

### 9.3 Relación entre cinemática lineal y angular

¿Cómo obtenemos la velocidad y aceleración lineales de un punto dado de un cuerpo rígido en rotación? Necesitamos la respuesta para continuar con nuestro estudio de la rotación. Para obtener la energía cinética de un cuerpo en rotación, por ejemplo, debemos partir de  $K = \frac{1}{2}mv^2$  para una partícula, y esto requiere conocer  $v$  para cada partícula del cuerpo. Por lo tanto, vale la pena deducir relaciones generales entre la velocidad y aceleración *angulares* de un cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo, y la velocidad y aceleración *lineales* de un punto o partícula específicos del cuerpo.

#### Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo, todas sus partículas se mueven en una trayectoria circular. El círculo yace en un plano perpendicular al eje y está centrado en el eje. La rapidez de una partícula es directamente proporcional a la velocidad angular del cuerpo; cuanto más rápidamente gire el cuerpo, mayor será la rapidez de cada partícula. En la figura 9.9, el punto  $P$  está a una distancia constante  $r$  del eje de rotación, así que se mueve en un círculo de radio  $r$ . En cualquier instante, el ángulo  $\theta$  (en rad) y la longitud de arco  $s$  están relacionadas por

$$s = r\theta$$

Derivamos esto con respecto al tiempo, observando que  $r$  es constante para una partícula específica, y obtenemos el valor absoluto de ambos lados:

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = r \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

Ahora,  $|ds/dt|$  es el valor absoluto de la razón de cambio de la longitud de arco, que es igual a la rapidez *lineal* instantánea  $v$  de la partícula. De manera análoga,  $|d\theta/dt|$  es el valor absoluto de la razón de cambio del ángulo, que es la **rapidez angular** instantánea  $\omega$ , es decir, la magnitud de la velocidad angular instantánea en rad/s. Así,

$$v = r\omega \quad (\text{relación entre rapidez lineal y angular}) \quad (9.13)$$

Cuanto más lejos del eje esté un punto, mayor será su rapidez lineal. La *dirección* del vector de velocidad lineal es siempre tangente a la trayectoria circular (figura 9.9).

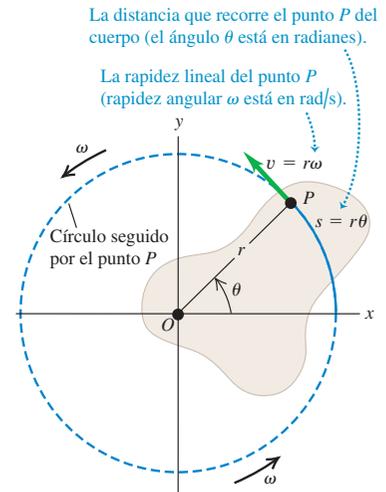
**CUIDADO Rapidez contra velocidad** Tenga presente la distinción entre las *rapideces* lineal y angular  $v$  y  $\omega$  (que aparecen en la ecuación (9.13)) y las *velocidades* lineal y angular  $v_x$  y  $\omega_z$ . Las cantidades sin subíndices,  $v$  y  $\omega$ , nunca son negativas; son las magnitudes de los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{\omega}$ , respectivamente, y sus valores sólo nos dicen con qué rapidez se está moviendo la partícula ( $v$ ) o qué tan rápido está girando ( $\omega$ ). Las cantidades correspondientes con subíndice,  $v_x$  y  $\omega_z$ , pueden ser positivas o negativas; su signo indica la dirección del movimiento. ■

#### Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Podemos representar la aceleración de una partícula que se mueve en un círculo en términos de sus componentes centrípeta y tangencial,  $a_{\text{rad}}$  y  $a_{\text{tan}}$  (figura 9.10), como hicimos en la sección 3.4. Le recomendamos repasar esa sección ahora. Vimos que la **componente tangencial de aceleración**  $a_{\text{tan}}$ , la componente paralela a la velocidad instantánea, actúa cambiando la *magnitud* de la velocidad de la partícula (su rapidez) y es igual a la razón de cambio de la rapidez. Derivando la ecuación (9.13), obtenemos

$$a_{\text{tan}} = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad (\text{aceleración tangencial de un punto en un cuerpo en rotación}) \quad (9.14)$$

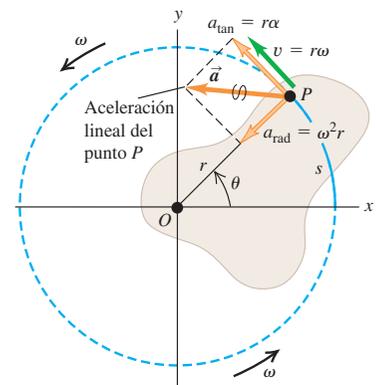
9.9 Cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo que pasa por el punto  $O$ .



9.10 Cuerpo rígido cuya rotación está acelerando. La aceleración del punto  $P$  tiene una componente  $a_{\text{rad}}$  hacia el eje de rotación (perpendicular a  $\vec{v}$ ) y una componente  $a_{\text{tan}}$  a lo largo del círculo que sigue el punto  $P$  (paralela a  $\vec{v}$ ).

**Componentes de aceleración radial y tangencial:**

- $a_{\text{rad}} = \omega^2 r$  es la aceleración centrípeta del punto  $P$ .
- $a_{\text{tan}} = r\alpha$  significa que la rotación de  $P$  está acelerando (el cuerpo tiene aceleración angular).



Esta componente de la aceleración de una partícula siempre es tangente a la trayectoria circular de la partícula.

La cantidad  $\alpha = d\omega/dt$  de la ecuación (9.14) es la razón de cambio de la *rapidez* angular. No es idéntica a  $\alpha_z = d\omega_z/dt$ , que es la razón de cambio de la *velocidad* angular. Por ejemplo, consideremos un cuerpo que gira de modo que su vector de velocidad angular apunta en la dirección  $-z$  (figura 9.5b). Si la rapidez angular del cuerpo está aumentando a razón de 10 rad/s por segundo, entonces  $\alpha = 10 \text{ rad/s}^2$ . Sin embargo,  $\omega_z$  es negativa y se está volviendo más negativa a medida que la rotación se acelera, así que  $\alpha_z = -10 \text{ rad/s}^2$ . La regla para la rotación en torno a un eje fijo es que  $\alpha$  es igual a  $\alpha_z$  si  $\omega_z$  es positiva e igual a  $-\alpha_z$  si  $\omega_z$  es negativa.

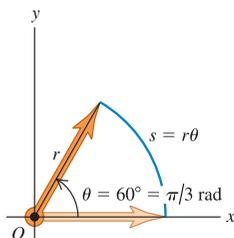
La componente de la aceleración de la partícula que está dirigida hacia el eje de rotación, la **componente centrípeta de aceleración**  $a_{\text{rad}}$ , está asociada con el cambio de *dirección* de la velocidad de la partícula. En la sección 3.4 dedujimos la relación  $a_{\text{rad}} = v^2/r$ . Podemos expresar esto en términos de  $\omega$  usando la ecuación (9.13):

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{aceleración centrípeta de un punto de un cuerpo en rotación}) \quad (9.15)$$

Esto se cumple en todo instante *aun si  $\omega$  y  $v$  no son constantes*. La componente centrípeta siempre apunta hacia el eje de rotación.

La suma vectorial de las componentes centrípeta y tangencial de la aceleración de una partícula en un cuerpo en rotación es la aceleración lineal  $\vec{a}$  (figura 9.10).

**9.11** Al relacionar cantidades lineales y angulares, utilice siempre radianes.



En cualquier ecuación que relacione cantidades lineales con cantidades angulares, los ángulos se deberán expresar en radianes ...

**¡CORRECTO!**  $s = (\pi/3)r$

... nunca en grados ni revoluciones.

**¡INCORRECTO!**  $s = 60r$

**CUIDAD** Utilice ángulos en radianes en todas las ecuaciones Es importante recordar que la ecuación (9.1),  $s = r\theta$ , es válida *sólo* si  $\theta$  se mide en radianes. Lo mismo sucede con todas las ecuaciones derivadas de ella, incluidas las ecuaciones (9.13), (9.14) y (9.15). Al usar estas ecuaciones, *debemos* expresar los ángulos en radianes, no revoluciones ni grados (figura 9.11). ■

Las ecuaciones (9.1), (9.13) y (9.14) también son válidas para cualquier partícula que tenga la misma velocidad tangencial que un punto de un cuerpo rígido en rotación. Por ejemplo, si una cuerda enrollada en un cilindro se desenrolla sin estirarse ni deslizarse, su rapidez y aceleración en cualquier instante son iguales a la rapidez y aceleración tangencial del punto en el cual es tangente al cilindro. El mismo principio se aplica a las cadenas y ruedas dentadas de una bicicleta, a correas y poleas que giran sin deslizarse, etcétera. Más adelante en este capítulo y en el capítulo 10, tendremos varias oportunidades de usar estas relaciones. Cabe señalar que la ecuación (9.15) para la componente centrípeta  $a_{\text{rad}}$  es aplicable a la cuerda o cadena *sólo* en los puntos de contacto con el cilindro o la rueda. Los demás puntos no tienen la misma aceleración hacia el centro del círculo que tienen los puntos del cilindro o la rueda.

### Ejemplo 9.4 Lanzamiento del disco

Un lanzador de disco gira el disco en un círculo con radio de 80.0 cm. En cierto instante, el lanzador gira con rapidez angular de 10.0 rad/s y la rapidez angular está aumentando a 50 rad/s<sup>2</sup>. Calcule las componentes de aceleración tangencial y centrípeta del disco en ese instante, así como la magnitud de esa aceleración.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Modelamos el disco como una partícula que sigue una trayectoria circular (figura 9.12a), así que podemos usar las ideas que desarrollamos en esta sección.

**PLANTEAR:** Nos dan el radio  $r = 0.800 \text{ m}$ , la rapidez angular  $\omega = 10.0 \text{ rad/s}$  y la razón de cambio de la rapidez angular  $\alpha = 50.0 \text{ rad/s}^2$  (figura 9.12b). Las primeras dos incógnitas son las componentes de

aceleración  $a_{\text{tan}}$  y  $a_{\text{rad}}$ , que obtendremos con las ecuaciones (9.14) y (9.15), respectivamente. Una vez que tengamos esas componentes del vector de aceleración, obtendremos la magnitud de  $a$  (la tercera incógnita) aplicando el teorema de Pitágoras.

**EJECUTAR:** De las ecuaciones (9.14) y (9.15):

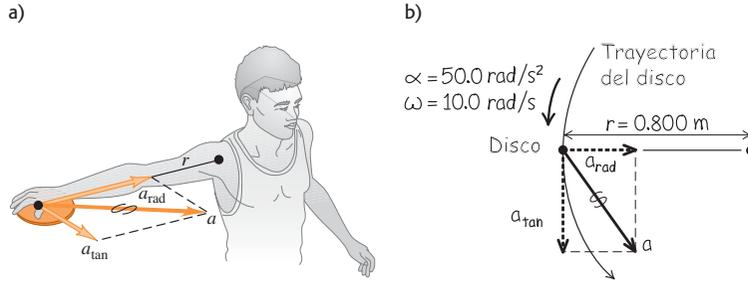
$$a_{\text{tan}} = r\alpha = (0.800 \text{ m})(50.0 \text{ rad/s}^2) = 40.0 \text{ m/s}^2$$

$$a_{\text{rad}} = \omega^2 r = (10.0 \text{ rad/s})^2(0.800 \text{ m}) = 80.0 \text{ m/s}^2$$

La magnitud del vector de aceleración es

$$a = \sqrt{a_{\text{tan}}^2 + a_{\text{rad}}^2} = 89.4 \text{ m/s}^2$$

9.12 a) Lanzamiento de disco con giro circular. b) Nuestro diagrama muestra las componentes de la aceleración para el disco.



**EVALUAR:** Observe que omitimos la unidad “radián” de nuestros resultados para  $a_{tan}$ ,  $a_{rad}$  y  $a$ . Podemos hacerlo porque el “radián” es una cantidad adimensional.

La magnitud  $a$  es unas nueve veces  $g$ , la aceleración debida a la gravedad. ¿Puede usted demostrar que, si la rapidez angular se duplica

a 20.0 rad/s pero  $\alpha$  no cambia, la magnitud de la aceleración,  $a$ , aumenta a 322 m/s<sup>2</sup> (casi 33g)?

**Ejemplo 9.5 Diseño de una hélice**

Imagine que le piden diseñar una hélice de avión que gire a 2400 rpm. La rapidez de avance del avión en el aire debe ser de 75.0 m/s (270 km/h o unas 168 mi/h), y la rapidez de las puntas de las aspas de la hélice en el aire no debe exceder de 270 m/s (figura 9.13a). (Esto es cerca de 0.80 veces la rapidez del sonido en aire. Si tales puntas se movieran con una rapidez cercana a la del sonido, producirían un ruido enorme.) a) ¿Qué radio máximo puede tener la hélice? b) Con este radio, ¿qué aceleración tiene la punta de la hélice?

**SOLUCIÓN**

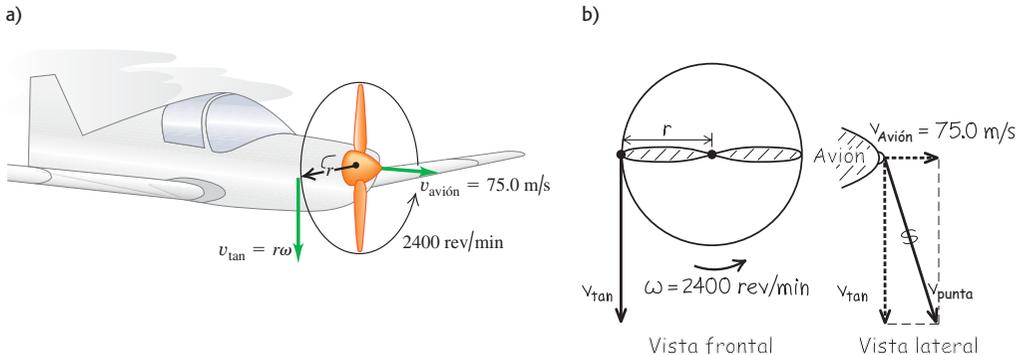
**IDENTIFICAR:** El objeto de interés en este ejemplo es una partícula en la punta de la hélice; las incógnitas son la distancia entre esa partícula y el eje, y su aceleración. Observe que la rapidez de esta partícula con respecto al aire (la cual no puede exceder de 270 m/s) se debe *tanto* a la rotación de la hélice *como* al movimiento hacia adelante del avión.

**PLANTEAR:** Como indica la figura 9.13b, la velocidad  $\vec{v}_{punta}$  de una partícula en la punta de la hélice es la suma vectorial de su velocidad tangencial debida a la rotación de la hélice (magnitud  $v_{tan}$ , dada por la ecuación (9.13)) y la velocidad hacia adelante del avión (magnitud  $v_{avión} = 75.0$  m/s). El plano de rotación de la hélice es perpendicular a la dirección del vuelo, así que los dos vectores mencionados son perpendiculares y podemos usar el teorema de Pitágoras para relacionar  $v_{tan}$  y  $v_{avión}$  con  $v_{punta}$ . Entonces, igualaremos  $v_{punta}$  a 270 m/s y despejaremos el radio  $r$ . Observe que la rapidez angular de la hélice es constante, de manera que la aceleración de la punta de la hélice sólo tiene una componente radial, la cual obtendremos con la ecuación (9.15).

**EJECUTAR:** Primero convertimos  $\omega$  a rad/s (véase la figura 9.11):

$$\begin{aligned} \omega &= 2400 \text{ rpm} = \left( 2400 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \right) \left( \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) \\ &= 251 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

9.13 a) Avión impulsado por hélice en el aire. b) Nuestro esquema presenta las componentes de la velocidad para la punta de la hélice.



a) Según la figura 9.13b y la ecuación (9.13), la magnitud de la velocidad  $v_{\text{total}}$  está dada por

$$v_{\text{punta}}^2 = v_{\text{avión}}^2 + v_{\text{tan}}^2 = v_{\text{avión}}^2 + r^2\omega^2 \quad \text{así que}$$

$$r^2 = \frac{v_{\text{punta}}^2 - v_{\text{avión}}^2}{\omega^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{\sqrt{v_{\text{punta}}^2 - v_{\text{avión}}^2}}{\omega}$$

Si  $v_{\text{punta}} = 270$  m/s, el radio de la hélice es

$$r = \frac{\sqrt{(270 \text{ m/s})^2 - (75.0 \text{ m/s})^2}}{251 \text{ rad/s}} = 1.03 \text{ m}$$

b) La aceleración centrípeta es

$$a_{\text{rad}} = \omega^2 r$$

$$= (251 \text{ rad/s})^2 (1.03 \text{ m}) = 6.5 \times 10^4 \text{ m/s}^2$$

La aceleración *tangencial* es cero porque la rapidez angular es constante.

**EVALUAR:** De  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ , ¡la hélice debe ejercer una fuerza de  $6.5 \times 10^4$  N sobre cada kilogramo de material en la punta! Por ello, las hélices se fabrican con materiales resistentes (por lo general, una aleación de aluminio).

### Ejemplo conceptual 9.6 Engranajes de bicicleta

¿Qué relación hay entre las rapidez angular de las dos ruedas dentadas de bicicleta de la figura 9.14 y el número de dientes en cada una?

#### SOLUCIÓN

La cadena no se desliza ni se estira, así que se mueve con la misma rapidez tangencial  $v$  en ambas ruedas dentadas. Por la ecuación (9.13),

$$v = r_{\text{frontal}}\omega_{\text{frontal}} = r_{\text{trasera}}\omega_{\text{trasera}} \quad \text{así que} \quad \frac{\omega_{\text{trasera}}}{\omega_{\text{frontal}}} = \frac{r_{\text{frontal}}}{r_{\text{trasera}}}$$

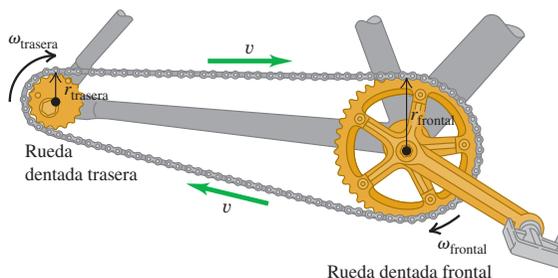
La rapidez angular es inversamente proporcional al radio. Esto se cumple también para poleas conectadas mediante una correa, siempre que ésta no se deslice. En el caso de las ruedas dentadas, los dientes deben estar equidistantes en sus circunferencias para que la cadena embone correctamente. Sean  $N_{\text{frontal}}$  y  $N_{\text{trasera}}$  los números de dientes; la condición de que el espaciado de los dientes sea igual en ambas ruedas es

$$\frac{2\pi r_{\text{frontal}}}{N_{\text{frontal}}} = \frac{2\pi r_{\text{trasera}}}{N_{\text{trasera}}} \quad \text{así que} \quad \frac{r_{\text{frontal}}}{r_{\text{trasera}}} = \frac{N_{\text{frontal}}}{N_{\text{trasera}}}$$

Combinando esto con la otra ecuación, tenemos

$$\frac{\omega_{\text{trasera}}}{\omega_{\text{frontal}}} = \frac{N_{\text{frontal}}}{N_{\text{trasera}}}$$

**9.14** Las ruedas dentadas y la cadena de una bicicleta.



La rapidez angular de cada rueda dentada es inversamente proporcional al número de dientes. En una bicicleta de varias velocidades, obtenemos la máxima rapidez angular  $\omega_{\text{trasera}}$  de la rueda trasera para un pedaleo dado  $\omega_{\text{frontal}}$  cuando el cociente  $N_{\text{frontal}}/N_{\text{trasera}}$  es máximo; esto implica usar la rueda dentada delantera de mayor radio ( $N_{\text{frontal}}$  máximo) y la rueda dentada trasera de menor radio ( $N_{\text{trasera}}$  mínimo).

**Evalúe su comprensión de la sección 9.3** En los CD y los DVD (véase la figura 9.8), la información se almacena en un patrón codificado de agujeros diminutos, los cuales están dispuestos en una pista que forma una espiral del centro al borde del disco. Cuando el disco gira dentro de un reproductor, la pista se escanea con rapidez *lineal* constante. ¿Cómo debe cambiar la rapidez de rotación del disco mientras la cabeza lectora del reproductor sigue la pista? i) La rapidez de rotación debe aumentar. ii) La rapidez de rotación debe disminuir. iii) La rapidez de rotación debe permanecer igual.



## 9.4 Energía en el movimiento rotacional

Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, así que tiene energía cinética que podemos expresar en términos de la rapidez angular del cuerpo y una nueva cantidad llamada *momento de inercia*, que depende de la masa del cuerpo y de la forma en que se distribuye tal masa.

Para deducir esta relación, consideramos que el cuerpo está formado por un gran número de partículas, con masas  $m_1, m_2, \dots$ , a distancias  $r_1, r_2, \dots$  del eje de rotación. Rotulamos las partículas con el subíndice  $i$ : la masa de la  $i$ -ésima partícula es  $m_i$  y su distancia con respecto al eje de rotación es  $r_i$ . Las partículas no tienen que estar todas

en el mismo plano, así que especificamos que  $r_i$  es la distancia *perpendicular* de la partícula  $i$ -ésima al eje.

Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo, la rapidez  $v_i$  de la  $i$ -ésima partícula está dada por la ecuación (9.13),  $v_i = r_i\omega$ , donde  $\omega$  es la rapidez angular del cuerpo. Diferentes partículas tienen distintos valores de  $r$ , pero  $\omega$  es igual para todas (si no, el cuerpo no sería rígido). La energía cinética de la  $i$ -ésima partícula es

$$\frac{1}{2}m_iv_i^2 = \frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2$$

La energía cinética *total* del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas:

$$K = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \dots = \sum_i \frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2$$

Sacando el factor común  $\omega^2/2$  de esta expresión:

$$K = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_ir_i^2\right)\omega^2$$

La cantidad entre paréntesis, que se obtiene multiplicando la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje de rotación y sumando los productos, se denota con  $I$  y es el **momento de inercia** del cuerpo para este eje de rotación:

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots = \sum_i m_ir_i^2 \quad \text{(definición de momento de inercia)} \quad (9.16)$$

La palabra “momento” implica que  $I$  depende de la distribución espacial de la masa del cuerpo; nada tiene que ver con el tiempo. Para un cuerpo con un eje de rotación dado y una masa total dada, cuanto mayor sea la distancia del eje a las partículas que constituyen el cuerpo, mayor será el momento de inercia. En un cuerpo rígido, las distancias  $r_i$  son constantes, en tanto que  $I$  es independiente de cómo gira el cuerpo en torno al eje dado. La unidad del momento de inercia en el SI es el kilogramo-metro cuadrado ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ).

En términos del momento de inercia  $I$ , la **energía cinética rotacional**  $K$  de un cuerpo rígido es

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{(energía cinética rotacional de un cuerpo rígido)} \quad (9.17)$$

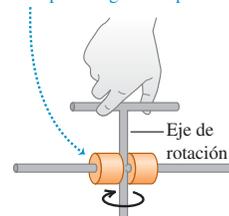
La energía cinética dada por la ecuación (9.17) *no* es una nueva forma de energía; es simplemente la suma de las energías cinéticas de las partículas que constituyen el cuerpo rígido en rotación. Al usar la ecuación (9.17),  $\omega$  *debe* medirse en radianes por segundo, no revoluciones ni grados por segundo, con la finalidad de obtener  $K$  en joules; la razón es que usamos  $v_i = r_i\omega$  en la deducción.

La ecuación (9.17) ofrece una interpretación física sencilla del momento de inercia: *cuanto mayor sea el momento de inercia, mayor será la energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una rapidez angular  $\omega$* . En el capítulo 6 vimos que la energía cinética de un cuerpo es igual al trabajo efectuado para acelerar ese cuerpo desde el reposo. De esta manera, cuanto mayor sea el momento de inercia de un cuerpo, más difícil será ponerlo a girar si está en reposo, y más difícil será detener su rotación si ya está girando (figura 9.15). Por esta razón,  $I$  también se denomina *inercia rotacional*.

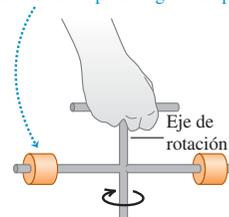
El siguiente ejemplo muestra cómo el *cambio* del eje de rotación afecta el valor de  $I$ .

**9.15** Aparato que gira libremente en torno a un eje vertical. El momento de inercia se puede variar fijando los dos cilindros de igual masa en diferentes posiciones en la varilla horizontal.

- Masa cercana al eje.
- Momento de inercia pequeño.
- Es fácil poner a girar el aparato.



- Masa más lejos del eje.
- Mayor momento de inercia.
- Es más difícil poner a girar el aparato.



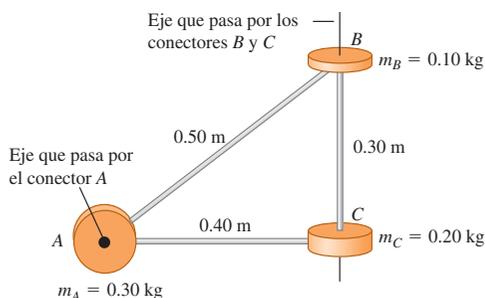
### Ejemplo 9.7 Momentos de inercia para diferentes ejes de rotación

Un ingeniero está diseñando una pieza mecánica formada por tres conectores circulares gruesos unidos por puntales ligeros moldeados (figura 9.16). *a)* ¿Qué momento de inercia tiene este cuerpo alrededor de un eje que pasa por el centro del disco *A* y es perpendicular al plano del diagrama? *b)* ¿Qué momento de inercia tiene alrededor de un eje que pasa por el centro de los discos *B* y *C*? *c)* Si el cuerpo gira sobre el eje que pasa por *A* y es perpendicular al plano del diagrama, con rapidez angular  $\omega = 4.0 \text{ rad/s}$ , ¿qué energía cinética tiene?

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Consideraremos los conectores circulares como partículas masivas; y los puntales ligeros, como varillas sin masa. Así,

#### 9.16 Pieza mecánica de forma inusual.



podremos usar las ideas de esta sección para calcular el momento de inercia de este conjunto de tres partículas.

