco esférico ligero con el volante en el centro. El giróscopo se equilibra entonces sobre un pivote, de modo que el volante esté directamente encima del pivote. ¿El giróscopo precesa si se suelta mientras el volante está girando? Explique su respuesta.

P10.29. Un giróscopo tarda 3.8 s en precesar 1.0 revolución alrededor de un eje vertical. Dos minutos después, sólo tarda 1.9 s en precesar 1.0 revolución. Nadie tocó el giróscopo. Explique por qué.

P10.30. Un giróscopo precesa como en la figura 10.32. ¿Qué sucede si agregamos suavemente peso al extremo del eje del volante opuesto al pivote?

P10.31. Una bala sale de un rifle girando sobre su eje. Explique cómo esto evita que la bala dé volteretas y mantiene la punta dirigida hacia adelante.

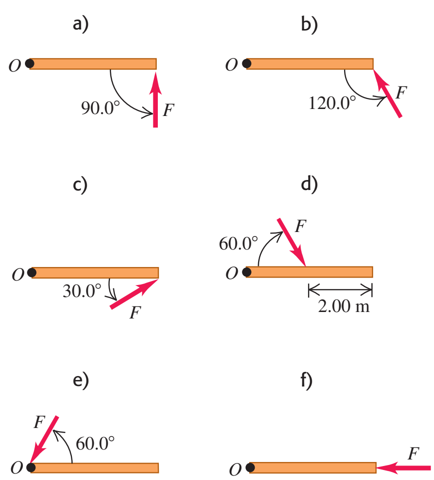
P10.32. Cierta tornamesa uniforme de diámetro D_0 tiene momento angular L_0. Si usted quiere volver a diseñarla de manera que conserve la misma masa, pero tenga el doble de momento angular con la misma velocidad angular que antes, ¿cuál debería ser su diámetro en términos de D_0?

Ejercicios

Sección 10.1 Torca

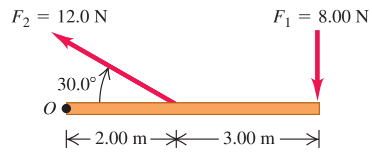
10.1. Calcule la torca (magnitud y dirección) alrededor del punto O debido a la fuerza $\vec{F}$ en cada una de las situaciones mostradas en la figura 10.37. En todos los casos, la fuerza $\vec{F}$ y la varilla están en el plano de la página, la varilla mide 4.00 m de largo y la fuerza tiene magnitud $F = 10.0$ N.

Figura **10.37** Ejercicio 10.1.



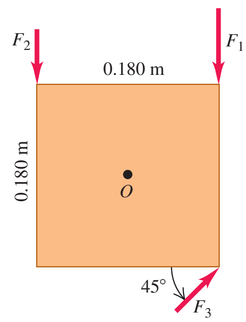
10.2. Calcule la torca neta alrededor del punto O para las dos fuerzas aplicadas como en la figura 10.38. La varilla y las dos fuerzas están en el plano de la página.

Figura **10.38** Ejercicio 10.2.



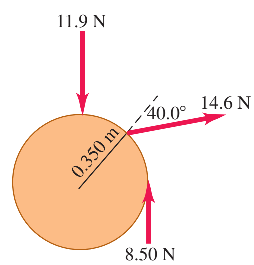
10.3. Una placa metálica cuadrada de 0.180 m por lado pivotea sobre un eje que pasa por el punto O en su centro y es perpendicular a la placa (figura 10.39). Calcule la torca neta alrededor de este eje debido a las tres fuerzas mostradas en la figura, si sus magnitudes son $F_1 = 18.0$ N, $F_2 = 26.0$ N y $F_3 = 14.0$ N. La placa y todas las fuerzas están en el plano de la página.

Figura **10.39** Ejercicio 10.3.



10.4. Se aplican tres fuerzas a una rueda con radio de 0.350 m, como se indica en la figura 10.40. Una fuerza es perpendicular al borde, otra es tangente a éste y la otra forma un ángulo de 40.0° con el radio. ¿Cuál es la torca neta sobre la rueda debido a estas tres fuerzas para un eje perpendicular a la rueda y que pasa por su centro?

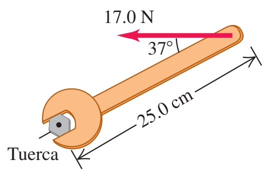
Figura **10.40** Ejercicio 10.4.



10.5. Una fuerza que actúa sobre una pieza mecánica es $\vec{F} = (-5.00\text{ N})\hat{\imath} + (4.00\text{ N})\hat{\jmath}$. El vector del origen al punto de aplicación de la fuerza es $\vec{r} = (-0.450\text{ m})\hat{\imath} + (0.150\text{ m})\hat{\jmath}$. *a*) Haga un dibujo que muestre $\vec{r}$, $\vec{F}$, y el origen. *b*) Use la regla de la mano derecha para determinar la dirección de la torca. *c*) Calcule el vector de la torca vectorial producido por la fuerza. Verifique que la dirección de la torca sea la misma que obtuvo en el inciso *b*).

10.6. Un maquinista usa una llave inglesa para aflojar una tuerca. La llave tiene 25.0 cm de longitud y él ejerce una fuerza de 17.0 N en el extremo del mango, formando un ángulo de 37° con éste (figura 10.41). *a*) ¿Qué torca ejerce el maquinista alrededor del centro de la tuerca? *b*) ¿Cuál es la torca máxima que el maquinista podría ejercer con esta fuerza y cómo debería orientarse la fuerza?

Figura **10.41** Ejercicio 10.6.

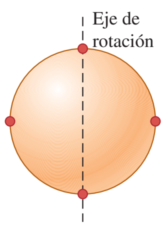


Sección 10.2 Torca y aceleración angular de un cuerpo rígido

10.7. El volante de un motor tiene momento de inercia de 2.50 kg · m^2 alrededor de su eje de rotación. ¿Qué torca constante se requiere para que alcance una rapidez angular de 400 rev/min en 8.00 s, partiendo del reposo?

10.8. Un casco esférico uniforme de 8.40 kg y 50.0 cm de diámetro tiene cuatro masas pequeñas de 2.00 kg pegadas a su superficie exterior, a distancias equidistantes. Esta combinación gira en torno a un eje que pasa por el centro de la esfera y dos de las masas pequeñas (figura 10.42). ¿Qué torca por fricción se requiere para reducir la rapidez angular del sistema, de 75.0 rpm a 50.0 rpm en 30.0 s?

Figura **10.42** Ejercicio 10.8.



10.9. Una pieza de maquinaria tiene la forma de una esfera sólida uniforme con masa de 225 g y diámetro de 3.00 cm, y gira alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro; sin embargo, en un punto de su ecuador roza contra un metal, lo cual produce una fuerza de fricción de 0.0200 N en ese punto. *a*) Calcule su aceleración angular. *b*) ¿Cuánto tiempo requerirá para disminuir su rapidez rotacional en 22.5 rad/s?

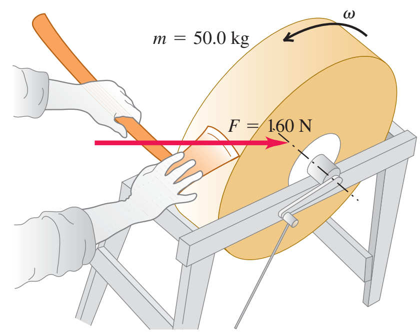
10.10. Un cordón se enrolla en el borde de una rueda sólida uniforme de 0.250 m de radio y masa de 9.20 kg. Se tira del cordón con una fuerza horizontal constante de 40.0 N hacia la derecha, quitándolo tangencialmente de la rueda, la cual está montada con cojinetes sin fricción en un eje horizontal que pasa por su centro. *a*) Calcule la aceleración angular de la rueda y la aceleración de la parte del cordón que ya se haya retirado de la rueda. *b*) Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza que el eje ejerce sobre la rueda. *c*) ¿Por qué las respuestas a los incisos *a*) y *b*) cambiarían si el tirón fuera hacia arriba en vez de horizontal?

10.11. Un cilindro uniforme sólido con masa de 8.25 kg y diámetro de 15.0 cm gira a 220 rpm sobre un eje delgado sin fricción, que pasa a lo largo del eje del cilindro. Se diseña un freno de fricción sencillo para detener el cilindro empujando el freno contra el borde exterior con una fuerza normal. El coeficiente de fricción cinética entre el freno y el borde es de 0.333. ¿Qué fuerza normal debe aplicarse para detener el cilindro después de girar 5.25 revoluciones?

10.12. Una piedra cuelga del extremo libre de un cable enrollado en el borde exterior de una polea, como se muestra en la figura 10.10. La polea es un disco uniforme con masa de 10.0 kg y 50.0 cm de radio, que gira sobre cojinetes sin fricción. Se determina que la piedra recorre 12.6 m en los primeros 3.00 s partiendo del reposo. Calcule *a*) la masa de la piedra y *b*) la tensión en el cable.

