ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS

9

?Todos los segmentos del aspa de una hélice en rotación de un helicóptero tienen el mismo valor de la velocidad y aceleración angulares? En comparación con un segmento dado de la aspa, ¿cuántas veces mayor será la rapidez lineal de un segundo segmento si se duplica su distancia con respecto al eje de rotación? ¿Cuántas veces mayor será su aceleración lineal?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir la rotación de un cuerpo rígido en términos de coordenada angular, velocidad angular y aceleración angular.
- Cómo analizar la rotación de un cuerpo rígido cuando la aceleración angular es constante.
- Cómo relacionar la rotación de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración lineales de un punto en el cuerpo.
- El significado del momento de inercia del cuerpo en torno a un eje y cómo se relaciona con la energía cinética rotacional.
- Cómo calcular el momento de inercia de varios cuerpos.

¿Qué tienen en común los movimientos de un disco compacto, una rueda de la fortuna (sillas voladoras), una sierra circular y un ventilador de techo? Ninguno puede representarse adecuadamente como un *punto* en movimiento; todos implican un cuerpo que *gira* sobre un eje que está fijo en algún marco de referencia inercial.

La rotación se da en todos los niveles, desde el movimiento de los electrones en los átomos hasta los movimientos de las galaxias enteras. Necesitamos desarrollar métodos generales para analizar el movimiento de un cuerpo en rotación. En este capítulo y en el siguiente consideraremos los cuerpos con tamaño y forma definidos que, en general, pueden tener movimiento rotacional además de traslacional.

Los cuerpos reales llegan a ser muy complejos; las fuerzas que actúan sobre ellos pueden deformarlos: estirarlos, torcerlos y aplastarlos. Por el momento ignoraremos tales deformaciones y supondremos que el cuerpo tiene forma y tamaño perfectamente definidos e inmutables. Llamamos a este modelo idealizado **cuerpo rígido**. Este capítulo y el siguiente tratan principalmente del movimiento rotacional de un cuerpo rígido.

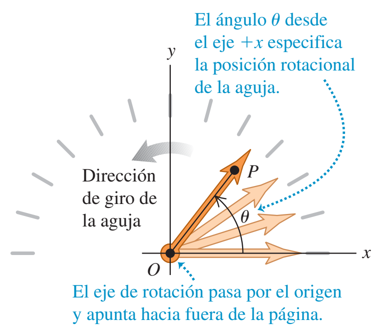
Comenzaremos con el lenguaje de la cinemática para *describir* el movimiento rotacional. Luego veremos la energía cinética de la rotación, la clave para usar los métodos de energía en el movimiento rotacional. En el capítulo 10 deduciremos los principios dinámicos que relacionan las fuerzas sobre un cuerpo con su movimiento rotacional.

9.1 Velocidad y aceleración angulares

Al analizar el movimiento rotacional, pensemos primero en un cuerpo rígido que gira sobre un *eje fijo*, es decir, un eje que está en reposo en algún marco de referencia inercial y no cambia de dirección relativa al marco. El cuerpo podría ser una flecha de motor, un trozo de asado en una brocheta o un carrusel.

La figura 9.1 muestra un cuerpo rígido (en este caso, la aguja indicadora de un velocímetro) que gira sobre un eje fijo, el cual pasa por el punto O y es perpendicular al

9.1 Aguja de velocímetro (un ejemplo de cuerpo rígido) que gira en sentido antihorario sobre un eje fijo.



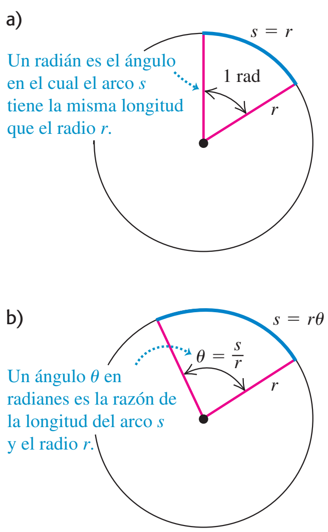
plano del diagrama, que llamamos plano xy. Una forma de describir la rotación de este cuerpo sería elegir un punto específico P del cuerpo y seguir la pista a sus coordenadas x y y. Este método no es el más conveniente, pues requiere dos números (las dos coordenadas) para especificar la posición rotacional del cuerpo. En vez de ello, observamos que la línea OP está fija en el cuerpo y gira con él. El ángulo θ que esta línea forma con el eje $+x$ describe la posición rotacional del cuerpo; usaremos sólo esta cantidad θ como *coordenada* de rotación.

La coordenada angular θ de un cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo puede ser positiva o negativa. Si hacemos que los ángulos positivos se midan en sentido antihorario desde el eje $+x$, entonces el ángulo θ en la figura 9.1 es positivo. En cambio, si elegimos la dirección horaria como la rotación positiva, θ será negativo en la figura 9.1. Cuando consideramos el movimiento rectilíneo de una partícula, fue indispensable especificar la dirección del desplazamiento positivo sobre esa línea; al analizar la rotación sobre un eje fijo, es igualmente indispensable especificar la dirección de rotación positiva.

Al describir un movimiento rotacional, la forma más natural de medir el ángulo θ no es en grados, sino en **radianes**. Como se muestra en la figura 9.2a, un radián (1 rad) es el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco cuya longitud es igual al radio del círculo. En la figura 9.2b, un ángulo θ es subtendido por un arco de longitud s en un círculo de radio r. El valor de θ (en radianes) es igual a s entre r:

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{o bien,} \qquad s = r\theta \tag{9.1}$$

9.2 Medición de ángulos en radianes.



Un ángulo en radianes es la razón de dos longitudes, así que es un número puro, sin dimensiones. Si $s = 3.0$ m y $r = 2.0$ m, entonces $\theta = 1.5$, pero a menudo escribiremos esto como 1.5 rad para distinguirlo de un ángulo medido en grados o revoluciones.

La circunferencia de un círculo (es decir, la longitud del arco que rodea el círculo) es 2π veces el radio, así que hay 2π (unos 6.283) radianes en una revolución completa (360°). Por lo tanto,

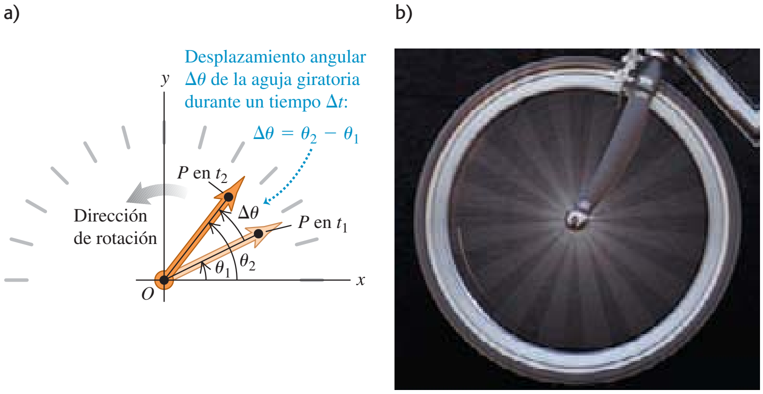
$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57.3°$$

Asimismo, $180° = \pi$ rad, $90° = \pi/2$ rad, etcétera. Si insistiéramos en medir θ en grados, tendríamos que haber incluido un factor más $(2\pi/360)$ en el lado derecho de $s = r\theta$ en la ecuación (9.1). Al medir ángulos en radianes, mantenemos la relación entre el ángulo y la distancia a lo largo de un arco lo más sencilla posible.

Velocidad angular

La coordenada θ de la figura 9.1 especifica la posición rotacional de un cuerpo rígido en un instante dado. Podemos describir el *movimiento* rotacional del cuerpo en términos de la razón de cambio de θ, de forma análoga a como describimos el movimiento rectilíneo en el capítulo 2. En la figura 9.3a una línea de referencia OP en un cuerpo que gira forma un ángulo θ_1 con el eje $+x$ en el instante t_1, En un instante posterior t_2, el ángulo cambió a θ_2. Definimos la **velocidad angular media** $\omega_{\text{med-}z}$ (con la letra griega omega) del cuerpo en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como la razón del **desplazamiento angular** $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ en Δt:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{9.2}$$



9.3 *a*) Desplazamiento angular $\Delta\theta$ de un cuerpo en rotación. *b*) Cada parte de un cuerpo rígido en rotación tiene la misma velocidad angular $\Delta\theta/\Delta t$.

El subíndice z indica que el cuerpo de la figura 9.3a está girando en torno al eje z, que es perpendicular al plano del diagrama. La **velocidad angular instantánea** ω_z es el límite de $\omega_{\text{med-}z}$ cuando Δt tiende a cero, es decir, la derivada de θ con respecto a t:

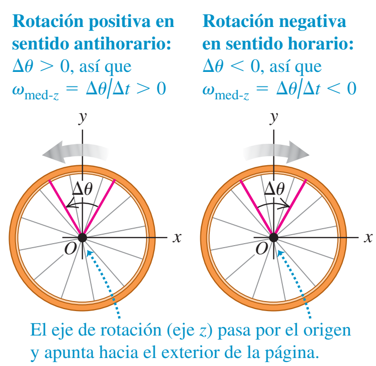
$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(definición de velocidad angular)} \qquad (9.3)$$

Cuando nos referimos simplemente a “velocidad angular” hablamos de la velocidad angular instantánea, no de la velocidad angular media.

La velocidad angular ω_z puede ser positiva o negativa, dependiendo de la dirección en que gire el cuerpo rígido (figura 9.4). La *rapidez* angular ω, que usaremos mucho en las secciones 9.3 y 9.4, es la magnitud de la velocidad angular. Al igual que la rapidez ordinaria (lineal) v, la rapidez angular nunca es negativa.

CUIDADO **Velocidad angular contra velocidad lineal** Tenga presente la distinción entre velocidad angular ω_z y velocidad ordinaria, o *velocidad lineal*, v_x (véase la sección 2.2). Si un objeto tiene una velocidad v_x, el objeto en su totalidad se *mueve* a lo largo del eje x. En contraste, si un objeto tiene una velocidad angular ω_z, está *girando* en torno al eje z. *No* quiere decir que el objeto se mueve a lo largo del eje z.

9.4 La velocidad angular media de un cuerpo rígido (que aquí se muestra) y la velocidad angular instantánea pueden ser positivas o negativas.



Diferentes puntos de un cuerpo rígido en rotación recorren diferentes distancias en un tiempo dado, dependiendo de la distancia con respecto al eje de rotación. No obstante, dado que el cuerpo es rígido, *todos* los puntos giran el mismo ángulo en el mismo tiempo (figura 9.3b). Por lo tanto, *en cualquier instante, todas las partes de un cuerpo rígido en rotación tienen la misma velocidad angular*. La velocidad angular es positiva si el cuerpo gira en la dirección de θ creciente, y negativa si lo hace en la dirección de θ decreciente.

Si el ángulo de θ está en radianes, la unidad de velocidad angular es el radián por segundo (rad/s). Suelen usarse otras unidades, como revoluciones por minuto (rev/min o rpm). Puesto que 1 rev $= 2\pi$ rad, dos conversiones útiles son

$$1 \text{ rev/s} = 2\pi \text{ rad/s} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ rev/min} = 1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

Es decir, 1 rad/s es alrededor de 10 rpm.