**PLANTEAR:** En los incisos *a)* y *b)*, usaremos la ecuación (9.16) para obtener el momento de inercia con cada uno de los dos ejes. Dado el momento de inercia para el eje *A*, usaremos la ecuación (9.17) en el inciso *c)* para calcular la energía cinética de rotación.

**EJECUTAR:** *a)* La partícula en el punto *A* está *sobre* el eje; su distancia *r* con respecto al eje es cero, así que no contribuye al momento de inercia. La ecuación (9.16) da

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.10 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 + (0.20 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.057 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

*b)* Las partículas en *B* y *C* están *sobre* el eje, así que para ellas  $r = 0$ , y ninguna contribuye al momento de inercia. Sólo *A* contribuye, y tenemos

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.30 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.048 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

*c)* Por la ecuación (9.17),

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (0.057 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) (4.0 \text{ rad/s})^2 = 0.46 \text{ J}$$

**EVALUAR:** Nuestros resultados indican que el momento de inercia para el eje que pasa por *A* es mayor que para el eje que pasa por *B* y *C*. Por lo tanto, de los dos ejes, es más fácil hacer girar la pieza sobre el eje *B* y *C*.

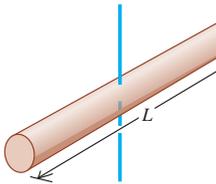
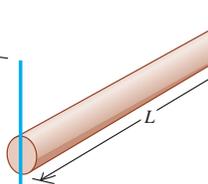
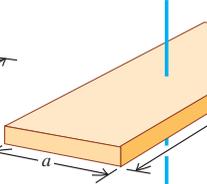
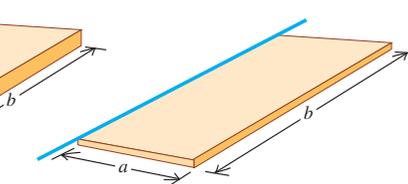
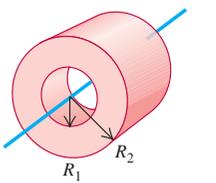
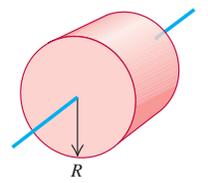
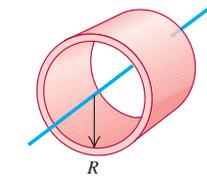
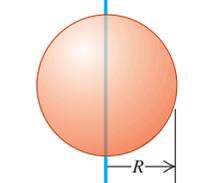
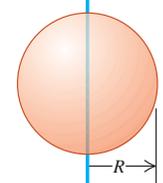
**CUIDADO** El momento de inercia depende de la elección del eje Los resultados de los incisos *a)* y *b)* del ejemplo 9.7 muestran que el momento de inercia de un cuerpo depende de la ubicación y orientación del eje. No basta con decir “el momento de inercia de este cuerpo es de  $0.048 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ”. Debemos ser específicos y decir “el momento de inercia de este cuerpo *alrededor del eje BC* es de  $0.048 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ”.

En el ejemplo 9.7, representamos el cuerpo como varias masas puntuales, y evaluamos la sumatoria directamente de la ecuación (9.16). Si el cuerpo es una distribución *continua* de materia, como un cilindro sólido o una placa, la sumatoria se convertirá en una integral y necesitaremos usar cálculo para determinar el momento de inercia. Daremos varios ejemplos de estos cálculos en la sección 9.6; mientras tanto, en la tabla 9.2 se dan los momentos de inercia de varias formas comunes, en términos de las masas y dimensiones. Todos los cuerpos mostrados en la tabla 9.2 son *uniformes*; es decir, la densidad tiene el mismo valor en todos los puntos dentro de las partes sólidas del cuerpo.

**CUIDADO** Cálculo del momento de inercia Es posible que el lector se sienta tentado a calcular el momento de inercia de un cuerpo suponiendo que toda la masa está concentrada en el centro de masa, multiplicando después la masa total por el cuadrado de la distancia del centro de masa al eje. Resista la tentación, ¡sería un error hacerlo! Por ejemplo, si una varilla delgada uniforme de longitud *L* y masa *M* pivotea sobre un eje que pasa por un extremo, perpendicular a la varilla, el momento de inercia es  $I = ML^2/3$  (caso *b)* en la tabla 9.2). Si tomáramos la masa como si estuviera concentrada en el centro, a una distancia *L/2* del eje, obtendríamos el resultado *incorrecto*  $I = M(L/2)^2 = ML^2/4$ .

Ahora que sabemos calcular la energía cinética de un cuerpo rígido en rotación, podemos aplicar los principios de energía del capítulo 7 al movimiento rotacional. Veamos la estrategia y algunos ejemplos.

**Tabla 9.2** Momentos de inercia de diversos cuerpos

<p>a) Varilla delgada, eje por el centro</p> $I = \frac{1}{12} ML^2$ 	<p>b) Varilla delgada, eje por un extremo</p> $I = \frac{1}{3} ML^2$ 	<p>c) Placa rectangular, eje por el centro</p> $I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$ 	<p>d) Placa rectangular delgada, eje en un borde</p> $I = \frac{1}{3} Ma^2$ 	
<p>e) Cilindro hueco</p> $I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$ 	<p>f) Cilindro sólido</p> $I = \frac{1}{2} MR^2$ 	<p>g) Cilindro hueco de pared delgada</p> $I = MR^2$ 	<p>h) Esfera sólida</p> $I = \frac{2}{5} MR^2$ 	<p>i) Esfera hueca de pared delgada</p> $I = \frac{2}{3} MR^2$ 

**Estrategia para resolver problemas 9.1**

**Energía rotacional**



**IDENTIFICAR** *los conceptos importantes:* Podemos usar relaciones del trabajo, energía y la conservación de la energía, para obtener relaciones entre la posición y el movimiento de un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo. Como vimos en el capítulo 7, el método de energía generalmente no resulta útil para resolver problemas en los que interviene el tiempo. En el capítulo 10 veremos cómo abordar problemas de rotación de ese tipo.

**PLANTEAR** *el problema* siguiendo los mismos pasos de la Estrategia para resolver problemas de la sección 7.1, con la adición siguiente:

5. Muchos problemas implican una cuerda o un cable enrollado en un cuerpo rígido giratorio que funciona como polea. En estos casos, recuerde que el punto de la polea que toca la cuerda tiene la misma rapidez lineal que la cuerda, siempre que ésta no resbale sobre la polea. Así, podemos aprovechar las ecuaciones (9.13) y (9.14), que relacionan la rapidez lineal y la aceleración tangencial de un punto de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo. Los ejemplos 9.8 y 9.9 ilustran esto.

**EJECUTAR** *la solución:* Al igual que en el capítulo 7, escribimos expresiones para las energías cinética y potencial iniciales y finales ( $K_1$ ,  $K_2$ ,  $U_1$  y  $U_2$ ) y para el trabajo no conservativo  $W_{\text{otros}}$  (si lo hay). La novedad es la energía cinética rotacional, que se expresa en términos del momento de inercia  $I$  del cuerpo con respecto al eje dado y la rapidez angular  $\omega$  ( $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ ), en vez de su masa  $m$  y su rapidez  $v$ . Sustituya estas expresiones en  $K_1 + U_1 + W_{\text{otros}} = K_2 + U_2$  (si se efectúa trabajo no conservativo), o bien, en  $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$  (si sólo se efectúa trabajo conservativo), y despeje la(s) incógnita(s). Al igual que en el capítulo 7, resulta útil dibujar gráficas de barras que muestren los valores iniciales y finales de  $K$ ,  $U$  y  $E = K + U$ .

**EVALUAR** *la respuesta:* Como siempre, verifique que su respuesta sea lógica físicamente.

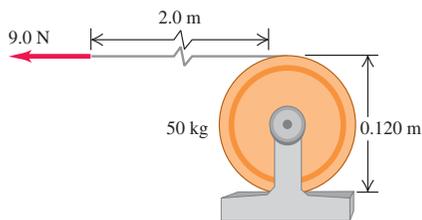
### Ejemplo 9.8 Cable que se desenrolla I

Un cable ligero, flexible y que no se estira está enrollado varias vueltas en el tambor de un malacate, un cilindro sólido con masa de 50 kg y 0.120 m de diámetro, que gira sobre un eje fijo horizontal montado en cojinetes sin fricción (figura 9.17). Una fuerza constante de magnitud de 9.0 N tira del extremo libre del cable a lo largo de una distancia de 2.0 m. El cable no resbala y hace girar al cilindro cuando desenrolla. Si el cilindro estaba inicialmente en reposo, calcule su rapidez angular final y la rapidez final del cable.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Resolveremos este problema empleando métodos de energía. El punto 1 es donde el cilindro comienza a moverse y el punto 2 es donde el cable se ha desenrollado 2.0 m. Puesto que el cable es ligero, supondremos que no tiene masa y que sólo el cilindro tiene energía cinética. La posición vertical del cilindro no cambia, así que no hay cambios en la energía potencial gravitacional. Hay fricción entre el cable y el cilindro; esto es lo que hace girar al cilindro cuando se tira del cable. Sin embargo, como el cable no resbala, no hay movimiento del cable relativo al cilindro y no se pierde energía mecánica por la fricción. Dado que el cable no tiene masa, la fuerza que el cable ejerce sobre el borde del cilindro es igual a la fuerza aplicada  $F$ .

**9.17** Un cable se desenrolla de un cilindro (vista lateral).



**PLANTEAR:** El cilindro inicialmente está en reposo, así que la energía cinética inicial es  $K_1 = 0$ . Entre los puntos 1 y 2, la fuerza  $F$  efectúa trabajo sobre el cilindro a lo largo de una distancia  $s = 2.0$  m. El resultado es que la energía cinética en el punto 2 es  $K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2$ . Una de las incógnitas es  $\omega$ ; la otra es la rapidez del cable en el punto 2, que es igual a la rapidez tangencial  $v$  del cilindro en ese punto. Obtendremos  $v$  a partir de  $\omega$  con la ecuación (9.13).

**EJECUTAR:** El trabajo efectuado sobre el cilindro es  $W_{\text{otras}} = Fs = (9.0 \text{ N})(2.0 \text{ m}) = 18 \text{ J}$ . Según la tabla 9.2, el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(50 \text{ kg})(0.060 \text{ m})^2 = 0.090 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(El radio  $R$  es la mitad del diámetro del cilindro.) La relación  $K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2$  da

$$\begin{aligned} 0 + 0 + W_{\text{otras}} &= \frac{1}{2}I\omega^2 + 0 \\ \omega &= \sqrt{\frac{2W_{\text{otras}}}{I}} = \sqrt{\frac{2(18 \text{ J})}{0.090 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}} \\ &= 20 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

La rapidez tangencial final del cilindro y, por ende, la rapidez final del cable es

$$v = R\omega = (0.060 \text{ m})(20 \text{ rad/s}) = 1.2 \text{ m/s}$$

**EVALUAR:** Si no podemos despreciar esa masa, una parte del trabajo efectuado se convertirá en energía cinética del cable. De manera que el cilindro adquiriría menos energía cinética y tendría menor rapidez angular que las calculadas aquí.

### Ejemplo 9.9 Cable que se desenrolla II

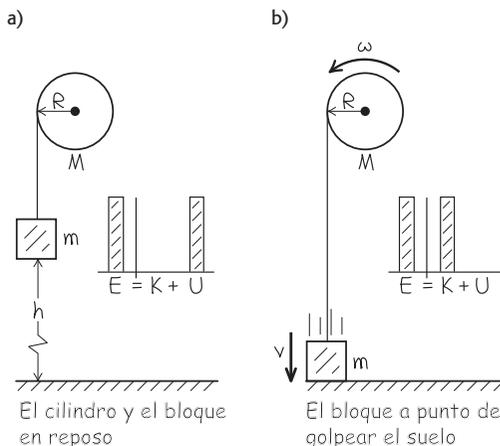
Enrollamos un cable ligero y flexible en un cilindro sólido de masa  $M$  y radio  $R$ . El cilindro gira con fricción despreciable sobre un eje horizontal estacionario. Atamos el extremo libre del cable a un bloque de masa  $m$  y soltamos el objeto sin velocidad inicial a una distancia  $h$  sobre el piso. Conforme el bloque cae, el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar, haciendo girar al cilindro. Calcule la rapidez del bloque que cae y la rapidez angular del cilindro, justo cuando el bloque golpea el piso.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Al igual que en el ejemplo 9.8, el cable no resbala y la fricción no efectúa trabajo. El cable no efectúa trabajo *neto*; en su extremo superior, la fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección; mientras que en su extremo inferior tienen direcciones opuestas. Por lo tanto, el trabajo total efectuado por ambos extremos del cable es cero. El único trabajo efectuado es el de la gravedad, así que se conserva la energía mecánica.

**PLANTEAR:** La figura 9.18a muestra la situación justo antes de que el bloque empiece a caer. En este punto, el sistema no tiene energía

**9.18** Nuestro esquema para este problema.



cinética, así que  $K_1 = 0$ . El piso es nuestro nivel de energía potencial cero; así,  $U_1 = mgh$  y  $U_2 = 0$ . (Podemos ignorar la energía potencial gravitacional del cilindro que gira, ya que su altura no cambia.) Justo antes de que el bloque golpee el piso (figura 9.18b), tanto el bloque como el cilindro tienen energía cinética. En ese momento, la energía cinética total  $K_2$  es

$$K_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

El momento de inercia del cilindro (tabla 9.2) es  $I = \frac{1}{2}MR^2$ . Además,  $v$  y  $\omega$  están relacionadas por  $v = R\omega$ , ya que la rapidez del bloque que cae debe ser igual a la rapidez tangencial en la superficie del cilindro. Usaremos estas relaciones para despejar las incógnitas  $v$  y  $\omega$  que se muestran en la figura 9.18b.

**EJECUTAR:** Utilizando nuestras expresiones para  $K_1$ ,  $U_1$ ,  $K_2$  y  $U_2$  y la relación  $\omega = v/R$  en la ecuación de conservación de la energía,  $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ , despejamos  $v$ :

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 0 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}M\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

La rapidez angular final del cilindro  $\omega$  se obtiene de  $\omega = v/R$ .

**EVALUAR:** Veamos algunos casos particulares. Si  $M$  es mucho mayor que  $m$ ,  $v$  es muy pequeña, como esperaríamos. Si  $M$  es mucho menor que  $m$ ,  $v$  es casi igual a  $\sqrt{2gh}$ , que es la rapidez de un cuerpo en caída libre desde una altura  $h$ . ¿Le sorprende a usted que  $v$  no dependa del radio del cilindro?

## Energía potencial gravitacional de un cuerpo extendido

En el ejemplo 9.9, el cable tenía masa despreciable y podíamos ignorar su energía cinética y la energía potencial gravitacional asociada a él. Si la masa *no* es despreciable, necesitamos saber cómo calcular la energía potencial gravitacional asociada a tal cuerpo extendido. Si la aceleración de la gravedad  $g$  es la misma en todos los puntos del cuerpo, la energía potencial gravitacional sería la misma si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa del cuerpo. Tomemos el eje  $y$  y hacia arriba. Para un cuerpo de masa total  $M$ , la energía potencial gravitacional  $U$  es simplemente

$$U = Mgy_{\text{cm}} \quad (\text{energía potencial gravitacional de un cuerpo extendido}) \quad (9.18)$$

donde  $y_{\text{cm}}$  es la coordenada  $y$  del centro de masa. Esta expresión es válida para cualquier cuerpo extendido, sea rígido o no (figura 9.19).

Para demostrar la ecuación (9.18), representamos otra vez el cuerpo como un conjunto de elementos de masa  $m_i$ . La energía potencial del elemento  $m_i$  es  $m_i g y_i$ , y la energía potencial total es

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \cdots = (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots)g$$

Sin embargo, por la ecuación (8.28), que define las coordenadas del centro de masa,

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots = (m_1 + m_2 + \cdots)y_{\text{cm}} = My_{\text{cm}}$$

donde  $M = m_1 + m_2 + \cdots$  es la masa total. Al combinar esto con la expresión anterior para  $U$ , tenemos  $U = Mgy_{\text{cm}}$ , que coincide con la ecuación (9.18).

Aplicaremos la ecuación (9.18) en los problemas. Usaremos esta relación en el capítulo 10 al analizar problemas de cuerpo rígido con eje de rotación móvil.

**Evalúe su comprensión de la sección 9.4** Suponga que el cilindro y el bloque del ejemplo 9.9 tienen la misma masa, de modo que  $m = M$ . Justo antes de que el objeto golpee el piso, ¿qué enunciado es correcto acerca de la relación entre la energía cinética del bloque que cae y la energía cinética rotacional del cilindro? i) El bloque tiene más energía cinética que el cilindro. ii) El bloque tiene menos energía cinética que el cilindro. iii) El bloque y el cilindro tienen cantidades iguales de energía cinética.



Activ  
ONLINE  
Physics

- 7.12 Mujeres y elevador de volante: enfoque de energía  
7.13 Rotojuego: enfoque de energía

**9.19** En la técnica de salto de altura ideada por Richard Fosbury, el atleta arca el cuerpo al pasar sobre la barra. Como resultado, su centro de masa realmente pasa *bajo* la barra. Esta técnica requiere de un menor aumento en la energía potencial gravitacional [ecuación (9.18)], que el método antiguo de saltar a horcajadas sobre la barra.

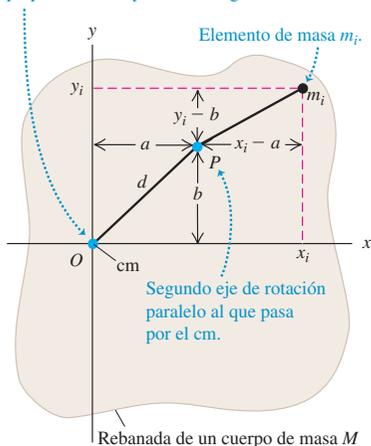


## 9.5 Teorema de los ejes paralelos

En la sección 9.4 apuntamos que un cuerpo no tiene un solo momento de inercia. De hecho, tiene un número infinito, porque el número de ejes sobre los que podría girar es infinito. No obstante, hay una relación simple entre el momento de inercia  $I_{\text{cm}}$  de un cuerpo de masa  $M$  alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y

**9.20** El elemento de masa  $m_i$  tiene coordenadas  $(x_i, y_i)$  con respecto a un eje de rotación que pasa por el centro de masa (cm), y coordenadas  $(x_i - a, y_i - b)$  con respecto al eje paralelo que pasa por el punto  $P$ .

Eje de rotación que pasa por el cm y es perpendicular al plano de la figura.



el momento de inercia  $I_P$  alrededor de cualquier otro eje paralelo al original pero desplazado una distancia  $d$ . Esta relación, llamada **teorema de los ejes paralelos**, dice que

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \quad (\text{teorema de los ejes paralelos}) \quad (9.19)$$

Para demostrarlo, consideramos dos ejes paralelos al eje  $z$ ; uno pasa por el centro de masa; y el otro, por un punto  $P$  (figura 9.20). Primero tomamos una rebanada muy delgada del cuerpo, paralela al plano  $xy$  y perpendicular al eje  $z$ . Tomamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro de masa del cuerpo; así, las coordenadas del centro de masa son  $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$ . El eje que pasa por el centro de masa atraviesa esta rebanada delgada en el punto  $O$ , y el eje paralelo la atraviesa en el punto  $P$ , cuyas coordenadas  $x$  y  $y$  son  $(a, b)$ . La distancia entre este eje y el que pasa por el centro de masa es  $d$ , donde  $d^2 = a^2 + b^2$ .

Podemos escribir una expresión para el momento de inercia  $I_P$  alrededor del eje que pasa por  $P$ . Sea  $m_i$  un elemento de masa de nuestra rebanada, con coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$ . El momento de inercia  $I_{cm}$  de la rebanada alrededor del eje que pasa por el centro de masa (en  $O$ ) es

$$I_{cm} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

El momento de inercia de la rebanada alrededor del eje que pasa por  $P$  es

$$I_P = \sum_i m_i[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

En estas expresiones no intervienen las coordenadas  $z_i$ , medidas perpendicularmente a las rebanadas, así que podemos extender las sumatorias para incluir *todas* las partículas de *todas* las rebanadas. Así,  $I_P$  será el momento de inercia de *todo* el cuerpo para un eje que pasa por  $P$ . Expandiendo los cuadrados y reagrupando:

$$I_P = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum_i m_i x_i - 2b \sum_i m_i y_i + (a^2 + b^2) \sum_i m_i$$

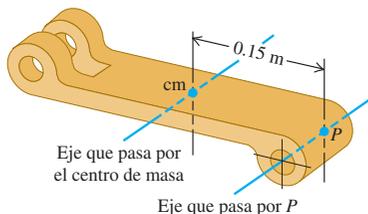
La primera sumatoria es  $I_{cm}$ . Por la definición de centro de masa [ecuación (8.28)], la segunda y la tercera sumatorias son proporcionales a  $x_{cm}$  y  $y_{cm}$ , que son cero porque tomamos el origen en el centro de masa. El último término es  $d^2$  multiplicada por la masa total, es decir,  $Md^2$ . Queda demostrado que  $I_P = I_{cm} + Md^2$ .

Como muestra la ecuación (9.19), un cuerpo rígido tiene menor momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa que alrededor de cualquier otro eje paralelo. Por ello, es más fácil poner a girar un cuerpo si el eje de rotación pasa por el centro de masa. Esto sugiere que, de algún modo, es más natural que un cuerpo en rotación gire sobre un eje que pasa por su centro de masa; haremos más cuantitativa esta idea en el capítulo 10.

### Ejemplo 9.10 Uso del teorema de ejes paralelos

Una pieza de un acoplamiento mecánico (figura 9.21) tiene una masa de 3.6 kg. Medimos su momento de inercia alrededor de un eje que pasa a 0.15 m de su centro de masa y obtenemos  $I_P = 0.132 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Calcule el momento de inercia  $I_{cm}$  alrededor de un eje paralelo que pasa por el centro de masa.

**9.21** Cálculo de  $I_{cm}$  a partir de una medición de  $I_P$ .



#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** El teorema de ejes paralelos nos permite relacionar los momentos de inercia  $I_{cm}$  e  $I_P$  a través de los dos ejes paralelos.

**PLANTEAR:** Usaremos la ecuación (9.19) para determinar la incógnita:  $I_{cm}$ .

**EXECUTAR:** Reacomodamos la ecuación y sustituimos los valores:

$$\begin{aligned} I_{cm} &= I_P - Md^2 = 0.132 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - (3.6 \text{ kg})(0.15 \text{ m})^2 \\ &= 0.051 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

**EVALUAR:** Nuestro resultado indica que  $I_{cm}$  es menor que  $I_P$ , como debe ser: ya vimos que el momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa es menor que para cualquier otro eje paralelo.

**Evalúe su comprensión de la sección 9.5** Un taco de billar es una varilla de madera con una composición uniforme y que se estrecha de un diámetro grande en un extremo, hacia uno pequeño en el otro extremo. Utilice el teorema de los ejes paralelos para decidir si un taco tiene un momento de inercia mayor i) para un eje que pasa por el extremo más grueso de la varilla y es perpendicular a la longitud de ésta, o ii) para un eje que pasa por el extremo más delgado de la varilla y es perpendicular a la longitud de ésta.

## \*9.6 Cálculos de momento de inercia

**NOTA:** esta sección opcional es para estudiantes que están familiarizados con el cálculo integral.

Si un cuerpo rígido es una distribución continua de masa —como un cilindro o una esfera sólidos— no puede representarse con unas cuantas masas puntuales. En este caso, la sumatoria de masas y distancias que define el momento de inercia [ecuación (9.16)] se vuelve una integral. Imagine que divide el cuerpo en elementos muy pequeños de masa  $dm$ , de modo que todos los puntos de un elemento estén prácticamente a la misma distancia perpendicular del eje de rotación. Llamamos  $r$  a esta distancia, como antes. El momento de inercia es, entonces,

$$I = \int r^2 dm \tag{9.20}$$

Para evaluar la integral, debemos representar  $r$  y  $dm$  en términos de la misma variable de integración. Si tenemos un objeto prácticamente unidimensional, como las varillas delgadas  $a)$  y  $b)$  de la tabla 9.2, podemos usar una coordenada  $x$  a lo largo y relacionar  $dm$  con un incremento  $dx$ . Si el objeto es tridimensional, suele ser más fácil expresar  $dm$  en términos de un elemento de volumen  $dV$  y la densidad  $\rho$  del cuerpo. La densidad es masa por unidad de volumen,  $\rho = dm/dV$ , así que podemos escribir la ecuación (9.20) como

$$I = \int r^2 \rho dV$$

Esta expresión nos dice que el momento de inercia de un cuerpo depende de la forma en que su densidad varía dentro de su volumen (figura 9.22). Si la densidad del cuerpo es uniforme, podemos sacar  $\rho$  de la integral:

$$I = \rho \int r^2 dV \tag{9.21}$$

Para usar esta ecuación, debemos expresar el elemento de volumen  $dV$  en términos de diferenciales de las variables de integración, como  $dV = dx dy dz$ . Siempre debemos elegir  $dV$  de modo que todos sus puntos estén casi a la misma distancia del eje de rotación. Los límites de la integral están determinados por la forma y las dimensiones del cuerpo. En el caso de cuerpos regulares, la integración suele ser muy sencilla.

**9.22** Al medir las pequeñas variaciones en las órbitas de los satélites, los geofísicos pueden calcular el momento de inercia dentro de su interior. Los datos indican que la Tierra es mucho más densa en el centro que en sus capas exteriores.



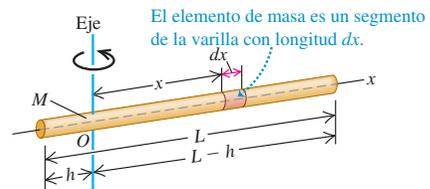
### Ejemplo 9.11 Varilla delgada uniforme, eje perpendicular a la longitud

La figura 9.23 muestra una varilla uniforme con masa  $M$  y longitud  $L$ . Podría ser el bastón (sin las tapas de hule) de una bastonera que marcha al frente a una banda de músicos. Calcule su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por  $O$ , a una distancia arbitraria  $h$  de un extremo.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** La varilla es una distribución continua de masa, por lo que debemos emplear la integración para calcular el momento de inercia. Elegimos como elemento de masa una sección corta de la varilla con longitud  $dx$ , a una distancia  $x$  del punto  $O$ .