10.13. Una piedra de afilar en forma de disco sólido con 0.520 m de diámetro y masa de 50.0 kg gira a 850 rev/min. Usted presiona una hacha contra el borde de la piedra con una fuerza normal de 160 N (figura 10.43), y la piedra se detiene en 7.50 s. Calcule el coeficiente de fricción entre el hacha y la piedra. Ignore la fricción de los cojinetes.

Figura **10.43** Ejercicio 10.13 y problema 10.53.

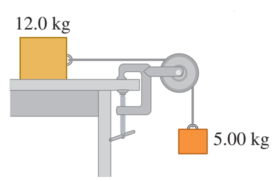


10.14. Una cubeta con agua de 15.0 kg se suspende de una cuerda ligera, enrollada en un cilindro sólido de 0.300 m de diámetro y masa de 12.0 kg. El cilindro pivotea en un eje sin fricción que pasa por su centro. La cubeta se suelta del reposo en el borde de un pozo y cae 10.0 m al agua. *a*) ¿Qué tensión hay en la cuerda mientras la cubeta cae? *b*) ¿Con qué rapidez golpea la cubeta el agua? *c*) ¿Cuánto tarda en caer? *d*) Mientras la cubeta cae, ¿qué fuerza ejerce el eje sobre el cilindro?

10.15. Un libro de 2.00 kg descansa en una superficie horizontal sin fricción. Un cordel atado al libro pasa por una polea de 0.150 m de diámetro, y está atado en su otro extremo a un libro colgante con masa de 3.00 kg. El sistema se suelta del reposo y se observa que los libros se mueven 1.20 m en 0.800 s. *a*) Calcule la tensión en cada sección del cordel. *b*) Calcule el momento de inercia de la polea con respecto a su eje de rotación.

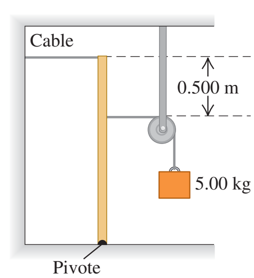
10.16. Una caja de 12.0 kg que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción está unida a un peso de 5.00 kg con un alambre delgado y ligero que pasa por una polea sin fricción (figura 10.44). La polea tiene la forma de un disco sólido uniforme con masa de 2.00 km y diámetro de 0.500 m. Después de que el sistema se libera, calcule *a*) la tensión en el alambre en ambos lados de la polea, *b*) la aceleración de la caja, y *c*) las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el eje ejerce sobre la polea.

Figura **10.44** Ejercicio 10.16.



10.17. Un poste delgado uniforme de 15.0 kg y 1.75 m de longitud se mantiene vertical mediante un cable y tiene unidos una masa de 5.00 kg (como se indica en la figura 10.45) y un pivote en su extremo inferior. La cuerda unida a la masa de 5.0 kg pasa por una polea sin masa y sin fricción, y tira perpendicularmente del poste. De repente, el cable se rompe. *a*) Encuentre la aceleración angular del poste alrededor del pivote cuando el cable se rompe. *b*) La aceleración angular calculada en el inciso *a*) permanece constante conforme el poste cae (antes de que golpee la polea)? ¿Por qué? *c*) ¿Cuál es la aceleración de la masa de 5.00 kg después de que el

Figura **10.45** Ejercicio 10.17.



cable se rompe? ¿Dicha aceleración permanece constante? Explique su respuesta.

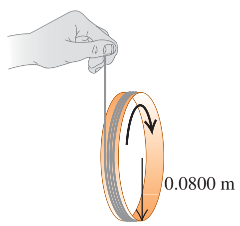
10.18. Una varilla horizontal delgada de longitud l y masa M pivotea alrededor de un eje vertical en un extremo. Una fuerza de magnitud constante F se aplica al otro extremo, haciendo que la varilla gire en un plano horizontal. La fuerza se mantiene perpendicular a la varilla y al eje de rotación. Calcule la magnitud de la aceleración angular de la varilla.

Sección 10.3 Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje móvil

10.19. Un aro de 2.20 kg y de 1.20 m de diámetro rueda hacia la derecha sin deslizarse sobre un piso horizontal a 3.00 rad/s constantes. *a*) ¿Qué tan rápido se mueve su centro? *b*) ¿Cuál es la energía cinética total del aro? *c*) Calcule el vector de velocidad de cada uno de los siguientes puntos, vistos por una persona en reposo en el suelo: i) el punto más alto del aro; ii) el punto más bajo del aro; iii) un punto al lado derecho del aro, a la mitad de la distancia entre la parte superior y la parte inferior. *d*) Calcule el vector de velocidad de cada uno de los puntos del inciso *c*), con excepción del visto por alguien que se mueve con la misma velocidad que el aro.

10.20. Se enrolla un cordel varias veces en el borde de un aro pequeño de 8.00 cm de radio y masa de 0.180 kg. El extremo libre del cordel se sostiene fijo y el aro se suelta del reposo (figura 10.46). Después de que el aro ha descendido 75.0 cm, calcule: *a*) la rapidez angular del aro al girar y *b*) la rapidez de su centro.

Figura 10.46 Ejercicio 10.20 y problema 10.72.



10.21. ¿Qué fracción de la energía cinética total es rotacional para los siguientes objetos que ruedan sin resbalar por una superficie horizontal? *a*) Un cilindro sólido uniforme, *b*) Una esfera uniforme, *c*) Una esfera hueca de paredes delgadas, *d*) un cilindro hueco con radio exterior R y radio interior $R/2$.

10.22. Un casco esférico hueco con masa de 2.00 kg rueda sin resbalar bajando una pendiente de 38.0°. *a*) Calcule: la aceleración, la fuerza de fricción y el coeficiente de fricción mínimo para que no resbale. *b*) ¿Cómo cambiarían sus respuestas al inciso *a*) si la masa se aumentara al doble (4.00 kg)?

10.23. Una esfera sólida se suelta del reposo y baja por una ladera que forma un ángulo de 65.0° abajo de la horizontal. *a*) ¿Qué valor mínimo debe tener el coeficiente de fricción estática entre la ladera y la esfera para que no haya deslizamiento? *b*) ¿El coeficiente de fricción calculado en el inciso *a*) bastaría para evitar que una esfera hueca (como un balón de fútbol) resbale? Justifique su respuesta. *c*) En el inciso *a*), ¿por qué usamos el coeficiente de fricción estática y no el coeficiente de fricción cinética?

10.24. Una canica uniforme baja rodando por un tazón simétrico, partiendo del reposo en el borde izquierdo. El borde está una distancia h arriba del fondo del tazón. La mitad izquierda del tazón es lo bastante áspera como para que la canica ruede sin resbalar, pero la mitad derecha no tiene fricción porque está lubricada con aceite. *a*) ¿Qué altura alcanzará la canica en el lado resbaloso, medida verticalmente desde el fondo? *b*) ¿Qué altura alcanzaría la canica si el lado derecho fuera tan áspero como el izquierdo? *c*) ¿Cómo explica el hecho de que la canica alcance *más altura* en el lado derecho con fricción que sin fricción?

10.25. Una rueda de 392 N se desprende de un camión en movimiento, rueda sin resbalar por una carretera y, al llegar al pie de una colina, gira a 25.0 rad/s. El radio de la rueda es de 0.600 m y su momento de inercia alrededor de su eje de rotación es de 0.800 MR^2. La fricción efectúa trabajo sobre la rueda mientras ésta sube la colina hasta que se detiene a una altura h sobre el pie de la colina; ese trabajo tiene valor absoluto de 3500 J. Calcule h.

10.26. Bola que rueda cuesta arriba. Una bola de bolos (boliche) sube rodando sin resbalar por una rampa que forma un ángulo β con la horizontal. (Véase ejemplo 10.7, sección 10.3.) Trate la bola como esfera sólida uniforme, sin tomar en cuenta los agujeros. *a*) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la bola. Explique por qué la fricción debe tener dirección *cuesta arriba*. *b*) ¿Qué aceleración tiene el centro de masa de la bola? *c*) ¿Qué coeficiente de fricción estática mínimo se necesita para que la bola no resbale?

Sección 10.4 Trabajo y potencia en movimiento rotacional

10.27. Un carrusel (tiovivo) con 2.40 m de radio tiene momento de inercia de 2100 kg · m^2 alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y gira con fricción despreciable. *a*) Un niño aplica una fuerza de 18.0 N tangencialmente al borde durante 15.0 s. Si el carrusel estaba inicialmente en reposo, ¿qué rapidez angular tiene al final de los 15.0 s? *b*) ¿Cuánto trabajo efectuó el niño sobre el carrusel? *c*) ¿Qué potencia media le suministró el niño?

10.28. El motor proporciona 175 hp a la hélice de un avión a 2400 rev/min. *a*) ¿Cuánta torca proporciona el motor del avión? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza el motor en una revolución de la hélice?