Ejemplo 9.1 Cálculo de la velocidad angular

El volante de un automóvil prototipo se somete a prueba. La posición angular θ del volante está dada por

$$\theta = (2.0 \text{ rad/s}^3)t^3$$

El diámetro del volante es de 0.36 m. *a*) Calcule el ángulo θ, en radianes y en grados, en $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s. *b*) Calcule la distancia que recorre una partícula en el borde durante ese intervalo. *c*) Calcule la velocidad angular media, en rad/s y en rev/min (rpm), entre $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s. *d*) Calcule la velocidad angular instantánea al $t = t_2 = 5.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Necesitamos calcular los valores θ_1 y θ_2 de la posición angular en los instantes t_1 y t_2, el desplazamiento angular $\Delta\theta$ entre t_1 y t_2, la distancia recorrida y la velocidad angular media entre t_1 y t_2, y la velocidad angular instantánea en t_2.

PLANTEAR: Nos dan la posición angular θ en función del tiempo. Por lo tanto, es fácil obtener las dos primeras incógnitas, los valores θ_1 y θ_2; el desplazamiento angular $\Delta\theta$ es la diferencia entre θ_1 y θ_2. Con $\Delta\theta$ calcularemos la distancia y la velocidad angular media empleando las ecuaciones (9.1) y (9.2), respectivamente. Para calcular la velocidad angular instantánea, derivaremos θ con respecto al tiempo, como en la ecuación (9.3).

EJECUTAR: *a*) Sustituimos los valores de t en la ecuación dada:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= (2.0 \text{ rad/s}^3)(2.0 \text{ s})^3 = 16 \text{ rad}\\ &= (16 \text{ rad})\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 920°\\ \theta_2 &= (2.0 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s})^3 = 250 \text{ rad}\\ &= (250 \text{ rad})\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 14{,}000°\end{aligned}$$

b) El volante tiene un desplazamiento angular de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 250 \text{ rad} - 16 \text{ rad} = 234$ rad. El radio r es 0.18 m (la mitad del diámetro). La ecuación (9.1) da

$$s = r\theta = (0.18 \text{ m})(234 \text{ rad}) = 42 \text{ m}$$

Para usar la ecuación (9.1), el ángulo *debe* expresarse en radianes. Omitimos “radianes” de la unidad de s porque θ en realidad es un número adimensional; s es una distancia y se mide en metros, igual que r.

c) En la ecuación (9.2) tenemos

$$\begin{aligned}\omega_{\text{med-}z} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{250 \text{ rad} - 16 \text{ rad}}{5.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = 78 \text{ rad/s}\\ &= \left(78\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right)\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) = 740 \text{ rev/min}\end{aligned}$$

d) Usamos la ecuación (9.3):

$$\begin{aligned}\omega_z &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}[(2.0 \text{ rad/s}^3)t^3] = (2.0 \text{ rad/s}^3)(3t^2)\\ &= (6.0 \text{ rad/s}^3)t^2\end{aligned}$$

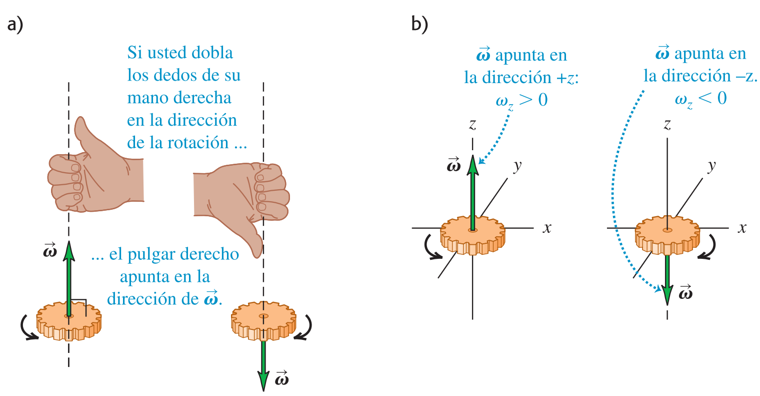
En el instante $t = 5.0$ s,

$$\omega_z = (6.0 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s})^2 = 150 \text{ rad/s}$$

EVALUAR: Nuestro resultado en el inciso *d*) muestra que ω_z es proporcional a t^2 y, por lo tanto, aumenta con el tiempo. Nuestros resultados numéricos son congruentes con este resultado: la velocidad angular instantánea de 150 rad/s en $t = 5.0$ s es mayor que la velocidad angular media de 78 rad/s para el intervalo de 3.0 s previo a ese instante (de $t_1 = 2.0$ s a $t_2 = 5.0$ s).

Velocidad angular como un vector

Como hemos visto, nuestra notación para la velocidad angular ω_z en torno al eje z recuerda la notación v_x, para la velocidad ordinaria a lo largo del eje x (véase la sección 2.2). Así como v_x es la componente x del vector de velocidad $\vec{v}$, ω_z es la componente z de un *vector* de velocidad angular $\vec{\omega}$ dirigido a lo largo del eje de rotación. Como



9.5 a) Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector de velocidad angular $\vec{\omega}$. Si se invierte el sentido de la rotación, se invierte la dirección de $\vec{\omega}$. b) El signo de ω_z de la rotación a lo largo del eje z.

muestra la figura 9.5a, la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ está dada por la regla de la mano derecha que empleamos al definir el producto vectorial en la sección 1.10. Si la rotación es sobre el eje z, $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ sólo tiene componente z, la cual es positiva si $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ apunta en la dirección $+z$ y negativa si $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ apunta en la dirección $-z$ (figura 9.5b).

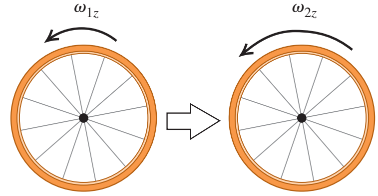
La formulación vectorial tiene especial utilidad en situaciones donde *cambia* la dirección del eje de rotación. Examinaremos brevemente tales situaciones al final del capítulo 10. En este capítulo, sin embargo, sólo consideraremos situaciones en las que el eje de rotación es fijo. Por lo tanto, en el resto del capítulo, el término "velocidad angular" se referirá a ω_z, la componente del vector de velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ a lo largo del eje.

Aceleración angular

Si cambia la velocidad angular de un cuerpo rígido, tiene una *aceleración angular*. Cuando una persona pedalea una bicicleta con más vigor para hacer que las ruedas giren más rápidamente, o aplica los frenos para detener las ruedas, se produce una aceleración angular sobre éstas. También se produce una aceleración angular cuando alteramos la rapidez de rotación de una pieza giratoria de una maquinaria, como el cigüeñal del motor de un automóvil.

Si ω_{1z} y ω_{2z} son las velocidades angulares instantáneas en t_1 y t_2, definimos la **aceleración angular media** $\alpha_{\text{med-}z}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como el cambio de la velocidad angular dividido entre Δt (figura 9.6):

$$\alpha_{\text{med-}z} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} \qquad (9.4)$$



9.6 Cálculo de la aceleración angular media de un cuerpo rígido que gira.

La **aceleración angular instantánea** α_z es el límite de $\alpha_{\text{med-}z}$ cuando $\Delta t \to 0$:

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} \qquad \text{(definición de aceleración angular)} \qquad (9.5)$$

La unidad que se suele utilizar para la aceleración angular es el radián por segundo por segundo (rad/s^2). De ahora en adelante, emplearemos el término "aceleración angular" para referirnos a la aceleración angular instantánea, no a la aceleración angular media.

Dado que $\omega_z = d\theta/dt$, también podemos expresar la aceleración angular como la segunda derivada de la coordenada angular:

$$\alpha_z = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (9.6)$$

Seguramente el lector ya se percató de que estamos usando letras griegas para las cantidades de la cinemática angular: θ para la posición, ω_z para la velocidad y α_z para la aceleración angulares. Éstas son análogas a x para la posición, v_x para la velocidad y a_x para la aceleración, respectivamente, en el movimiento rectilíneo. En ambos casos, la velocidad es la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo; en tanto que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. A veces, usaremos los términos velocidad *lineal y* aceleración *lineal* para referirnos a las cantidades que ya definimos en los capítulos 2 y 3, haciendo una distinción clara entre éstas y las cantidades *angulares* presentadas en este capítulo.

En el movimiento rotacional, si la aceleración angular α_z es positiva, aumenta la velocidad angular ω_z; si α_z es negativa, ω_z disminuye. La rotación se está acelerando si α_z y ω_z tienen el mismo signo, y frenándose si tienen signos opuestos. (Estas relaciones son idénticas a las que existen entre la aceleración *lineal* a_x y la velocidad *lineal* v_x en el movimiento rectilíneo; véase la sección 2.3.)

Ejemplo 9.2 Cálculo de la aceleración angular

En el ejemplo 9.1, vimos que la velocidad angular instantánea ω_z del volante en cualquier instante t está dada por

$$\omega_z = (6.0\ \text{rad/s}^3)t^2$$

a) Calcule la aceleración angular media entre $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s. *b*) Calcule la aceleración angular instantánea en el instante $t_2 = 5.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo requiere las definiciones de aceleración angular media $\alpha_{\text{med-}z}$ y aceleración angular instantánea α_z.

PLANTEAR: Usaremos las ecuaciones (9.4) y (9.5) para obtener el valor de $\alpha_{\text{med-}z}$ entre t_1 y t_2, así como el valor de α_z en $t = t_2$.

EJECUTAR: *a*) Los valores de ω_z en los dos instantes son

$$\omega_{1z} = (6.0\ \text{rad/s}^3)(2.0\ \text{s})^2 = 24\ \text{rad/s}$$
$$\omega_{2z} = (6.0\ \text{rad/s}^3)(5.0\ \text{s})^2 = 150\ \text{rad/s}$$

Por la ecuación (9.4), la aceleración angular media es

$$\alpha_{\text{med-}z} = \frac{150\ \text{rad/s} - 24\ \text{rad/s}}{5.0\ \text{s} - 2.0\ \text{s}} = 42\ \text{rad/s}^2$$

b) Por la ecuación (9.5), la aceleración angular instantánea en cualquier instante t es

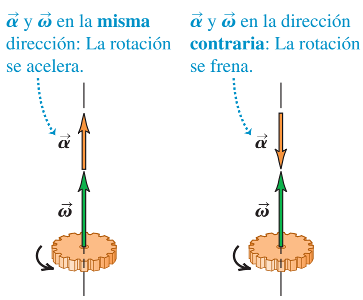
$$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d}{dt}[(6.0\ \text{rad/s}^3)(t^2)] = (6.0\ \text{rad/s}^3)(2t)$$
$$= (12\ \text{rad/s}^3)t$$

En el instante $t = 5.0$ s,

$$\alpha_z = (12\ \text{rad/s}^3)(5.0\ \text{s}) = 60\ \text{rad/s}^2$$

EVALUAR: Observe que la aceleración angular *no* es constante en esta situación. La velocidad angular ω_z siempre aumenta porque α_z siempre es positiva; además, la razón con que aumenta la velocidad angular también está creciendo, ya que α_z aumenta con el tiempo.