**9.23** Cálculo del momento de inercia de una varilla delgada alrededor de un eje que pasa por  $O$ .



**PLANTEAR:** El cociente de la masa  $dm$  del elemento entre la masa total  $M$  es igual al cociente de su longitud  $dx$  entre la longitud total  $L$ :

$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L} \quad \text{así que} \quad dm = \frac{M}{L} dx$$

Determinaremos  $I$  a partir de la ecuación (9.20), sustituyendo  $r$  por  $x$  (véase la figura 9.23).

**EJECUTAR:** La figura 9.23 indica que los límites de integración de  $x$  son  $-h$  y  $(L-h)$ . Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-h}^{L-h} x^2 dx \\ &= \left[ \frac{M}{L} \left( \frac{x^3}{3} \right) \right]_{-h}^{L-h} = \frac{1}{3} M (L^2 - 3Lh + 3h^2) \end{aligned}$$

**EVALUAR:** Con esta expresión general podemos calcular el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por cualquier punto de la varilla. Por ejemplo, si el eje está en el extremo izquierdo,  $h = 0$  y

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Si el eje está en el extremo derecho, deberemos obtener el mismo resultado. Haciendo  $h = L$ , obtenemos

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Si el eje pasa por el centro, lo usual al girar un bastón,  $h = L/2$  y

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

Esto concuerda con las expresiones de la tabla 9.2.

### Ejemplo 9.12 Cilindro hueco o sólido que gira sobre el eje de simetría

La figura 9.24 muestra un cilindro hueco uniforme de longitud  $L$ , radio interior  $R_1$  y radio exterior  $R_2$ . Podría ser un cilindro de una imprenta o una laminadora. Calcule el momento de inercia alrededor del eje de simetría del cilindro.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Otra vez debemos usar la integración para calcular el momento de inercia, pero ahora elegimos como elemento de volumen una capa cilíndrica delgada de radio  $r$ , espesor  $dr$  y longitud  $L$ ; todas sus partes están prácticamente a la misma distancia del eje.

**PLANTEAR:** El volumen del elemento es casi igual al de una lámina plana de espesor  $dr$ , longitud  $L$  y anchura  $2\pi r$  (la circunferencia de la capa). Entonces,

$$dm = \rho dV = \rho(2\pi rL dr)$$

Usaremos esta expresión en la ecuación (9.20) e integraremos de  $r = R_1$  a  $r = R_2$ .

**EJECUTAR:** El momento de inercia está dado por

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho(2\pi rL dr) \\ &= 2\pi\rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \\ &= \frac{2\pi\rho L}{4} (R_2^4 - R_1^4) \\ &= \frac{\pi\rho L}{2} (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) \end{aligned}$$

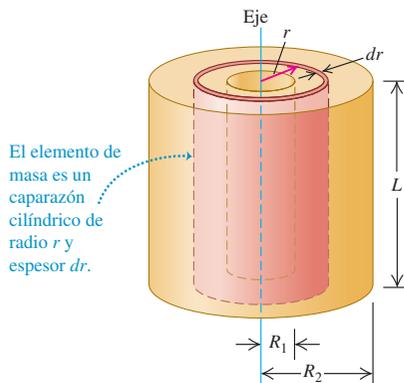
Suele ser más conveniente expresar el momento de inercia en términos de la masa total  $M$  del cuerpo, que es su densidad  $\rho$  multiplicada por el volumen total  $V$ , dado por

$$V = \pi L(R_2^2 - R_1^2)$$

así que la masa total  $M$  es

$$M = \rho V = \pi L \rho (R_2^2 - R_1^2)$$

**9.24** Cálculo del momento de inercia de un cilindro hueco alrededor de su eje de simetría.



Y el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

**EVALUAR:** Esto concuerda con el caso  $e$ ) de la tabla 9.2. Si el cilindro es sólido (digamos, una aplanadora),  $R_1 = 0$ . Llamemos al radio exterior  $R_2$  simplemente  $R$ . El momento de inercia de un cilindro sólido de radio  $R$  es

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

Si la pared del cilindro es muy delgada (como un conducto),  $R_1$  y  $R_2$  son casi iguales; si  $R$  representa este radio común,

$$I = MR^2$$

Podríamos haber predicho este resultado; en un cilindro de pared delgada, toda la masa está a la misma distancia  $r = R$  del eje, por lo que  $I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$ .

**Ejemplo 9.13 Esfera uniforme de radio  $R$ , eje por el centro**

Calcule el momento de inercia de una esfera sólida uniforme (como una bola de billar o una bola de acero de un cojinete) alrededor de un eje que pasa por el centro de tal esfera.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Para calcular el momento de inercia, dividimos la esfera en discos delgados de espesor  $dx$  (figura 9.25), cuyo momento de inercia conocemos por el ejemplo 9.12. Integraremos en ellos para calcular el momento de inercia total. La única cuestión complicada es que el radio y la masa de un disco dependen de su distancia  $x$  con respecto al centro de la esfera.

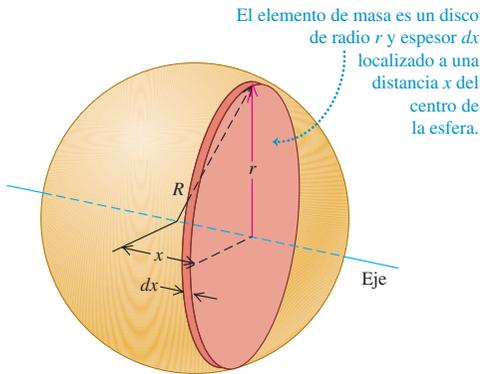
**PLANTEAR:** El radio  $r$  del disco que se muestra en la figura 9.25 es

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Su volumen es

$$dV = \pi r^2 dx = \pi(R^2 - x^2) dx$$

**9.25** Cálculo del momento de inercia de una esfera alrededor de un eje que pasa por su centro.



y su masa es

$$dm = \rho dV = \pi\rho(R^2 - x^2) dx$$

**EJECUTAR:** Del ejemplo 9.12, el momento de inercia de un disco de radio  $r$  y masa  $dm$  es

$$\begin{aligned} dI &= \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{1}{2}(\sqrt{R^2 - x^2})^2 3\pi\rho(R^2 - x^2) dx \\ &= \frac{\pi\rho}{2}(R^2 - x^2)^2 dx \end{aligned}$$

Integrando esta expresión de  $x = 0$  a  $x = R$ , obtenemos el momento de inercia del hemisferio derecho. Por simetría, el  $I$  total para la esfera es el doble:

$$I = (2) \frac{\pi\rho}{2} \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx$$

Integrando:

$$I = \frac{8\pi\rho}{15}R^5$$

La masa  $M$  de la esfera de volumen  $V = 4\pi R^3/3$  es

$$M = \rho V = \frac{4\pi\rho R^3}{3}$$

Comparando las expresiones para  $I$  y para  $M$ , vemos que

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

**EVALUAR:** Este resultado concuerda con la expresión de la tabla 9.2, caso  $h$ ). Observe que el momento de inercia de una esfera sólida de masa  $M$  y radio  $R$  es menor que el de un cilindro sólido con los mismos valores de masa y radio,  $I = \frac{1}{2}MR^2$ . La explicación es que una proporción mayor de la masa de la esfera está cerca del eje.

**Evalúe su comprensión de la sección 9.6** Dos cilindros huecos tienen los mismos radios interno y externo, así como la misma masa; sin embargo, tienen longitudes diferentes. Uno está hecho de madera de baja densidad y el otro de plomo de alta densidad. ¿Cuál cilindro tiene el mayor momento de inercia alrededor de su eje de simetría? i) El cilindro de madera; ii) el cilindro de plomo; iii) los dos momentos de inercia son iguales.

# CAPÍTULO 9 RESUMEN

**Cinemática rotacional:** Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo (que por lo general se llama eje  $z$ ), su posición está descrita por una coordenada angular  $\theta$ . La velocidad angular  $\omega_z$  es la derivada con respecto al tiempo de  $\theta$ . La aceleración angular  $\alpha_z$  es la derivada con respecto al tiempo de  $\omega_z$  o la segunda derivada de  $\theta$ . (Véanse los ejemplos 9.1 y 9.2.) Si la aceleración angular es constante, entonces  $\theta$ ,  $\omega_z$  y  $\alpha_z$  están relacionadas por ecuaciones sencillas de cinemática análogas a las del movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante. (Véase el ejemplo 9.3.)

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (9.3)$$

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (9.5)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \quad (9.11)$$

(sólo  $\alpha_z$  constante)

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_z + \omega_{0z})t \quad (9.10)$$

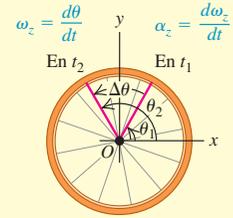
(sólo  $\alpha_z$  constante)

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \quad (9.7)$$

(sólo  $\alpha_z$  constante)

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \quad (9.12)$$

(sólo  $\alpha_z$  constante)

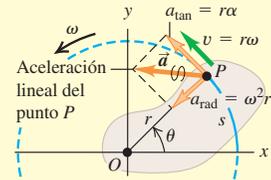


**Relación entre cinemática angular y lineal:** La rapidez angular  $\omega$  de un cuerpo rígido es la magnitud de su velocidad angular. La razón de cambio de  $\omega$  es  $\alpha = d\omega/dt$ . En el caso de una partícula de un cuerpo que está a una distancia  $r$  del eje de rotación, la rapidez  $v$  y las componentes de la aceleración  $\vec{a}$  están relacionadas con  $\omega$  y  $\alpha$ . (Véanse los ejemplos 9.4 a 9.6.)

$$v = r\omega \quad (9.13)$$

$$a_{\text{tan}} = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad (9.14)$$

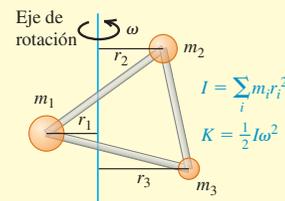
$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (9.15)$$



**Momento de inercia y energía cinética rotacional:** El momento de inercia  $I$  de un cuerpo alrededor de un eje dado es una medida de su inercia rotacional: cuanto mayor sea el valor de  $I$ , más difícil será cambiar el estado de rotación del cuerpo. El momento de inercia se puede expresar como una sumatoria para las partículas  $m_i$  que constituyen el cuerpo, cada una de las cuales está a una distancia perpendicular  $r_i$  del eje. La energía cinética rotacional de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo depende de la rapidez angular  $\omega$  y del momento de inercia  $I$  para ese eje de rotación. (Véanse los ejemplos 9.7 a 9.9.)

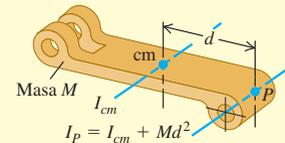
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = \sum_i m_i r_i^2 \quad (9.16)$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (9.17)$$



**Cálculo del momento de inercia:** El teorema de los ejes paralelos relaciona los momentos de inercia de un cuerpo rígido de masa  $M$  alrededor de dos ejes paralelos: un eje que pasa por el centro de masa (momento de inercia  $I_{\text{cm}}$ ) y un eje paralelo que está a una distancia  $d$  del primero (momento de inercia  $I_P$ ). (Véase el ejemplo 9.10.) Si el cuerpo tiene una distribución continua de masa, el momento de inercia se calcula por integración. (Véanse los ejemplos 9.11 a 9.13.)

$$I_P = I_{\text{cm}} + Md^2 \quad (9.19)$$



## Términos clave

cuerpo rígido, 285  
 radián, 286  
 velocidad angular media, 286  
 desplazamiento angular, 286  
 velocidad angular instantánea, 287

aceleración angular media, 289  
 aceleración angular instantánea, 289  
 rapidez angular, 293  
 componente tangencial de la aceleración, 293  
 componente centrípeta de la aceleración, 294

momento de inercia, 297  
 energía cinética rotacional, 297  
 teorema de los ejes paralelos, 302

## Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Ambos segmentos del aspa rígida tienen la misma rapidez angular  $\omega$ . De las ecuaciones (9.13) y (9.15), al duplicar la distancia  $r$  para la misma  $\omega$ , se duplica la rapidez lineal  $v = r\omega$  y se duplica la aceleración radial  $a_{\text{rad}} = \omega^2 r$ .

## Respuestas a las preguntas de Evalué su comprensión

**9.1 Respuestas: a) i) y iii), b) ii)** La rotación se está acelerando cuando la aceleración y la velocidad angulares tienen el mismo signo, y se está frenando cuando tienen signos opuestos. Por lo tanto, acelera para  $0 < t < 2$  s ( $\omega_z$  y  $\alpha_z$  son positivas) y para  $4$  s  $< t < 6$  s ( $\omega_z$  y  $\alpha_z$  son negativas); pero se está frenando para  $2$  s  $< t < 4$  s ( $\omega_z$  es positiva y  $\alpha_z$  es negativa). Observe que el cuerpo gira en una dirección para  $t < 4$  s ( $\omega_z$  es positiva) y en la dirección opuesta para  $t > 4$  s ( $\omega_z$  es negativa).

**9.2 Respuestas: a) i), b) ii)** Cuando el DVD se detiene,  $\omega_z = 0$ . De la ecuación (9.7), esto sucede en el instante  $t = (\omega_z - \omega_{0z})/\alpha_z = -\omega_{0z}/\alpha_z$  (éste es un tiempo positivo porque  $\alpha_z$  es negativa). Si duplicamos la velocidad angular inicial  $\omega_{0z}$  y duplicamos también la aceleración angular  $\alpha_z$ , su cociente no cambia y la rotación se detiene en el mismo tiempo. El ángulo con el que gira el DVD está dado por la

ecuación (9.10):  $\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t = \frac{1}{2}\omega_{0z}t$  (ya que la velocidad angular final es  $\omega_z = 0$ ). La velocidad angular inicial  $\omega_{0z}$  se ha duplicado, pero el tiempo  $t$  es el mismo, así que el desplazamiento angular  $\theta - \theta_0$  (y por ende el número de revoluciones) se ha duplicado. Podemos usar la ecuación (9.12) para obtener la misma conclusión.

**9.3 Respuesta: ii)** De la ecuación (9.13),  $v = r\omega$ . Para mantener una rapidez lineal  $v$  constante, la rapidez angular  $\omega$  debe disminuir a medida que la cabeza lectora se mueve hacia afuera (mayor  $r$ ).

**9.4 Respuesta: i)** La energía cinética del objeto que cae es  $\frac{1}{2}mv^2$ , y la del cilindro que gira,  $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR^2)(\frac{v}{R})^2 = \frac{1}{4}mv^2$ . Por lo tanto, la energía cinética total del sistema es  $\frac{3}{4}mv^2$ , de la cual dos tercios están en el bloque y un tercio está en el cilindro.

**9.5 Respuesta: ii)** Más de la masa del taco de billar está concentrada en el extremo más grueso, así que el centro de masa está más cercano a dicho extremo. El momento de inercia en un punto  $P$  en cualquiera de sus extremos es  $I_P = I_{\text{cm}} + Md^2$ ; el extremo más delgado está más alejado del centro de masa, por lo que la distancia  $d$  y el momento de inercia  $I_P$  son mayores para el extremo más delgado.

**9.6 Respuesta: iii)** Nuestro resultado del ejemplo 9.12 no depende de la longitud del cilindro  $L$ . El momento de inercia depende sólo de la distribución radial de la masa, no de su distribución a lo largo del eje.

## PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite [www.masteringphysics.com](http://www.masteringphysics.com)



### Preguntas para análisis

**P9.1.** ¿Cuál de las siguientes fórmulas es válida si la aceleración angular de un objeto *no* es constante? En cada caso, explique su razonamiento. a)  $v = r\omega$ ; b)  $a_{\text{tan}} = r\alpha$ ; c)  $\omega = \omega_0 + \alpha t$ ; d)  $a_{\text{tan}} = r\omega^2$ ; e)  $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ .

**P9.2.** Una molécula diatómica puede modelarse como dos masas puntuales,  $m_1$  y  $m_2$ , ligeramente separadas (figura 9.26). Si la molécula es-

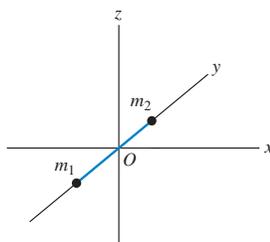


Figura 9.26 Pregunta P9.2.

tá orientada a lo largo del eje  $y$ , tiene energía cinética  $K$  cuando gira alrededor del eje  $x$ . ¿Cuál es su energía cinética (en términos de  $K$ ) si gira con la misma rapidez angular alrededor del a) eje  $z$  y b) eje  $y$ ?

**P9.3.** ¿Qué diferencia hay entre aceleración tangencial y aceleración radial para un punto de un cuerpo que gira?

**P9.4.** En la figura 9.14, todos los puntos de la cadena tienen la misma rapidez lineal. ¿La magnitud de la aceleración lineal es también igual para todos esos puntos? ¿Qué relación hay entre las aceleraciones angulares de las dos ruedas dentadas? Explique su respuesta.

**P9.5.** En la figura 9.14, ¿qué relación hay entre las aceleraciones radiales de los puntos en los dientes de las dos ruedas? Justifique su respuesta.

**P9.6.** Un volante gira con velocidad angular constante. ¿Un punto en su borde tiene aceleración tangencial? ¿Y aceleración radial? ¿Estas aceleraciones tienen magnitud constante? ¿Y dirección constante? Justifique sus respuestas.

**P9.7.** ¿Para qué sirve el ciclo de centrifugado de una lavadora? Explique en términos de las componentes de aceleración.

**P9.8.** Aunque la velocidad y la aceleración angulares pueden tratarse como vectores, no sucede lo mismo con el desplazamiento angular  $\theta$ , a pesar de tener magnitud y dirección, porque  $\theta$  no obedece la ley conmutativa de la suma de vectores (ecuación 1.3). Demuestre esto

como sigue: coloque este libro sobre un escritorio con la portada hacia arriba y de modo que pueda leer las palabras. Gire el borde lejano  $90^\circ$  hacia arriba y hacia usted sobre un eje horizontal. Llame a este desplazamiento  $\theta_1$ . Ahora gire el borde izquierdo  $90^\circ$  hacia usted sobre un eje vertical. Llame a este desplazamiento  $\theta_2$ . El lomo del libro deberá mirar ahora hacia usted con las palabras orientadas de modo que pueda leerlas. Ahora comience otra vez desde el principio pero realice las rotaciones en orden inverso. ¿El resultado es diferente? Es decir, ¿ $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$ ? Ahora repita el experimento pero con un ángulo de  $1^\circ$  en vez de  $90^\circ$ . ¿Cree que el desplazamiento infinitesimal  $d\vec{\theta}$  obedece la ley conmutativa de la suma y, por lo tanto, puede considerarse un vector? De ser así, ¿qué relación hay entre la dirección de  $d\vec{\theta}$  y la dirección de  $\vec{\omega}$ ?

**P9.9.** ¿Puede imaginar un cuerpo que tenga el mismo momento de inercia para todos los ejes posibles? Si es así, mencione un ejemplo; si no, explique por qué no es posible. ¿Puede imaginar un cuerpo que tenga el mismo momento de inercia para todos los ejes que pasan por cierto punto? Si es así, mencione un ejemplo e indique dónde está el punto.

**P9.10.** Para maximizar el momento de inercia de un volante mientras minimizamos su peso, ¿qué forma y distribución de masa debería tener? Explique su respuesta.

**P9.11.** ¿Cómo podría usted determinar experimentalmente el momento de inercia de un cuerpo de forma irregular alrededor de un eje dado?

**P9.12.** Un cuerpo cilíndrico tiene masa  $M$  y radio  $R$ . ¿La masa puede estar distribuida dentro del cuerpo de modo tal que su momento de inercia alrededor de su eje de simetría sea mayor que  $MR^2$ ? Explique su respuesta.

**P9.13.** Describa cómo podría usar el inciso *b*) de la tabla 9.2 para deducir el resultado del inciso *d*).

**P9.14.** Un caparazón esférico hueco de radio  $R$  que gira alrededor de un eje que pasa por su centro tiene energía cinética rotacional  $K$ . Si usted quiere modificar esta esfera de manera que tenga tres veces más energía cinética con la misma rapidez angular manteniendo la masa igual, ¿cuál debería ser el radio en términos de  $R$ ?

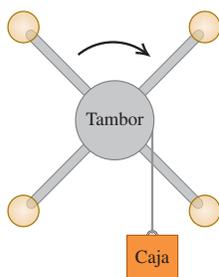
**P9.15.** Para que sean válidas las ecuaciones dadas en los incisos *a*) y *b*) de la tabla 9.2 para  $I$ , ¿la varilla debe tener sección transversal circular? ¿Hay alguna restricción sobre el tamaño de tal sección para que las ecuaciones sean válidas? Explique su respuesta.

**P9.16.** En el inciso *d*) de la tabla 9.2, el espesor de la placa debe ser mucho menor que  $a$  si se quiere que sea válida la expresión para  $I$ . En el inciso *c*), en cambio, la expresión para  $I$  es válida sin importar qué espesor tenga la placa. Explique su respuesta.

**P9.17.** Dos esferas idénticas  $A$  y  $B$  están unidas a un cordón muy delgado, y cada cordón está enrollado alrededor de una polea sin fricción de masa  $M$ . La única diferencia es que la polea para la esfera  $A$  es un disco sólido, en tanto que la polea para la esfera  $B$  es un disco hueco, como el del inciso *e*) de la tabla 9.2. Si ambas esferas se liberan desde el reposo y caen la misma distancia, ¿cuál tendrá mayor energía cinética? ¿O tendrán la misma? Explique su razonamiento.

**P9.18.** Una polea complicada consiste en cuatro esferas idénticas colocadas en los extremos de rayos que se prolongan desde un tambor giratorio (figura 9.27). Una caja está unida a una cuerda delgada y ligera que se enrolla en el borde del tambor. Cuando se libera del reposo, la caja adquiere una rapidez  $V$  después de caer una distancia  $d$ . Ahora las cuatro esferas se mueven hacia adentro más cerca del tambor, y de nuevo la caja se suelta del reposo. Después de caer una distancia  $d$ , ¿su rapidez será igual a  $V$ , mayor que  $V$ , o menor que  $V$ ? Demuestre o explique por qué.

**Figura 9.27**  
Pregunta 9.18.



**P9.19.** Podemos usar cualquier medida angular (radianes, grados o revoluciones) en algunas de las ecuaciones del capítulo 9; sin embargo, en otras sólo podemos usar radianes. Identifique las ecuaciones en las que es necesario usar radianes y en las que no es necesario. En cada caso, justifique sus respuestas.

**P9.20.** Al calcular el momento de inercia de un objeto, ¿podemos tratar toda su masa como si estuviera concentrada en el centro de masa del objeto? Justifique su respuesta.

**P9.21.** Una rueda gira en torno a un eje perpendicular al plano de la rueda y que pasa por el centro de la rueda. La rapidez angular de la rueda está aumentando con razón constante. El punto  $A$  está en el borde de la rueda; y el punto  $B$ , a la mitad de la distancia entre el borde y el centro. Para cada una de las cantidades siguientes, indique si su magnitud es mayor en el punto  $A$ , en el punto  $B$  o es igual en ambos puntos: *a*) rapidez angular, *b*) rapidez tangencial, *c*) aceleración angular, *d*) aceleración tangencial y *e*) aceleración radial. Justifique sus respuestas.

## Ejercicios

### Sección 9.1 Velocidad y aceleración angulares

**9.1.** *a*) ¿Qué ángulo en radianes es subtendido por un arco de 1.50 m en la circunferencia de un círculo con 2.50 m de radio? ¿Cuánto es esto en grados? *b*) Un arco de 14.0 cm de longitud en la circunferencia de un círculo subtende un ángulo de  $128^\circ$ . ¿Qué radio tiene el círculo? *c*) El ángulo entre dos radios de un círculo con 1.50 m de radio es 0.700 rad. ¿Qué longitud tiene el arco delimitado en la circunferencia por estos dos radios?

**9.2.** Una hélice de avión gira a 1900 rpm (rev/min). *a*) Calcule su velocidad angular en rad/s. *b*) ¿Cuántos segundos tarda la hélice en girar  $35^\circ$ ?

**9.3.** La velocidad angular de un volante obedece la ecuación  $\omega_z(t) = A + Bt^2$ , donde  $t$  está en segundos y  $A$  y  $B$  son constantes cuyos valores numéricos son 2.75 y 1.50, respectivamente. *a*) ¿Cuáles son las unidades de  $A$  y  $B$  si  $\omega$  está en rad/s? *b*) ¿Cuál es la aceleración angular del volante en i)  $t = 0.00$  y ii)  $t = 5.00$  s? *c*) ¿Con qué ángulo gira el volante durante los primeros 2.00 s? (Sugerencia: véase la sección 2.6.)

**9.4.** Una aspa de ventilador gira con velocidad angular dada por  $\omega_z(t) = \gamma - \beta t^2$ , donde  $\gamma = 5.00$  rad/s y  $\beta = 0.800$  rad/s<sup>3</sup>. *a*) Calcule la aceleración angular en función del tiempo. *b*) Calcule la aceleración angular instantánea  $\alpha_z$  en  $t = 3.00$  s y la aceleración angular media  $\alpha_{\text{med-}z}$  para el intervalo de  $t = 0$  a  $t = 3.00$  s. ¿Qué diferencia hay entre ambas cantidades? Si son diferentes, ¿por qué lo son?

**9.5.** Un niño está empujando un carrusel (tiovivo). El ángulo que describe el carrusel al girar varía con el tiempo según  $\theta(t) = \gamma t + \beta t^3$ , donde  $\gamma = 0.400$  rad/s y  $\beta = 0.0120$  rad/s<sup>3</sup>. *a*) Calcule la velocidad angular del carrusel en función del tiempo. *b*) ¿Qué valor inicial tiene la velocidad angular? *c*) Calcule el valor instantáneo de la velocidad angular  $\omega_z$  en  $t = 5.00$  s y la velocidad angular media  $\omega_{\text{med-}z}$  en el intervalo de  $t = 0.00$  a  $t = 5.00$  s. Demuestre que  $\omega_{\text{med-}z}$  no es igual al promedio de las velocidades angulares instantáneas en  $t = 0$  y  $t = 5.00$  s, y explique por qué.