10.29. Una rueda de afilar de 1.50 kg con forma de cilindro sólido tiene 0.100 m de radio. *a*) ¿Qué torca constante la llevará del reposo a una rapidez angular de 1200 rev/min en 2.5 s? *b*) ¿Qué ángulo habrá girado en ese tiempo? *c*) Use la ecuación (10.21) para calcular el trabajo efectuado por la torca . *d*) ¿Qué energía cinética tiene la rueda al girar a 1200 rev/min? Compare esto con el resultado del inciso *c*).

10.30. Un motor eléctrico consume 9.00 kJ de energía eléctrica en 1.00 min. Si un tercio de la energía se pierde en forma de calor y otras formas de energía interna del motor, y el resto se da como potencia al motor, ¿cuánta torca desarrollará este motor si usted lo pone a 2500 rpm?

10.31. Las puntas de carburo de los dientes de corte de una sierra circular están a 8.6 cm del eje de rotación. *a*) La rapidez sin carga de la sierra, cuando no está cortando, es de 4800 rev/min. ¿Por qué es despreciable la potencia desarrollada sin carga? *b*) Al cortar madera, la rapidez angular de la sierra baja a 2400 rev/min, y la potencia desarrollada es de 1.9 hp. ¿Qué fuerza tangencial ejerce la madera sobre las puntas de carburo?

10.32. La hélice de un avión tiene longitud de 2.08 m (de punta a punta) y masa de 117 kg. Al arrancarse, el motor del avión aplica una torca constante de 1950 N · m a la hélice, que parte del reposo. *a*) Calcule la aceleración angular de la hélice, tratándola como varilla delgada. (Véase la tabla 9.2.) *b*) Calcule la rapidez angular de la hélice después de 5.00 revoluciones. *c*) ¿Cuánto trabajo efectúa el motor durante las primeras 5.00 revoluciones? *d*) ¿Qué potencia media desarrolla el motor durante las primeras 5.00 revoluciones? *e*) ¿Qué potencia instantánea desarrolla el motor en el instante en que la hélice ha girado 5.00 revoluciones?

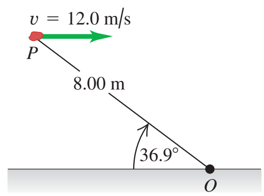
10.33. *a*) Calcule la torca producida por un motor industrial que desarrolla 150 kW a una rapidez angular de 4000 rev/min. *b*) Un tambor de 0.400 m de diámetro y masa despreciable se conecta al eje del motor, y la potencia del motor se utiliza para levantar un peso que cuelga de una cuerda enrollada en el tambor. ¿Qué peso máximo puede levantar el motor, con rapidez constante? *c*) ¿Con qué rapidez subirá el peso?

Sección 10.5 Momento angular

10.34. Una mujer con masa de 50 kg está parada en el borde de un disco grande, con masa de 110 kg y radio de 4.0 m, que gira a 0.50 rev/s alrededor de un eje que pasa por su centro. Calcule la magnitud del momento angular total del sistema mujer-disco. (Suponga que la mujer puede tratarse como punto.)

10.35. Una piedra de 2.00 kg tiene una velocidad horizontal con magnitud de 12.0 m/s cuando está en el punto *P* de la figura 10.47. *a*) ¿Qué momento angular (magnitud y dirección) tiene con respecto a *O* en ese instante? *b*) Suponiendo que la única fuerza que actúa sobre la piedra es su peso, calcule la rapidez del cambio (magnitud y dirección) de su momento angular en ese instante.

Figura 10.47 Ejercicio 10.35.



10.36. *a*) Calcule la magnitud del momento angular de la Tierra en órbita alrededor del Sol. ¿Es razonable considerar a la Tierra como partícula? *b*) Calcule la magnitud del momento angular de la Tierra debida a su rotación en torno a un eje que pasa por los polos norte y sur, tratando a la Tierra como una esfera uniforme. Consulte el Apéndice E y los datos astronómicos del Apéndice F.

10.37. Calcule la magnitud del momento angular del segundero de un reloj alrededor de un eje que pasa por el centro de la carátula, si tal manecilla tiene una longitud de 15.0 cm y masa de 6.00 g. Trate la manecilla como una varilla delgada que gira con velocidad angular constante alrededor de un extremo.

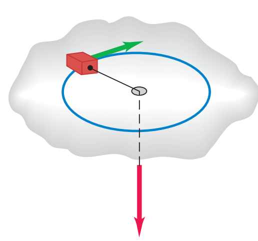
10.38. Una esfera hueca de pared delgada con masa de 12.0 kg y diámetro de 48.0 cm gira alrededor de un eje que pasa por su centro. El ángulo (en radianes) con el que gira en función del tiempo (en segundos) está dado por $\theta(t) = At^2 + Bt^4$, donde *A* tiene valor numérico de 1.50 y *B* tiene valor numérico de 1.10. *a*) ¿Cuáles son las unidades de las constantes *A* y *B*? *b*) En el instante $t = 3.00$ s, calcule i) el momento angular de la esfera y ii) la torca neta de la esfera.

Sección 10.6 Conservación del momento angular

10.39. En ciertas circunstancias, una estrella puede colapsarse formando un objeto extremadamente denso constituido principalmente por neutrones y llamado *estrella de neutrones*. La densidad de tales estrellas es unas 10^{14} veces mayor que la de la materia sólida ordinaria. Suponga que representamos la estrella como esfera sólida rígida uniforme, tanto antes como después del colapso. El radio inicial era de 7.0×10^5 km (comparable al del Sol); y el final, de 16 km. Si la estrella original giraba una vez cada 30 días, calcule la rapidez angular de la estrella de neutrones.

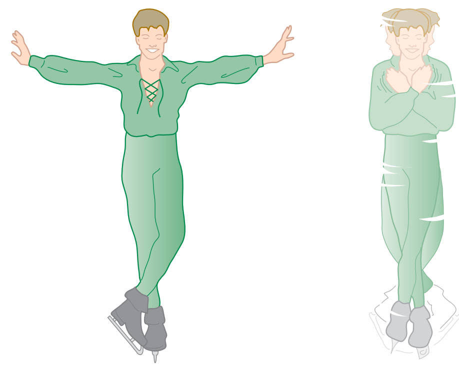
10.40. Un bloque pequeño de 0.0250 kg en una superficie horizontal sin fricción está atado a un cordón sin masa que pasa por un agujero en la superficie (figura 10.48). El bloque inicialmente está girando a una distancia de 0.300 m del agujero, con rapidez angular de 1.75 rad/s. Ahora se tira del cordón desde abajo, acortando el radio del círculo que describe el bloque a 0.150 m. El bloque puede tratarse como partícula. *a*) ¿Se conserva el momento angular del bloque? ¿Por qué? *b*) ¿Qué valor tiene ahora la rapidez angular? *c*) Calcule el cambio de energía cinética del bloque. *d*) ¿Cuánto trabajo se efectuó al tirar del cordón?

Figura 10.48 Ejercicio 10.40, problema 10.92 y problema de desafío 10.103.



10.41. Patinador que gira. Los brazos estirados de un patinador que prepara un giro pueden considerarse como una varilla delgada que pivotea sobre un eje que pasa por su centro (figura 10.49). Cuando los brazos se juntan al cuerpo para ejecutar el giro, se pueden considerar como un cilindro hueco de pared delgada. Los brazos y las manos tienen una masa combinada de 8.0 kg; estirados, abarcan 1.8 m; y encogidos, forman un cilindro con 25 cm de radio. El momento de inercia del resto del cuerpo alrededor del eje de rotación es constante e igual a $0.40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Si la rapidez angular original del patinador es de 0.40 rev/s, ¿cuál es la rapidez angular final?

Figura 10.49 Ejercicio 10.41.



10.42. Una clavadista sale del trampolín con los brazos hacia arriba y las piernas hacia abajo, lo que le confiere un momento de inercia alrededor de su eje de rotación de $18\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Luego, ella forma una pequeña bola, reduciendo su momento de inercia a $3.6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ y gira dos revoluciones completas en 1.0 s. Si no se hubiera encogido, ¿cuántas revoluciones habría girado en los 1.5 s que tarda en caer desde el trampolín al agua?

10.43. Una tornamesa de madera de 120 kg con forma de disco plano tiene 2.00 m de radio y gira inicialmente alrededor de un eje vertical, que pasa por su centro, a 3.00 rad/s. De repente, un paracaidista de 70.0 kg se posa suavemente sobre la tornamesa en un punto cerca del borde. *a*) Calcule la rapidez angular de la tornamesa después de que el paracaidista se posa en ella. (Suponga que puede tratarse al paracaidista como partícula.) *b*) Calcule la energía cinética del sistema antes y después de la llegada del paracaidista. ¿Por qué no son iguales estas energías?

10.44. Una puerta de madera sólida de 1.00 m de ancho y 2.00 m de alto tiene las bisagras en un lado y una masa total de 40.0 kg. La puerta, que inicialmente está abierta y en reposo, es golpeada en su centro por un puñado de lodo pegajoso con masa de 0.500 kg, que viaja en dirección perpendicular a la puerta a 12.0 m/s justo antes del impacto. Calcule la rapidez angular final de la puerta. ¿Es apreciable la aportación del lodo al momento de inercia?