9.7 Cuando el eje de rotación es fijo, los vectores de aceleración angular y velocidad angular están sobre ese eje.

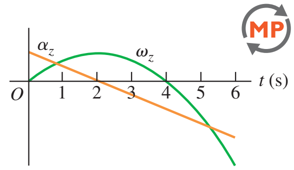


Aceleración angular como un vector

Así como hicimos con la velocidad angular, resulta útil definir un *vector* de aceleración angular $\vec{\alpha}$. Matemáticamente, $\vec{\alpha}$ es la derivada con respecto al tiempo del vector de velocidad angular $\vec{\omega}$. Si el objeto gira en torno al eje z fijo, $\vec{\alpha}$ sólo tiene componente z; la cantidad α_z es precisamente esa componente. En este caso, $\vec{\alpha}$ apunta en la misma dirección que $\vec{\omega}$ si la rotación se está acelerando, y en la dirección opuesta si se está frenando (figura 9.7).

El vector de aceleración angular nos será muy útil en el capítulo 10 cuando veamos lo que sucede cuando el eje de rotación puede cambiar de dirección. En este capítulo el eje de rotación siempre estará fijo y sólo necesitaremos usar la componente z: α_z.

Evalúe su comprensión de la sección 9.1 La figura muestra una gráfica de ω_z y α_z contra el tiempo para un cuerpo giratorio específico. *a*) ¿En qué instantes la rotación se acelera? i) $0 < t < 2$ s; ii) $2\ \text{s} < t < 4$ s; iii) $4\ \text{s} < t < 6$ s. *b*) ¿En qué instantes la rotación se frena? i) $0 < t < 2$ s; ii) $2\ \text{s} < t < 4$ s; iii) $4\ \text{s} < 5 < 6$ s.



9.2 Rotación con aceleración angular constante

En el capítulo 2, vimos que el movimiento rectilíneo es muy sencillo cuando la aceleración es constante. Lo mismo sucede con el movimiento rotacional sobre un eje fijo. Si la aceleración angular es constante, podemos deducir ecuaciones para la velocidad y la posición angulares siguiendo el mismo procedimiento que usamos para el movimiento rectilíneo en la sección 2.4. De hecho, las ecuaciones que vamos a deducir son idénticas a las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14), si sustituimos x por θ, v_x por ω_z y a_x por α_z. Sugerimos repasar la sección 2.4 antes de continuar.

Sea ω_{0z} la velocidad angular de un cuerpo rígido en $t = 0$ y sea ω_z su velocidad angular en cualquier instante posterior t. La aceleración angular α_z es constante e igual al valor medio en cualquier intervalo. Usando la ecuación (9.4) en el intervalo de 0 a t, tenemos

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t - 0}, \qquad \text{es decir,}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \qquad \text{(sólo aceleración angular constante)} \tag{9.7}$$

El producto $\alpha_z t$ es el cambio total de ω_z entre $t = 0$ y el instante posterior t; la velocidad angular ω_z en el instante t es la suma del valor inicial ω_{0z} y este cambio total.

Con aceleración angular constante, la velocidad angular cambia a una razón uniforme, así que su valor medio entre 0 y t es la media de los valores inicial y final:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\omega_{0z} + \omega_z}{2} \tag{9.8}$$

También sabemos que $\omega_{\text{med-}z}$ es el desplazamiento angular total $(\theta - \theta_0)$ dividido entre el intervalo de tiempo $(t - 0)$:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0} \tag{9.9}$$

Si igualamos las ecuaciones (9.8) y (9.9), y multiplicamos el resultado por t, obtenemos

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \qquad \text{(sólo aceleración angular constante)} \tag{9.10}$$

Para obtener una relación entre θ y t que no incluya a ω_z, sustituimos la ecuación (9.7) en la ecuación (9.10):

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}[\omega_{0z} + (\omega_{0z} + \alpha_z t)]t \qquad \text{o bien,}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \qquad \text{(sólo aceleración angular constante)} \tag{9.11}$$

Es decir, si en el tiempo inicial $t = 0$ el cuerpo tiene una posición angular θ_0 y una velocidad angular ω_{0z}, entonces su posición angular θ en cualquier instante posterior t será la suma de tres términos: su posición angular inicial θ_0, más la rotación $\omega_{0z}t$ que tendría si la velocidad angular fuera constante, más una rotación adicional $\frac{1}{2}\alpha_z t^2$ causada por el cambio en la velocidad angular.

Siguiendo el mismo procedimiento que para el movimiento rectilíneo de la sección 2.4, combinamos las ecuaciones (9.7) y (9.11) para obtener una relación entre θ y ω_z que no contenga t. Lo invitamos a efectuarlo, siguiendo el procedimiento que empleamos para obtener la ecuación (2.13). (Véase el ejercicio 9.12.) De hecho, dada la analogía perfecta entre las cantidades rectilíneas y rotacionales, podemos tomar la ecuación (2.13) y sustituir cada cantidad rectilínea por su contraparte rotacional. Así que,

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \qquad \text{(sólo aceleración angular constante)} \tag{9.12}$$

CUIDADO **Aceleración angular constante** Tenga presente que estos resultados son válidos *sólo* si la aceleración angular α_z es *constante*; no trate de aplicarlos a problemas donde α_z *no* sea constante. En la tabla 9.1 se muestra la analogía entre las ecuaciones (9.7), (9.10), (9.11) y (9.12), para rotación sobre un eje fijo y aceleración angular constante, y las ecuaciones correspondientes para el movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante.

ActivPhysics ONLINE
7.7 Cinemática rotacional

Tabla 9.1 Comparación del movimiento lineal y angular con aceleración constante

Movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante	Rotación sobre un eje fijo con aceleración angular constante
$a_x = \text{constante}$	$\alpha_z = \text{constante}$
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_x + v_{0x})t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_z + \omega_{0z})t$

Ejemplo 9.3 Rotación con aceleración angular constante

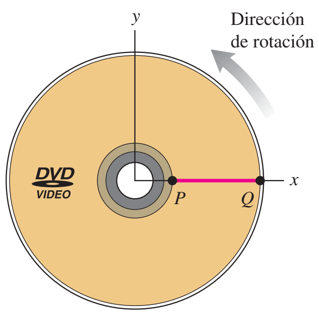
Imagine que usted acaba de ver una película en DVD y el disco se está deteniendo. La velocidad angular del disco en $t = 0$ es de 27.5 rad/s y su aceleración angular constante es de -10.0 rad/s^2. Una línea PQ en la superficie del disco está a lo largo del eje $+x$ en $t = 0$ (figura 9.8). *a*) ¿Qué velocidad angular tiene el disco en $t = 0.3$ s? *b*) ¿Qué ángulo forma la línea PQ con el eje $+x$ en ese instante?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La aceleración angular del disco es constante, así que podemos usar cualquiera de las ecuaciones que dedujimos en esta sección. Las incógnitas son la velocidad angular y el desplazamiento angular en $t = 0.300$ s.

PLANTEAR: Nos dan la velocidad angular inicial $\omega_{0z} = 27.5$ rad/s, el ángulo inicial $\theta_0 = 0$ entre la línea PQ y el eje $+x$, la aceleración angular $\alpha_z = -10.0$ rad/s^2 y el tiempo $t = 0.300$ s. Con esta información, lo más fácil es usar las ecuaciones (9.7) y (9.11) para obtener las incógnitas ω_z, y θ, respectivamente.

9.8 La línea PQ sobre un disco DVD que gira en $t = 0$.



EJECUTAR: *a*) Por la ecuación (9.7), en $t = 0.300$ s tenemos

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t = 27.5 \text{ rad/s} + (-10.0 \text{ rad/s}^2)(0.300 \text{ s}) = 24.5 \text{ rad/s}$$

b) Por la ecuación (9.11),

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \\ &= 0 + (27.5 \text{ rad/s})(0.300 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-10.0 \text{ rad/s}^2)(0.300 \text{ s})^2 \\ &= 7.80 \text{ rad} = 7.80 \text{ rad}\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 1.24 \text{ rev}\end{aligned}$$

El DVD ha girado una revolución completa más 0.24 de revolución, es decir, un ángulo adicional de (0.24 rev) (360°/rev) = 87°. Por lo tanto, la línea PQ forma un ángulo de 87° con el eje $+x$.

EVALUAR: Nuestra respuesta al inciso *a*) nos indica que disminuyó la velocidad angular, lo cual es natural dado que α_z es negativa. También podemos usar el valor de ω_z, que obtuvimos en el inciso *a*) para comprobar nuestro resultado θ del inciso *b*). Para ello, despejamos el ángulo θ de la ecuación (9.12), $\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$,

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \left(\frac{\omega_z^2 - \omega_{0z}^2}{2\alpha_z}\right) \\ &= 0 + \frac{(24.5 \text{ rad/s})^2 - (27.5 \text{ rad/s})^2}{2(-10.0 \text{ rad/s}^2)} = 7.80 \text{ rad}\end{aligned}$$

Esto coincide con el resultado que obtuvimos antes.

Evalúe su comprensión de la sección 9.2 Suponga que el DVD del ejemplo 9.3 originalmente estaba girando al doble de la tasa (55.0 rad/s en vez de 27.5 rad/s) y que frenó al doble de la tasa (-20.0 rad/s^2 en vez de -10.0 rad/s^2). *a*) En comparación con la situación del ejemplo 9.3, ¿cuánto tiempo le tomaría al DVD llegar al reposo? i) la misma cantidad de tiempo; ii) el doble de tiempo; iii) 4 veces más tiempo; iv) $\frac{1}{2}$ del tiempo; v) $\frac{1}{4}$ del tiempo. *b*) En comparación con la situación del ejemplo 9.3, ¿cuántas revoluciones giraría el DVD antes de detenerse? i) el mismo número de revoluciones; ii) el doble de revoluciones; iii) 4 veces más revoluciones; iv) $\frac{1}{2}$ de las revoluciones; v) $\frac{1}{4}$ de las revoluciones.

9.3 Relación entre cinemática lineal y angular

¿Cómo obtenemos la velocidad y aceleración lineales de un punto dado de un cuerpo rígido en rotación? Necesitamos la respuesta para continuar con nuestro estudio de la rotación. Para obtener la energía cinética de un cuerpo en rotación, por ejemplo, debemos partir de $K = \frac{1}{2}mv^2$ para una partícula, y esto requiere conocer v para cada partícula del cuerpo. Por lo tanto, vale la pena deducir relaciones generales entre la velocidad y aceleración *angulares* de un cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo, y la velocidad y aceleración *lineales* de un punto o partícula específicos del cuerpo.

Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo, todas sus partículas se mueven en una trayectoria circular. El círculo yace en un plano perpendicular al eje y está centrado en el eje. La rapidez de una partícula es directamente proporcional a la velocidad angular del cuerpo; cuanto más rápidamente gire el cuerpo, mayor será la rapidez de cada partícula. En la figura 9.9, el punto P está a una distancia constante r del eje de rotación, así que se mueve en un círculo de radio r. En cualquier instante, el ángulo θ (en rad) y la longitud de arco s están relacionados por

$$s = r\theta$$

Derivamos esto con respecto al tiempo, observando que r es constante para una partícula específica, y obtenemos el valor absoluto de ambos lados:

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

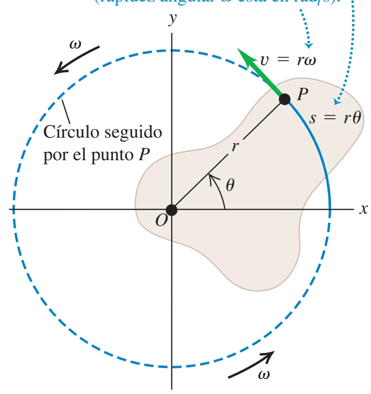
Ahora, $|ds/dt|$ es el valor absoluto de la razón de cambio de la longitud de arco, que es igual a la rapidez *lineal* instantánea v de la partícula. De manera análoga, $|d\theta/dt|$, es el valor absoluto de la razón de cambio del ángulo, que es la **rapidez angular** instantánea ω, es decir, la magnitud de la velocidad angular instantánea en rad/s. Así,

$$v = r\omega \qquad \text{(relación entre rapideces lineal y angular)} \qquad (9.13)$$

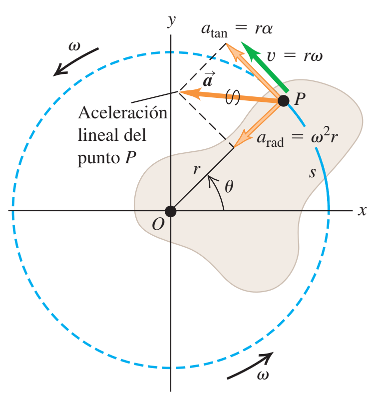
Cuanto más lejos del eje esté del eje un punto, mayor será su rapidez lineal. La *dirección* del *vector* de velocidad lineal es siempre tangente a la trayectoria circular (figura 9.9).

CUIDADO **Rapidez contra velocidad** Tenga presente la distinción entre las *rapideces* lineal y angular v y ω (que aparecen en la ecuación (9.13) y las *velocidades* lineal y angular v_x y ω_z. Las cantidades sin subíndices, v y ω, nunca son negativas; son las magnitudes de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{\omega}$, respectivamente, y sus valores sólo nos dicen con qué rapidez se está moviendo la partícula (v) o qué tan rápido está girando (ω). Las cantidades correspondientes con subíndice, v_x y ω_z, pueden ser positivas o negativas; su signo indica la dirección del movimiento.

9.9 Cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo que pasa por el punto O.



9.10 Cuerpo rígido cuya rotación está acelerando. La aceleración del punto P tiene una componente a_{rad} hacia el eje de rotación (perpendicular a $\vec{v}$) y una componente a_{tan} a lo largo del círculo que sigue el punto P (paralela a $\vec{v}$).



Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Podemos representar la aceleración de una partícula que se mueve en un círculo en términos de sus componentes centrípeta y tangencial, a_{rad} y a_{tan} (figura 9.10), como hicimos en la sección 3.4. Le recomendamos repasar esa sección ahora. Vimos que la **componente tangencial de aceleración** a_{tan}, la componente paralela a la velocidad instantánea, actúa cambiando la *magnitud* de la velocidad de la partícula (su rapidez) y es igual a la razón de cambio de la rapidez. Derivando la ecuación (9.13), obtenemos

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad \text{(aceleración tangencial de un punto en un cuerpo en rotación)} \qquad (9.14)$$

Esta componente de la aceleración de una partícula siempre es tangente a la trayectoria circular de la partícula.

La cantidad $\alpha = d\omega/dt$ de la ecuación (9.14) es la razón de cambio de la *rapidez* angular. No es idéntica a $\alpha_z = d\omega_z/dt$, que es la razón de cambio de la *velocidad* angular. Por ejemplo, consideremos un cuerpo que gira de modo que su vector de velocidad angular apunta en la dirección $-z$ (figura 9.5b). Si la rapidez angular del cuerpo está aumentando a razón de 10 rad/s por segundo, entonces $\alpha = 10\ \text{rad/s}^2$. Sin embargo, ω_z es negativa y se está volviendo más negativa a medida que la rotación se acelera, así que $\alpha_z = -10\ \text{rad/s}^2$. La regla para la rotación en torno a un eje fijo es que α es igual a α_z si ω_z es positiva e igual a $-\alpha_z$ si ω_z es negativa.

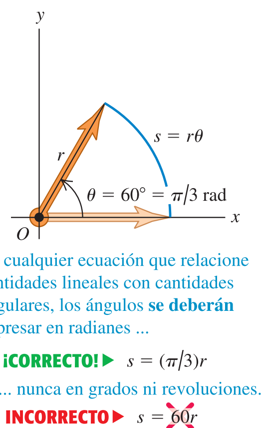
La componente de la aceleración de la partícula que está dirigida hacia el eje de rotación, la **componente centrípeta de aceleración** a_{rad}, está asociada con el cambio de *dirección* de la velocidad de la partícula. En la sección 3.4 dedujimos la relación $a_{\text{rad}} = v^2/r$. Podemos expresar esto en términos de ω usando la ecuación (9.13):

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(aceleración centrípeta de un punto de un cuerpo en rotación)} \qquad (9.15)$$

Esto se cumple en todo instante *aun si ω y v no son constantes*. La componente centrípeta siempre apunta hacia el eje de rotación.

La suma vectorial de las componentes centrípeta y tangencial de la aceleración de una partícula en un cuerpo en rotación es la aceleración lineal $\vec{a}$ (figura 9.10).

9.11 Al relacionar cantidades lineales y angulares, utilice siempre radianes.



CUIDADO **Utilice ángulos en radianes en todas las ecuaciones** Es importante recordar que la ecuación (9.1), $s = r\theta$, es válida *sólo* si θ se mide en radianes. Lo mismo sucede con todas las ecuaciones derivadas de ella, incluidas las ecuaciones (9.13), (9.14) y (9.15). Al usar estas ecuaciones, *debemos* expresar los ángulos en radianes, no revoluciones ni grados (figura 9.11).

Las ecuaciones (9.1), (9.13) y (9.14) también son válidas para cualquier partícula que tenga la misma velocidad tangencial que un punto de un cuerpo rígido en rotación. Por ejemplo, si una cuerda enrollada en un cilindro se desenrolla sin estirarse ni deslizarse, su rapidez y aceleración en cualquier instante son iguales a la rapidez y aceleración tangencial del punto en el cual es tangente al cilindro. El mismo principio se aplica a las cadenas y ruedas dentadas de una bicicleta, a correas y poleas que giran sin deslizarse, etcétera. Más adelante en este capítulo y en el capítulo 10, tendremos varias oportunidades de usar estas relaciones. Cabe señalar que la ecuación (9.15) para la componente centrípeta a_{rad} es aplicable a la cuerda o cadena *sólo* en los puntos de contacto con el cilindro o la rueda. Los demás puntos no tienen la misma aceleración hacia el centro del círculo que tienen los puntos del cilindro o la rueda.

Ejemplo 9.4 Lanzamiento del disco

Un lanzador de disco gira el disco en un círculo con radio de 80.0 cm. En cierto instante, el lanzador gira con rapidez angular de 10.0 rad/s y la rapidez angular está aumentando a 50 rad/s^2. Calcule las componentes de aceleración tangencial y centrípeta del disco en ese instante, así como la magnitud de esa aceleración.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Modelamos el disco como una partícula que sigue una trayectoria circular (figura 9.12a), así que podemos usar las ideas que desarrollamos en esta sección.

PLANTEAR: Nos dan el radio $r = 0.800$ m, la rapidez angular $\omega = 10.0$ rad/s y la razón de cambio de la rapidez angular $\alpha = 50.0\ \text{rad/s}^2$ (figura 9.12b). Las primeras dos incógnitas son las componentes de aceleración $a_{\tan}$ y a_{rad}, que obtendremos con las ecuaciones (9.14) y (9.15), respectivamente. Una vez que tengamos esas componentes del vector de aceleración, obtendremos la magnitud de a (la tercera incógnita) aplicando el teorema de Pitágoras.

EJECUTAR: De las ecuaciones (9.14) y (9.15):

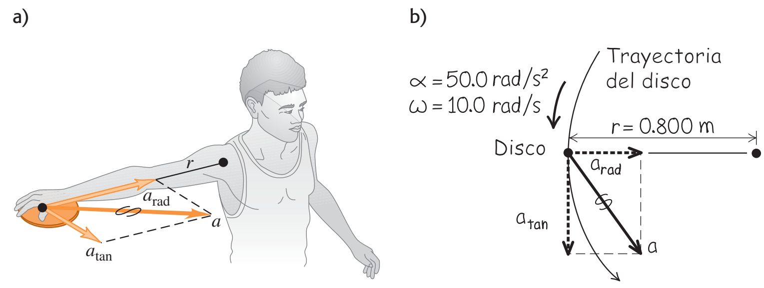
$$a_{\tan} = r\alpha = (0.800\ \text{m})(50.0\ \text{rad/s}^2) = 40.0\ \text{m/s}^2$$

$$a_{\text{rad}} = \omega^2 r = (10.0\ \text{rad/s})^2(0.800\ \text{m}) = 80.0\ \text{m/s}^2$$

La magnitud del vector de aceleración es

$$a = \sqrt{a_{\tan}{}^2 + a_{\text{rad}}{}^2} = 89.4\ \text{m/s}^2$$

9.12 a) Lanzamiento de disco con giro circular. b) Nuestro diagrama muestra las componentes de la aceleración para el disco.



EVALUAR: Observe que omitimos la unidad "radián" de nuestros resultados para a_{tan}, a_{rad} y a. Podemos hacerlo porque el "radián" es una cantidad adimensional.

La magnitud a es unas nueve veces g, la aceleración debida a la gravedad. ¿Puede usted demostrar que, si la rapidez angular se duplica a 20.0 rad/s pero α no cambia, la magnitud de la aceleración, a, aumenta a 322 m/s^2 (casi 33g)?

Ejemplo 9.5 Diseño de una hélice

Imagine que le piden diseñar una hélice de avión que gire a 2400 rpm. La rapidez de avance del avión en el aire debe ser de 75.0 m/s (270 km/h o unas 168 mi/h), y la rapidez de las puntas de las aspas de la hélice en el aire no debe exceder de 270 m/s (figura 9.13a). (Esto es cerca de 0.80 veces la rapidez del sonido en aire. Si tales puntas se movieran con una rapidez cercana a la del sonido, producirían un ruido enorme.) *a*) ¿Qué radio máximo puede tener la hélice? *b*) Con este radio, ¿qué aceleración tiene la punta de la hélice?