**9.6.** En  $t = 0$ , se invierte la corriente de un motor eléctrico de corriente continua, causando un desplazamiento angular del eje del motor dado por  $\theta(t) = (250 \text{ rad/s})t - (20.0 \text{ rad/s}^2)t^2 - (1.50 \text{ rad/s}^3)t^3$ . *a*) ¿En qué instante la velocidad angular del eje del motor es cero? *b*) Calcule la aceleración angular en ese instante. *c*) ¿Cuántas revoluciones gira el eje del motor entre el momento en que se invierte la

corriente y el instante en el que la velocidad angular es cero? *d*) ¿Con qué rapidez estaba girando el eje en  $t = 0$ , cuando se invirtió la corriente? *e*) Calcule la velocidad angular media para el periodo entre  $t = 0$  y el instante calculado en el inciso *a*).

**9.7.** El ángulo  $\theta$  que describe una unidad de disco al girar está dado por  $\theta(t) = a + bt - ct^2$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes positivas,  $t$  está en segundos y  $\theta$  está en radianes. Cuando  $t = 0$ ,  $\theta = \pi/4$  rad y la velocidad angular es 2.00 rad/s, y cuando  $t = 1.50$  s, la aceleración angular es 1.25 rad/s<sup>2</sup>. *a*) Calcule  $a$ ,  $b$  y  $c$  con sus unidades. *b*) ¿Cuál es la aceleración angular cuando  $\theta = \pi/4$  rad? *c*) ¿Cuáles son  $\theta$  y la velocidad angular cuando la aceleración angular es 3.50 rad/s<sup>2</sup>?

**9.8.** Una rueda gira en torno a un eje que está en la dirección  $z$ . La velocidad angular  $\omega_z$  es de  $-6.00$  rad/s en  $t = 0.00$ , aumenta linealmente con el tiempo y es de  $+8.00$  m/s en  $t = 7.00$  s. Se considera positiva la rotación antihoraria. *a*) ¿La aceleración angular durante este intervalo de tiempo es positiva o negativa? *b*) ¿Durante qué intervalo está aumentando la rapidez de la rueda? ¿Y disminuyendo? *c*) Determine el desplazamiento angular de la rueda en  $t = 7.00$  s.

## Sección 9.2 Rotación con aceleración angular constante

**9.9.** Una rueda de bicicleta tiene una velocidad angular inicial de 1.50 rad/s. *a*) Si su aceleración angular es constante e igual a 0.300 rad/s<sup>2</sup>, ¿qué velocidad angular tiene en  $t = 2.50$  s? *b*) ¿Qué ángulo gira la rueda entre  $t = 0$  y  $t = 2.50$  s?

**9.10.** Un ventilador eléctrico se apaga, y su velocidad angular disminuye uniformemente de 500 rev/min a 200 rev/min en 4.00 s. *a*) Calcule la aceleración angular en rev/s<sup>2</sup> y el número de revoluciones que el motor giró en el intervalo de 4.00 s. *b*) ¿Cuántos segundos más tardará el motor en parar, si la aceleración angular se mantiene constante en el valor calculado en el inciso *a*)?

**9.11.** Las aspas de una licuadora giran con aceleración angular constante de 1.50 rad/s<sup>2</sup>. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar una velocidad angular de 36.00 rad/s, partiendo del reposo? *b*) ¿Cuántas revoluciones giran las aspas en este tiempo?

**9.12.** *a*) Deduzca la ecuación (9.12) combinando las ecuaciones (9.7) y (9.11) para eliminar  $t$ . *b*) La velocidad angular de la hélice de un avión aumenta de 12.0 rad/s a 16.0 rad/s mientras gira 7.00 rad. Calcule su aceleración angular en rad/s<sup>2</sup>.

**9.13.** Una tornamesa gira con aceleración angular constante de 2.25 rad/s<sup>2</sup>. Después de 4.00 s gira con un ángulo de 60.00 rad. ¿Cuál era la velocidad angular de la rueda al empezar el intervalo de 4.00 s?

**9.14.** Una hoja de sierra circular de 0.200 m de diámetro parte del reposo y acelera con aceleración angular constante hasta una velocidad angular de 140 rad/s en 6.00 s. Calcule la aceleración angular y el ángulo que ha girado la hoja.

**9.15.** El volante de un motor de alta rapidez giraba a 500 rpm cuando se interrumpió la alimentación eléctrica. El volante tiene una masa de 40.0 kg y un diámetro de 75.0 cm. El motor no recibe electricidad durante 30.0 s y, durante ese lapso, el volante pierde rapidez por la fricción con los cojinetes de su eje, describiendo 200 revoluciones completas. *a*) ¿Con qué rapidez está girando el volante cuando se restablece la alimentación eléctrica? *b*) ¿En cuánto tiempo después de la interrupción del suministro se habría parado el volante, si el suministro no se hubiera restablecido, y cuántas revoluciones habría girado la rueda en ese tiempo?

**9.16.** Una unidad de disco de computadora se enciende partiendo del reposo y tiene aceleración angular constante. Si a la unidad le lleva 0.750 s realizar su segunda revolución completa, *a*) ¿cuánto tiempo le tomó efectuar su primera revolución completa?, y *b*) ¿cuál es su aceleración angular en rad/s<sup>2</sup>?

**9.17.** Un dispositivo de seguridad detiene la hoja de una podadora eléctrica, que tenía una rapidez angular inicial  $\omega_1$ , en 1.00 revolución. Con la misma aceleración constante, ¿cuántas revoluciones tardaría la hoja en parar, si la rapidez angular inicial  $\omega_3$  fuera el triple:  $\omega_3 = 3\omega_1$ ?

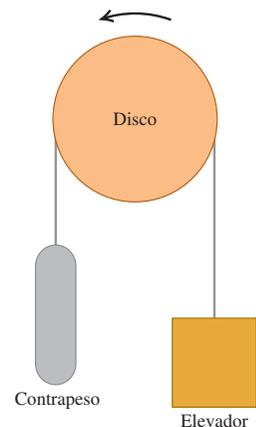
**9.18.** Un trozo recto de cinta reflejante se extiende del centro de una rueda a su borde. Imagine que oscurece el cuarto y usa una cámara y una lámpara estroboscópica con destellos cada 0.050 s para fotografiar la rueda que gira en sentido antihorario. Se acciona la lámpara de modo que el primer destello ( $t = 0$ ) se da cuando la cinta está horizontal a la derecha con un desplazamiento angular de cero. Para las siguientes situaciones, dibuje la fotografía que obtendría después de cinco destellos (en  $t = 0, 0.050$  s,  $0.100$  s,  $0.150$  s y  $0.200$  s) y grafique  $\theta$  contra  $t$  y  $\omega$  contra  $t$  para el intervalo entre  $t = 0$  y  $t = 0.200$  s. *a*) La velocidad angular es de 10.0 rev/s (constante). *b*) La rueda parte del reposo con aceleración angular constante de 25.0 rev/s<sup>2</sup>. *c*) La rueda gira a 10.0 rev/s en  $t = 0$  y cambia su velocidad angular a una razón constante de  $-50.0$  rev/s<sup>2</sup>.

**9.19.** En  $t = 0$ , la velocidad angular de una rueda de afilar era de 24.0 rad/s, y tuvo una aceleración angular constante de 30.0 rad/s<sup>2</sup>, hasta que un interruptor de circuito se abrió en  $t = 2.00$  s. A partir de ese momento, la rueda giró 432 rad con aceleración angular constante hasta parar. *a*) ¿Qué ángulo total giró la rueda entre  $t = 0$  y el instante en que se detuvo? *b*) ¿En qué tiempo se detuvo? *c*) ¿Qué aceleración tenía al irse frenando?

## Sección 9.3 Relación entre cinemática lineal y angular

**9.20.** En un encantador hotel del siglo XIX, un elevador antiguo está conectado a un contrapeso mediante un cable que pasa por un disco giratorio con 2.50 m de diámetro (figura 9.28). El elevador sube y baja al girar el disco, y el cable no se desliza en el borde del disco, más bien gira con él. *a*) ¿Con cuántas rpm debe girar el disco para subir 25.0 cm/s el elevador? *b*) Para empezar a mover el elevador, éste debe acelerarse a  $\frac{1}{8}g$ . ¿Cuál debe ser la aceleración angular del disco en rad/s<sup>2</sup>? *c*) ¿Con qué ángulo (en radianes y grados) el disco gira cuando éste sube el elevador 3.25 m entre pisos?

Figura 9.28 Ejercicio 9.20.



**9.21.** Con los datos astronómicos del Apéndice F, junto con el hecho de que la Tierra gira sobre su propio eje una vez al día, calcule *a*) la rapidez angular orbital de la Tierra (en rad/s) debida a su movimiento alrededor del Sol, *b*) su rapidez angular (en rad/s) debida a su giro axial, *c*) la rapidez tangencial de la Tierra alrededor del Sol (suponiendo una órbita circular), *d*) la rapidez tangencial de un punto en el ecuador terrestre debido al giro, y *e*) las componentes de la aceleración radial y tangencial del punto del inciso *d*).

**9.22. Disco compacto.** Un disco compacto (CD) almacena música en un patrón codificado de hoyos diminutos de  $10^{-7}$  m de profundidad, dispuestos en una pista espiral que va desde el centro hasta el borde del disco. Los radios interior y exterior de la espiral son de 25.0 mm y 58.0 mm, respectivamente. Dentro del reproductor de CD, mientras el disco

gira la pista es barrida con rapidez *lineal* constante de 1.25 m/s. *a)* ¿Qué rapidez angular tiene el CD cuando se barre la parte interior de la pista? ¿Y la parte exterior? *b)* La duración máxima de un CD es de 74.0 min. ¿Qué longitud tendría la pista de tal CD si se estirara en línea recta? *e)* ¿Qué aceleración angular media tiene un CD de máxima duración durante los 74.0 min? Tome la dirección de rotación del disco como positiva.

**9.23.** Una rueda con diámetro de 40.0 cm parte del reposo y gira con una aceleración angular constante de  $3.00 \text{ rad/s}^2$ . En el instante en que la rueda ha completado su segunda revolución, calcule la aceleración radial de un punto en el borde de dos maneras: *a)* usando la relación  $a_{\text{rad}} = \omega^2 r$  y *b)* a partir de la relación  $a_{\text{rad}} = v^2/r$ .

**9.24. Ultracentrífuga.** Calcule la rapidez angular (en rpm) que debe tener una ultracentrífuga para que la aceleración radial en un punto a 2.50 cm del eje sea de 400,000 *g* (es decir, 400,000 veces la aceleración debida a la gravedad).

**9.25.** Un volante con radio de 0.300 m parte del reposo y acelera con aceleración angular constante de  $0.600 \text{ rad/s}^2$ . Calcule la magnitud de las aceleraciones tangencial y radial, así como de la aceleración resultante de un punto en su borde *a)* al principio; *b)* después de girar  $60.0^\circ$ ; *c)* después de girar  $120.0^\circ$ .

**9.26.** Un ventilador eléctrico de 0.750 m de diámetro, instalado en el techo, gira sobre un eje fijo con velocidad angular inicial de 0.250 rev/s. La aceleración angular es constante de  $0.900 \text{ rev/s}^2$ . *a)* Calcule la velocidad angular del ventilador después de 0.200 s. *b)* ¿Cuántas revoluciones giró una aspa en este tiempo? *c)* ¿Qué rapidez tangencial tiene un punto en la punta del aspa en  $t = 0.200 \text{ s}$ ? *d)* ¿Qué magnitud tiene la aceleración *resultante* de un punto en la punta del aspa en  $t = 0.200 \text{ s}$ ?

**9.27. Centrífuga.** En un anuncio se asegura que una centrífuga sólo ocupa 0.127 m de espacio en una mesa, pero puede producir una aceleración radial de 3000 *g* a 5000 rpm. Calcule el radio que debe tener la centrífuga. ¿Es verosímil la afirmación del anuncio?

**9.28. a)** Deduzca una ecuación para la aceleración radial que incluya  $v$  y  $\omega$  pero no  $r$ . *b)* Imagine que está diseñando un carrusel, donde un punto en el borde tendrá una aceleración radial de  $0.500 \text{ m/s}^2$  cuando la velocidad tangencial en ese punto sea de 2.00 m/s. ¿Qué velocidad angular se necesita para lograr estos valores?

**9.29. Perforación eléctrica.** Según el manual del usuario, para hacer un agujero de 12.7 mm de diámetro en madera, plástico o aluminio, se recomienda una rapidez del taladro de 1250 rev/min. Para una broca de 12.7 mm de diámetro que gira a 1250 rev/min (constantes), calcule *a)* la rapidez lineal máxima de cualquier punto de la broca; *b)* la aceleración radial máxima de cualquier punto de la broca.

**9.30.** En  $t = 3.00 \text{ s}$ , un punto en el borde de una rueda con radio de 0.200 m tiene una rapidez tangencial de 50.0 m/s, mientras la rueda se frena con aceleración tangencial de magnitud constante de  $10.0 \text{ m/s}^2$ . *a)* Calcule la aceleración angular constante de la rueda. *b)* Calcule las velocidades angulares en  $t = 3.00 \text{ s}$  y  $t = 0$ . *c)* ¿Qué ángulo giró la rueda entre  $t = 0$  y  $t = 3.00 \text{ s}$ ? *d)* ¿En qué instante la aceleración radial es igual a  $g$ ?

**9.31.** Los ciclos de centrifugado de una lavadora tienen dos rapidezces angulares, 423 rev/min y 640 rev/min. El diámetro interno del tambor es de 0.470 m. *a)* ¿Qué relación hay entre la fuerza radial máxima sobre la ropa para las dos rapidezces angulares? *b)* ¿Y entre las rapidezces tangenciales máximas de la ropa? *c)* Calcule la rapidez tangencial máxima de la ropa y la aceleración radial máxima en términos de  $g$ .

**9.32.** Imagine que usted debe diseñar un eje cilíndrico giratorio para levantar cubetas de cemento con un peso de 800 N, desde el suelo hasta una azotea a 78.0 m sobre el suelo. Las cubetas se colgarán de un gancho en el extremo libre de un cable que se enrolla en el eje; al girar este eje, las cubetas ascienden. *a)* ¿Qué diámetro debe tener

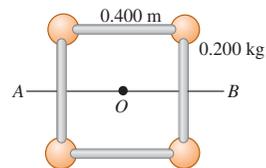
el eje para levantar las cubetas con rapidez constante de 2.00 cm/s mientras gira a 7.5 rpm? *b)* Si el eje debe impartir a las cubetas una aceleración hacia arriba de  $0.400 \text{ m/s}^2$ , ¿qué aceleración angular deberá tener el eje?

**9.33.** Al montar una bicicleta de varias velocidades, el ciclista puede seleccionar el radio de la rueda dentada trasera, que está fija al eje trasero. La rueda dentada delantera tiene 12.0 cm de radio. Si la rapidez angular de la rueda dentada delantera es de 0.600 rev/s, ¿qué radio tiene la rueda dentada trasera con la que la rapidez tangencial de un punto en el borde del neumático trasero es de 5.00 m/s? El neumático tiene 0.330 m de radio.

## Sección 9.4 Energía en el movimiento rotacional

**9.34.** Cuatro esferas pequeñas, que pueden considerarse como puntos con masa de 0.200 kg cada una, están dispuestas en un cuadrado de 0.400 m de lado, conectadas por varillas muy ligeras (figura 9.29). Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje *a)* que pasa por el centro del cuadrado, perpendicular a su plano (que pasa por  $O$  en la figura); *b)* que biseca el cuadrado (pasa por la línea  $AB$  en la figura); *c)* que pasa por los centros de las esferas superior izquierda e inferior derecha y por el punto  $O$ .

Figura 9.29 Ejercicio 9.34.



**9.35.** Calcule el momento de inercia de cada uno de los siguientes objetos uniformes en torno a los ejes indicados. Consulte la tabla 9.2 si lo requiere. *a)* Una varilla delgada de 2.50 kg con longitud de 75.0 cm, alrededor de un eje perpendicular a ella y que pasa por i) un extremo, ii) su centro y iii) alrededor de un eje paralelo a la varilla y que pasa por ella. *b)* Una esfera de 3.00 kg con diámetro de 38.0 cm, alrededor de un eje que pasa por su centro, si la esfera i) es sólida y ii) es un caparazón hueco de pared delgada. *c)* Un cilindro de 8.00 kg con longitud de 19.5 cm y diámetro de 12.0 cm, alrededor del eje central de un cilindro, si el cilindro es i) hueco de pared delgada y ii) sólido.

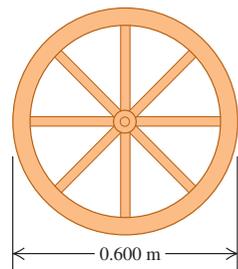
**9.36.** Bloques pequeños de masa  $m$  están sujetos en los extremos y el centro de una varilla ligera de longitud  $L$  y masa despreciable. Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por *a)* el centro y *b)* un punto a un cuarto de su longitud.

**9.37.** Dos esferas pequeñas están pegadas a los extremos de una barra uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 4.00 kg. Las esferas tienen masa de 0.500 kg cada una y se pueden tratar como masas puntuales. Calcule el momento de inercia de esta combinación en torno a cada uno de los ejes siguientes: *a)* un eje perpendicular a la barra que pasa por su centro; *b)* un eje perpendicular a la barra que pasa por una de las esferas; *c)* un eje paralelo a la barra que pasa por ambas esferas; *d)* un eje paralelo a la barra que está a 0.500 m de ella.

**9.38.** El bastón de una bastonera es un cilindro metálico delgado de masa  $M$  y longitud  $L$ . Cada extremo tiene una tapa de hule de masa  $m$ , que puede tratarse como partícula en este problema. Calcule el momento de inercia total del bastón alrededor del eje de giro usual (perpendicular al bastón y por su centro).

**9.39.** Una rueda de carreta (figura 9.30) tiene un radio de 0.300 m y la masa de su borde es de 1.40 kg. Cada rayo, que está sobre un diámetro y tie-

Figura 9.30 Ejercicio 9.39.



ne 0.300 m de longitud, tiene una masa de 0.280 kg. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su plano? (Use las fórmulas de la tabla 9.2.)

**9.40.** Un disco uniforme con radio  $R$  se corta a la mitad de manera que la mitad que queda tiene masa  $M$  (figura 9.31a). *a)* ¿Cuál es el momento de inercia de esta mitad alrededor de un eje perpendicular a su plano por el punto  $A$ ? *b)* ¿Por qué su respuesta al inciso *a)* resultó igual que si se tratara de un disco completo de masa  $M$ ? *c)* ¿Cuál sería el momento de inercia de un cuarto del disco de masa  $M$  y radio  $R$  alrededor de un eje perpendicular a su plano que pasa por el punto  $B$  (figura 9.31b)?

**9.41.** Un disco compuesto con diámetro exterior de 140.0 cm está hecho de un material sólido y uniforme de 50.0 cm de radio, con densidad de área de  $3.00 \text{ g/cm}^2$  rodeada por un anillo concéntrico, cuyo radio interior es de 50.0 cm y radio exterior de 70.0 cm con densidad de área de  $2.00 \text{ g/cm}^2$ . Calcule el momento de inercia de este objeto alrededor de un eje perpendicular al plano del objeto y que pasa por su centro.

**9.42.** Una hélice de avión tiene un diámetro de 2.08 m (de punta a punta) y masa de 117 kg, y gira a 2400 rpm (rev/min) alrededor de un eje que pasa por su centro. Trate la hélice como varilla delgada. *a)* ¿Qué energía cinética rotacional tiene? *b)* Suponga que, debido a restricciones de peso, usted tuviera que reducir la masa de la hélice a 75.0% de su masa original, pero siguiera requiriendo los mismos tamaño y energía cinética. ¿Cuál tendría que ser su rapidez angular en rpm?

**9.43. ¿Energía proveniente de la Luna?** Suponga que en algún momento en el futuro decidimos aprovechar la energía rotacional de la Luna para su uso en la Tierra. Además de los datos astronómicos del Apéndice F, tal vez usted necesite saber que la Luna gira sobre su eje una vez cada 27.3 días. Suponga que la Luna es completamente homogénea. *a)* ¿Cuánta energía total podríamos obtener de la rotación lunar? *b)* En la actualidad nuestro planeta utiliza aproximadamente  $4.0 \times 10^{20} \text{ J}$  de energía anualmente. Si en el futuro la Tierra usara cinco veces más energía cada año, ¿cuántos años de rotación lunar nos abastecerían de energía? De acuerdo con su respuesta, ¿se trataría de una fuente de energía atractiva para invertir según la relación costo-beneficio?

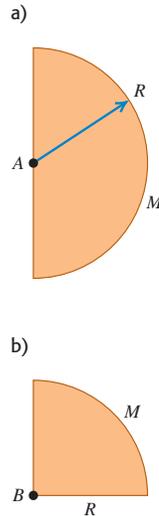
**9.44.** Usted necesita diseñar una tornamesa industrial de 60.0 cm de diámetro con energía cinética de 0.250 J cuando gira a 45.0 rpm (rev/min). *a)* ¿Cuál debe ser el momento de inercia de la tornamesa alrededor de su eje de rotación? *b)* Si su taller elabora dicha tornamesa con la forma de un disco uniforme sólido, ¿cuál debe ser su masa?

**9.45.** El volante de un motor de gasolina debe ceder 500 J de energía cinética, cuando su velocidad angular se reduce de 650 rev/min a 520 rev/min. ¿Qué momento de inercia se requiere?

**9.46.** Una cuerda ligera y flexible se enrolla varias veces en un cilindro hueco con peso de 40.0 N y radio de 0.25 m, que gira sin fricción sobre un eje horizontal fijo. El cilindro está unido al eje mediante rayos cuyo momento de inercia es despreciable, e inicialmente está en reposo. Se tira del extremo libre de la cuerda con fuerza constante  $P$  una distancia de 5.00 m, punto en el cual la cuerda se está moviendo a 6.00 m/s. Si la cuerda no resbala sobre el cilindro, ¿cuánto vale  $P$ ?

**9.47.** Se almacenará energía en un volante con forma de disco sólido uniforme con radio  $R = 1.20 \text{ m}$  y masa de 70.0 kg. Para evitar que falle estructuralmente el volante, la aceleración radial máxima permitida de un punto en su borde es de  $3500 \text{ m/s}^2$ . ¿Qué energía cinética máxima puede almacenarse en el volante?

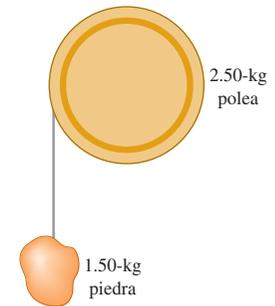
**Figura 9.31**  
Ejercicio 9.40.



**9.48.** Suponga que el cilindro sólido del aparato del ejemplo 9.9 (sección 9.4) se sustituye por un cilindro hueco de paredes delgadas, con la misma masa  $M$  y radio  $R$ . El cilindro está unido al eje mediante rayos cuyo momento de inercia es despreciable. *a)* Calcule la rapidez de la masa colgante  $m$  justo antes de golpear el piso. *b)* Utilice los conceptos de energía para explicar por qué la respuesta al inciso *a)* es diferente de la rapidez calculada en el ejemplo 9.9.

**9.49.** Una polea sin fricción tiene la forma de un disco sólido uniforme de masa 2.50 kg y radio 20.0 cm. Una piedra de 1.50 kg se une a un alambre muy delgado que se enrolla alrededor del borde de la polea (figura 9.32), y el sistema se libera del reposo. *a)* ¿Qué tan lejos debe caer la piedra para que la polea tenga 4.50 J de energía cinética? *b)* ¿Qué porcentaje de la energía cinética total tiene la polea?

**Figura 9.32** Ejercicio 9.49.



**9.50.** Una cubeta de masa  $m$  se ata a un cable sin masa que se enrolla alrededor del borde exterior de una polea uniforme sin fricción de radio  $R$ ,

similar al sistema que se presenta en la figura 9.32. En términos de las variables indicadas, ¿cuál debe ser el momento de inercia de la polea, de forma que siempre tenga la mitad de la energía cinética de la cubeta?

**9.51. Cambio de escala de  $I$ .** Si multiplicamos todas las dimensiones de diseño de un objeto por un factor de escala  $f$ , su volumen y masa se multiplicarán por  $f^3$ . *a)* ¿Por qué factor se multiplicará su momento de inercia? *b)* Si un modelo a escala  $\frac{1}{48}$  tiene una energía cinética rotacional de 2.5 J, ¿cuánto valdrá la del objeto a escala normal hecho con el mismo material y girando con la misma velocidad angular?

**9.52.** Una escalera uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 9.00 kg está apoyada contra un muro vertical formando un ángulo de  $53^\circ$  con el piso. Un trabajador empuja la escalera contra la pared hasta que queda vertical. ¿Cuánto trabajo realizó esa persona contra la gravedad?

**9.53.** Una cuerda uniforme de 3.00 kg y 24.0 m de longitud está en el suelo en la cima de un risco vertical. En la cima un alpinista desciende hasta la mitad de la cuerda, para ayudar a su compañero a subir el acantilado. ¿Cuál fue el cambio en la energía potencial de la cuerda durante esta maniobra?

## Sección 9.5 Teorema de los ejes paralelos

**9.54.** Calcule el momento de inercia de un aro (anillo hueco de paredes delgadas) con masa  $M$  y radio  $R$ , alrededor de un eje perpendicular al plano del aro y que pasa por un borde.

**9.55.** ¿Alrededor de qué eje tendrá una esfera uniforme de madera, el mismo momento de inercia que tiene una esfera hueca de plomo con los mismos valores de masa y radio alrededor de un eje que pasa por su diámetro?

**9.56.** Use el teorema de los ejes paralelos para demostrar que los momentos de inercia dados en los incisos *a)* y *b)* de la tabla 9.2 son congruentes.

**9.57.** Una lámina de acero rectangular delgada tiene lados que miden  $a$  y  $b$  y una masa de  $M$ . Use el teorema de los ejes paralelos para calcular el momento de inercia de la lámina alrededor de un eje perpendicular al plano de la lámina y que pasa por una esquina de ésta.

**9.58.** *a)* Para la lámina rectangular delgada que se muestra en el inciso *d)* de la tabla 9.2, calcule el momento de inercia en torno a un eje que está en el plano de la placa, pasa por el centro de la placa y es paralelo al eje que se muestra en la figura. *b)* Calcule el momento de inercia de la placa en torno a un eje que está en el plano de la placa, pasa por el centro de la placa y es perpendicular al eje del inciso *a)*.