10.45. Un bicho de 10.0 g está parado en el extremo de una barra delgada uniforme que inicialmente está en reposo en una mesa horizontal lisa. El otro extremo de la barra pivotea en torno a un clavo incrustado en la mesa, y puede girar libremente sin fricción. La masa de la barra es de 50.0 g, y su longitud de 100 cm. El bicho salta en dirección horizontal, perpendicular a la barra, con rapidez de 20.0 cm/s relativa a la mesa. *a*) Calcule la rapidez angular de la barra inmediatamente después del salto del insecto retozón. *b*) Calcule la energía cinética total del sistema inmediatamente después del salto. *c*) ¿De dónde proviene la energía?

10.46. ¡Choque de asteroide! Suponga que un asteroide que viaja en línea recta hacia el centro de la Tierra fuera a estrellarse contra nuestro planeta en el ecuador y se incrustaría apenas por debajo de la superficie. En términos de la masa terrestre M, ¿cuál tendría que ser la masa de dicho asteroide para el día que se vuelva 25.0% más grande de lo que actualmente es como resultado del choque? Suponga que el asteroide es muy pequeño en comparación con la Tierra y que ésta es un todo uniforme.

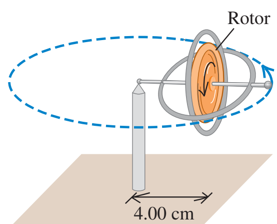
10.47. Una barra metálica delgada y uniforme, de 2.00 m de longitud y con un peso de 90.0 N, cuelga verticalmente del techo en un pivote sin fricción colocado en el extremo superior. De repente, una pelota de 3.00 kg, que viaja inicialmente a 10.0 m/s en dirección horizontal, golpea la barra 1.50 m abajo del techo. La pelota rebota en dirección opuesta con rapidez de 6.00 m/s. *a*) Calcule la rapidez angular de la barra inmediatamente después del choque. *b*) Durante el choque, ¿por qué se conserva el momento angular pero no el momento lineal?

Sección 10.7 Giróscopos y precesión

10.48. Dibuje una vista superior del giróscopo de la figura 10.32. *a*) Dibuje flechas rotuladas para $\vec{\omega}$, $\vec{L}$ y $\vec{\tau}$. Dibuje $d\vec{L}$ producido por $\vec{\tau}$. Dibuje $\vec{L} + d\vec{L}$. Determine el sentido de precesión examinando las direcciones de $\vec{L}$ y $\vec{L} + d\vec{L}$. *b*) Invierta la dirección de la velocidad angular del rotor y repita todos los pasos del inciso *a*). *c*) Mueva el pivote al otro extremo del eje, con la misma dirección de velocidad angular que en el inciso *b*), y repita todos los pasos. *d*) Con el pivote como en el inciso *c*), invierta la velocidad angular del rotor y repita todos los pasos.

10.49. El rotor (volante) de un giróscopo de juguete tiene una masa de 0.140 kg. Su momento de inercia alrededor de su eje es 1.20×10^{-4} kg · m^2. La masa del marco es de 0.0250 kg. El giróscopo se apoya en un solo pivote (figura 10.50) con su centro de masa a una distancia horizontal de 4.00 cm del pivote. El giróscopo precesa en un plano horizontal a razón de una revolución cada 2.20 s. *a*) Calcule la fuerza hacia arriba ejercida por el pivote. *b*) Calcule la rapidez angular en rpm con que el rotor gira sobre su eje. *c*) Copie el diagrama e indique con vectores el momento angular del rotor y la torca que actúa sobre él.

Figura 10.50 Ejercicio 10.49.



10.50. Un giróscopo en la Luna. Cierto giróscopo precesa a razón de 0.50 rad/s cuando se utiliza en la Tierra. Si se transportara a una base lunar, donde la aceleración debida a la gravedad es de $0.165g$, ¿cuál sería su tasa de precesión?

10.51. Un giróscopo precesa alrededor de un eje vertical. Describa qué pasa con la rapidez angular de precesión si se efectúan los siguientes cambios, sin alterar las demás variables: *a*) se duplica la rapidez angular del volante; *b*) se duplica el peso total; *c*) se duplica el momento de inercia del volante alrededor de su eje; *d*) se duplica la distancia del pivote al centro de gravedad. *e*) ¿Qué sucede si se duplican simultáneamente las cuatro variables de los incisos *a*) a *d*)?

10.52. La Tierra precesa una vez cada 26,000 años y gira sobre su eje una vez al día. Estime la magnitud de la torca que causa tal precesión. Quizá necesite datos del Apéndice F. Haga la estimación suponiendo que: i) la Tierra es una esfera uniforme y ii) la precesión de la Tierra es como la del giróscopo de la figura 10.34. En este modelo, el eje de precesión y el de rotación son perpendiculares. En realidad, el ángulo entre estos dos ejes para la Tierra es de sólo $23\frac{1}{2}°$; esto afecta la torca calculada en un factor de casi 2.

Problemas

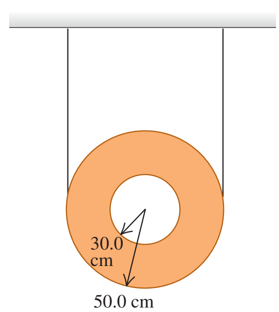
10.53. Una piedra de afilar de 50.0 kg es un disco sólido de 0.520 m de diámetro. Se empuja una hacha contra el borde con una fuerza normal de 160 N (figura 10.43). El coeficiente de fricción cinética entre la piedra y el hacha es de 0.60, y hay una torca por fricción constante de 6.50 N · m entre el eje de la piedra y sus cojinetes. *a*) ¿Qué fuerza debe aplicarse tangencialmente al extremo de una manivela impulsora de 0.500 m para llevar la piedra del reposo a 120 rev/min en 9.00 s? *b*) Una vez que la piedra alcanza esa rapidez angular, ¿qué fuerza tangencial se tendría que aplicar al extremo de la manivela impulsora para mantenerla a una rapidez angular constante de 120 rev/min? *c*) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en detenerse, si sólo la fricción del eje actúa sobre ella y está girando a 120 rev/min?

10.54. Una rueda experimental de bicicleta se coloca en un banco de pruebas, de modo que pueda girar libremente sobre su eje. Se ejerce una torca neta constante de 5.00 N · m a la rueda durante 2.00 s, aumentando la rapidez angular de la rueda de 0 a 100 rev/min. Luego, se deja de aplicar la torca externa y la fricción en los cojinetes de la rueda detiene a ésta en 125 s. Calcule: *a*) el momento de inercia de la rueda alrededor del eje de rotación; *b*) la torca de fricción; *c*) el número total de revoluciones que la rueda gira en ese lapso de 125 s.

10.55. Velocímetro. El velocímetro de un automóvil convierte la rapidez angular de las ruedas a rapidez lineal del auto, suponiendo que los neumáticos son de tamaño estándar y no hay deslizamiento sobre el pavimento. *a*) Si los neumáticos estándares de un automóvil tienen 24 pulgadas de diámetro, ¿a qué tasa (en rpm) giran las ruedas cuando se maneja en carretera a una rapidez de 60 mi/h? *b*) Suponga que se instalan neumáticos demasiado grandes, de 30 pulgadas de diámetro, en el vehículo. ¿Qué tan rápido viajará realmente cuando el velocímetro marque 60 mi/h? *c*) Si ahora los neumáticos se cambian por unos más pequeños de 20 pulgadas de diámetro, ¿cuál será la lectura del velocímetro cuando realmente se viaje a 50 mi/h?

10.56. Un disco hueco uniforme tiene dos trozos de alambre delgado ligero que se enrollan alrededor de su borde exterior y están sujetos al techo (figura 10.51). De repente, se rompe uno de los alambres, y el alambre que queda no se desliza conforme el disco rueda hacia abajo. Utilice la conservación de la energía para calcular la rapidez del centro de este disco, después de que haya caído una distancia de 1.20 m.

Figura 10.51 Problema 10.56.



10.57. Una barra delgada y uniforme de 3.80 kg y 80.0 cm de longitud tiene pegadas esferas muy pequeñas de 2.50 kg en cada uno de sus extremos (figura 10.52). La barra está apoyada horizontalmente en un eje delgado y sin fricción que para por su centro y es perpendicular a ella. De repente, la esfera del lado derecho se despega y se cae, aunque la otra permanece pegada a la barra. *a*) Calcule la aceleración angular de la barra justo después de que la esfera se cae. *b*) ¿La aceleración angular permanece constante mientras la barra continua balanceándose? Si no es así, ¿aumentará o disminuirá? *c*) Obtenga la velocidad angular de la barra justo cuando se balance por su posición vertical.

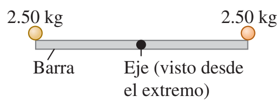


Figura 10.52 Problema 10.57.