SOLUCIÓN

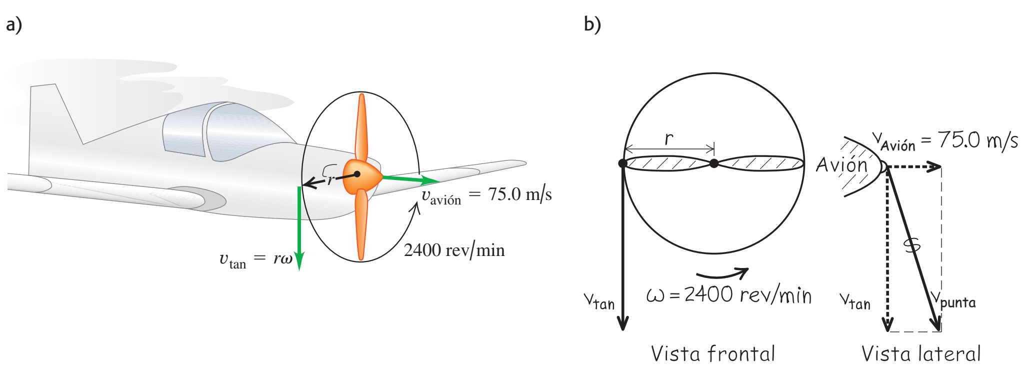
IDENTIFICAR: El objeto de interés en este ejemplo es una partícula en la punta de la hélice; las incógnitas son la distancia entre esa partícula y el eje, y su aceleración. Observe que la rapidez de esta partícula con respecto al aire (la cual no puede exceder de 270 m/s) se debe *tanto* a la rotación de la hélice *como* al movimiento hacia adelante del avión.

PLANTEAR: Como indica la figura 9.13b, la velocidad $\vec{v}_{punta}$ de una partícula en la punta de la hélice es la suma vectorial de su velocidad tangencial debida a la rotación de la hélice (magnitud v_{tan}, dada por la ecuación (9.13)) y la velocidad hacia adelante del avión (magnitud $v_{avión} = 75.0$ m/s). El plano de rotación de la hélice es perpendicular a la dirección del vuelo, así que los dos vectores mencionados son perpendiculares y podemos usar el teorema de Pitágoras para relacionar v_{tan} y $v_{avión}$ con v_{punta}. Entonces, igualaremos v_{punta} a 270 m/s y despejaremos el radio r. Observe que la rapidez angular de la hélice es constante, de manera que la aceleración de la punta de la hélice sólo tiene una componente radial, la cual obtendremos con la ecuación (9.15).

EJECUTAR: Primero convertimos ω a rad/s (véase la figura 9.11):

$$\begin{aligned}\omega &= 2400\ \text{rpm} = \left(2400\ \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}}\right)\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\right)\\ &= 251\ \text{rad/s}\end{aligned}$$

9.13 a) Avión impulsado por hélice en el aire. b) Nuestro esquema presenta las componentes de la velocidad para la punta de la hélice.



continúa

a) Según la figura 9.13b y la ecuación (9.13), la magnitud de la velocidad v_{total} está dada por

$$v_{punta}{}^2 = v_{avión}{}^2 + v_{tan}{}^2 = v_{avión}{}^2 + r^2\omega^2 \quad \text{así que}$$

$$r^2 = \frac{v_{punta}{}^2 - v_{avión}{}^2}{\omega^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{\sqrt{v_{punta}{}^2 - v_{avión}{}^2}}{\omega}$$

Si $v_{punta} = 270$ m/s, el radio de la hélice es

$$r = \frac{\sqrt{(270\ \text{m/s})^2 - (75.0\ \text{m/s})^2}}{251\ \text{rad/s}} = 1.03\ \text{m}$$

b) La aceleración centrípeta es

$$a_{rad} = \omega^2 r$$
$$= (251\ \text{rad/s})^2(1.03\ \text{m}) = 6.5 \times 10^4\ \text{m/s}^2$$

La aceleración *tangencial* es cero porque la rapidez angular es constante.

EVALUAR: De $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, ¡la hélice debe ejercer una fuerza de 6.5×10^4 N sobre cada kilogramo de material en la punta! Por ello, las hélices se fabrican con materiales resistentes (por lo general, una aleación de aluminio).

Ejemplo conceptual 9.6 Engranes de bicicleta

¿Qué relación hay entre las rapideces angulares de las dos ruedas dentadas de bicicleta de la figura 9.14 y el número de dientes en cada una?

SOLUCIÓN

La cadena no se desliza ni se estira, así que se mueve con la misma rapidez tangencial v en ambas ruedas dentadas. Por la ecuación (9.13),

$$v = r_{frontal}\omega_{frontal} = r_{trasera}\omega_{trasera} \quad \text{así que} \quad \frac{\omega_{trasera}}{\omega_{frontal}} = \frac{r_{frontal}}{r_{trasera}}$$

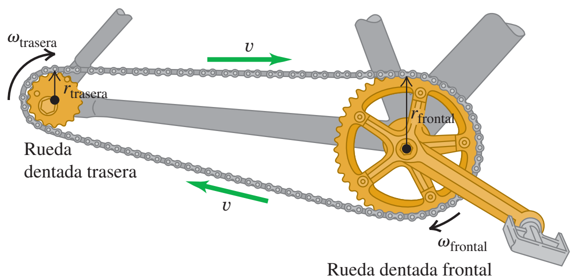
La rapidez angular es inversamente proporcional al radio. Esto se cumple también para poleas conectadas mediante una correa, siempre que ésta no se deslice. En el caso de las ruedas dentadas, los dientes deben estar equidistantes en sus circunferencias para que la cadena embone correctamente. Sean $N_{frontal}$ y $N_{trasera}$ los números de dientes; la condición de que el espaciado de los dientes sea igual en ambas ruedas es

$$\frac{2\pi r_{frontal}}{N_{frontal}} = \frac{2\pi r_{trasera}}{N_{trasera}} \quad \text{así que} \quad \frac{r_{frontal}}{r_{trasera}} = \frac{N_{frontal}}{N_{trasera}}$$

Combinando esto con la otra ecuación, tenemos

$$\frac{\omega_{trasera}}{\omega_{frontal}} = \frac{N_{frontal}}{N_{trasera}}$$

9.14 Las ruedas dentadas y la cadena de una bicicleta.



La rapidez angular de cada rueda dentada es inversamente proporcional al número de dientes. En una bicicleta de varias velocidades, obtenemos la máxima rapidez angular $\omega_{trasera}$ de la rueda trasera para un pedaleo dado $\omega_{frontal}$, cuando el cociente $N_{frontal}/N_{trasera}$ es máximo; esto implica usar la rueda dentada delantera de mayor radio ($N_{frontal}$ máximo) y la rueda dentada trasera de menor radio ($N_{trasera}$ mínimo).

Evalúe su comprensión de la sección 9.3 En los CD y los DVD (véase la figura 9.8), la información se almacena en un patrón codificado de agujeros diminutos, los cuales están dispuestos en una pista que forma una espiral del centro al borde del disco. Cuando el disco gira dentro de un reproductor, la pista se escanea con rapidez *lineal* constante. ¿Cómo debe cambiar la rapidez de rotación del disco mientras la cabeza lectora del reproductor sigue la pista? i) La rapidez de rotación debe aumentar. ii) La rapidez de rotación debe disminuir. iii) La rapidez de rotación debe permanecer igual.

9.4 Energía en el movimiento rotacional

ActivPhysics ONLINE
7.7 Inercia rotacional

Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, así que tiene energía cinética que podemos expresar en términos de la rapidez angular del cuerpo y una nueva cantidad llamada *momento de inercia*, que depende de la masa del cuerpo y de la forma en que se distribuye tal masa.

Para deducir esta relación, consideramos que el cuerpo está formado por un gran número de partículas, con masas m_1, m_2, …, a distancias r_1, r_2, … del eje de rotación. Rotulamos las partículas con el subíndice i: la masa de la i-ésima partícula es m_i y su distancia con respecto al eje de rotación es r_i. Las partículas no tienen que estar todas en el mismo plano, así que especificamos que r_i es la distancia *perpendicular* de la partícula *i*-ésima al eje.

Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo, la rapidez v_i de la *i*-ésima partícula está dada por la ecuación (9.13), $v_i = r_i\omega$, donde ω es la rapidez angular del cuerpo. Diferentes partículas tienen distintos valores de r, pero ω es igual para todas (si no, el cuerpo no sería rígido). La energía cinética de la *i*-ésima partícula es

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

La energía cinética *total* del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas:

$$K = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \cdots = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

Sacando el factor común $\omega^2/2$ de esta expresión:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

La cantidad entre paréntesis, que se obtiene multiplicando la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje de rotación y sumando los productos, se denota con I y es el **momento de inercia** del cuerpo para este eje de rotación:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2 \qquad \text{(definición de momento de inercia)} \qquad (9.16)$$

La palabra “momento” implica que I depende de la distribución espacial de la masa del cuerpo; nada tiene que ver con el tiempo. Para un cuerpo con un eje de rotación dado y una masa total dada, cuanto mayor sea la distancia del eje a las partículas que constituyen el cuerpo, mayor será el momento de inercia. En un cuerpo rígido, las distancias r_i son constantes, en tanto que I es independiente de cómo gira el cuerpo en torno al eje dado. La unidad del momento de inercia en el SI es el kilogramo-metro cuadrado ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

En términos del momento de inercia I, la **energía cinética rotacional** K de un cuerpo rígido es

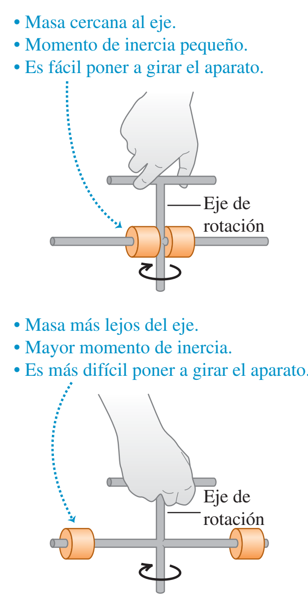
$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(energía cinética rotacional de un cuerpo rígido)} \qquad (9.17)$$

La energía cinética dada por la ecuación (9.17) *no* es una nueva forma de energía; es simplemente la suma de las energías cinéticas de las partículas que constituyen el cuerpo rígido en rotación. Al usar la ecuación (9.17), ω *debe* medirse en radianes por segundo, no revoluciones ni grados por segundo, con la finalidad de obtener K en joules; la razón es que usamos $v_i = r_i\omega$ en la deducción.

La ecuación (9.17) ofrece una interpretación física sencilla del momento de inercia: *cuanto mayor sea el momento de inercia, mayor será la energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una rapidez angular* ω. En el capítulo 6 vimos que la energía cinética de un cuerpo es igual al trabajo efectuado para acelerar ese cuerpo desde el reposo. De esta manera, cuanto mayor sea el momento de inercia de un cuerpo, más difícil será ponerlo a girar si está en reposo, y más difícil será detener su rotación si ya está girando (figura 9.15). Por esta razón, I también se denomina *inercia rotacional*.

El siguiente ejemplo muestra cómo el *cambio* del eje de rotación afecta el valor de I.

9.15 Aparato que gira libremente en torno a un eje vertical. El momento de inercia se puede variar fijando los dos cilindros de igual masa en diferentes posiciones en la varilla horizontal.