**9.59.** Una varilla delgada uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$  se dobla por su centro de manera que los dos segmentos son ahora perpendiculares entre sí. Encuentre el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por *a*) el punto donde se cruzan los dos segmentos y *b*) el punto medio de la recta que conecta los dos extremos.

**\*Sección 9.6 Cálculos de momento de inercia**

**\*9.60.** Utilizando la información de la tabla 9.2 y el teorema de los ejes paralelos, calcule el momento de inercia de la varilla delgada de masa  $M$  y longitud  $L$  de la figura 9.23 alrededor de un eje que pasa por  $O$ , a una distancia arbitraria  $h$  de un extremo. Compare su resultado con el obtenido por integración en el ejemplo 9.11 (sección 9.6).

**\*9.61.** Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de un disco sólido uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por el centro.

**\*9.62.** Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de una varilla delgada uniforme con masa  $M$  y longitud  $L$  alrededor de un eje en un extremo, perpendicular a la varilla.

**\*9.63.** La masa por unidad de longitud de una varilla delgada de longitud  $L$  varía con la distancia al extremo izquierdo, donde  $x = 0$ , según  $dm/dx = \gamma x$ , donde  $\gamma$  tiene unidades de  $\text{kg/m}^2$ . *a*) Calcule la masa total de la varilla en términos de  $\gamma$  y  $L$ . *b*) Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de la varilla para un eje en el extremo izquierdo, perpendicular a la varilla. Use la expresión que dedujo en el inciso *a*) para expresar  $I$  en términos de  $M$  y  $L$ . Compare su resultado con el de una varilla uniforme y explique las diferencias. *c*) Repita el inciso *b*) para un eje en el extremo derecho de la varilla y compare los resultados de los incisos *b*) y *c*). Explique las diferencias.

**Problemas**

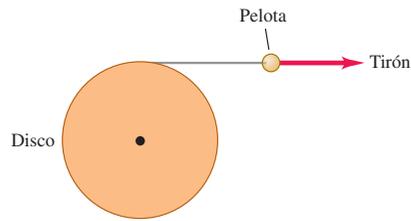
**9.64.** Dibuje una rueda que yace en el plano del papel y gira en sentido antihorario. Elija un punto en el borde y dibuje un vector  $\vec{r}$  del centro de la rueda a ese punto. *a*) ¿Qué dirección tiene  $\vec{\omega}$ ? *b*) Demuestre que la velocidad del punto es  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . *c*) Demuestre que la aceleración radial del punto es  $\vec{a}_{\text{rad}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  (véase el ejercicio 9.28).

**9.65. Viaje a Marte.** Imagine que trabaja en un proyecto de la NASA para enviar un cohete a Marte. El cohete despegará de la Tierra cuando ésta y Marte estén alineados con el Sol. Si en este momento Marte está  $60^\circ$  adelante de la Tierra en su órbita alrededor del Sol, ¿cuándo debería lanzarse el cohete? (Nota: todos los planetas giran en torno al Sol en la misma dirección, y 1 año marciano equivale a 1.9 años terrestres; suponga que los dos planetas tienen órbita circular.)

**9.66.** Un rodillo de una imprenta gira un ángulo dado por  $\theta(t) = \gamma t^2 - \beta t^3$ , donde  $\gamma = 3.20 \text{ rad/s}^2$  y  $\beta = 0.500 \text{ rad/s}^3$ . *a*) Calcule la velocidad angular del rodillo en función del tiempo. *b*) Calcule la aceleración angular del rodillo en función del tiempo. *c*) ¿Cuál es la máxima velocidad angular positiva que alcanza, y en qué instante  $t$  ocurre esto?

**\*9.67.** Un disco con radio de 25.0 cm tiene libertad para girar en torno a un eje perpendicular a él que pasa por su centro. Tiene un cordel delgado pero fuerte enrollado alrededor de su borde, y el cordel está unido a una pelota de la que se tira tangencialmente para alejarla del borde del disco (figura 9.33). El tirón aumenta en magnitud y produce una aceleración de la pelota que obedece la ecuación  $a(t) = At$ , donde  $t$  está en segundos y  $A$  es constante. El cilindro parte del reposo y al final del tercer segundo, la aceleración de la pelota es de  $1.80 \text{ m/s}^2$ . *a*) Calcule  $A$ . *b*) Expresar la aceleración angular del disco en función del tiempo. *c*) ¿Cuánto tiempo después de que el disco comenzó a girar alcanzará una rapidez angular de  $15.0 \text{ rad/s}$ ? *d*) ¿Con qué ángulo ha girado el disco justo cuando alcanza  $15.0 \text{ rad/s}$ ? (Sugerencia: véase la sección 2.6.)

Figura 9.33 Problema 9.67.

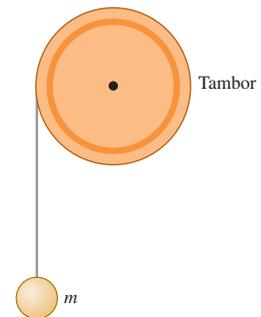


**9.68.** Cuando un coche de juguete de 0.180 kg y 15.0 cm de longitud es empujado rápidamente por el piso, almacena energía en su volante que tiene un momento de inercia de  $4.00 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . La publicidad asegura que el cochecito se puede hacer viajar con una rapidez a escala de hasta 700 km/h. La rapidez a escala es la rapidez del coche de juguete multiplicada por el cociente de la longitud de un automóvil real entre la longitud del juguete. Suponga que un automóvil real mide 3.0 m. *a*) Con una rapidez a escala de 700 km/h, ¿qué rapidez traslacional real tiene el coche? *b*) Si toda la energía cinética que está inicialmente en el volante se convierte en energía cinética traslacional del juguete, ¿cuánta energía se almacenó en el volante? *c*) ¿Qué velocidad angular inicial del volante se necesitó para almacenar la energía calculada en el inciso *b*)?

**9.69.** Un automóvil Chevrolet Corvette clásico modelo 1957, con masa de 1240 kg, parte del reposo y tiene una aceleración tangencial constante de  $3.00 \text{ m/s}^2$  en una pista circular de prueba con radio de 60.0 m. Trate el auto como partícula. *a*) ¿Qué aceleración angular tiene? *b*) ¿Qué rapidez angular tiene 6.00 s después de arrancar? *c*) ¿Qué aceleración radial tiene en este instante? *d*) Dibuje una vista superior de la pista circular, el auto, el vector de velocidad y las componentes del vector de la aceleración a los 6.00 s. *e*) ¿Qué magnitudes tienen la aceleración total y la fuerza neta del auto en este instante? *f*) ¿Qué ángulo forman estos vectores con la velocidad del auto a los 6.00 s?

**9.70.** Unos ingenieros están diseñando un sistema en el que una masa  $m$ , al caer, imparte energía cinética a un tambor uniforme giratorio, al cual está unida con un alambre delgado y muy ligero que está enrollado alrededor del borde del tambor (figura 9.34). No hay fricción considerable en el eje del tambor y todo el sistema parte del reposo. Este sistema se probó en la Tierra, pero debe utilizarse en Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es de  $3.71 \text{ m/s}^2$ . En las pruebas en la Tierra, cuando  $m$  es de 15.0 kg y se le permite caer una distancia de 5.00 m, imparte 250.0 J de energía cinética al tambor. *a*) Si el sistema se opera en Marte, ¿qué distancia tendría que caer la masa de 15.0 kg para impartir la misma cantidad de energía cinética al tambor? *b*) ¿Con qué rapidez se moverá la masa de 15.0 kg en Marte justo cuando el tambor gane 250.0 J de energía cinética?

Figura 9.34 Problema 9.70.



**9.71.** La banda de una aspiradora pasa por un eje con 0.45 cm de radio y una rueda con 2.00 cm de radio. La disposición de estas piezas es similar a la de la cadena y las ruedas dentadas de la figura 9.14. El motor gira el eje a  $60.0 \text{ rev/s}$ , y la banda gira la rueda, que se conecta mediante otro eje al rodillo que saca el polvo de la alfombra que se está limpiando. Suponga que la banda no resbala ni en el

eje ni en la rueda. *a)* ¿Qué rapidez tiene un punto en la banda? *b)* ¿Qué velocidad angular tiene la rueda en rad/s?

**9.72.** El motor de una sierra circular gira a 3450 rev/min. Una polea conectada al eje del motor impulsa una segunda polea con la mitad del diámetro mediante una correa en "V". Una hoja de 0.208 m de diámetro está montada en el mismo eje giratorio que la segunda polea. *a)* El operador se descuida y la hoja atrapa y lanza hacia atrás un trocito de madera, el cual se mueve con rapidez lineal igual a la rapidez tangencial del borde de la hoja. Calcule dicha rapidez. *b)* Calcule la aceleración radial de un punto en el borde exterior de la hoja para saber por qué el aserrín no se adhiere a los dientes.

**9.73.** Una rueda cambia su velocidad angular con una aceleración angular constante, al girar sobre un eje fijo que pasa por su centro. *a)* Demuestre que el cambio de magnitud de la aceleración radial de un punto de la rueda, durante cualquier lapso, es el doble del producto de la aceleración angular, el desplazamiento angular y la distancia perpendicular del punto al eje. *b)* La aceleración radial de un punto de la rueda a 0.250 m del eje cambia de 25.0 m/s<sup>2</sup> a 85.0 m/s<sup>2</sup> mientras la rueda gira 15.0 rad. Calcule la aceleración tangencial de este punto. *c)* Demuestre que el cambio de energía cinética de la rueda durante cualquier lapso es el producto del momento de inercia alrededor del eje, la aceleración angular y el desplazamiento angular. *d)* Durante el desplazamiento angular de 15.0 rad del inciso *b)*, la energía cinética de la rueda aumenta de 20.0 J a 45.0 J. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda en torno al eje de rotación?

**9.74.** Una esfera consiste en un centro esférico sólido de madera con densidad de 800 kg/m<sup>3</sup> y radio de 0.20 m, cubierto por una capa delgada de plomo con densidad por área de 20 kg/m<sup>2</sup>. Calcule el momento de inercia de esta esfera en torno a un eje que pasa por su centro.

**9.75.** Estime el momento de inercia de usted en torno a un eje vertical que pasa por el centro de la parte superior de la cabeza, estando parado en posición erguida y con los brazos extendidos a los lados. Haga aproximaciones razonables, y mida o estime las cantidades necesarias.

**9.76.** Una varilla uniforme de 50.0 cm de longitud y masa de 0.320 kg se dobla en su centro para darle forma de V, con un ángulo de 70.0° en su vértice. Calcule el momento de inercia de este objeto en torno a un eje perpendicular al plano de la V y que pasa por su vértice.

**9.77.** Se ha sugerido que las plantas eléctricas deberían aprovechar las horas de bajo consumo (por ejemplo, después de media noche) para generar energía mecánica y almacenarla hasta que se necesite durante los periodos de carga máxima, como a medio día. Una propuesta consiste en almacenar la energía en enormes volantes que giren sobre cojinetes casi sin fricción. Considere un volante de hierro (con densidad de 7800 kg/m<sup>3</sup>) con forma de disco uniforme de 10.0 cm de espesor. *a)* ¿Qué diámetro debería tener semejante disco para almacenar 10.0 megajoules de energía cinética al girar a 90.0 rpm en torno a un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro? *b)* ¿Qué aceleración centrípeta tendría un punto en su borde al girar con esta rapidez?

**9.78.** Al diseñar el motor para un cohete, usted desea reducir su peso reemplazando una pieza esférica sólida con una coraza esférica hueca del mismo tamaño. Las piezas giran alrededor de un eje que pasa por su centro. Usted necesita asegurarse de que la pieza nueva siempre tenga la misma energía cinética de rotación que la pieza original tenía a cualquier tasa de rotación dada. Si la pieza original tenía una masa  $M$ , ¿cuál debe ser la masa de la pieza nueva?

**9.79.** La Tierra, que no es una esfera uniforme, tiene un momento de inercia de  $0.3308MR^2$  alrededor de un eje que pasa por sus polos. La Tierra tarda 86,164 s en dar una revolución. Use el Apéndice F para calcular *a)* la energía cinética de la Tierra debida a esta rotación y *b)* la energía cinética de la Tierra debida a su movimiento orbital en torno al Sol. *c)* Explique cómo sabemos, por el valor

del momento de inercia de la Tierra, que su masa está concentrada en su centro.

**9.80.** Un disco sólido uniforme de masa  $m$  y radio  $R$  pivotea sobre un eje horizontal que pasa por su centro, y un objeto pequeño con la misma masa  $m$  se sujeta al borde del disco. Si el disco se suelta del reposo con el objeto en el extremo de un radio horizontal, calcule la rapidez angular cuando el objeto esté directamente abajo del eje.

**9.81.** Un anuncio metálico de una concesionaria automotriz es un triángulo rectángulo delgado y uniforme con base de longitud  $b$  y altura  $h$ . La masa del anuncio es  $M$ . *a)* Calcule su momento de inercia para la rotación en torno al cateto de longitud  $h$ ? *b)* Si  $M = 5.40$  kg,  $b = 1.60$  m y  $h = 1.20$  m, ¿qué energía cinética tiene el letrero cuando está girando a 2.00 rev/s en torno a un eje que coincide con el cateto de 1.20 m?

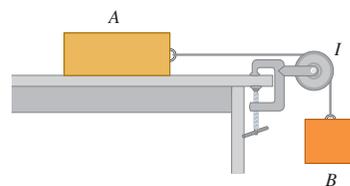
**9.82. Medición de  $I$ .** Imagine que trabaja como pasante en una empresa de ingenieros y le piden que mida el momento de inercia de una rueda grande, que gire en torno a un eje que pasa por su centro. Dado que usted fue buen estudiante de física, sabe lo que debe hacer. Mide la rueda y determina que su diámetro es de 0.740 m y que tiene un peso de 280 N. Luego monta la rueda, empleando cojinetes sin fricción, en un eje horizontal que pasa por el centro de la rueda. Enrolla una cuerda ligera en el borde de la rueda y cuelga una masa de 8.00 kg del extremo libre, como se muestra en la figura 9.18. Ahora suelta la masa desde el reposo; la masa desciende y la rueda gira mientras la cuerda se desenrolla. Usted determina que la masa tiene una rapidez de 5.00 m/s después de haber descendido 2.00 m. *a)* ¿Qué momento de inercia tiene la rueda para un eje perpendicular que pasa por su centro? *b)* Su jefe le dice que se requiere un  $I$  más grande y le pide diseñar una rueda con la misma masa y radio que tenga  $I = 19.0$  kg · m<sup>2</sup>. ¿Qué le contesta usted?

**9.83.** Un metro de 0.160 kg pivotea sobre un extremo, de manera que puede girar sin fricción alrededor de un eje horizontal. El metro se sostiene en posición horizontal y se suelta. Al pasar por la vertical, calcule *a)* el cambio de energía potencial gravitacional que haya ocurrido; *b)* la rapidez angular del metro; *c)* la rapidez lineal del extremo opuesto al eje. *d)* Compare la respuesta del inciso *c)* con la rapidez de una partícula que ha caído 1.00 m desde el reposo.

**9.84.** Exactamente una vuelta de una cuerda flexible de masa  $m$  está enrollada en un cilindro uniforme de masa  $M$  y radio  $R$ , que gira sin fricción sobre un eje horizontal a lo largo del eje del cilindro. Un extremo de la cuerda está sujeto al cilindro, el cual inicia con rapidez angular  $\omega_0$ . Después de una revolución, la cuerda se ha desenrollado y cuelga verticalmente, tangente al cilindro. Calcule la rapidez angular del cilindro y la rapidez lineal del extremo inferior de la cuerda en este instante. Puede ignorar el espesor de la cuerda. (*Sugerencia:* use la ecuación (9.18).)

**9.85.** La polea de la figura 9.35 tiene radio  $R$  y momento de inercia  $I$ . La cuerda no resbala sobre la polea y ésta gira sobre un eje sin fricción. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque  $A$  y la mesa es  $\mu_k$ . El sistema se suelta del reposo y el bloque  $B$  desciende. La masa de  $A$  es  $m_A$ ; y la de  $B$ ,  $m_B$ . Use métodos de energía para calcular la rapidez de  $B$  en función de la distancia  $d$  que ha descendido.

Figura 9.35 Problema 9.85.



**9.86.** La polea de la figura 9.36 tiene 0.160 m de radio y su momento de inercia es de  $0.480 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . La cuerda no resbala en la polea. Use métodos de energía para calcular la rapidez del bloque de 4.00 kg justo antes de golpear el piso.

**9.87.** Se cuelga un aro delgado de radio  $R$  de un clavo. El aro se desliza lateralmente (dentro de su plano) un ángulo  $\beta$  con respecto a su posición de equilibrio y se suelta. ¿Qué rapidez angular tiene al volver a su posición de equilibrio? (Sugerencia: use la ecuación (9.18).)

**9.88.** Un autobús en Zurich, Suiza, obtenía su potencia motriz de la energía almacenada en un volante grande, cuya rapidez se aumentaba periódicamente, cuando el autobús hacía una parada, con un motor eléctrico que entonces podía conectarse a las líneas eléctricas. El volante era un cilindro sólido con masa de 1000 kg y 1.80 m de diámetro; su rapidez angular máxima era de 3000 rev/min. a) Con esta rapidez angular, ¿qué energía cinética tiene el volante? b) Si la potencia media que requería el autobús era de  $1.86 \times 10^3 \text{ W}$ , ¿cuánto tiempo podía operar entre paradas?

**9.89.** Dos discos metálicos, con radios  $R_1 = 2.50 \text{ cm}$  y  $R_2 = 5.00 \text{ cm}$ , y masas  $M_1 = 0.80 \text{ kg}$  y  $M_2 = 1.60 \text{ kg}$ , se sueldan juntos y se montan en un eje sin fricción que pasa por su centro común (figura 9.37). a) ¿Qué momento de inercia total tienen los discos? b) Un cordón ligero se enrolla en el disco más chico y se cuelga de él un bloque de 1.50 kg. Si el bloque se suelta del reposo a una altura de 2.00 m sobre el piso, ¿qué rapidez tiene justo antes de golpear el piso? c) Repita el inciso b) pero ahora con el cordón enrollado en el disco grande. ¿En qué caso el bloque alcanza mayor rapidez? Explique su respuesta.

**9.90.** En el sistema de cilindro y masa del ejemplo 9.9 (sección 9.4), suponga que la masa  $m$  que cae está hecha de hule ideal, de modo que no pierde energía mecánica al golpear el piso. a) Si el cilindro no gira inicialmente y la masa  $m$  se suelta del reposo desde una altura  $h$ , ¿a qué altura rebotará la masa si lo hace verticalmente? b) Explique, en términos de energía, por qué la respuesta a a) es menor que  $h$ .

**9.91.** En el sistema que se muestra en la figura 9.18, una masa de 12.0 kg se suelta desde el reposo y cae, haciendo que el cilindro uniforme con masa de 10.0 kg y diámetro de 30.0 cm gire en torno a un eje sin fricción que pasa por su centro. ¿Qué distancia deberá descender la masa para impartir al cilindro 250 J de energía cinética?

**9.92.** En la figura 9.38, el cilindro y la polea giran sin fricción en torno a ejes horizontales estacionarios que pasan por su respectivo centro. Se enrolla una cuerda ligera en el cilindro, la cual pasa por la polea y tiene una caja de 3.00 kg suspendida de su extremo libre. No hay desliza-

Figura 9.36 Problema 9.86.

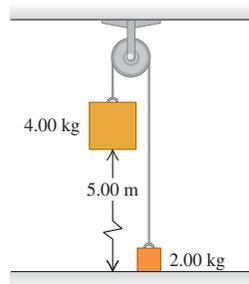


Figura 9.37 Problema 9.89.

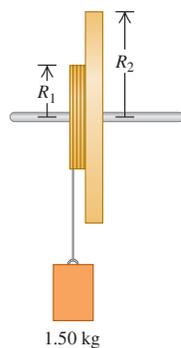
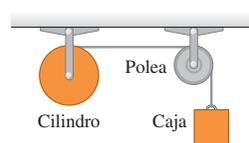


Figura 9.38 Problema 9.92.



miento entre la cuerda y la superficie de la polea. El cilindro uniforme tiene masa de 5.00 kg y radio de 40.0 cm. La polea es un disco uniforme con masa de 2.00 kg y radio de 20.0 cm. La caja se suelta desde el reposo y descende mientras la cuerda se desenrolla del cilindro. Calcule la rapidez que tiene la caja cuando ha caído 1.50 m.

**9.93.** Un disco plano uniforme tiene masa  $M$  y radio  $R$ . Se perfora en él un agujero circular de radio  $R/4$ , centrado en un punto a  $R/2$  del centro del disco. a) Calcule el momento de inercia del disco alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del disco. (Sugerencia: calcule el momento de inercia de la pieza que se quitó al disco.) b) Calcule el momento de inercia del disco agujerado en torno a un eje que pasa por el centro del agujero, perpendicular al plano del disco.

**9.94.** Se hace un péndulo con una esfera sólida uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  suspendida del extremo de una varilla ligera. La distancia del pivote en el extremo superior de la varilla al centro de la esfera es  $L$ . El momento de inercia  $I_p$  del péndulo para la rotación alrededor del pivote suele aproximarse con  $ML^2$ . a) Use el teorema de los ejes paralelos para demostrar que si  $R$  es el 5% de  $L$  y se desprecia la masa de la varilla,  $I_p$  es sólo 0.1% mayor que  $ML^2$ . b) Si la masa de la varilla es el 1% de  $M$  y  $R$  es mucho menor que  $L$ , ¿qué relación hay entre  $I_{\text{varilla}}$  para un eje en el pivote, y  $ML^2$ ?

**9.95. Teorema de los ejes perpendiculares.** Considere un cuerpo rígido que es una lámina delgada plana de forma arbitraria en el plano  $xy$ , con el origen de coordenadas  $O$  situado en cualquier punto dentro o fuera del cuerpo. Sean  $I_x$  e  $I_y$  los momentos de inercia alrededor de los ejes  $x$  y  $y$ , y sea  $I_O$  el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por  $O$ , perpendicular al plano. a) Considerando elementos de masa  $m_i$  con coordenadas  $(x_i, y_i)$ , demuestre que  $I_x + I_y = I_O$ . Éste es el teorema de los ejes perpendiculares. Observe que el punto  $O$  no tiene que ser el centro de masa. b) Para una arandela delgada con masa  $M$  y radios interior y exterior  $R_1$  y  $R_2$ , use el teorema de los ejes perpendiculares para calcular el momento de inercia alrededor de un eje que está en el plano de la arandela y que pasa por su centro. Puede usar la información de la tabla 9.2. c) Use el teorema de los ejes perpendiculares para demostrar que, en el caso de una lámina delgada cuadrada con masa  $M$  y longitud de lado  $L$ , el momento de inercia en torno a cualquier eje en el plano de la lámina que pase por el centro de la lámina es  $\frac{1}{12}ML^2$ . Puede usar la información de la tabla 9.2.

**9.96.** Una varilla uniforme delgada se dobla formando un cuadrado de lado  $a$ . Si la masa total es  $M$ , calcule el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro y es perpendicular al plano del cuadrado. (Sugerencia: use el teorema de los ejes paralelos.)

**\*9.97.** La densidad de un cilindro de radio  $R$  y masa  $M$  aumenta linealmente con la distancia  $r$  al eje del cilindro,  $\rho = \alpha r$ , donde  $\alpha$  es una constante positiva. a) Calcule el momento de inercia del cilindro alrededor de un eje longitudinal que pasa por su centro, en términos de  $M$  y  $R$ . b) ¿Su respuesta es mayor o menor que el momento de inercia de un cilindro con la misma masa y radio pero densidad uniforme? Explique por qué este resultado es lógico cualitativamente.

**9.98. Estrellas de neutrones y restos de supernovas.** La Nebulosa del Cangrejo es una nube de gas brillante de unos 10 años luz de diámetro, a una distancia aproximada de 6500 años luz de la Tierra (figura

Figura 9.39 Problema 9.98.



9.39). Es el residuo de una estrella que sufrió una *explosión supernova* vista en la Tierra en 1054 D.C. Esta nebulosa libera energía a razón de aproximadamente  $5 \times 10^{31}$  W, unas  $10^5$  veces la energía radiada por el Sol. El origen de esa energía es la rotación rápida de una *estrella de neutrones* en el centro de la nebulosa. Este objeto gira una vez cada 0.0331 s, y este periodo aumenta  $4.22 \times 10^{-13}$  s cada segundo que pasa. *a)* Si la rapidez con que la estrella de neutrones pierde energía es igual a la rapidez con que la nebulosa libera energía, calcule el momento de inercia de tal estrella. *b)* Las teorías sobre supernovas predicen que la estrella de neutrones de la Nebulosa del Cangrejo tiene una masa aproximadamente 1.4 veces mayor que la del Sol. Modelando la estrella de neutrones como esfera uniforme sólida, calcule su radio en kilómetros. *c)* ¿Qué rapidez lineal tiene un punto en el ecuador de esa estrella? Compare esto con la rapidez de la luz. *d)* Suponga que la estrella de neutrones es uniforme y calcule su densidad, comparándola con la de una roca ordinaria ( $3000 \text{ kg/m}^3$ ) y la densidad de un núcleo atómico (aproximadamente  $10^{17} \text{ kg/m}^3$ ). Justifique la afirmación de que una estrella de neutrones es en esencia un núcleo atómico grande.