10.58. Elena la "Exterminadora" está explorando un castillo. Un dragón la ve y la persigue por un pasillo. Elena se mete en una habitación y trata de cerrar la pesada puerta antes de que el dragón la atrape. Inicialmente, la puerta es perpendicular a la pared, así que debe girar 90° para cerrarse. La puerta tiene 3.00 m de altura y 1.25 m de anchura, y pesa 750 N. Puede despreciarse la fricción en las bisagras. Si Elena aplica una fuerza de 220 N al borde de la puerta, perpendicular a ella, ¿cuánto tardará en cerrarla?

10.59. Una varilla delgada de longitud l está sobre el eje $+x$ con su extremo izquierdo en el origen. Un cordón tira de ella con una fuerza $\vec{F}$ dirigida hacia un punto P una distancia h arriba de la varilla. ¿En qué punto de la varilla debería atarse el cordón para lograr la torca máxima alrededor del origen si P está: *a*) arriba del extremo derecho de la varilla? *b*) ¿Arriba del extremo izquierdo? *c*) ¿Arriba del centro?

10.60. Equilibrismo. Una bolita de arcilla con masa M está pegada a un extremo de una varilla larga, delgada y uniforme de (la misma) masa M y longitud L. *a*) Ubique la posición del centro de masa del sistema varilla-arcilla y márquela en un dibujo de la varilla. *b*) Se equilibra cuidadosamente la varilla en una mesa sin fricción, de modo que esté parada verticalmente, con el extremo que no tiene arcilla tocando la mesa. Ahora la varilla se inclina formando un ángulo pequeño θ con la vertical. Determine su aceleración angular en este instante, suponiendo que el extremo sin arcilla no pierde contacto con la mesa. (*Sugerencia:* véase la tabla 9.2.) *c*) Se equilibra otra vez la varilla en la mesa sin fricción de modo que esté parada verticalmente, pero ahora con el extremo que *tiene* la arcilla tocando la superficie. Otra vez, la varilla se inclina formando un ángulo pequeño θ con la vertical. Determine su aceleración angular en ese instante, suponiendo que la arcilla permanece en contacto con la mesa. Compare su resultado con el que obtuvo en el inciso *b*). *d*) Un taco de billar es una varilla que tiene un extremo grueso y se adelgaza continuamente hasta el otro extremo. Es fácil equilibrar un taco verticalmente sobre un dedo, si el extremo delgado está en contacto con el dedo; sin embargo, resulta mucho más difícil si el extremo que está en contacto con el dedo es el grueso. Explique esta diferencia.

10.61. Se ata un cordón ligero a un punto en el borde de un disco vertical uniforme de radio R y masa M. El disco puede girar sin fricción alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. Inicialmente, el disco está en reposo con el cordón atado al punto más alto del disco. Se tira del cordón con una fuerza horizontal constante $\vec{F}$ hasta que el disco ha girado exactamente un cuarto de revolución, y luego se suelta. *a*) Use la ecuación (10.20) para calcular el trabajo hecho por el cordón. *b*) Use la ecuación (6.14) para calcular el trabajo hecho por el cordón. ¿Obtiene el mismo resultado que en el inciso *a*)? *c*) Determine la rapidez angular final del disco. *d*) Determine la aceleración tangencial máxima de un punto del disco. *e*) Determine la aceleración radial (centrípeta) máxima de un punto del disco.

10.62. El mecanismo de la figura 10.53 sirve para sacar una caja de 50 kg con provisiones de la bodega de un barco. Una cuerda está enrollada en un cilindro de madera que gira sobre un eje metálico. El cilindro tiene un radio de 0.25 m y un momento de inercia $I = 2.9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ alrededor del eje. La caja cuelga del extremo libre de la cuerda. Un extremo del eje pivotea sobre cojinetes sin fricción; una manivela está unida al otro extremo. Cuando se gira la manivela, el extremo del mango gira alrededor del eje en un círculo vertical de 0.12 m de radio, el cilindro gira y la caja sube. ¿Qué magnitud de la fuerza $\vec{F}$ aplicada tangencialmente a la manivela se necesita para levantar la caja con una aceleración de 0.80 m/s^2? (Pueden despreciarse la masa de la cuerda, así como los momentos de inercia del eje y la manivela.)

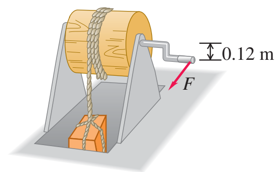


Figura 10.53 Problema 10.62.

10.63. Un rollo de 16.0 kg de papel con radio $R = 18.0$ cm descansa contra la pared sostenido por un soporte unido a una varilla que pasa por el centro del rollo (figura 10.54). La varilla gira sin fricción en el soporte, y el momento de inercia del papel y la varilla alrededor del eje es de $0.260\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. El otro extremo del soporte está unido a la pared mediante una bisagra sin fricción, de modo que el soporte forma un ángulo de 30.0° con la pared. El peso del soporte es despreciable. El coeficiente de fricción cinética entre el papel y la pared es $\mu_k = 0.25$. Se aplica una fuerza vertical constante $F = 40.0$ N al papel, que se desenrolla. *a*) ¿Qué magnitud tiene la fuerza que la varilla ejerce sobre el rollo de papel al desenrollarse éste? *b*) ¿Qué aceleración angular tiene el rollo?

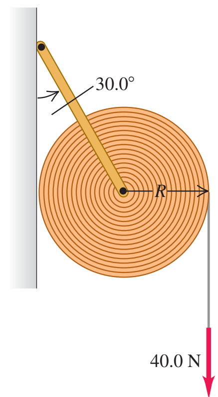


Figura 10.54 Problema 10.63.

10.64. Un bloque con masa $m = 5.00$ kg baja deslizándose por una superficie inclinada 36.9° con respecto a la horizontal (figura 10.55). El coeficiente de fricción cinética es 0.25. Un cordón atado al bloque está enrollado en un volante con masa de 25.0 kg y con su eje fijo en O, y momento de inercia con respecto al eje de $0.500\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. El cordón tira sin resbalar a una distancia perpendicular de 0.200 m con respecto a ese eje. *a*) ¿Qué aceleración tiene el bloque? *b*) ¿Qué tensión hay en el cordón?

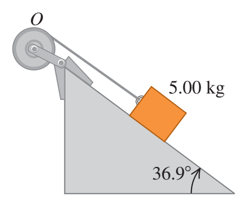


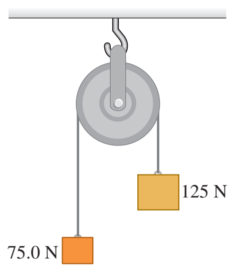
Figura 10.55 Problema 10.64.

10.65. Dos discos metálicos, uno con radio $R_1 = 2.50$ cm y masa $M_1 = 0.80$ kg y el otro con radio $R_2 = 5.00$ cm y masa $M_2 = 1.60$ kg, se sueldan entre sí y se montan en un eje sin fricción que pasa por su centro común, como en el problema 9.89. a) Un cordón ligero se enrolla en el borde del disco menor, y un bloque de 1.50 kg se cuelga del extremo libre del cordón. ¿Qué magnitud tiene la aceleración hacia abajo del bloque una vez que se suelta? *b*) Repita el cálculo del inciso *a*), ahora con el cordón enrollado en el borde del disco mayor. ¿En qué caso es mayor la aceleración del bloque? ¿Es lógica la respuesta?

10.66. Se tira de un aplanador en forma de cilindro hueco con pared delgada y masa *M*, aplicando una fuerza horizontal constante *F* a un mango sujeto al eje. Si el aplanador rueda sin resbalar, calcule la aceleración y la fuerza de fricción.

10.67. Dos pesos están conectados por un cordón flexible muy ligero, que pasa por una polea sin fricción de 50.0 N y radio de 0.300 m. La polea es un disco sólido uniforme y está apoyada de un gancho unido al techo (figura 10.56). ¿Qué fuerza ejerce el techo sobre el gancho?

Figura 10.56 Problema 10.67.

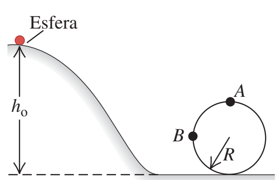


10.68. Un disco sólido rueda sin resbalar en una superficie plana con rapidez constante de 2.50 m/s. *a*) ¿Hasta qué altura puede subir por una rampa de 30.0° antes de parar? *b*) Explique por qué su respuesta anterior no depende de la masa ni del radio del disco.

10.69. El yoyo. Un yoyo consiste en dos discos uniformes, cada uno con masa *m* y radio *R*, conectados por un eje ligero de radio *b*. Un cordón ligero se enrolla varias veces en el eje y luego se sostiene fijo mientras el yoyo se libera del reposo, cayendo al desenrollarse el hilo. Calcule las aceleraciones lineal y angular del yoyo, y la tensión en el cordón.