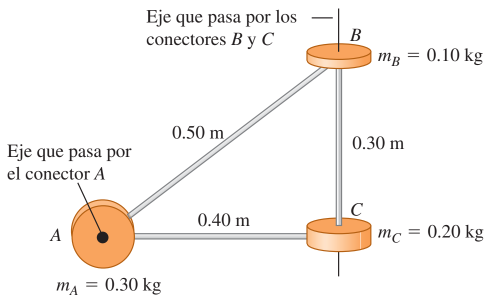
Ejemplo 9.7 Momentos de inercia para diferentes ejes de rotación

Un ingeniero está diseñando una pieza mecánica formada por tres conectores circulares gruesos unidos por puntales ligeros moldeados (figura 9.16). *a*) ¿Qué momento de inercia tiene este cuerpo alrededor de un eje que pasa por el centro del disco *A* y es perpendicular al plano del diagrama? *b*) ¿Qué momento de inercia tiene alrededor de un eje que pasa por el centro de los discos *B* y *C*? *c*) Si el cuerpo gira sobre el eje que pasa por *A* y es perpendicular al plano del diagrama, con rapidez angular $\omega = 4.0$ rad/s, ¿qué energía cinética tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Consideraremos los conectores circulares como partículas masivas; y los puntales ligeros, como varillas sin masa. Así, podremos usar las ideas de esta sección para calcular el momento de inercia de este conjunto de tres partículas.

9.16 Pieza mecánica de forma inusual.



PLANTEAR: En los incisos *a*) y *b*), usaremos la ecuación (9.16) para obtener el momento de inercia con cada uno de los dos ejes. Dado el momento de inercia para el eje *A*, usaremos la ecuación (9.17) en el inciso *c*) para calcular la energía cinética de rotación.

EJECUTAR: *a*) La partícula en el punto *A* está *sobre* el eje; su distancia *r* con respecto al eje es cero, así que no contribuye al momento de inercia. La ecuación (9.16) da

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.10\text{ kg})(0.50\text{ m})^2 + (0.20\text{ kg})(0.40\text{ m})^2$$
$$= 0.057\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

b) Las partículas en *B* y C están *sobre* el eje, así que para ellas $r = 0$, y ninguna contribuye al momento de inercia. Sólo *A* contribuye, y tenemos

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.30\text{ kg})(0.40\text{ m})^2 = 0.048\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

c) Por la ecuación (9.17),

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(0.057\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(4.0\text{ rad/s})^2 = 0.46\text{ J}$$

EVALUAR: Nuestros resultados indican que el momento de inercia para el eje que pasa por *A* es mayor que para el eje que pasa por *B* y *C*. Por lo tanto, de los dos ejes, es más fácil hacer girar la pieza sobre el eje *B* y *C*.

CUIDADO **El momento de inercia depende de la elección del eje** Los resultados de los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 9.7 muestran que el momento de inercia de un cuerpo depende de la ubicación y orientación del eje. No basta con decir “el momento de inercia de este cuerpo es de 0.048 kg · m^2”. Debemos ser específicos y decir “el momento de inercia de este cuerpo *alrededor del eje BC* es de 0.048 kg · m^2”.

En el ejemplo 9.7, representamos el cuerpo como varias masas puntuales, y evaluamos la sumatoria directamente de la ecuación (9.16). Si el cuerpo es una distribución *continua* de materia, como un cilindro sólido o una placa, la sumatoria se convertirá en una integral y necesitaremos usar cálculo para determinar el momento de inercia. Daremos varios ejemplos de estos cálculos en la sección 9.6; mientras tanto, en la tabla 9.2 se dan los momentos de inercia de varias formas comunes, en términos de las masas y dimensiones. Todos los cuerpos mostrados en la tabla 9.2 son *uniformes*; es decir, la densidad tiene el mismo valor en todos los puntos dentro de las partes sólidas del cuerpo.

CUIDADO **Cálculo del momento de inercia** Es posible que el lector se sienta tentado a calcular el momento de inercia de un cuerpo suponiendo que toda la masa está concentrada en el centro de masa, multiplicando después la masa total por el cuadrado de la distancia del centro de masa al eje. Resista la tentación, ¡sería un error hacerlo! Por ejemplo, si una varilla delgada uniforme de longitud L y masa M pivotea sobre un eje que pasa por un extremo, perpendicular a la varilla, el momento de inercia es $I = ML^2/3$ (caso (*b*) en la tabla 9.2). Si tomáramos la masa como si estuviera concentrada en el centro, a una distancia $L/2$ del eje, obtendríamos el resultado *incorrecto* $I = M(L/2)^2 = ML^2/4$.

Ahora que sabemos calcular la energía cinética de un cuerpo rígido en rotación, podemos aplicar los principios de energía del capítulo 7 al movimiento rotacional. Veamos la estrategia y algunos ejemplos.

Tabla 9.2 Momentos de inercia de diversos cuerpos

a) Varilla delgada, eje por el centro: $I = \frac{1}{12}ML^2$

b) Varilla delgada, eje por un extremo: $I = \frac{1}{3}ML^2$

c) Placa rectangular, eje por el centro: $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

d) Placa rectangular delgada, eje en un borde: $I = \frac{1}{3}Ma^2$

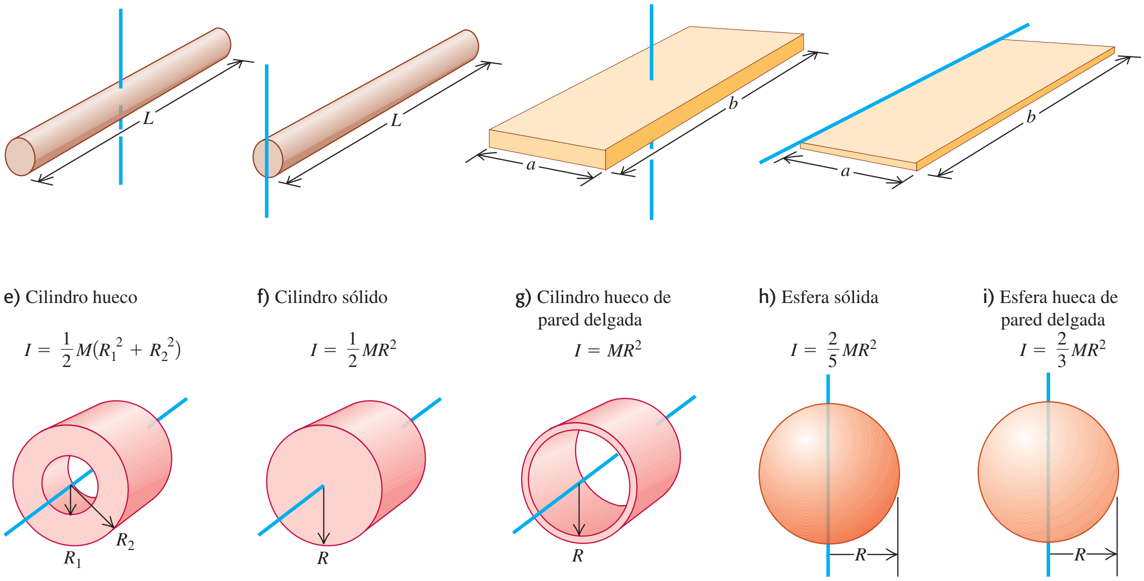
e) Cilindro hueco: $I = \frac{1}{2}M(R_1{}^2 + R_2{}^2)$

f) Cilindro sólido: $I = \frac{1}{2}MR^2$

g) Cilindro hueco de pared delgada: $I = MR^2$

h) Esfera sólida: $I = \frac{2}{5}MR^2$

i) Esfera hueca de pared delgada: $I = \frac{2}{3}MR^2$



Estrategia para resolver problemas 9.1 Energía rotacional

IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Podemos usar relaciones del trabajo, energía y la conservación de la energía, para obtener relaciones entre la posición y el movimiento de un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo. Como vimos en el capítulo 7, el método de energía generalmente no resulta útil para resolver problemas en los que interviene el tiempo. En el capítulo 10 veremos cómo abordar problemas de rotación de ese tipo.

PLANTEAR *el problema* siguiendo los mismos pasos de la Estrategia para resolver problemas de la sección 7.1, con la adición siguiente:

5. Muchos problemas implican una cuerda o un cable enrollado en un cuerpo rígido giratorio que funciona como polea. En estos casos, recuerde que el punto de la polea que toca la cuerda tiene la misma rapidez lineal que la cuerda, siempre que ésta no resbale sobre la polea. Así, podemos aprovechar las ecuaciones (9.13) y (9.14), que relacionan la rapidez lineal y la aceleración tangencial de un punto de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo. Los ejemplos 9.8 y 9.9 ilustran esto.

EJECUTAR *la solución:* Al igual que en el capítulo 7, escribimos expresiones para las energías cinética y potencial iniciales y finales (K_1, K_2, U_1 y U_2) y para el trabajo no conservativo W_{otras} (si lo hay). La novedad es la energía cinética rotacional, que se expresa en términos del momento de inercia I del cuerpo con respecto al eje dado y la rapidez angular ω $\left(K = \frac{1}{2}I\omega^2\right)$, en vez de su masa m y su rapidez v. Sustituya estas expresiones en $K_1 + U_1 + W_{\text{otros}} = K_2 + U_2$ (si se efectúa trabajo no conservativo), o bien, en $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ (si sólo se efectúa trabajo conservativo), y despeje la(s) incógnita(s). Al igual que en el capítulo 7, resulta útil dibujar gráficas de barras que muestren los valores iniciales y finales de K, U y $E = K + U$.

EVALUAR *la respuesta:* Como siempre, verifique que su respuesta sea lógica físicamente.

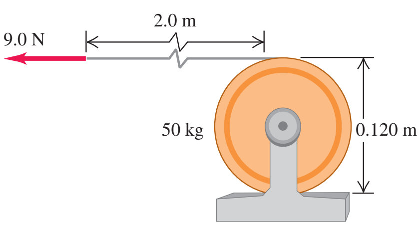
Ejemplo 9.8 Cable que se desenrolla I

Un cable ligero, flexible y que no se estira está enrollado varias vueltas en el tambor de un malacate, un cilindro sólido con masa de 50 kg y 0.120 m de diámetro, que gira sobre un eje fijo horizontal montado en cojinetes sin fricción (figura 9.17). Una fuerza constante de magnitud de 9.0 N tira del extremo libre del cable a lo largo de una distancia de 2.0 m. El cable no resbala y hace girar el cilindro cuando desenrolla. Si el cilindro estaba inicialmente en reposo, calcule su rapidez angular final y la rapidez final del cable.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Resolveremos este problema empleando métodos de energía. El punto 1 es donde el cilindro comienza a moverse y el punto 2 es donde el cable se ha desenrollado 2.0 m. Puesto que el cable es ligero, supondremos que no tiene masa y que sólo el cilindro tiene energía cinética. La posición vertical del cilindro no cambia, así que no hay cambios en la energía potencial gravitacional. Hay fricción entre el cable y el cilindro; esto es lo que hace girar al cilindro cuando se tira del cable. Sin embargo, como el cable no resbala, no hay movimiento del cable relativo al cilindro y no se pierde energía mecánica por la fricción. Dado que el cable no tiene masa, la fuerza que el cable ejerce sobre el borde del cilindro es igual a la fuerza aplicada F.