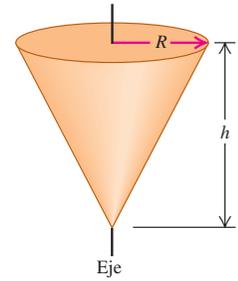
### Problemas de desafío

**9.99.** El momento de inercia de una esfera con densidad uniforme alrededor de un eje que pasa por su centro es  $\frac{2}{5}MR^2 = 0.400MR^2$ . Observaciones de satélite muestran que el momento de inercia de la Tierra es de  $0.3308MR^2$ . Datos geofísicos sugieren que la Tierra tiene 5 regiones principales: el núcleo interior ( $r = 0$  a  $r = 1220$  km) con densidad media de  $12,900 \text{ kg/m}^3$ , el núcleo exterior ( $r = 1220$  km a  $r = 3480$  km) con densidad media de  $10,900 \text{ kg/m}^3$ , el manto inferior ( $r = 3480$  km a  $r = 5700$  km) con densidad media de  $4900 \text{ kg/m}^3$ , el manto superior ( $r = 5700$  km a  $r = 6350$  km) con densidad media de  $3600 \text{ kg/m}^3$  y la corteza exterior y los océanos ( $r = 6350$  km a  $r = 6370$  km) con densidad media de  $2400 \text{ kg/m}^3$ . *a)* Demuestre que el momento de inercia alrededor de un diámetro de una coraza esférica uniforme con radio interior  $R_1$ , radio exterior  $R_2$  y densidad  $\rho$  es  $I = \rho(8\pi/15)(R_2^5 - R_1^5)$ . (*Sugerencia:* forme la coraza superponiendo una esfera de densidad  $\rho$  y una esfera menor de densidad  $-\rho$ .) *b)* Verifique los datos dados usándolos para calcular la masa de la Tierra. *c)* Use los datos dados para calcular el momento de inercia de la Tierra en términos de  $MR^2$ .

**\*9.100.** Calcule el momento de inercia de un cono sólido uniforme de masa  $M$  y altura  $h$  alrededor de un eje que pasa por su centro (figura 9.40). El radio de la base circular es  $R$ .

**9.101.** En un disco compacto (CD), la música se codifica en un patrón de agujeros diminutos dispuestos en una pista que corre en espiral hacia el borde del disco. Al girar el disco dentro del reproductor, la pista es barrida con una rapidez lineal constante de  $v = 1.25$  m/s. Puesto que el radio de la pista varía al irse alejando del centro, la rapidez angular del disco debe cambiar al reproducirse el CD. (Véase el ejercicio 9.22.) Veamos qué aceleración angular se necesita para mantener  $v$  constante. La ecuación de una espiral es  $r(\theta) = r_0 + \beta\theta$ , donde  $r_0$  es el radio de la espiral en  $\theta = 0$  y  $\beta$  es una constante. En un CD,  $r_0$  es el radio interior de la pista. Si tomamos la dirección de rotación del CD como positiva,  $\beta$  debe ser positiva para que  $r$  aumente al girar el disco y aumentar  $\theta$ . *a)* Al girar el disco un ángulo pequeño  $d\theta$ , la distancia barrida sobre la pista es  $ds = r d\theta$ . Usando la expresión anterior para  $r(\theta)$ , integre  $ds$  para obtener la distancia total  $s$  barrida sobre la pista en función de ángulo total  $\theta$  que ha girado el disco. *b)* Dado que la pista se barre con rapidez lineal constante  $v$ , la distancia  $s$  obtenida en el inciso *a)* es igual a  $vt$ . Use esto para obtener  $\theta$  en función del tiempo. Habrá dos soluciones para  $\theta$ ; elija la positiva y explique por qué es la adecuada. *c)* Con su expresión para  $\theta(t)$ , calcule la velocidad angular  $\omega_z$  y la aceleración angular  $\alpha_z$  en función del tiempo. ¿ $\alpha_z$  es constante? *d)* En un CD, el radio interior de la pista es de  $25.0$  mm, el radio aumenta  $1.55 \mu\text{m}$  cada revolución y la duración del CD es de  $74.0$  min. Calcule  $r_0$  y  $\beta$  y determine el número total de revoluciones del disco durante su reproducción. *e)* Con sus resultados de *c)* y *d)*, grafique  $\omega_z$  (en rad/s) contra  $t$  y  $\alpha_z$  (en  $\text{rad/s}^2$ ) contra  $t$  entre  $t = 0$  y  $t = 74.0$  min.

Figura 9.40 Problema de desafío 9.100.



# 10

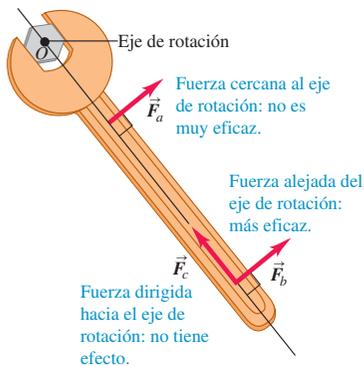
## DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL

### METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza produzca una torca.
- De qué manera la torca total sobre un cuerpo afecta su movimiento rotacional.
- Cómo analizar el movimiento de un cuerpo que gira y se mueve como un todo por el espacio.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y potencia para cuerpos giratorios.
- Cuál es el significado del momento angular de una partícula o de un cuerpo rígido.
- De qué manera el momento angular de un sistema cambia con el tiempo.
- Por qué un giróscopo que gira describe un movimiento extraño llamado precesión.

**10.1** ¿Cuál de estas tres fuerzas de igual magnitud tiene mayor probabilidad de aflojar el tornillo apretado?



? Si el acróbata no está tocando el suelo, ¿cómo puede alterar su rapidez de rotación? ¿Qué principio físico se aplica aquí?



En los capítulos 4 y 5 aprendimos que una fuerza neta aplicada a un cuerpo imparte una aceleración a ese cuerpo. Sin embargo, ¿qué se requiere para impartir una aceleración *angular* a un cuerpo? Es decir, ¿qué se necesita para poner a girar un cuerpo estacionario o para detener un cuerpo que está dando vueltas? Se requiere una fuerza, pero debe aplicarse de tal manera que proporcione una acción de torcer o de dar vuelta.

En este capítulo definiremos una nueva cantidad física, la *torca*, que describe la acción de torsión o giro debido a una fuerza. Veremos que la torca total que actúa sobre un cuerpo rígido determina su aceleración angular, así como la fuerza total sobre un cuerpo determina su aceleración lineal. También examinaremos el trabajo y la potencia en el movimiento rotacional con la finalidad de entender los problemas del tipo de cómo el eje giratorio de un auto transmite energía. Por último, desarrollaremos un nuevo principio de conservación, la *conservación del momento angular*, que es muy útil para entender la rotación de cuerpos tanto rígidos como no rígidos. Terminaremos el capítulo con el estudio de los *giróscopos*, que son dispositivos giratorios que al parecer desafían el sentido común y no se caen cuando creemos que deberían hacerlo, aunque en realidad su comportamiento se ajusta perfectamente a la dinámica del movimiento rotacional.

### 10.1 Torca

Sabemos que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden afectar su **movimiento de traslación**, es decir, el movimiento del cuerpo como un todo a través del espacio. Ahora queremos aprender qué aspectos de una fuerza determinan qué tan eficaz es ésta para provocar o modificar el movimiento *rotacional*. La magnitud y dirección de la fuerza son importantes, pero también lo es la posición del punto de aplicación. En la figura 10.1, se está usando una llave inglesa para aflojar un tornillo apretado. La fuerza  $\vec{F}_b$ , aplicada cerca del extremo del mango, es más eficaz que una fuerza igual  $\vec{F}_a$  aplicada cerca del tornillo. La fuerza  $\vec{F}_c$  no sirve de nada. Se aplica en el mismo punto y tiene la misma magnitud que  $\vec{F}_b$ , pero está dirigida a lo largo del

mango. La medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para causar o alterar la rotación de un cuerpo se denomina *torca*. Decimos que  $\vec{F}_a$  genera una torca sobre un punto  $O$  a la llave de la figura 10.1  $\vec{F}_b$  genera una torca mayor sobre  $O$  y  $\vec{F}_c$  no genera ninguna torca sobre  $O$ .

La figura 10.2 muestra tres ejemplos de cómo calcular la torca. En la figura el cuerpo puede girar alrededor de un eje que es perpendicular al plano de la figura y pasa por el punto  $O$ . Sobre el cuerpo actúan tres fuerzas:  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ , y  $\vec{F}_3$ , en el plano de la figura. La tendencia de  $\vec{F}_1$ , a causar una rotación alrededor de  $O$  depende de su magnitud  $F_1$  y también de la distancia *perpendicular*  $l_1$  entre el punto  $O$  y la **línea de acción** de la fuerza (la línea sobre la que está el vector de fuerza). Llamamos a  $l_1$  el **brazo de palanca** (o en ocasiones se le denomina como **brazo de momento**) de  $\vec{F}_1$  alrededor de  $O$ . El esfuerzo de torsión es directamente proporcional tanto a  $F_1$  y como a  $l_1$ . Definimos a la **torca** de  $\vec{F}_1$  con respecto a  $O$  como el producto  $F_1 l_1$ . Usaremos la letra griega  $\tau$  (tau) para la torca. En general, para una fuerza de magnitud  $F$  cuya línea de acción está a una distancia perpendicular  $l$  del punto  $O$ , la torca es

$$\tau = Fl \tag{10.1}$$

Los físicos prefieren el término “torca”, mientras que los ingenieros prefieren el término “momento o par de torsión” solo (a menos que estén hablando de un eje giratorio). Los dos grupos usan “brazo de palanca” o “brazo de momento” para la distancia  $l$ .

El brazo de palanca de  $\vec{F}_1$  en la figura 10.2 es la distancia perpendicular  $l_1$  y el de  $\vec{F}_2$  es la distancia perpendicular  $l_2$ . La línea de acción de  $\vec{F}_3$  pasa por el punto  $O$ , así que el brazo de palanca de  $\vec{F}_3$  es cero y su torca con respecto a  $O$  es cero. Por lo mismo,  $\vec{F}_c$  en la figura 10.1 tiene una torca cero con respecto al punto  $O$ , en tanto que  $\vec{F}_b$  tiene mayor torca que  $\vec{F}_a$  porque su brazo de palanca es mayor.

**CUIDADO** La torca siempre se mide en torno a un punto  $O$  Observe que la torca *siempre* se define con referencia a un punto específico. Si cambiamos de posición este punto, la torca de cada fuerza puede cambiar. Por ejemplo, la torca de  $\vec{F}_3$  en la figura 10.2 es cero con respecto al punto  $O$ , pero no con respecto al punto  $A$ . Al describir la torca de una fuerza, no basta llamarlo “la torca de  $\vec{F}$ ”; debemos decir “el momento de torsión de  $\vec{F}$  con respecto al punto  $X$ ” o “la torca de  $\vec{F}$  alrededor del punto  $X$ ”.

En la figura 10.2, la fuerza  $\vec{F}_1$  tiende a causar rotación *antihoraria* alrededor de  $O$ , mientras que  $\vec{F}_2$  tiende a causar rotación *horaria*. Para distinguir entre estas dos posibilidades, necesitamos elegir un sentido de rotación positivo. Si elegimos que *las torcas antihorarias sean positivas y las torcas en sentido horario sean negativas*, las torcas de  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  con respecto a  $O$  son

$$\tau_1 = +F_1 l_1 \quad \tau_2 = -F_2 l_2$$

La figura 10.2 muestra esta elección para el signo de la torca. A menudo usaremos el símbolo  $\odot$  para indicar el sentido de rotación positivo que elegimos.

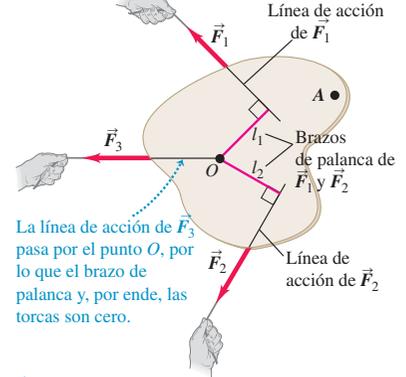
La unidad de la torca en el SI es el newton-metro. Al hablar de trabajo y energía llamamos a esta combinación joule; sin embargo, la torca *no* es trabajo ni energía, así que debemos expresarlo en newton-metros, *no* joules.

La figura 10.3 muestra una fuerza  $\vec{F}$  que se aplica en un punto  $P$  descrito por un vector de posición  $\vec{r}$  con respecto al punto elegido  $O$ . Hay varias formas de calcular la torca de esta fuerza:

1. Determine el brazo de palanca  $l$  y use  $\tau = Fl$ .
2. Calcule el ángulo  $\phi$  entre los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ ; el brazo de palanca es  $r \sin \phi$ , así que  $\tau = rF \sin \phi$ .
3. Represente  $\vec{F}$  en términos de una componente radial  $F_{\text{rad}}$  en la dirección de  $\vec{r}$  y una componente tangencial  $F_{\text{tan}}$  perpendicular a  $\vec{r}$ . (Decimos tangencial porque si el cuerpo gira, el punto donde actúa la fuerza se mueve en un círculo, y esta componente es tangente a ese círculo.) Entonces,  $F_{\text{tan}} = F \sin \phi$  y

**10.2** La torca de una fuerza alrededor de un punto es el producto de la magnitud de la fuerza y su brazo de palanca.

$\vec{F}_1$  tiende a provocar rotación en sentido antihorario alrededor del punto  $O$ , así que la torca es positiva:  $\tau_1 = +F_1 l_1$



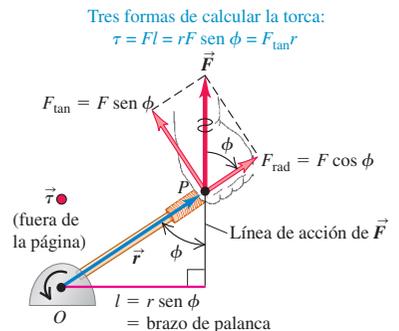
La línea de acción de  $\vec{F}_3$  pasa por el punto  $O$ , por lo que el brazo de palanca y, por ende, las torcas son cero.

$\vec{F}_2$  tiende a provocar rotación en sentido horario alrededor del punto  $O$ , así que la torca es negativa:  $\tau_2 = -F_2 l_2$ .

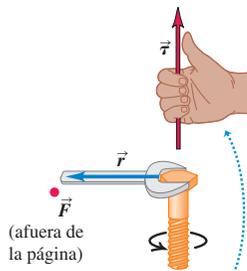


7.1 Cálculo de torcas

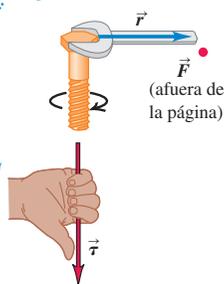
**10.3** Tres formas de calcular la torca de la fuerza  $\vec{F}$  en torno al punto  $O$ . En esta figura,  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  están en el plano de la página y el vector de la torca  $\vec{\tau}$  apunta afuera de la página hacia el lector.



**10.4** El vector de la torca,  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  se dirige sobre el eje del tornillo, perpendicular tanto a  $\vec{r}$  como a  $\vec{F}$ . Vemos que los dedos de la mano derecha se enroscan en la dirección de la rotación que la torca tiende a causar.



Si usted enrosca los dedos de la mano derecha de la dirección de  $\vec{r}$  hacia la dirección de  $\vec{F}$ , su pulgar estirado apunta en la dirección de  $\vec{\tau}$ .



$\tau = r(F \text{ sen } \phi) = F_{\text{tan}} r$ . La componente  $F_{\text{rad}}$  no tiene torca con respecto a  $O$  porque su brazo de palanca con respecto a ese punto es cero (compare con las fuerzas  $\vec{F}_c$  de la figura 10.1 y  $\vec{F}_3$  de la figura 10.2).

Resumiendo estas expresiones de la torca, tenemos

$$\tau = Fl = rF \text{ sen } \phi = F_{\text{tan}} r \quad (\text{magnitud de la torca}) \quad (10.2)$$

### La torca como vector

En la sección 9.1, vimos que la velocidad y la aceleración angulares pueden representarse como vectores; lo mismo sucede con la torca; observe que la cantidad  $rF \text{ sen } \phi$  de la ecuación (10.2) es la magnitud del *producto vectorial*  $\vec{r} \times \vec{F}$  que definimos en la sección 1.10. (Repase esa definición.) Ahora generalizamos la definición de torca de la siguiente manera: si una fuerza  $\vec{F}$  actúa en un punto que tiene un vector de posición  $\vec{r}$  con respecto a un origen  $O$ , como en la figura 10.3, la torca  $\vec{\tau}$  de la fuerza con respecto a  $O$  es la cantidad *vectorial*

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{definición del vector torca}) \quad (10.3)$$

La torca definida en la ecuación (10.2) es sólo la magnitud del vector torca  $\vec{r} \times \vec{F}$ . La dirección de  $\vec{\tau}$  es perpendicular tanto a  $\vec{r}$  como a  $\vec{F}$ . En particular, si  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  están en un plano perpendicular al eje de rotación, como en la figura 10.3, el vector torca  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  tiene la dirección del eje de rotación, y su sentido está dado por la regla de la mano derecha (figura 1.29). Las relaciones de dirección se muestran en la figura 10.4.

En los diagramas donde intervienen  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  y  $\vec{\tau}$ , es común que uno de los vectores esté orientado en una dirección perpendicular a la página. (De hecho, por la naturaleza misma del producto cruz,  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  debe ser perpendicular al plano de los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ .) Usaremos un punto ( $\bullet$ ) para representar un vector que apunta hacia afuera de la página (véase la figura 10.3) y una cruz ( $\times$ ) para representar un vector que apunta hacia adentro de la página.

En las siguientes secciones, normalmente nos interesará la rotación de un cuerpo alrededor de un eje orientado en cierta dirección constante. En tal caso, sólo interesa la componente de la torca sobre ese eje, que normalmente llamaremos la torca con respecto al *eje* especificado.

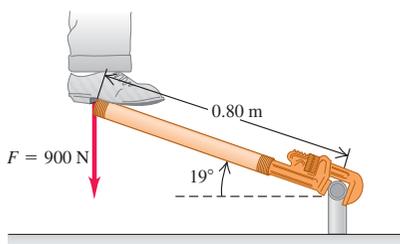
### Ejemplo 10.1 Aplicación de una torca

Un plomero aficionado, que no puede aflojar una junta, ensarta un tramo de tubo en el mango de su llave de tuercas y aplica todo su peso de 900 N al extremo del tubo parándose sobre él. La distancia del centro de la junta al punto donde actúa el peso es de 0.80 m, y el mango y el

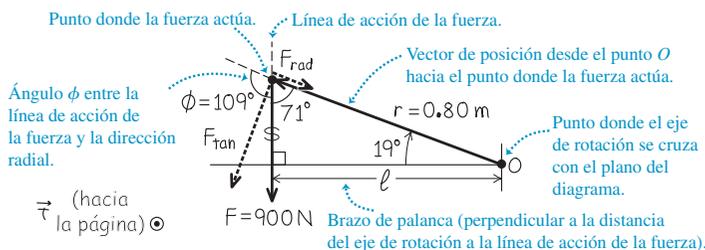
tubo forman un ángulo de  $19^\circ$  con la horizontal (figura 10.5a). Calcule la magnitud y la dirección de la torca que el plomero aplica en torno al centro de la junta.

**10.5** a) Un plomero aficionado trata de aflojar una junta parándose en una extensión del mango de la llave de tuercas. b) Diagrama vectorial para calcular la torca con respecto a  $O$ .

a) Diagrama de la situación



b) Diagrama de cuerpo



**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** La figura 10.5b muestra los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  y el ángulo entre ellos ( $\phi = 109^\circ$ ). Usaremos lo que sabemos acerca de estos vectores para calcular el vector de la torca  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ .

**PLANTEAR:** Usaremos la ecuación (10.1) o la (10.2) para obtener la magnitud de la torca y la regla de la mano derecha con la ecuación (10.3), para hallar su dirección.

**EJECUTAR:** Para usar la ecuación (10.1), primero calculamos el brazo de palanca  $l$ . Como muestra la figura 10.5b:

$$l = (0.80 \text{ m}) \sin 109^\circ = (0.80 \text{ m}) \sin 71^\circ = 0.76 \text{ m}$$

La ecuación (10.1) nos dice que la magnitud de la torca es

$$\tau = Fl = (900 \text{ N})(0.76 \text{ m}) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

O bien, por la ecuación (10.2),

$$\tau = rF \sin \phi = (0.80 \text{ m})(900 \text{ N})(\sin 109^\circ) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

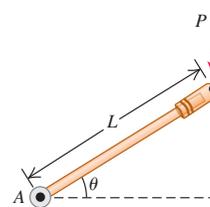
También podemos calcular  $F_{\text{tan}}$ , la componente tangencial de  $\vec{F}$ , que actúa perpendicular a  $\vec{r}$  (es decir, perpendicular al tubo). El vector  $\vec{r}$  está a  $19^\circ$  de la horizontal, así que una perpendicular a  $\vec{r}$  está orientada a  $19^\circ$  de la vertical. Puesto que  $\vec{F}$  es vertical, esto implica que  $F_{\text{tan}} = F(\cos 19^\circ) = (900 \text{ N})(\cos 19^\circ) = 851 \text{ N}$ . La torca es

$$\tau = F_{\text{tan}}r = (851 \text{ N})(0.80 \text{ m}) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Si usted enrosca los dedos de su mano derecha de la dirección de  $\vec{r}$  (en el plano de la figura 10.5b, hacia la izquierda y hacia arriba) a la dirección de  $\vec{F}$  (verticalmente hacia abajo), su pulgar derecho apuntará hacia adentro del plano de la figura. Ésta es la dirección de la torca  $\vec{\tau}$ .

**EVALUAR:** Ya verificamos la magnitud obtenida de  $\tau$  calculándola de tres formas distintas. Para comprobar la dirección de la torca, observamos que la fuerza de la figura 10.5 tiende a producir una rotación en sentido antihorario en torno a  $O$ . Si enroscamos los dedos de la mano derecha en dirección antihoraria, nuestro pulgar apuntará hacia afuera del plano de la figura 10.5 lo cual es, en efecto, la dirección de la torca.

**Evalúe su comprensión de la sección 10.1** La figura muestra una fuerza  $P$  que se aplica a un extremo de una palanca de longitud  $L$ . ¿Cuál es la magnitud de la torca de esta fuerza en torno al punto  $A$ ? i)  $PL \sin \theta$ ; ii)  $PL \cos \theta$ ; iii)  $PL \tan \theta$ .



## 10.2 Torca y aceleración angular de un cuerpo rígido

Ahora podemos deducir la relación fundamental de la dinámica rotacional de un cuerpo rígido. Demostraremos que la aceleración angular de un cuerpo rígido en rotación es directamente proporcional a la suma de las componentes de la torca sobre el eje de rotación. El factor de proporcionalidad es el momento de inercia.

Para deducir esta relación, imaginamos otra vez que el cuerpo se compone de un gran número de partículas. Elegimos como eje de rotación el eje  $z$ ; la primera partícula tiene masa  $m_1$  y distancia  $r_1$  con respecto a este eje (figura 10.6). La fuerza total  $\vec{F}_1$  que actúa sobre la partícula tiene una componente en la dirección radial  $F_{1,\text{rad}}$ , una componente  $F_{1,\text{tan}}$  que es tangente al círculo de radio  $r_1$  en que se mueve la partícula al girar el cuerpo, y una componente  $F_{1z}$  sobre el eje de rotación. La segunda ley de Newton para la componente tangencial es

$$F_{1,\text{tan}} = m_1 a_{1,\text{tan}} \tag{10.4}$$

Podemos expresar la aceleración tangencial de la primera partícula en términos de la aceleración angular  $\alpha_z$ , usando la ecuación (9.14):  $a_{1,\text{tan}} = r_1 \alpha_z$ . Con esta relación y multiplicando ambos miembros de la ecuación (10.4) por  $r_1$  obtenemos

$$F_{1,\text{tan}} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha_z \tag{10.5}$$

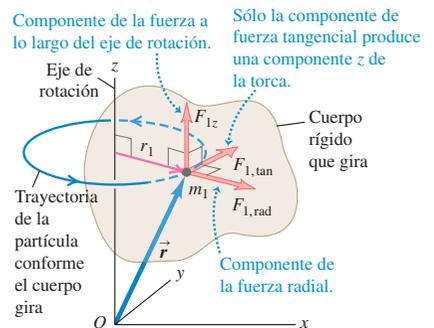
Por la ecuación (10.2),  $F_{1,\text{tan}} r_1$  no es más que la torca de la fuerza total con respecto al eje de rotación (igual a la componente  $\tau_{1z}$  del vector de la torca sobre dicho eje). El subíndice  $z$  nos recuerda que la torca afecta la rotación en torno al eje  $z$ , de la misma manera que el subíndice de  $F_{1z}$  nos recuerda que esta fuerza afecta el movimiento de la partícula 1 a lo largo del eje  $z$ .

Las componentes  $F_{1,\text{rad}}$  y  $F_{1z}$  no contribuyen a la torca alrededor del eje  $z$ , pues ninguna tiende a modificar la rotación de la partícula alrededor de ese eje. Por lo tanto,  $\tau_{1z} = F_{1,\text{tan}} r_1$  es la torca total que actúa sobre la partícula con respecto al eje de



- 7.8 Rotojuego: enfoque de dinámica
- 7.9 Escalera que cae
- 7.10 Mujer y elevador de volante: enfoque de dinámica

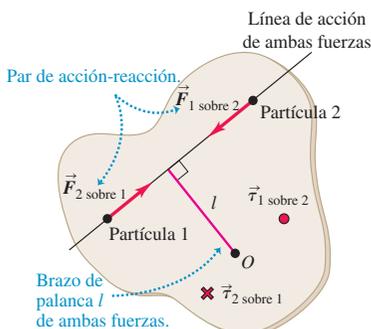
**10.6** Puesto que un cuerpo rígido gira en torno al eje  $z$ , una fuerza total  $\vec{F}_1$  actúa sobre una de las partículas del cuerpo. Sólo la componente de la fuerza  $F_{1,\text{tan}}$  puede afectar la rotación, ya que sólo  $F_{1,\text{tan}}$  ejerce una torca alrededor de  $O$  con una componente  $z$  (a lo largo del eje de rotación).



**10.7** Para aflojar o apretar un tornillo, es preciso impartirle una aceleración angular y, por lo tanto, aplicar una torca. Esto se facilita si se usa un destornillador con mango de radio grande, pues así se aumenta el brazo de palanca de la fuerza que aplicamos con la mano.



**10.8** Dos partículas de un cuerpo rígido ejercen fuerzas iguales y opuestas una sobre la otra. Si estas fuerzas actúan a lo largo de la línea que va de una partícula a la otra, los brazos de palanca de las dos fuerzas son iguales y las torcas causados por ellas son iguales y opuestos. Sólo las torcas *externas* afectan la rotación de un cuerpo rígido.