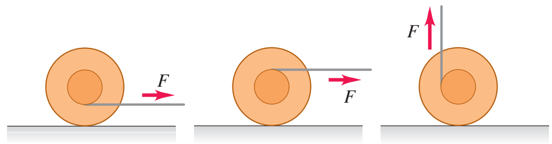
10.70. Un esfera hueca de pared delgada, con masa *m* y radio *r*, parte del reposo y rueda hacia abajo sin deslizarse por la pista que se muestra en la figura 10.57. Los puntos *A* y *B* están en la parte circular de la pista, cuyo radio es *R*. El diámetro de la esfera es muy pequeño comparado con h_0 y *R*, y la fricción de rodamiento es despreciable. *a*) ¿Cuál es la altura mínima h_0 para la cual esta esfera dará una vuelta completa a la parte circular de la pista? *b*) ¿Qué tan fuerte empuja la pista sobre la esfera en el punto *B*, que está al mismo nivel que el centro del círculo? *c*) Suponga que la pista no tiene fricción y que la esfera se suelta desde la misma altura h_0 que usted obtuvo en el inciso *a*). ¿Daría la vuelta completa al bucle? ¿Cómo lo sabe? *d*) En el inciso *c*), ¿qué tan fuerte empuja la pista sobre la esfera en el punto *A*, la cima del círculo? ¿Qué tan fuerte empujó sobre la esfera en el inciso *a*)?

Figura 10.57 Problema 10.70.



10.71. La figura 10.58 muestra tres yoyos idénticos que inicialmente están en reposo en una superficie horizontal. Se tira del cordel de cada uno en la dirección indicada. Siempre hay suficiente fricción para que el yoyo ruede sin resbalar. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada yoyo. ¿En qué dirección girará cada uno? Explique sus respuestas.

Figura 10.58 Problema 10.71.

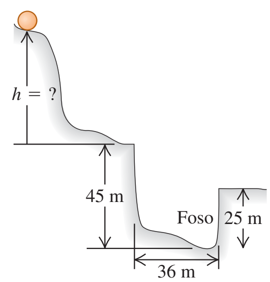


10.72. Como se muestra en la figura 10.46, un cordón está enrollado varias vueltas en el borde de un aro con radio de 0.0800 m y masa de 0.180 kg. Se tira hacia arriba del extremo libre del aro, de forma tal que el aro no se mueve verticalmente mientras el cordón se desenrolla. *a*) Calcule la tensión en el hilo mientras se desenrolla. *b*) Determine la aceleración angular del aro durante el desenrollado del cordón. *c*) Calcule la aceleración hacia arriba de la mano que tira del extremo libre del cordón. *d*) ¿Cómo cambiarían sus respuestas si el aro se sustituyera por un disco sólido con los mismos masa y radio?

10.73. Partiendo del reposo, se aplica una fuerza constante $F = 100$ N al extremo libre de un cable de 50 m, que está enrollado en el borde exterior de un cilindro sólido uniforme de 4.00 kg con diámetro de 30.0 cm, en una situación similar a la de la figura 10.9a. El cilindro puede girar libremente en torno a un eje fijo, sin fricción, que pasa por su centro. *a*) ¿Cuánto tarda en desenrollarse todo el cable y con qué rapidez se está moviendo éste en el instante en que termina de desenrollarse? *b*) Suponga ahora que, en vez de un cilindro, se usa un aro uniforme, pero sin alterar ninguna de las cantidades dadas. ¿Las respuestas a la pregunta del inciso *a*) serían valores más altos o más bajos en este caso? Explique su respuesta.

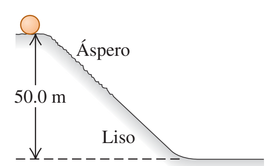
10.74. Una canica uniforme baja rodando sin resbalar por el trayecto de la figura 10.59, partiendo del reposo. *a*) Calcule la altura mínima *h* que evita que la canica caiga en el foso. *b*) El momento de inercia de la canica depende de su radio. Explique por qué la respuesta al inciso *a*) no depende del radio de la canica. *c*) Resuelva el inciso *a*) para un bloque que se desliza sin fricción, en vez de una canica que rueda. Compare la *h* mínima en este caso con la respuesta al inciso *a*).

Figura 10.59 Problema 10.74.



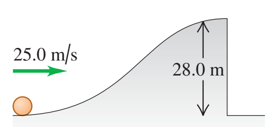
10.75. Piedras rodantes. Un peñasco esférico, sólido y uniforme, parte del reposo y baja rodando por la ladera de una colina de 50.0 m de altura (figura 10.60). La mitad superior de la colina es lo bastante áspera como para que el peñasco ruede sin resbalar; sin embargo, la mitad inferior está cubierta de hielo y no hay fricción. Calcule la rapidez de traslación del peñasco al llegar al pie de la colina.

Figura 10.60 Problema 10.75.



10.76. Una esfera sólida uniforme rueda sin resbalar subiendo una colina, como se muestra en la figura 10.61. En la cima, se está moviendo horizontalmente y después se cae por un acantilado vertical. *a*) ¿A qué distancia del pie del acantilado cae la esfera y con qué rapidez se está moviendo justo antes de tocar el suelo? *b*) Observe que, al tocar tierra la esfera,

Figura 10.61 Problema 10.76.



tiene mayor rapidez traslacional que cuando estaba en la base de la colina. ¿Implica esto que la esfera obtuvo energía de algún lado? ¡Explique su respuesta!

10.77. Una rueda de 42.0 cm de diámetro, consiste en un borde y seis rayos, está hecha de un material plástico rígido y delgado con una densidad lineal de masa de 25.0 g/cm. Esta rueda se suelta desde el reposo en la cima de una colina de 58.0 m de altura. *a*) ¿Con qué rapidez rueda cuando llega a la base de la colina? *b*) ¿Cómo cambiaría su respuesta si la densidad lineal de masa y el diámetro de la rueda se aumentaran al doble?

10.78. Una bicicleta antigua tiene una rueda delantera grande con la manivela para pedalear montada en su eje, y una rueda trasera pequeña que gira con independencia de la delantera: no hay cadena que conecte las ruedas. El radio de la rueda delantera es de 65.5 cm, y el de la trasera es de 22.0 cm. Una bicicleta moderna tiene llantas de 66.0 cm (26 pulgadas) de diámetro y ruedas dentadas delantera y trasera con radios de 11.0 cm y 5.5 cm, respectivamente. La rueda dentada trasera está unida rígidamente al eje de la llanta trasera. Imagine que monta la bicicleta moderna y gira la rueda dentada delantera a 1.00 rev/s. Las llantas de ambas bicicletas ruedan sin resbalar contra el suelo. *a*) Calcule su rapidez lineal al montar la bicicleta moderna. *b*) ¿Con qué rapidez deberá pedalear la manivela de la bicicleta antigua para viajar con la misma rapidez que en el inciso *a*)? *c*) ¿Qué rapidez angular (en rev/s) tendrá entonces la llanta trasera pequeña de la bicicleta antigua?

10.79. En un experimento, se deja que una bola sólida uniforme baje rodando por una pista curva, partiendo del reposo y rodando sin resbalar. La distancia vertical que la bola baja es h. La base de la pista es horizontal y se extiende hasta el borde de una mesa; la bola sale de la pista viajando horizontalmente. En caída libre después de salir de la pista, la bola se mueve una distancia horizontal x y una distancia vertical y. *a*) Calcule x en términos de h y y, despreciando el trabajo de la fricción. *b*) ¿Cambiaría la respuesta al inciso *a*) en la Luna? *c*) Aunque el experimento se haga con mucho cuidado, el valor medido de x es siempre un poco menor que el calculado en el inciso *a*). ¿Por qué? *d*) ¿Cuánto valdría x con las mismas h y y del inciso *a*), si lo que rodara por la pista fuera una moneda? Puede despreciarse el trabajo de la fricción.

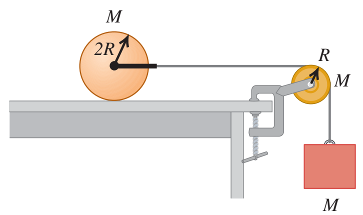
10.80. En un rifle de resorte, un resorte con constante de fuerza de 400 N/m se comprime 0.15 m. Al dispararse el rifle, el 80.0% de la energía potencial elástica almacenada en el resorte se convierte, finalmente, en energía cinética de una esfera uniforme de 0.0590 kg que rueda sin resbalar hasta la base de una rampa. La bola sube rodando sin resbalar por la rampa, hasta que el 90.0% de la energía cinética que tenía en la base se convierte en un aumento de la energía potencial gravitacional en el instante en que se detiene. *a*) ¿Qué rapidez tiene el centro de masa de la bola en la base de la rampa? *b*) En esta posición, ¿qué rapidez tiene un punto en la parte superior de la bola? *c*) ¿Y un punto en la parte inferior? *d*) ¿Qué altura vertical máxima alcanza la bola en la rampa?