9.17 Un cable se desenrolla de un cilindro (vista lateral).



PLANTEAR: El cilindro inicialmente está en reposo, así que la energía cinética inicial es $K_1 = 0$. Entre los puntos 1 y 2, la fuerza F efectúa trabajo sobre el cilindro a lo largo de una distancia $s = 2.0$ m. El resultado es que la energía cinética en el punto 2 es $K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2$. Una de las incógnitas es ω; la otra es la rapidez del cable en el punto 2, que es igual a la rapidez tangencial v del cilindro en ese punto. Obtendremos v a partir de ω con la ecuación (9.13).

EJECUTAR: El trabajo efectuado sobre el cilindro es $W_{otras} = Fs = (9.0\text{ N})(2.0\text{ m}) = 18$ J. Según la tabla 9.2, el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(50\text{ kg})(0.060\text{ m})^2 = 0.090\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

(El radio R es la mitad del diámetro del cilindro.) La relación $K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2$ da

$$0 + 0 + W_{otras} = \frac{1}{2}I\omega^2 + 0$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2W_{otras}}{I}} = \sqrt{\frac{2(18\text{ J})}{0.090\text{ kg}\cdot\text{m}^2}}$$
$$= 20\text{ rad/s}$$

La rapidez tangencial final del cilindro y, por ende, la rapidez final del cable es

$$v = R\omega = (0.060\text{ m})(20\text{ rad/s}) = 1.2\text{ m/s}$$

EVALUAR: Si no podemos despreciar esa masa, una parte del trabajo efectuado se convertirá en energía cinética del cable. De manera que el cilindro adquiriría menos energía cinética y tendría menor rapidez angular que las calculadas aquí.

Ejemplo 9.9 Cable que se desenrolla II

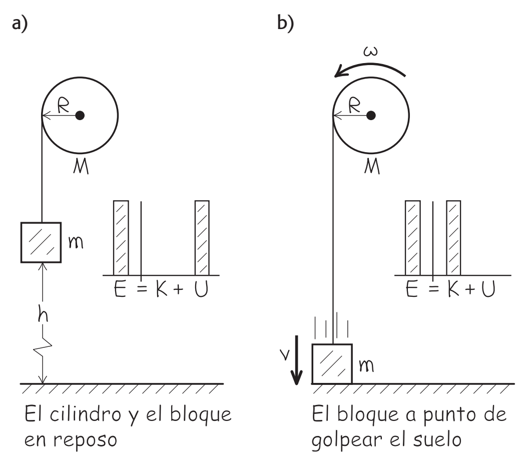
Enrollamos un cable ligero y flexible en un cilindro sólido de masa M y radio R. El cilindro gira con fricción despreciable sobre un eje horizontal estacionario. Atamos el extremo libre del cable a un bloque de masa m y soltamos el objeto sin velocidad inicial a una distancia h sobre el piso. Conforme el bloque cae, el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar, haciendo girar al cilindro. Calcule la rapidez del bloque que cae y la rapidez angular del cilindro, justo cuando el bloque golpea el piso.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en el ejemplo 9.8, el cable no resbala y la fricción no efectúa trabajo. El cable no efectúa trabajo *neto*; en su extremo superior, la fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección; mientras que en su extremo inferior tienen direcciones opuestas. Por lo tanto, el trabajo total efectuado por ambos extremos del cable es cero. El único trabajo efectuado es el de la gravedad, así que se conserva la energía mecánica.

PLANTEAR: La figura 9.18a muestra la situación justo antes de que el bloque empiece a caer. En este punto, el sistema no tiene energía

9.18 Nuestro esquema para este problema.



cinética, así que $K_1 = 0$. El piso es nuestro nivel de energía potencial cero; así, $U_1 = mgh$ y $U_2 = 0$. (Podemos ignorar la energía potencial gravitacional del cilindro que gira, ya que su altura no cambia.) Justo antes de que el bloque golpee el piso (figura 9.18b), tanto el bloque como el cilindro tienen energía cinética. En ese momento, la energía cinética total K_2 es

$$K_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

El momento de inercia del cilindro (tabla 9.2) es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Además, v y ω están relacionadas por $v = R\omega$, ya que la rapidez del bloque que cae debe ser igual a la rapidez tangencial en la superficie del cilindro. Usaremos estas relaciones para despejar las incógnitas v y ω que se muestran en la figura 9.18b.

EJECUTAR: Utilizando nuestras expresiones para K_1, U_1, K_2 y U_2 y la relación $\omega = v/R$ en la ecuación de conservación de la energía, $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, despejamos v:

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 0 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}M\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

La rapidez angular final del cilindro ω se obtiene de $\omega = v/R$.

EVALUAR: Veamos algunos casos particulares. Si M es mucho mayor que m, v es muy pequeña, como esperaríamos. Si M es mucho menor que m, v es casi igual a $\sqrt{2gh}$, que es la rapidez de un cuerpo en caída libre desde una altura h. ¿Le sorprende a usted que v no dependa del radio del cilindro?

Energía potencial gravitacional de un cuerpo extendido

En el ejemplo 9.9, el cable tenía masa despreciable y podíamos ignorar su energía cinética y la energía potencial gravitacional asociada a él. Si la masa *no* es despreciable, necesitamos saber cómo calcular la energía *potencial gravitacional* asociada a tal cuerpo extendido. Si la aceleración de la gravedad g es la misma en todos los puntos del cuerpo, la energía potencial gravitacional sería la misma si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa del cuerpo. Tomemos el eje y hacia arriba. Para un cuerpo de masa total M, la energía potencial gravitacional U es simplemente

$$U = Mgy_{cm} \qquad \text{(energía potencial gravitacional de un cuerpo extendido)} \qquad (9.18)$$

donde y_{cm} es la coordenada y del centro de masa. Esta expresión es válida para cualquier cuerpo extendido, sea rígido o no (figura 9.19).

Para demostrar la ecuación (9.18), representamos otra vez el cuerpo como un conjunto de elementos de masa m_i. La energía potencial del elemento m_i es m_igy_i, y la energía potencial total es

$$U = m_1gy_1 + m_2gy_2 + \cdots = (m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots)g$$

Sin embargo, por la ecuación (8.28), que define las coordenadas del centro de masa,

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots = (m_1 + m_2 + \cdots)y_{cm} = My_{cm}$$

donde $M = m_1 + m_2 + \ldots$ es la masa total. Al combinar esto con la expresión anterior para U, tenemos $U = Mgy_{cm}$, que coincide con la ecuación (9.18).

Aplicaremos la ecuación (9.18) en los problemas. Usaremos esta relación en el capítulo 10 al analizar problemas de cuerpo rígido con eje de rotación móvil.

ActivPhysics ONLINE

7.12 Mujeres y elevador de volante: enfoque de energía

7.13 Rotojuego: enfoque de energía

9.19 En la técnica de salto de altura ideada por Richard Fosbury, el atleta arquea el cuerpo al pasar sobre la barra. Como resultado, su centro de masa realmente pasa *bajo* la barra. Esta técnica requiere de un menor aumento en la energía potencial gravitacional [ecuación (9.18)], que el método antiguo de saltar a horcajadas sobre la barra.

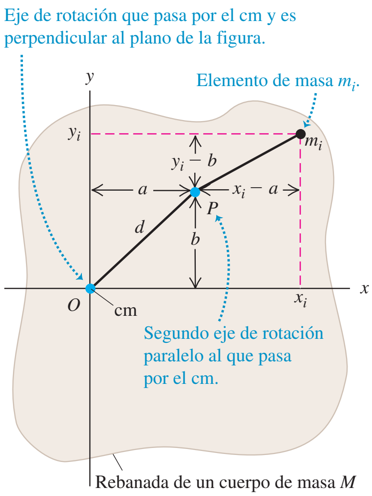
Evalúe su comprensión de la sección 9.4 Suponga que el cilindro y el bloque del ejemplo 9.9 tienen la misma masa, de modo que $m = M$. Justo antes de que el objeto golpee el piso, ¿qué enunciado es correcto acerca de la relación entre la energía cinética del bloque que cae y la energía cinética rotacional del cilindro? i) El bloque tiene más energía cinética que el cilindro. ii) El bloque tiene menos energía cinética que el cilindro. iii) El bloque y el cilindro tienen cantidades iguales de energía cinética.

MP

9.5 Teorema de los ejes paralelos

En la sección 9.4 apuntamos que un cuerpo no tiene un solo momento de inercia. De hecho, tiene un número infinito, porque el número de ejes sobre los que podría girar es infinito. No obstante, hay una relación simple entre el momento de inercia I_{cm} de un cuerpo de masa M alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y

9.20 El elemento de masa m_i tiene coordenadas (x_i, y_i) con respecto a un eje de rotación que pasa por el centro de masa (cm), y coordenadas $(x_i - a, y_i - b)$ con respecto al eje paralelo que pasa por el punto P.



el momento de inercia I_P alrededor de cualquier otro eje paralelo al original pero desplazado una distancia d. Esta relación, llamada **teorema de los ejes paralelos**, dice que

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \qquad \text{(teorema de los ejes paralelos)} \tag{9.19}$$

Para demostrarlo, consideramos dos ejes paralelos al eje z; uno pasa por el centro de masa; y el otro, por un punto P (figura 9.20). Primero tomamos una rebanada muy delgada del cuerpo, paralela al plano xy y perpendicular al eje z. Tomamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro de masa del cuerpo; así, las coordenadas del centro de masa son $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$. El eje que pasa por el centro de masa atraviesa esta rebanada delgada en el punto O, y el eje paralelo la atraviesa en el punto P, cuyas coordenadas x y y son (a, b). La distancia entre este eje y el que pasa por el centro de masa es d, donde $d^2 = a^2 + b^2$.

Podemos escribir una expresión para el momento de inercia I_P alrededor del eje que pasa por P. Sea m_i un elemento de masa de nuestra rebanada, con coordenadas (x_i, y_i, z_i). El momento de inercia I_{cm} de la rebanada alrededor del eje que pasa por el centro de masa (en O) es

$$I_{cm} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

El momento de inercia de la rebanada alrededor del eje que pasa por P es

$$I_P = \sum_i m_i\left[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2\right]$$

En estas expresiones no intervienen las coordenadas z_i, medidas perpendicularmente a las rebanadas, así que podemos extender las sumatorias para incluir *todas* las partículas de *todas* las rebanadas. Así, I_P será el momento de inercia de *todo* el cuerpo para un eje que pasa por P. Expandiendo los cuadrados y reagrupando:

$$I_P = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) - 2a\sum_i m_i x_i - 2b\sum_i m_i y_i + (a^2 + b^2)\sum_i m_i$$

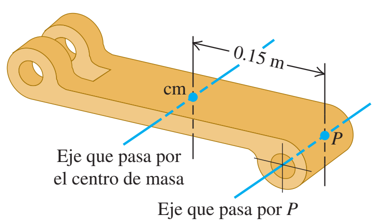
La primera sumatoria es I_{cm}. Por la definición de centro de masa [ecuación (8.28)], la segunda y la tercera sumatorias son proporcionales a x_{cm} y y_{cm}, que son cero porque tomamos el origen en el centro de masa. El último término es d^2 multiplicada por la masa total, es decir, Md^2. Queda demostrado que $I_P = I_{cm} + Md^2$.