Las torcas se cancelan:  $\tau_1 \text{ sobre } 2 = +Fl$ ;  $\tau_2 \text{ sobre } 1 = -Fl$

rotación. Además,  $m_1 r_1^2$  es  $I_1$ , el momento de inercia de la partícula alrededor del eje de rotación. De esta manera, reescribimos la ecuación (10.5) como:

$$\tau_{1z} = I_1 \alpha_z = m_1 r_1^2 \alpha_z$$

Escribimos una ecuación similar para cada partícula del cuerpo y luego sumamos todas las ecuaciones:

$$\tau_{1z} + \tau_{2z} + \dots = I_1 \alpha_z + I_2 \alpha_z + \dots = m_1 r_1^2 \alpha_z + m_2 r_2^2 \alpha_z + \dots$$

es decir,

$$\sum \tau_{iz} = (\sum m_i r_i^2) \alpha_z \tag{10.6}$$

El miembro izquierdo de la ecuación (10.6) es la suma de todas las torcas en torno al eje de rotación que actúan sobre todas las partículas. El miembro derecho es  $I = \sum m_i r_i^2$ , el momento de inercia total alrededor del eje de rotación, multiplicado por la aceleración angular  $\alpha_z$ , la cual es la misma para todas las partículas porque se trata de un cuerpo rígido. Así, para el cuerpo rígido entero, tenemos el *análogo rotacional de la segunda ley de Newton*:

$$\sum \tau_z = I \alpha_z \tag{10.7}$$

(análogo rotacional de la segunda ley de Newton para un cuerpo rígido)

Así como la segunda ley de Newton dice que la fuerza total que actúa sobre una partícula es igual a la masa de la partícula multiplicada por su aceleración, la ecuación (10.7) dice que la torca total que actúa sobre un cuerpo rígido es igual al momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación multiplicado por su aceleración angular (figura 10.7).

Observe que como en nuestra deducción supusimos que la aceleración angular  $\alpha_z$  es la misma para todas las partículas del cuerpo, la ecuación (10.7) *sólo* es válida para cuerpos rígidos. Si el cuerpo no es rígido, como un tanque de agua que gira o un remolino de aire, la aceleración angular es diferente para diferentes partículas del cuerpo. Además, como en la deducción utilizamos la ecuación (9.14),  $a_{\text{tan}} = r \alpha_z$ ,  $\alpha_z$  debe medirse en  $\text{rad/s}^2$ .

La torca que actúa sobre cada partícula se debe a la fuerza neta que actúa sobre esa partícula, la cual es la suma vectorial de fuerzas externas e internas (véase la sección 8.2). Según la tercera ley de Newton, las fuerzas *internas* que cualquier par de partículas del cuerpo rígido ejercen una sobre la otra son iguales y opuestas (figura 10.8). Si estas fuerzas actúan sobre la línea que une las dos partículas, sus brazos de palanca con respecto a cualquier eje también serán iguales. Así, las torcas para tales fuerzas son iguales y opuestas, y suman cero. De hecho, *todas* las torcas internas suman cero, y la suma  $\sum \tau_z$  de la ecuación (10.7) incluye sólo las torcas de las fuerzas *externas*.

Es común que una fuerza externa importante que actúa sobre un cuerpo sea su *peso*. Esta fuerza no se concentra en un solo punto: actúa sobre todas las partículas del cuerpo. No obstante, resulta que, si el valor de  $\vec{g}$  es el mismo en todos los puntos, siempre obtenemos la torca correcta (alrededor de cualquier eje dado), si suponemos que todo el peso se concentra en el *centro de masa* del cuerpo. Demostraremos esto en el capítulo 11, pero mientras tanto lo usaremos en algunos problemas de este capítulo.

**Estrategia para resolver problemas 10.1**

**Dinámica rotacional de cuerpos rígidos**



Nuestra estrategia para resolver problemas de dinámica rotacional es muy similar a la Estrategia para resolver problemas 5.2 (sección 5.2) para resolver problemas donde interviene la segunda ley de Newton.

**IDENTIFICAR** *los conceptos relevantes:* La ecuación  $\sum \tau_z = I \alpha_z$  es útil en todos los casos en que las torcas actúan sobre un cuerpo rígido; es decir, siempre que fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido de manera tal que alteran el estado de rotación del cuerpo.

En algunos casos, podría preferirse un enfoque de energía, como se hizo en la sección 9.4; sin embargo, cuando la incógnita es una fuerza,

una torca, una aceleración, una aceleración angular o un tiempo transcurrido, casi siempre es más conveniente usar  $\sum \tau_z = I \alpha_z$ .

**PLANTEAR** *el problema* empleando estos pasos:

1. Haga un dibujo de la situación y elija el cuerpo o los cuerpos que va a analizar.
2. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo, marcando las cantidades desconocidas con símbolos algebraicos. Una nueva consideración es que se debe mostrar con exactitud la *forma* del cuerpo.

*continúa*

po, incluyendo todas las dimensiones y los ángulos que se necesitarán para los cálculos de una torca.

3. Elija ejes de coordenadas para cada cuerpo e indique un sentido de rotación positivo para cada cuerpo que gire. Si hay una aceleración lineal, lo más sencillo suele ser elegir un eje positivo en su dirección. Si ya conoce el sentido de  $\alpha_z$ , se simplificarán los cálculos si se elige ése como sentido de rotación positivo.

**EJECUTAR** la solución como sigue:

1. Para cada cuerpo del problema, decida si sufre movimiento de rotación, movimiento de rotación o ambos. Por consiguiente, aplique  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  (como en la sección 5.2),  $\sum \tau_z = I\alpha_z$ , o ambas al cuerpo. Asegúrese de escribir ecuaciones de movimiento aparte para cada cuerpo.
2. Podría haber relaciones *geométricas* entre los movimientos de dos o más cuerpos, como cuando un hilo se desenrolla de una polea gi-

rándola, o cuando un neumático gira sin resbalar (lo que veremos en la sección 10.3). Expréselas en forma algebraica, por lo regular como relaciones entre dos aceleraciones lineales, o una aceleración lineal y una angular.

3. Verifique que el número de ecuaciones coincida con el número de incógnitas. Resuelva las ecuaciones para obtener la o las incógnitas.

**EVALUAR** la respuesta: Compruebe que los signos algebraicos de sus resultados sean lógicos. Por ejemplo, suponga que el problema se refiere a un carrete de hilo. Si se está sacando hilo del carrete, ¡las respuestas *no* deberán decirnos que el carrete gira en el sentido en que el hilo se enrolla! Siempre que pueda, verifique los resultados para casos especiales o valores extremos. Pregúntese: “¿es lógico este resultado?”

### Ejemplo 10.2 Cable que se desenrolla I

La figura 10.9a muestra la situación que analizamos en el ejemplo 9.8 (sección 9.4) usando métodos de energía. Se enrolla un cable varias veces en un cilindro sólido uniforme de 50 kg con diámetro de 0.120 m, que puede girar sobre su eje. Se tira del cable con una fuerza de 9.0 N. Suponiendo que el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar, ¿qué aceleración tiene?

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** La incógnita es la aceleración del cable, que no podemos obtener directamente empleando el método de energía de la sección 9.4 (pues en él no interviene la aceleración). En vez de ello, aplicaremos dinámica rotacional al cilindro. Para obtener la aceleración del cable, buscaremos una relación entre el movimiento del cable y el movimiento del borde del cilindro.

**PLANTEAR:** El cilindro gira en sentido antihorario cuando se tira del cable, así que tomamos como sentido de rotación positivo el antihorario. La fuerza neta que actúa sobre el cilindro debe ser cero porque su centro de masa permanece en reposo (figura 10.9b). El peso (de magnitud  $Mg$ ) y la fuerza normal (de magnitud  $n$ ) ejercidos por los cojinetes del cilindro actúan sobre líneas que pasan por el eje de rotación y, por lo tanto, dichas fuerzas no producen una torca con respecto a ese eje. La única torca alrededor del eje de rotación se debe a la fuerza  $F$ .

**EJECUTAR:** La fuerza  $F$  tiene un brazo de palanca que es igual al radio  $R$  del cilindro:  $l = R = 0.060$  m, así que la torca debido a  $F$  es  $\tau_z =$

$FR$ . (Esta torca es positiva porque tiende a producir una rotación antihoraria.) Por el ejemplo 9.8, el momento de inercia del cilindro en torno al eje de rotación es  $I = \frac{1}{2}MR^2$ . Por lo tanto, la ecuación (10.7) nos da la aceleración *angular* del cilindro:

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{FR}{MR^2/2} = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9.0 \text{ N})}{(50 \text{ kg})(0.060 \text{ m})} = 6.0 \text{ rad/s}^2$$

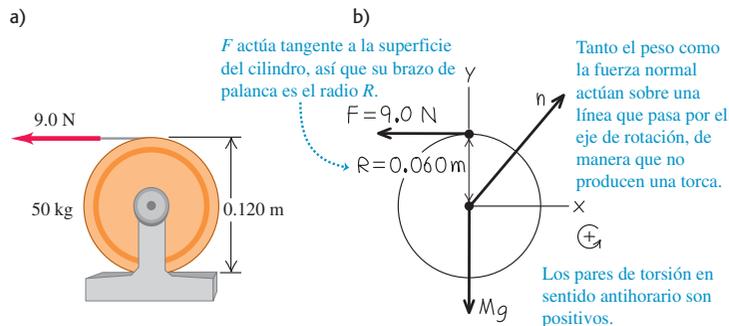
(Verifique que estas unidades sean correctas. Podemos añadir “rad” a nuestro resultado porque el radián es una cantidad adimensional.)

Para obtener la aceleración *lineal* del cable, necesitamos una relación cinemática. En la sección 9.3 señalamos que la aceleración de un cable que se desenrolla de un cilindro es igual a la componente tangencial de aceleración de un punto en la superficie del cilindro donde el cable es tangente a él. Dicha aceleración tangencial está dada por la ecuación (9.14):

$$a_x = R\alpha = (0.060 \text{ m})(6.0 \text{ rad/s}^2) = 0.36 \text{ m/s}^2$$

**EVALUAR:** ¿Puede usar este resultado, junto con una ecuación del capítulo 2, para determinar la rapidez del cable una vez que se ha desenrollado 2.0 m? Inténtelo y compare su resultado con el ejemplo 9.8, donde obtuvimos esta rapidez usando consideraciones de trabajo y energía.

**10.9** a) Cilindro y cable. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre para el cilindro.



### Ejemplo 10.3 Cable que se desenrolla II

Repasemos la situación que analizamos en el ejemplo 9.9 (sección 9.4) usando métodos de energía. Calcule ahora la aceleración del bloque de masa  $m$ .

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Aplicaremos dinámica traslacional al bloque que cuelga y dinámica rotacional al cilindro. Puesto que el cable no resbala sobre el cilindro, existe una relación entre la aceleración lineal del bloque (nuestra incógnita) y la aceleración angular del cilindro.

**PLANTEAR:** En la figura 10.10 esbozamos la situación y dibujamos un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo. Tomamos el sentido de rotación antihorario como positivo para el cilindro, y la dirección hacia abajo de la coordenada  $y$  como positiva para el objeto.

**EJECUTAR:** La segunda ley de Newton aplicada al objeto da

$$\sum F_y = mg + (-T) = ma_y$$

Para el cilindro, el peso  $Mg$  y la fuerza normal  $n$  (ejercida por el cojinete) no tienen torcas con respecto al eje de rotación porque actúan so-

bre líneas que pasan por ese eje, igual que en el ejemplo 10.2. La única torca es la debida a la tensión del cable  $T$ . Aplicando la ecuación (10.7) al cilindro tenemos

$$\sum \tau_z = RT = I\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z$$

Al igual que en el ejemplo 10.2, la aceleración del cable es igual a la aceleración tangencial de un punto en el borde del cilindro que, según la ecuación (9.14), es  $a_y = a_{\text{tan}} = R\alpha_z$ . Usamos esto para sustituir  $R\alpha_z$  por  $a_y$  en la ecuación anterior del cilindro y luego dividimos entre  $R$ ; el resultado es

$$T = \frac{1}{2}Ma_y$$

Ahora sustituimos esta expresión para  $T$  en la segunda ley de Newton para el objeto y despejamos la aceleración  $a_y$ :

$$mg - \frac{1}{2}Ma_y = ma_y$$

$$a_y = \frac{g}{1 + M/2m}$$

**EVALUAR:** La aceleración es positiva (en la dirección hacia abajo) y menor que  $g$ , como debería ser ya que el cable está frenando al objeto. Para saber cuánta fuerza ejerce el cable, sustituimos nuestra expresión para  $a_y$  en la segunda ley de Newton para el objeto, obteniendo así  $T$ :

$$T = mg - ma_y = mg - m\left(\frac{g}{1 + M/2m}\right) = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

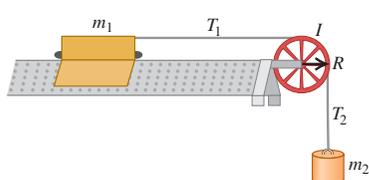
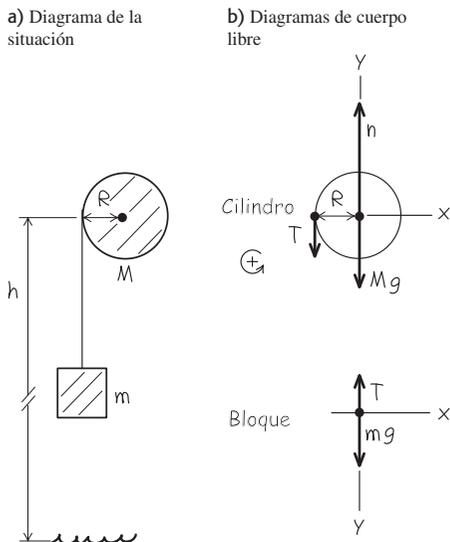
La tensión en el cable *no* es igual al peso  $mg$  del objeto; si así fuera, el objeto no podría acelerar.

Revisemos algunos casos específicos. Si  $M$  es mucho mayor que  $m$ , la tensión es casi igual a  $mg$ , y por lo tanto la aceleración es mucho menor que  $g$ . Si  $M$  es cero,  $T = 0$  y  $a_y = g$ ; entonces, el objeto cae libremente. Si el objeto parte del reposo ( $v_{0y} = 0$ ) a una altura  $h$  sobre el piso, su rapidez  $v_y$  y al golpear el piso está dada por  $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y h = 2a_y h$ , así que  $v_0 = 0$

$$v_y = \sqrt{2a_y h} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

Éste es el mismo resultado que obtuvimos usando consideraciones de energía en el ejemplo 9.9.

**10.10** a) Nuestro diagrama de la situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre para el cilindro y el bloque. Suponemos que el cable tiene masa despreciable.



**Evalúe su comprensión de la sección 10.2** La figura muestra un deslizador de masa  $m_1$  que se mueve sin fricción sobre un riel de aire horizontal, sujeto a un objeto de masa  $m_2$  con un cordón sin masa. La polea tiene radio  $R$  y momento de inercia  $I$  en torno a su eje de rotación. Cuando se suelta, el objeto colgante acelera hacia abajo, el deslizador acelera a la derecha y el cordón gira la polea deslizarse ni estirarse. Ordene, de mayor a menor, las magnitudes de las siguientes fuerzas que actúan durante el movimiento. i) la fuerza de tensión (magnitud  $T_1$ ) en la parte horizontal del cordón; ii) la fuerza de tensión (magnitud  $T_2$ ) en la parte vertical del cordón; iii) el peso  $m_2g$  del objeto colgante.



### 10.3 Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

Podemos extender nuestro análisis de la dinámica del movimiento rotacional a algunos casos en los que se mueve el eje de rotación. En tal caso, el movimiento del cuerpo es de **traslación y rotación combinados**. La clave para entender estas situaciones es la siguiente: cada posible movimiento de un cuerpo rígido puede representarse como una combinación de *movimiento traslacional del centro de masa y rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa*. Esto se cumple aun si el centro de masa se acelera, de modo que no está en reposo en ningún marco inercial. La figura 10.11 ilustra esto para el movimiento de un bastón que se lanza: el centro de masa del bastón sigue una parábola, como si el bastón fuera una partícula situada en el centro de masa. Otros ejemplos de movimientos de traslación y de rotación combinados son una pelota que rueda cuesta abajo y un yoyo que se desenrolla.

#### Traslación y rotación combinadas: Relaciones de energía

Demostrar que el movimiento de un cuerpo rígido siempre puede dividirse, en movimientos independientes de traslación del centro de masa y rotación alrededor del centro de masa, rebasa el alcance de este libro; no obstante, podemos comprobar que es cierto para la *energía cinética* de un cuerpo rígido con movimiento tanto traslacional como rotacional. En este caso, la energía cinética del cuerpo es la suma de una parte  $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$  asociada al movimiento del centro de masa y una parte  $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$  asociada a la rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \tag{10.8}$$

(cuerpo rígido con traslación y rotación)

Para demostrar esto, imaginamos otra vez que el cuerpo rígido se compone de partículas. Consideremos una partícula representativa de masa  $m_i$ , como se muestra en la figura 10.12. Su velocidad  $\vec{v}_i$  relativa a un marco inercial es la suma vectorial de la velocidad  $\vec{v}_{cm}$  del centro de masa y la velocidad  $\vec{v}'_i$  de la partícula *relativa al centro de masa*:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'_i \tag{10.9}$$

La energía cinética  $K_i$  de esta partícula en el marco inercial es  $\frac{1}{2}m_iv_i^2$ , que también podemos expresar como  $\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$ . Sustituyendo la ecuación (10.9) en esto, obtenemos

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}'_i + \vec{v}'_i \cdot \vec{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2}m_i(v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}'_i + v_i'^2) \end{aligned}$$

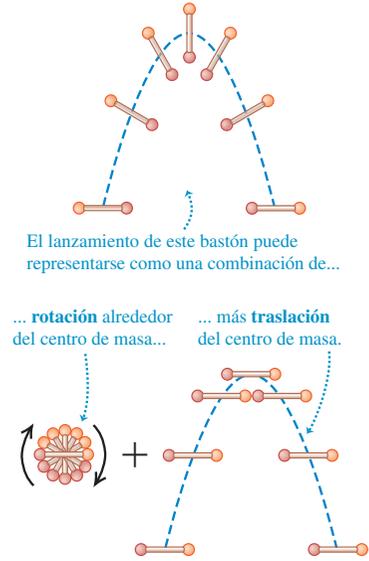
La energía cinética total es la suma  $\sum K_i$  para todas las partículas del cuerpo. Si expresamos los tres términos de la ecuación como sumas individuales:

$$K = \sum K_i = \sum \left( \frac{1}{2}m_iv_{cm}^2 \right) + \sum (m_i\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}'_i) + \sum \left( \frac{1}{2}m_iv_i'^2 \right)$$

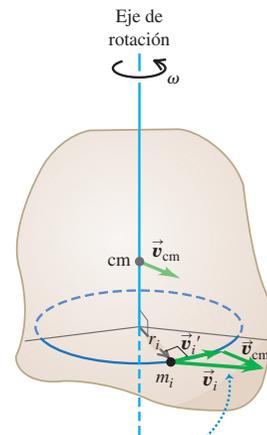
Los primeros dos términos tienen factores comunes que pueden sacarse de la sumatoria:

$$K = \frac{1}{2} \left( \sum m_i \right) v_{cm}^2 + \vec{v}_{cm} \cdot \left( \sum m_i \vec{v}'_i \right) + \sum \left( \frac{1}{2}m_iv_i'^2 \right) \tag{10.10}$$

**10.11** El movimiento de un cuerpo rígido es una combinación de traslación del centro de masa y rotación alrededor de ese centro.



**10.12** Cuerpo rígido con movimiento traslacional y rotacional.



Velocidad  $\vec{v}_i$  de una partícula de un cuerpo rígido en rotación y traslación = (velocidad  $\vec{v}_{cm}$  del centro de masa) más (velocidad  $\vec{v}'_i$  de la partícula relativa al centro de masa).

Aquí viene la recompensa a nuestro esfuerzo. En el primer término,  $\sum m_i$  es la masa total  $M$ . El segundo término es cero porque  $\sum m_i \vec{v}_i'$  es  $M$  multiplicada por la velocidad del centro de masa *relativa al centro de masa*, que es cero por definición. El último término es la suma de las energías cinéticas de las partículas, calculada usando sus rapidezces con respecto al centro de masa; ésta es la energía cinética de rotación alrededor de ese centro. Siguiendo los mismos pasos que nos llevaron a la ecuación (9.17) para la energía cinética rotacional de un cuerpo rígido, podemos escribir este último término como  $\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$ , donde  $I_{cm}$  es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa y  $\omega$  es la rapidez angular. Así, la ecuación (10.10) se convierte en la ecuación (10.8):

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$



7.11 Carrera entre un bloque y un disco

### Rodamiento sin deslizamiento

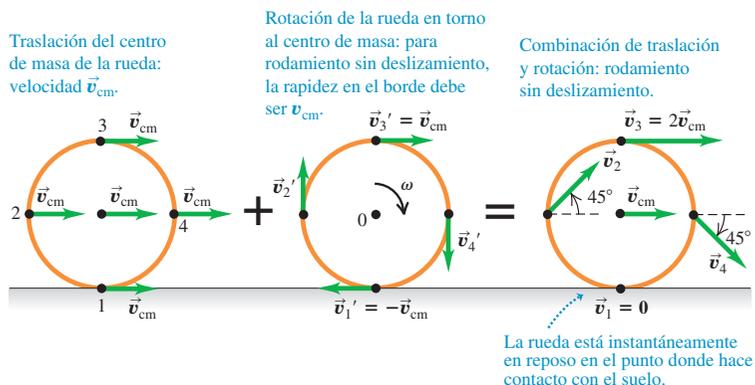
Un caso importante de traslación y rotación combinadas es el de **rodar sin deslizar**, como el movimiento de la rueda que se muestra en la figura 10.13. La rueda es simétrica, así que su centro de masa está en su centro geométrico. Visualizamos el movimiento en un marco de referencia inercial, en el cual la superficie sobre la que se rueda está en reposo. Aquí, el punto de la rueda que toca la superficie debe estar instantáneamente *en reposo* para que no resbale. Por lo tanto, la velocidad  $\vec{v}_1'$  del punto de contacto, relativa al centro de masa, debe tener la misma magnitud pero dirección opuesta que la velocidad del centro de masa  $\vec{v}_{cm}$ . Si el radio de la rueda es  $R$  y su rapidez angular alrededor del centro de masa es  $\omega$ , la magnitud de  $\vec{v}_1'$  es  $R\omega$ ; por ello, debemos tener

$$v_{cm} = R\omega \quad (\text{condición para rodar sin resbalar}) \quad (10.11)$$

Como muestra la figura 10.13, la velocidad de un punto en la rueda es la suma vectorial de la velocidad del centro de masa y la velocidad del punto relativa al centro de masa. Así, mientras el punto 1 (el de contacto) está momentáneamente en reposo, el punto 3 en la parte de arriba se mueve hacia adelante con el *doble de la rapidez* del centro de masa, y los puntos 2 y 4 a los lados tienen velocidades a  $45^\circ$  con la horizontal.

En un instante dado, podemos pensar que la rueda gira alrededor de un “eje de rotación instantáneo” que pasa por el punto de contacto con el suelo. La velocidad angular  $\omega$  es la misma para este eje que para un eje que pasa por el centro de masa; un observador en el centro de masa ve que el borde da el mismo número de revoluciones por segundo, como un observador en el borde ve que el centro de masa da alrededor de él. Si vemos así el movimiento de la rueda de la figura 10.13, la energía cinética de la rueda es  $K = \frac{1}{2} I_1 \omega^2$ , donde  $I_1$  es el momento de inercia de la rueda alrededor de un

**10.13** El movimiento de una rueda es la suma del movimiento traslacional del centro de masa y el movimiento rotacional de la rueda alrededor del centro de masa.



eje que pasa por el punto 1. Sin embargo, por el teorema de los ejes paralelos, ecuación (9.19),  $I_1 = I_{cm} + MR^2$ , donde  $M$  es la masa total de la rueda e  $I_{cm}$  es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa. Usando la ecuación (10.11), la energía cinética de la rueda es

$$K = \frac{1}{2}I_1\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

que es igual a la ecuación (10.8).

**CAUIDADO Rodamiento sin deslizamiento** Observe que es importante tener en cuenta que la relación  $v_{cm} = R\omega$  se cumple *únicamente* si hay rodamiento sin deslizamiento. Cuando un automóvil de “arrancones” comienza a moverse, los neumáticos traseros están girando con gran rapidez mientras que el vehículo casi no se mueve, así que  $R\omega$  es mayor que  $v_{cm}$  (figura 10.14). Si el conductor aplica los frenos con demasiada fuerza y el coche derrapa, los neumáticos casi no girarán y  $R\omega$  será menor que  $v_{cm}$ .

**10.14** El humo que se alza de los neumáticos traseros de este auto de arrancones indica que los neumáticos están resbalando sobre el pavimento, así que  $v_{cm}$  no es igual a  $R\omega$ .



Si un cuerpo rígido cambia de altura al moverse, también debemos considerar la energía potencial gravitacional. Como vimos en la sección 9.4, la energía potencial gravitacional asociada a cualquier cuerpo extendido de masa  $M$ , rígido o no, es la misma que si sustituimos el cuerpo por una partícula de masa  $M$  situada en el centro de masa del cuerpo. Esto es,

$$U = Mgy_{cm}$$

### Ejemplo 10.4 Rapidez de un yoyo burdo

Se hace un yoyo burdo enrollando un cordel varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa  $M$  y radio  $R$  (figura 10.15). Se sostiene el extremo del cordel fijo mientras se suelta el cilindro desde el reposo. El cordel se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Use consideraciones de energía para calcular la rapidez  $v_{cm}$  del centro de masa del cilindro sólido después de caer una distancia  $h$ .

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** El extremo superior del cordel está fijo, no se tira de él hacia arriba, así que la mano de la figura 10.15 no efectúa trabajo sobre el sistema del cordel y cilindro. Al igual que en el ejemplo 9.8 (sección 9.4), hay fricción entre el cordel y el cilindro pero, como el cordel no resbala sobre la superficie del cilindro, no se pierde energía mecánica y podemos usar la conservación de la energía mecánica.