10.81. Una rueda está rodando sobre una superficie horizontal con rapidez constante. Las coordenadas de cierto punto del borde de la rueda son $x(t) = R[(2\pi t/T) - \text{sen}(2\pi t/T)]$ y $y(t) = R[1 - \cos(2\pi t/T)]$, donde R y T son constantes. *a*) Dibuje la trayectoria del punto entre $t = 0$ y $t = 2T$. Una curva con esta forma se llama *cicloide*. *b*) ¿Qué significan las constantes R y T? *c*) Calcule las componentes x y y de la velocidad y de la aceleración del punto en cualquier instante t. *d*) Calcule los instantes en que el punto está instantáneamente en reposo. ¿Qué componentes x y y tiene la aceleración en esos instantes? *e*) Calcule la magnitud de la aceleración del punto. ¿Depende del tiempo? Compárela con la magnitud de la aceleración de una partícula en movimiento circular uniforme, $a_{\text{rad}} = 4\pi^2R/T^2$. Explique su resultado para la magnitud de la aceleración del punto en la rueda usando la idea de que el rodamiento es una combinación de movimientos rotacional y traslacional.

10.82. Una niña empuja un balón de baloncesto de 0.600 kg para que suba rodando por una rampa larga. El balón puede considerarse como esfera hueca de pared delgada. Cuando la niña suelta el balón en la base de la rampa, éste tiene una rapidez de 8.0 m/s. Cuando el balón vuelve a ella después de subir por la rampa y regresar rodando, tiene una rapidez de 4.0 m/s. Suponga que el trabajo efectuado por la fricción sobre el balón es el mismo cuando sube o baja por la rampa, y que el balón rueda sin resbalar. Calcule el aumento máximo en la altura vertical del balón al subir por la rampa.

10.83. Un cilindro sólido uniforme de masa M y radio $2R$ descansa en una mesa horizontal. Se ata un cordón mediante un yugo a un eje sin fricción que pasa por el centro del cilindro, de modo que éste puede girar sobre el eje. El cordón pasa por una polea con forma de disco de masa M y radio R, que está montada en un eje sin fricción que pasa por su centro. Un bloque de masa M se suspende del extremo libre del hilo (figura 10.62). El hilo no resbala en la polea, y el cilindro rueda sin resbalar sobre la mesa. Si el sistema se libera del reposo, ¿qué aceleración hacia abajo tendrá el bloque?

Figura 10.62 Problema 10.83.



10.84. Un puente levadizo uniforme de 8.00 m de longitud está unido al camino en un extremo mediante una articulación sin fricción, y puede levantarse con un cable unido al otro extremo. El puente está en reposo, suspendido 60.0° sobre la horizontal, cuando el cable se rompe repentinamente. *a*) Calcule la aceleración angular del puente inmediatamente después de romperse el cable. (La gravedad se comporta como si actuara en el centro de masa.) *b*) ¿Podría usar la ecuación $\omega = \omega_0 + \alpha t$ para calcular la rapidez angular del puente levadizo en un instante posterior? Explique por qué. *c*) ¿Qué rapidez angular tiene el puente en el momento de quedar horizontal?

10.85. Una esfera de 5.00 kg se deja caer desde una altura de 12.0 m arriba de un extremo de una barra uniforme que está pivoteada en su centro. La masa de la barra es de 8.00 kg y su longitud es de 4.00 m. Sobre el otro extremo de la barra descansa otra esfera de 5.00 kg, no sujeta a la barra. La esfera que cae se queda pegada a la barra después del choque. ¿Qué altura alcanzará la otra esfera después del choque?

10.86. Una varilla uniforme de 0.0300 kg y 0.400 m de longitud gira en un plano horizontal alrededor de un eje fijo que pasa por su centro y es perpendicular a la varilla. Dos anillos pequeños con masa de 0.0200 kg cada uno se montan de modo que pueden deslizarse a lo largo de la varilla, aunque inicialmente están sujetos con broches en posiciones a 0.0500 m del centro de la varilla a cada lado, y el sistema está girando a 30.0 rev/min. Sin alterar de otro modo el sistema, los broches se sueltan y los anillos se deslizan hacia afuera por la varilla, saliendo despedidos por los extremos. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene el sistema en el instante en que los anillos llegan a los extremos de la varilla? *b*) ¿Qué rapidez angular tiene la varilla una vez que los anillos se salen?

10.87. Una varilla uniforme de longitud L descansa en una superficie horizontal sin fricción. La varilla pivotea en un extremo sobre un eje fijo sin fricción y está inicialmente en reposo. Una bala que viaja paralela a la superficie horizontal y perpendicular a la varilla, con rapidez v, golpea la varilla en su centro y se incrusta en ella. La masa de la bala es un cuarto de la masa de la varilla. *a*) ¿Qué rapidez angular final tiene la varilla? *b*) ¿Qué relación (razón) hay entre la energía cinética del sistema después del choque y la energía cinética de la bala antes del choque?

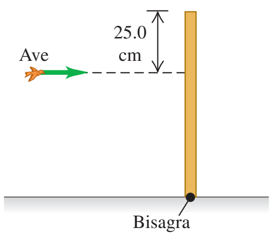
10.88. La puerta de madera sólida de un gimnasio tiene 1.00 m de ancho y 2.00 m de altura, bisagras en un lado y una masa total de 35.0 kg. La puerta, que está abierta y en reposo, es golpeada en su centro por un balón de baloncesto que le aplica una fuerza media de 1500 N durante 8.00 ms. Calcule la rapidez angular de la puerta después del impacto. (*Sugerencia:* si integramos la ecuación (10.29), obtenemos $\Delta L_z = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum\tau_z\right)dt = \left(\sum\tau_z\right)_{\text{med}}\Delta t$. La cantidad $\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum\tau_z\right)dt$ se denomina impulso angular.)

10.89. Un blanco de una galería de tiro consiste en una tabla cuadrada vertical de madera de 0.750 kg y 0.250 m de lado, que pivotea sobre un eje horizontal en su borde superior. Una bala de 1.90 g que viaja a 360 m/s lo golpea de frente en el centro y se incrusta en él. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene la tabla justo después del impacto? *b*) ¿Qué altura máxima sobre la posición de equilibrio alcanza el centro de la tabla? *c*) ¿Qué rapidez mínima tendría que tener la bala para que la tabla diera una vuelta completa después del impacto?

10.90. "Glitches" de estrellas de neutrones. A veces, una estrella de neutrones giratoria (véase el ejercicio 10.39) sufre una aceleración repentina e inesperada llamada *glitch*. Una explicación es que el *glitch* se presenta cuando la corteza de la estrella se asienta un poco, reduciendo el momento de inercia alrededor del eje de rotación. Una estrella de neutrones con rapidez angular $\omega_0 = 70.4$ rad/s sufrió un *glitch* en octubre de 1975, el cual aumentó su velocidad angular a $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, donde $\Delta\omega/\omega_0 = 2.01 \times 10^{-6}$. Si el radio de la estrella de neutrones antes del *glitch* era de 11 km, ¿en cuánto disminuyó su radio por el "astramoto"? Suponga que la estrella es una esfera uniforme.

10.91. Un ave de 500 g vuela horizontal y distraídamente a 2.25 m/s, cuando de repente viaja directo hacia una barra vertical estacionaria, golpeándola a 25.0 cm debajo de la parte superior (figura 10.63). La barra es uniforme con longitud de 0.750 m y masa de 1.50 kg, y tiene una bisagra en la base. El choque aturde al ave, de modo que después simplemente cae hacia el suelo (y pronto se recupera para continuar volando felizmente). ¿Cuál es la velocidad angular de la barra, *a*) justo después de que es golpeada por el ave, y *b*) cuando ésta llega al suelo?

Figura 10.63 Problema 10.91.



10.92. Un bloque pequeño con masa de 0.250 kg se ata a un cordón que pasa por un agujero en una superficie horizontal sin fricción (véase la figura 10.48). El bloque originalmente gira en un círculo de 0.800 m de radio alrededor del agujero, con rapidez tangencial de 4.00 m/s. Se tira lentamente del cordón desde abajo, acortando el radio del círculo descrito por el bloque. La resistencia a la rotura del cordón es de 30.0 N. ¿Qué radio tendrá el círculo cuando el cordón se rompa?

10.93. Un disco horizontal de madera rugosa con masa de 7.00 kg y 1.00 m de diámetro pivotea sobre cojinetes sin fricción, alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Se pega en él una vía circular de tren de juguete con masa insignificante y diámetro medio de 0.95 m. Un trenecito de 1.20 kg operado con baterías descansa en la vía. Para demostrar la conservación del momento angular, se enciende el motor del tren. El tren se mueve en sentido antihorario, alcanzando en poco tiempo una rapidez constante de 0.600 m/s relativa a la vía. Calcule la magnitud y la dirección de la velocidad angular del disco relativa a la Tierra.

10.94. Un alambre rígido uniforme de masa M_0 y longitud L_0 se corta, se dobla y las partes se sueldan, de modo que forman una rueda circular con cuatro rayos idénticos que salen de su centro. No se desperdicia alambre y se puede ignorar la masa de la soldadura. *a*) ¿Cuál es el momento de inercia de esta rueda alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano de la rueda? *b*) Si a la rueda se le da un giro inicial con velocidad angular ω_0 y se detiene uniformemente en un tiempo T, ¿cuál será la torca causada por la fricción en su eje?

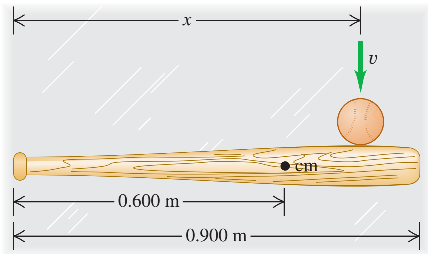
10.95. En un experimento de laboratorio de física con un péndulo balístico, se dispara una esfera de masa m con rapidez v horizontal usando un rifle de resorte. La esfera queda atrapada inmediatamente una distancia r abajo de un pivote sin fricción, por un dispositivo atrapador pivotante de masa M. El momento de inercia del atrapador alrededor de su eje de rotación en el pivote es I. La distancia r es mucho mayor que el radio de la esfera. *a*) Use la conservación del momento angular para demostrar que la rapidez angular de la esfera y el atrapador justo después del impacto es $\omega = mvr/\left(mr^2 + I\right)$. *b*) Una vez atrapada la esfera, el centro de masa del sistema esfera-atrapador oscila hacia arriba con un aumento máximo de altura de h. Use la conservación de la energía para demostrar que $\omega = \sqrt{2(M + m)gh/\left(mr^2 + I\right)}$. *c*) Una alumna dice que el momento lineal se conserva en el choque, y deduce la expresión $mv = (m + M)V$, donde V es la rapidez de la esfera inmediatamente después del choque. Luego ella usa la conservación de la energía para deducir que $V = \sqrt{2gh}$, de modo que $mv = (m + M)\sqrt{2gh}$. Use los resultados de los incisos *a*) y *b*) para demostrar que esta ecuación sólo es válida si r está dada por $I = Mr^2$.

10.96. Un hombre de 55 kg corre alrededor del borde de una tornamesa horizontal montada en un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La velocidad del corredor relativa a la Tierra tiene magnitud de 2.8 m/s. La tornamesa gira en la dirección opuesta con velocidad angular de magnitud 0.20 rad/s relativa a la Tierra. El radio de la tornamesa es de 3.0 m, y su momento de inercia alrededor del eje de rotación es de 80 kg $\cdot$ m^2. Calcule la velocidad angular final del sistema, si el corredor se detiene relativo a la tornamesa. (El corredor puede tratarse como partícula.)

10.97. La precesión de la Luna. Mediciones cuidadosas de la separación entre la Tierra y la Luna indican que actualmente nuestro satélite se mueve alejándose de nosotros cerca de 3.0 cm cada año. Ignore cualquier momento angular que se pudiera transferir a la Luna desde la Tierra. Calcule la rapidez de cambio (en rad/s por año) de la velocidad angular de la Luna alrededor de la Tierra (consulte el Apéndice E y los datos astronómicos del Apéndice F). ¿Su velocidad angular aumenta o disminuye? (*Sugerencia:* si L = constante, entonces, $dL/dt = 0$.)

10.98. Centro de percusión. Un bate de béisbol con masa de 0.800 kg y 0.900 m de longitud descansa en una superficie horizontal sin fricción. Su centro de masa está a 0.600 m del extremo del mango (figura 10.64). El momento de inercia del bate alrededor de su centro de masa es de 0.0530 kg $\cdot$ m^2. El bate es golpeado por una pelota que viaja perpendicular a él. El impacto aplica un impulso $J = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt$ en un punto a una distancia x del extremo del mango. ¿Qué x se necesita para que el extremo del mango permanezca en reposo cuando el bate comience a moverse? [*Sugerencia:* considere el movimiento del centro de masa y la rotación alrededor del centro de masa. Calcule x de modo que estos dos movimientos se combinen dando $v = 0$ para el extremo del bate justo después del choque. Además, observe que la integración de la ecuación (10.29) da $\Delta L = \int_{t_1}^{t_2}(\sum \tau)\,dt$ (véase el problema 10.88).] El punto encontrado en el bate se denomina *centro de percusión*. Si se golpea una bola lanzada con ese punto se reduce al mínimo la "punzada" que el bateador siente en las manos.

Figura 10.64 Problema 10.98.



10.99. Considere un giróscopo, cuyo eje está inclinado con respecto a la horizontal un ángulo β. Demuestre que la frecuencia angular de precesión no depende del valor de β, sino que está dado por la ecuación (10.33).

Problemas de desafío

10.100. Una esfera uniforme de radio R rueda sin resbalar entre dos rieles, de modo que la distancia horizontal entre los dos puntos de contacto de los rieles con la esfera es d. *a*) Haga un dibujo y demuestre que, en cualquier instante, $v_{cm} = \omega\sqrt{R^2 - d^2/4}$. Analice esta expresión en los límites $d = 0$ y $d = 2R$. *b*) En el caso de una esfera uniforme que parte del reposo y desciende una distancia vertical h mientras baja una rampa rodando sin resbalar, $v_{cm} = \sqrt{10gh/7}$. Sustituyendo la rampa por los dos rieles, demuestre que

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10gh}{5 + 2/(1 - d^2/4R^2)}}$$

En ambos casos, se despreció el trabajo efectuado por la fricción. *c*) ¿Cuál rapidez del inciso *b*) es menor? ¿Por qué? Conteste en términos de la forma en que la pérdida de energía potencial se divide entre las ganancias de energías cinética traslacional y rotacional. *d*) ¿Para qué valor del cociente d/R las dos expresiones del inciso *b*) para la rapidez difieren en 5.0%? ¿Y en 0.50%?

10.101. Cuando un objeto rueda sin resbalar, la fuerza de fricción de rodamiento es mucho menor que la fuerza de fricción cuando el objeto resbala; una moneda rueda sobre su borde con mucha mayor rapidez que si resbala sobre su cara plana. (Véase la sección 5.3.) Si un objeto rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal, podemos suponer que la fuerza de fricción es cero, de modo que a_x y α_z son aproximadamente cero, y v_x y ω_z son aproximadamente constantes. Rodar sin resbalar implica que $v_x = r\omega_z$ y $a_x = r\alpha_z$. Si un objeto se pone en movimiento en una superficie *sin* estas igualdades, la fricción de deslizamiento (cinética) actuará sobre el objeto mientras se desliza, hasta que se establece el rodamiento sin deslizamiento. Un cilindro sólido de masa M y radio R, girando con rapidez angular ω_0 alrededor de un eje que pasa por su centro, se coloca en una superficie horizontal para la que el coeficiente de fricción cinética es μ_k. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del cilindro en la superficie. Medite bien la dirección de la fuerza de fricción cinética que actúa sobre el cilindro. Calcule las aceleraciones a_x del centro de masa y α_z de rotación alrededor del centro de masa. *b*) Inicialmente, el cilindro está resbalando totalmente, ya que $\omega_z = \omega_0$ pero $v_x = 0$. El rodamiento sin deslizamiento se inicia cuando $v_x = R\omega_z$. Calcule la *distancia* que el cilindro rueda antes de que deje de resbalar. *c*) Calcule el trabajo efectuado por la fuerza de fricción sobre el cilindro, mientras éste se movió desde el punto donde se colocó, hasta el punto donde comenzó a rodar sin resbalar.

10.102. Se construye una rueda de giróscopo para demostración quitando el neumático de una rueda de bicicleta de 0.650 m de diámetro, enrollando alambre de plomo en el borde y pegándolo con cinta. El eje se proyecta 0.200 m a cada lado de la rueda y una mujer sostiene los extremos del eje en sus manos. La masa del sistema es de 8.00 kg; puede suponerse que toda la masa se encuentra en el borde. El eje es horizontal y la rueda está girando alrededor del eje a 5.00 rev/s. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza que cada mano ejerce sobre el eje *a*) cuando el eje está en reposo; *b*) cuando el eje gira en un plano horizontal alrededor de su centro a 0.050 rev/s; *c*) cuando el eje está girando en un plano horizontal alrededor de su centro a 0.300 rev/s. *d*) ¿Con qué rapidez debe girar el eje para que pueda sostenerse sólo en un extremo?

10.103. Un bloque con masa m gira con rapidez lineal v_1 en un círculo de radio r_1 sobre una superficie horizontal sin fricción (véase la figura 10.48). Se tira del cordón lentamente desde abajo, hasta que el radio del círculo descrito por el bloque se reduce a r_2. *a*) Calcule la tensión T en el cordón en función de r, la distancia entre el bloque y el agujero. Su respuesta estará en términos de la velocidad inicial v_1 y el radio r_1. *b*) Use $W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{T}(r) \cdot d\vec{r}$ para calcular el trabajo efectuado por $\vec{T}$ cuando r cambia de r_1 a r_2. *c*) Compare los resultados del inciso *b*) con el cambio en la energía cinética del bloque.