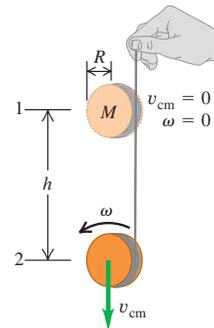
**PLANTEAR:** Las energías potenciales son  $U_1 = Mgh$  y  $U_2 = 0$ . El cordel no tiene energía cinética porque no tiene masa. La energía cinética inicial del cilindro es  $K_1 = 0$ , y la energía cinética final  $K_2$  está dada por la ecuación (10.8). El momento de inercia es  $I = \frac{1}{2}MR^2$ , y  $\omega = v_{cm}/R$  porque el cilindro no resbala en el cordel.

**EJECUTAR:** Utilizando la ecuación (10.8), la energía cinética en el punto 2 es

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}Mv_{cm}^2 \end{aligned}$$

La energía cinética es  $1\frac{1}{2}$  veces mayor que si el yoyo estuviera cayendo a una rapidez  $v_{cm}$  sin girar. Dos tercios de la energía cinética total

**10.15** Cálculo de la rapidez de un yoyo burdo.



( $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ ) son traslacionales y un tercio ( $\frac{1}{4}Mv_{cm}^2$ ) es rotacional. Entonces, la conservación de la energía

$$\begin{aligned} K_1 + U_1 &= K_2 + U_2 \\ 0 + Mgh &= \frac{3}{4}Mv_{cm}^2 + 0 \end{aligned}$$

y

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

**EVALUAR:** Ésta es menor que la rapidez  $\sqrt{2gh}$  que tendría un objeto que se deja caer, porque conforme el cilindro cae un tercio de la energía potencial liberada aparece como energía cinética rotacional.

### Ejemplo 10.5 Carrera de cuerpos rodantes

En la demostración de una conferencia de física, un profesor “pone a competir” diversos cuerpos rígidos redondos, soltándolos del reposo desde arriba de un plano inclinado (figura 10.16). ¿Qué forma debe tener un cuerpo para llegar a la base primero?

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** De nuevo, podemos usar conservación de la energía porque los cuerpos rígidos no resbalan sobre el plano inclinado. La fricción cinética no efectúa trabajo si los cuerpos ruedan sin resbalar. También podemos despreciar los efectos de la *fricción de rodamiento*, presentada en la sección 5.3, si los cuerpos y la superficie sobre la que ruedan son perfectamente rígidos. (Más adelante explicaremos por qué.)

**PLANTEAR:** Cada cuerpo parte del reposo desde arriba de una pendiente de altura  $h$ , así que  $K_1 = 0$ ,  $U_1 = Mgh$  y  $U_2 = 0$ . La energía cinética en la base del plano está dada por la ecuación (10.8). Si los cuerpos ruedan sin resbalar,  $\omega = v_{\text{cm}}/R$ . Los momentos de inercia de

todos los cuerpos redondos de la tabla 9.2 (alrededor de ejes que pasan por su centro de masa) pueden expresarse como  $I_{\text{cm}} = cMR^2$ , donde  $c$  es un número puro menor o igual que 1 que depende de la forma del cuerpo. Nuestro objetivo es hallar el valor de  $c$  que proporciona al cuerpo la más alta rapidez en la base del plano inclinado.

**EJECUTAR:** Por la conservación de la energía,

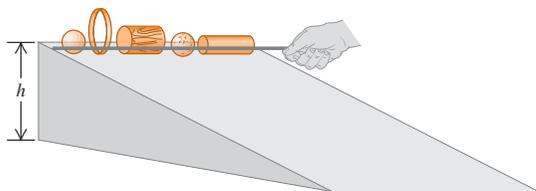
$$\begin{aligned} K_1 + U_1 &= K_2 + U_2 \\ 0 + Mgh &= \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{\text{cm}}}{R}\right)^2 + 0 \\ &= \frac{1}{2}(1+c)Mv_{\text{cm}}^2 \end{aligned}$$

así que la rapidez en la base de la pendiente es

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

**EVALUAR:** Este resultado es sorprendente; la rapidez no depende de la masa  $M$  del cuerpo ni de su radio  $R$ . Todos los cilindros sólidos uniformes tienen la misma rapidez abajo, aun si sus masas y sus radios son diferentes, porque tienen la misma  $c$ . Todas las esferas sólidas tienen la misma rapidez, etcétera. Cuanto menor sea  $c$ , mayor será la rapidez del cuerpo en la base (y en cualquier punto de la bajada). Los cuerpos con  $c$  pequeña siempre vencen a aquellos con  $c$  grande, porque menos de su energía cinética se dedica a rotación y más a traslación. Si leemos los valores de  $c$  de la tabla 9.2, vemos que el orden de llegada es: cualquier esfera sólida, cualquier cilindro sólido, cualquier esfera hueca de pared delgada y cualquier cilindro hueco de pared delgada.

### 10.16 ¿Cuál cuerpo baja más rápido y por qué?



**10.17** El eje de una rueda de bicicleta pasa por el centro de masa de la rueda y es un eje de simetría. Por lo tanto, la rotación de la rueda está descrita por la ecuación (10.13), siempre que la bicicleta no dé la vuelta ni se incline hacia un lado (lo cual alteraría la orientación del eje).



### Traslación y rotación combinadas: Dinámica

También podemos analizar los movimientos traslacional y rotacional combinados de un cuerpo rígido desde la perspectiva de la dinámica. En la sección 8.5 mostramos que, para un cuerpo de masa total  $M$ , la aceleración  $\vec{a}_{\text{cm}}$  del centro de masa es igual a la de una masa puntual  $M$  sobre la que actúan todas las fuerzas externas a las que está sujeto el cuerpo:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}} \quad (10.12)$$

El movimiento rotacional alrededor del centro de masa se describe mediante el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, ecuación (10.7):

$$\sum \tau_z = I_{\text{cm}}\alpha_z \quad (10.13)$$

donde  $I_{\text{cm}}$  es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y  $\sum \tau_z$  incluye todas las torcas externas con respecto a este eje. No es evidente de inmediato que la ecuación (10.13) sea aplicable al movimiento de un cuerpo rígido en traslación; después de todo, nuestra deducción de  $\sum \tau_z = I\alpha_z$  en la sección 10.2 dio por hecho que el eje de rotación era estacionario. No obstante, la ecuación (10.13) es válida *aún si el eje de rotación se mueve*, siempre y cuando se satisfagan estas condiciones:

1. El eje que pasa por el centro de masa debe ser un eje de simetría.
2. El eje no debe cambiar de dirección.

Estas condiciones se satisfacen en muchos tipos de rotación (figura 10.17). Cabe señalar que, en general, este eje de rotación móvil *no* está en reposo en un marco de referencia inercial.

Ahora podemos resolver problemas de dinámica donde intervengan cuerpos rígidos con movimientos traslacional y rotacional simultáneos, siempre que el eje de rotación

cumpla las dos condiciones anteriores. La Estrategia de resolución de problemas 10.1 (sección 10.2) es igualmente útil aquí, y le recomendamos repasarla. Tenga presente que, si un cuerpo tiene movimientos traslacional y rotacional al mismo tiempo, necesitamos dos ecuaciones de movimiento independientes *para el mismo cuerpo*. Una de éstas, la ecuación (10.12), describe la traslación del centro de masa. La otra, ecuación (10.13), describe la rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa.

### Ejemplo 10.6 Aceleración de un yoyo burdo

Para el yoyo burdo del ejemplo 10.4 (figura 10.18a), calcule la aceleración hacia abajo del cilindro y la tensión en el cordel.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** La figura 10.18b es un diagrama de cuerpo libre del yoyo, donde se indican las direcciones de las coordenadas positivas. Con estas coordenadas, las incógnitas son  $a_{\text{cm-y}}$  y  $T$ .

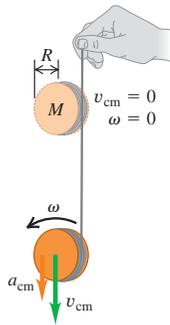
**PLANTEAR:** Usaremos las ecuaciones (10.12) y (10.13), junto con la condición que el cordel no resbale en el cilindro.

**EJECUTAR:** La ecuación para la traslación del centro de masa es

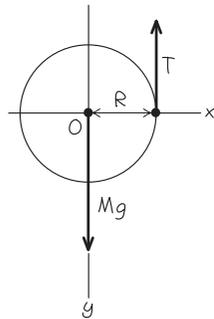
$$\sum F_y = Mg + (-T) = Ma_{\text{cm-y}} \quad (10.14)$$

**10.18** Dinámica de un yoyo burdo (véase la figura 10.15).

a) El yoyo



b) Diagrama de cuerpo libre del yoyo



El momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa es  $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$ . Sólo la fuerza de tensión tiene una torca con respecto a dicho eje, así que la ecuación para la rotación alrededor de él es

$$\sum \tau_z = TR = I_{\text{cm}}\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z \quad (10.15)$$

El cordel se desenrolla sin resbalar, así que  $v_{\text{cm-z}} = R\omega_z$  por la ecuación (10.11); la derivada de esta relación con respecto al tiempo es

$$a_{\text{cm-y}} = R\alpha_z \quad (10.16)$$

Ahora usamos la ecuación (10.16) para eliminar  $\alpha_z$  de la ecuación (10.15) y despejamos las ecuaciones (10.14) y (10.15) simultáneamente para obtener  $T$  y  $a_{\text{cm-y}}$ . Estos resultados son sencillísimos:

$$a_{\text{cm-y}} = \frac{2}{3}g \quad T = \frac{1}{3}Mg$$

Usando la fórmula de aceleración constante  $v_{\text{cm-y}}^2 = v_{\text{cm-0y}}^2 + 2a_{\text{cm-y}}h$ , podemos demostrar que la rapidez del yoyo después de caer una distancia  $h$  es  $v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$ , como determinamos en el ejemplo 10.4.

**EVALUAR:** Desde el punto de vista de la dinámica, la fuerza de tensión es fundamental: hace que la aceleración del yoyo sea menor que  $g$ , y su torca hace girar al yoyo. No obstante, cuando analizamos esta situación usando métodos de energía en el ejemplo 10.4, ¡no tuvimos que considerar la tensión! Puesto que no se perdió ni se ganó energía mecánica, desde el punto de vista energético el cordel sólo es importante porque ayuda a convertir parte de la energía potencial gravitacional en energía cinética rotacional.

### Ejemplo 10.7 Aceleración de una esfera rodante

Una bola de bolos sólida rueda sin resbalar por la rampa de retorno junto a la mesa de boliche (figura 10.19a). La rampa forma un ángulo  $\beta$  con la horizontal. ¿Qué aceleración tiene la bola y cuál es la magnitud de la fuerza de fricción sobre ésta? Trate la bola como esfera sólida uniforme, despreciando los agujeros.

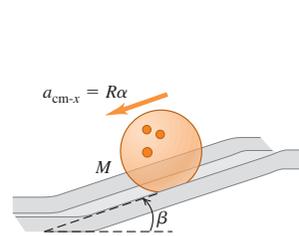
#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Las incógnitas son la aceleración del centro de masa de la bola y la magnitud de la fuerza de fricción. El diagrama de cuerpo libre de la figura 10.19b muestra que sólo la fuerza de fricción ejerce una torca en torno al centro de masa.

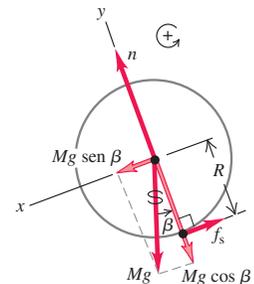
**PLANTEAR:** Al igual que en el ejemplo 10.6, usaremos la ecuación (10.12) para describir el movimiento traslacional; y la ecuación (10.13), para el movimiento rotacional.

**10.19** Una bola de bolos baja rodando una rampa.

a) La bola de bolos



b) Diagrama de cuerpo libre de la bola de bolos



continúa

**EJECUTAR:** De la tabla 9.2, el momento de inercia de una esfera sólida es  $I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}MR^2$ . Las ecuaciones de movimiento para traslación y para rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa son, respectivamente,

$$\sum F_x = Mg \sin \beta + (-f) = Ma_{\text{cm-x}} \quad (10.17)$$

$$\sum \tau_z = fR = I_{\text{cm}}\alpha_z = \left(\frac{2}{5}MR^2\right)\alpha_z \quad (10.18)$$

Si la bola rueda sin resbalar, tenemos la misma relación cinemática  $a_{\text{cm-x}} = R\alpha_z$  que en el ejemplo 10.6. Usamos esto para eliminar  $\alpha_z$  de la ecuación (10.18):

$$fR = \frac{2}{5}MRa_{\text{cm-x}}$$

Ésta y la ecuación (10.17) son dos ecuaciones para dos incógnitas,  $a_{\text{cm-x}}$  y  $f$ . Despejamos  $f$  de la ecuación (10.17), sustituimos en la ecuación anterior para eliminar  $f$  y luego despejamos  $a_{\text{cm-x}}$  para obtener

$$a_{\text{cm-x}} = \frac{5}{7}g \sin \beta$$

La aceleración es  $\frac{5}{7}$  de lo que sería si la bola pudiera deslizarse sin fricción por la rampa, como el trineo del ejemplo 5.10 (sección 5.2). Por último, sustituimos esto en la ecuación (10.17) y despejamos  $f$ :

$$f = \frac{2}{7}Mg \sin \beta$$

**EVALUAR:** Como la bola no resbala en el punto de contacto instantáneo con la rampa,  $f$  es una fuerza de fricción *estática*; evita el deslizamiento y da a la bola su aceleración angular. Podemos deducir una ecuación para el coeficiente de fricción estática  $\mu_s$  mínimo necesario para evitar el deslizamiento. La fuerza normal es  $n = Mg \cos \beta$ . La fuerza máxima de fricción estática es  $\mu_s n$ , así que el coeficiente de fricción debe ser de, por lo menos,

$$\mu_s = \frac{f}{n} = \frac{\frac{2}{7}Mg \sin \beta}{Mg \cos \beta} = \frac{2}{7} \tan \beta$$

Si el plano no está muy inclinado,  $\beta$  es pequeña, y no se requiere un valor de  $\mu_s$  grande para evitar el deslizamiento. Al aumentar el ángulo, aumenta el valor requerido de  $\mu_s$ , como indicaría la intuición. Si la bola comienza a resbalar, las ecuaciones (10.17) y (10.18) siguen siendo válidas; pero ya no se cumple que  $v_{\text{cm-x}} = R\omega_z$  y  $a_{\text{cm-x}} = R\alpha_z$ ; sólo tenemos dos ecuaciones para tres incógnitas ( $a_{\text{cm-x}}$ ,  $\alpha_z$  y  $f$ ). La resolución del problema de rodamiento *con* deslizamiento requiere considerar la fricción *cinética* (véase el problema de desafío 10.101).

Si la bola desciende una distancia vertical  $h$  al bajar por la rampa, su desplazamiento sobre la rampa es  $h/\sin \beta$ . El lector deberá ser capaz de demostrar que la rapidez de la bola en la base de la rampa sería  $v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{10}{5}gh}$ , que es el resultado que obtuvimos en el ejemplo 10.5 con  $c = \frac{2}{5}$ .

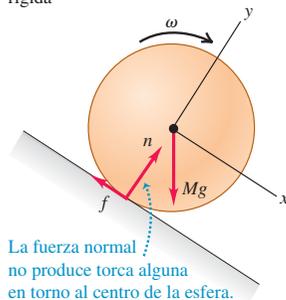
Si la bola rodara de *subida*, la fuerza de fricción también estaría dirigida pendiente arriba, como en la figura 10.19b. ¿Sabe usted por qué?

## Fricción de rodamiento

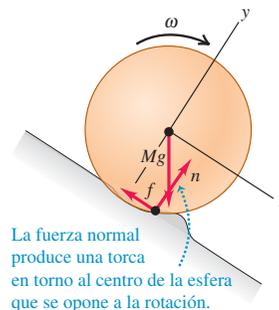
En el ejemplo 10.5 dijimos que podemos despreciar la fricción de rodamiento, si tanto el cuerpo como la superficie sobre la que rueda son perfectamente rígidos. En la figura 10.20a una esfera perfectamente rígida baja rodando una pendiente perfectamente rígida. La línea de acción de la fuerza normal pasa por el centro de la esfera, así que la torca es cero; no hay deslizamiento en el punto de contacto, así que la fricción no efectúa trabajo. La figura 10.20b muestra una situación más realista donde la superficie “se amontona” delante de la esfera y ésta rueda en una zanja poco profunda. Debido a tales deformaciones, las fuerzas de contacto sobre la esfera ya no actúan en un solo punto, sino en un área, concentrándose en el frente de la esfera como se indica. En consecuencia, la fuerza normal ejerce ahora una torca que se opone a la rotación. Además, hay cierto deslizamiento de la esfera en la superficie debido a la deformación, causando pérdida de energía mecánica. La combinación de estos dos efectos es el fenómeno de *fricción de rodamiento*, que también ocurre si el cuerpo que rueda es deformable, como el neumático de un automóvil. Es común que el cuerpo que rueda y la superficie tengan la suficiente rigidez como para despreciar la fricción de rodamiento, y esto es lo que hemos hecho en los ejemplos de la sección.

**10.20** Rodamiento descendente sobre a) una superficie perfectamente rígida y b) una superficie deformable. En el inciso b), la deformación se muestra muy exagerada.

a) Esfera perfectamente rígida que baja rodando por una superficie perfectamente rígida



b) Esfera rígida que rueda sobre una superficie deformable



**MP**  
**Evalúe su comprensión de la sección 10.3** Suponga que el cilindro sólido que utilizó como yoyo en el ejemplo 10.6 se remplace con un cilindro hueco de los mismos masa y radio. a) La aceleración del yoyo i) aumentará, ii) disminuirá o iii) permanecerá igual? b) La tensión en el cordel i) aumentará, ii) disminuirá o iii) permanecerá igual?

## 10.4 Trabajo y potencia en movimiento rotacional

Cuando pedaleamos una bicicleta, aplicamos fuerzas a un cuerpo en rotación y efectuamos trabajo sobre él. Algo similar ocurre en otras situaciones de la vida real, como el eje de un motor que gira, e impulsa una herramienta de potencia o un vehículo. Podemos expresar el trabajo en términos de la torca y el desplazamiento angular.

Suponga que una fuerza tangencial  $\vec{F}_{\text{tan}}$  actúa en el borde de un disco pivotado; por ejemplo, una niña que corre empujando un carrusel sencillo (figura 10.21a). La rueda gira un ángulo infinitesimal  $d\theta$  alrededor de un eje fijo durante un tiempo infinitesimal  $dt$  (figura 10.21b). El trabajo  $dW$  efectuado por  $\vec{F}_{\text{tan}}$  mientras un punto del borde se mueve una distancia  $ds$  es  $dW = F_{\text{tan}} ds$ . Si  $d\theta$  se mide en radianes, entonces,  $ds = R d\theta$  y

$$dW = F_{\text{tan}} R d\theta$$

Ahora  $F_{\text{tan}} R$  es la torca  $\tau_z$  debido a la fuerza  $\vec{F}_{\text{tan}}$ , así que

$$dW = \tau_z d\theta \tag{10.19}$$

El trabajo total  $W$  efectuado por la torca durante un desplazamiento angular de  $\theta_1$  a  $\theta_2$  es

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z d\theta \quad (\text{trabajo efectuado por una torca}) \tag{10.20}$$

Si la torca es *constante* y el cambio de ángulo es finito  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ ,

$$W = \tau_z (\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta \quad (\text{trabajo efectuado por una torca constante}) \tag{10.21}$$

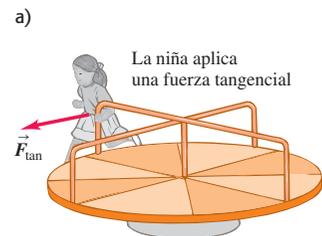
El trabajo efectuado por una torca *constante* es el producto de la torca y el desplazamiento angular. Si la torca se expresa en  $(\text{N} \cdot \text{m})$  y el desplazamiento angular en radianes, el trabajo está en joules. La ecuación (10.21) es el análogo rotacional de la ecuación (6.1),  $W = Fs$ , y la ecuación (10.20) es el análogo de la ecuación (6.7),  $W = \int F_x dx$ , para el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento rectilíneo.

Si la fuerza de la figura 10.21 tuviera una componente axial (paralela al eje de rotación) o radial (dirigida hacia el eje o alejándose de éste), dicha componente no efectuaría trabajo, porque el desplazamiento del punto de aplicación sólo tiene componente tangencial. Una componente de fuerza axial o radial tampoco contribuiría a la torca alrededor del eje de rotación, así que las ecuaciones (10.20) y (10.21) son correctas para *cualquier* fuerza, independientemente de sus componentes.

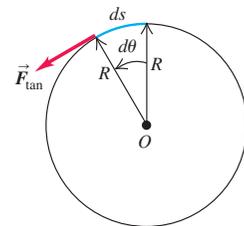
Si una torca efectúa trabajo sobre un cuerpo rígido que gira, la energía cinética cambia en una cantidad igual a ese trabajo. Podemos demostrar esto usando exactamente el mismo procedimiento que en las ecuaciones (6.11) a (6.13) para la energía cinética traslacional una partícula. Sea  $\tau_z$  la torca neta sobre el cuerpo, de modo que, por la ecuación (10.7),  $\tau_z = I\alpha_z$ , suponiendo que el cuerpo es rígido y, por lo tanto, tiene momento de inercia  $I$  constante. Transformamos el integrando de la ecuación (10.20) en una integral sobre  $\omega_z$  así:

$$\tau_z d\theta = (I\alpha_z) d\theta = I \frac{d\omega_z}{dt} d\theta = I \frac{d\theta}{dt} d\omega_z = I\omega_z d\omega_z$$

**10.21** Una fuerza tangencial aplicada a un cuerpo en rotación efectúa trabajo.



b) Vista superior del carrusel



**10.22** La energía cinética rotacional de un aerogenerador es igual al trabajo total efectuado para ponerlo a girar.



Dado que  $\tau_z$  es la torca total, la integral de la ecuación (10.20) es el trabajo *total* efectuado sobre el cuerpo rígido en rotación. Así, la ecuación se convierte en

$$W_{\text{tot}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z d\omega_z = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \quad (10.22)$$

El cambio de energía cinética rotacional de un cuerpo *rígido* es igual al trabajo efectuado por fuerzas ejercidas desde afuera del cuerpo (figura 10.22). Esta ecuación es análogo a la ecuación (6.13), el teorema trabajo-energía para una partícula.

¿Qué hay con la *potencia* asociada al trabajo efectuado por una torca sobre un cuerpo en rotación? Si dividimos ambos miembros de la ecuación (10.19) entre el intervalo  $dt$  durante el que se da el desplazamiento angular:

$$\frac{dW}{dt} = \tau_z \frac{d\theta}{dt}$$

Sin embargo,  $dW/dt$  es la rapidez con que se efectúa trabajo, o *potencia*  $P$ , y  $d\theta/dt$  es velocidad angular  $\omega_z$ , así que

$$P = \tau_z \omega_z \quad (10.23)$$

Si una torca  $\tau_z$  (con respecto al eje de rotación) actúa sobre un cuerpo que gira con velocidad angular  $\omega_z$ , su potencia (rapidez con que efectúa trabajo) es el producto de  $\tau_z$  y  $\omega_z$ . Esto es el análogo de la relación  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$  que desarrollamos en la sección 6.4 para el movimiento de partículas.

### Ejemplo 10.8 Potencia de motores y torca

La potencia desarrollada por el motor de un automóvil se anuncia como 200 hp a 6000 rpm. Calcule la torca correspondiente.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Este ejemplo utiliza la relación entre potencia, velocidad angular y la torca (la incógnita).

**PLANTEAR:** Nos dan la potencia desarrollada  $P$  y la velocidad angular  $\omega_z$ , así que podemos obtener la torca con la ecuación (10.23).

**EJECUTAR:** Primero debemos convertir la potencia a watts, y la velocidad angular a rad/s:

$$P = 200 \text{ hp} = 200 \text{ hp} \left( \frac{746 \text{ W}}{1 \text{ hp}} \right) = 1.49 \times 10^5 \text{ W}$$

$$\begin{aligned} \omega_z &= 6000 \text{ rev/min} = \left( \frac{6000 \text{ rev}}{1 \text{ min}} \right) \left( \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) \\ &= 628 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Por la ecuación (10.23),

$$\tau_z = \frac{P}{\omega_z} = \frac{1.49 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m/s}}{628 \text{ rad/s}} = 237 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**EVALUAR:** Podríamos aplicar esta torca usando una llave de tuercas de 0.25 m de largo y aplicando una fuerza de 948 N (213 lb) al extremo de su mango. ¿Podría el lector hacerlo?

### Ejemplo 10.9 Cálculo de potencia a partir de la torca

Un motor eléctrico ejerce una torca constante de  $10 \text{ N} \cdot \text{m}$  sobre una piedra de amolar montada en un eje. El momento de inercia de la piedra es de  $2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  y el sistema parte del reposo. Calcule el trabajo efectuado por el motor en 8.0 segundos y la energía cinética al final de este lapso. ¿Qué potencia media desarrolló el motor?

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Puesto que la torca es constante, la piedra de amolar tiene una aceleración angular constante  $\alpha_z$ . Si podemos calcular el valor de  $\alpha_z$ , obtendremos el ángulo  $\Delta\theta$  que la piedra gira en 8 s [lo cual, por la ecuación (10.21), nos da el trabajo efectuado  $W$ ] y la velocidad angular  $\omega_z$  en ese momento (que nos da la energía cinética  $K$ ). Podemos

obtener la potencia media  $P_{\text{med}}$  dividiendo el trabajo efectuado entre el tiempo.

**PLANTEAR:** Usamos la versión rotacional de la segunda ley de Newton,  $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$ , para obtener la aceleración angular  $\alpha_z$ . Entonces usamos las ecuaciones de cinemática de la sección 9.2 para calcular  $\Delta\theta$  y  $\omega_z$  y a partir de estos valores calcular  $W$ ,  $K$  y  $P_{\text{med}}$ .

**EJECUTAR:** Tenemos  $\Sigma\tau_z = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$  (la única torca que actúa se debe al motor) e  $I = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , así que, por  $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$ , la aceleración angular es de  $5.0 \text{ rad/s}^2$ . Por la ecuación (9.11), el ángulo total que el sistema gira en 8.0 s es

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_z t^2 = \frac{1}{2}(5.0 \text{ rad/s}^2)(8.0 \text{ s})^2 = 160 \text{ rad}$$