Como muestra la ecuación (9.19), un cuerpo rígido tiene menor momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa que alrededor de cualquier otro eje paralelo. Por ello, es más fácil poner a girar un cuerpo si el eje de rotación pasa por el centro de masa. Esto sugiere que, de algún modo, es más natural que un cuerpo en rotación gire sobre un eje que pasa por su centro de masa; haremos más cuantitativa esta idea en el capítulo 10.

Ejemplo 9.10 Uso del teorema de ejes paralelos

Una pieza de un acoplamiento mecánico (figura 9.21) tiene una masa de 3.6 kg. Medimos su momento de inercia alrededor de un eje que pasa a 0.15 m de su centro de masa y obtenemos $I_P = 0.132\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Calcule el momento de inercia I_{cm} alrededor de un eje paralelo que pasa por el centro de masa.

9.21 Cálculo de I_{cm} a partir de una medición de I_P.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El teorema de ejes paralelos nos permite relacionar los momentos de inercia I_{cm} e I_P a través de los dos ejes paralelos.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (9.19) para determinar la incógnita: I_{cm}.

EJECUTAR: Reacomodamos la ecuación y sustituimos los valores:

$$\begin{aligned} I_{cm} &= I_P - Md^2 = 0.132\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 - (3.6\ \text{kg})(0.15\ \text{m})^2 \\ &= 0.051\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

EVALUAR: Nuestro resultado indica que I_{cm} es menor que I_P, como debe ser: ya vimos que el momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa es menor que para cualquier otro eje paralelo.

Evalúe su comprensión de la sección 9.5 Un taco de billar es una varilla de madera con una composición uniforme y que se estrecha de un diámetro grande en un extremo, hacia uno pequeño en el otro extremo. Utilice el teorema de los ejes paralelos para decidir si un taco tiene un momento de inercia mayor i) para un eje que pasa por el extremo más grueso de la varilla y es perpendicular a la longitud de ésta, o ii) para un eje que pasa por el extremo más delgado de la varilla y es perpendicular a la longitud de ésta.

*9.6 Cálculos de momento de inercia

***NOTA**: esta sección opcional es para estudiantes que están familiarizados con el cálculo integral.*

Si un cuerpo rígido es una distribución continua de masa —como un cilindro o una esfera sólidos— no puede representarse con unas cuantas masas puntuales. En este caso, la sumatoria de masas y distancias que define el momento de inercia [ecuación (9.16)] se vuelve una integral. Imagine que divide el cuerpo en elementos muy pequeños de masa dm, de modo que todos los puntos de un elemento estén prácticamente a la misma distancia perpendicular del eje de rotación. Llamamos r a esta distancia, como antes. El momento de inercia es, entonces,

$$I = \int r^2\, dm \qquad (9.20)$$

Para evaluar la integral, debemos representar r y dm en términos de la misma variable de integración. Si tenemos un objeto prácticamente unidimensional, como las varillas delgadas *a*) y *b*) de la tabla 9.2, podemos usar una coordenada x a lo largo y relacionar dm con un incremento dx. Si el objeto es tridimensional, suele ser más fácil expresar dm en términos de un elemento de volumen dV y la *densidad* ρ del cuerpo. La densidad es masa por unidad de volumen, $\rho = dm/dV$, así que podemos escribir la ecuación (9.20) como

$$I = \int r^2 \rho\, dV$$

Esta expresión nos dice que el momento de inercia de un cuerpo depende de la forma en que su densidad varía dentro de su volumen (figura 9.22). Si la densidad del cuerpo es uniforme, podemos sacar ρ de la integral:

$$I = \rho \int r^2\, dV \qquad (9.21)$$

Para usar esta ecuación, debemos expresar el elemento de volumen dV en términos de diferenciales de las variables de integración, como $dV = dx\, dy\, dz$. Siempre debemos elegir dV de modo que todos sus puntos estén casi a la misma distancia del eje de rotación. Los límites de la integral están determinados por la forma y las dimensiones del cuerpo. En el caso de cuerpos regulares, la integración suele ser muy sencilla.

9.22 Al medir las pequeñas variaciones en las órbitas de los satélites, los geofísicos pueden calcular el momento de inercia de la Tierra. Esto nos dice cómo está distribuida la masa de nuestro planeta dentro de su interior. Los datos indican que la Tierra es mucho más densa en el centro que en sus capas exteriores.

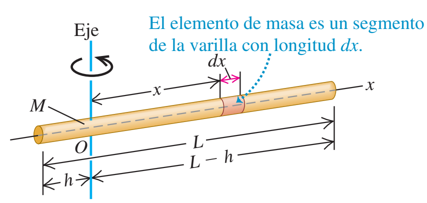
Ejemplo 9.11 Varilla delgada uniforme, eje perpendicular a la longitud

La figura 9.23 muestra una varilla uniforme con masa M y longitud L. Podría ser el bastón (sin las tapas de hule) de una bastonera que marcha al frente a una banda de músicos. Calcule su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por O, a una distancia arbitraria h de un extremo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La varilla es una distribución continua de masa, por lo que debemos emplear la integración para calcular el momento de inercia. Elegimos como elemento de masa una sección corta de la varilla con longitud dx, a una distancia x del punto O.

9.23 Cálculo del momento de inercia de una varilla delgada alrededor de un eje que pasa por O.



PLANTEAR: El cociente de la masa dm del elemento entre la masa total M es igual al cociente de su longitud dx entre la longitud total L:

$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L} \qquad \text{así que} \qquad dm = \frac{M}{L}dx$$

Determinaremos I a partir de la ecuación (9.20), sustituyendo r por x (véase la figura 9.23).

EJECUTAR: La figura 9.23 indica que los límites de integración de x son $-h$ y $(L - h)$. Por lo tanto, obtenemos

$$I = \int x^2\,dm = \frac{M}{L}\int_{-h}^{L-h} x^2\,dx$$
$$= \left[\frac{M}{L}\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_{-h}^{L-h} = \frac{1}{3}M\left(L^2 - 3Lh + 3h^2\right)$$

EVALUAR: Con esta expresión general podemos calcular el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por cualquier punto de la varilla. Por ejemplo, si el eje está en el extremo izquierdo, $h = 0$ y

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

Si el eje está en el extremo derecho, deberemos obtener el mismo resultado. Haciendo $h = L$, obtenemos

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

Si el eje pasa por el centro, lo usual al girar un bastón, $h = L/2$ y

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

Esto concuerda con las expresiones de la tabla 9.2.

Ejemplo 9.12 Cilindro hueco o sólido que gira sobre el eje de simetría

La figura 9.24 muestra un cilindro hueco uniforme de longitud L, radio interior R_1 y radio exterior R_2. Podría ser un cilindro de una imprenta o una laminadora. Calcule el momento de inercia alrededor del eje de simetría del cilindro.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Otra vez debemos usar la integración para calcular el momento de inercia, pero ahora elegimos como elemento de volumen una capa cilíndrica delgada de radio r, espesor dr y longitud L; todas sus partes están prácticamente a la misma distancia del eje.

PLANTEAR: El volumen del elemento es casi igual al de una lámina plana de espesor dr, longitud L y anchura $2\pi r$ (la circunferencia de la capa). Entonces,

$$dm = \rho\,dV = \rho(2\pi rL\,dr)$$

Usaremos esta expresión en la ecuación (9.20) e integraremos de $r = R_1$ a $r = R_2$.

EJECUTAR: El momento de inercia está dado por

$$I = \int r^2\,dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2\rho(2\pi rL\,dr)$$
$$= 2\pi\rho L\int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr$$
$$= \frac{2\pi\rho L}{4}\left(R_2^4 - R_1^4\right)$$
$$= \frac{\pi\rho L}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

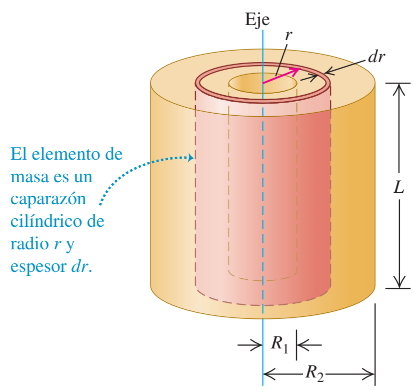
Suele ser más conveniente expresar el momento de inercia en términos de la masa total M del cuerpo, que es su densidad ρ multiplicada por el volumen total V, dado por

$$V = \pi L\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

así que la masa total M es

$$M = \rho V = \pi L\rho\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

9.24 Cálculo del momento de inercia de un cilindro hueco alrededor de su eje de simetría.



Y el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

EVALUAR: Esto concuerda con el caso *e*) de la tabla 9.2. Si el cilindro es sólido (digamos, una aplanadora), $R_1 = 0$. Llamemos al radio exterior R_2 simplemente R. El momento de inercia de un cilindro sólido de radio R es

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Si la pared del cilindro es muy delgada (como un conducto), R_1 y R_2 son casi iguales; si R representa este radio común,

$$I = MR^2$$

Podríamos haber predicho este resultado; en un cilindro de pared delgada, toda la masa está a la misma distancia $r = R$ del eje, por lo que $I = \int r^2\,dm = R^2\int dm = MR^2$.

Ejemplo 9.13 Esfera uniforme de radio *R*, eje por el centro

Calcule el momento de inercia de una esfera sólida uniforme (como una bola de billar o una bola de acero de un cojinete) alrededor de un eje que pasa por el centro de tal esfera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Para calcular el momento de inercia, dividimos la esfera en discos delgados de espesor dx (figura 9.25), cuyo momento de inercia conocemos por el ejemplo 9.12. Integraremos en ellos para calcular el momento de inercia total. La única cuestión complicada es que el radio y la masa de un disco dependen de su distancia x con respecto al centro de la esfera.

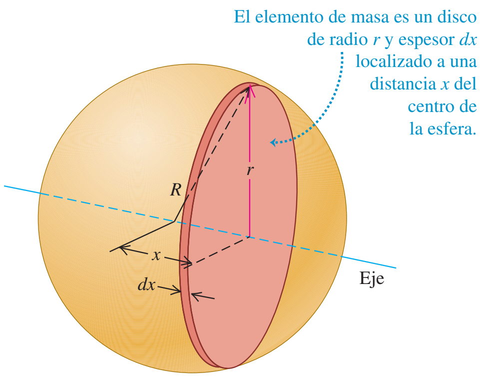
PLANTEAR: El radio r del disco que se muestra en la figura 9.25 es

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Su volumen es

$$dV = \pi r^2\,dx = \pi(R^2 - x^2)\,dx$$

9.25 Cálculo del momento de inercia de una esfera alrededor de un eje que pasa por su centro.



y su masa es

$$dm = \rho\,dV = \pi\rho(R^2 - x^2)\,dx$$

EJECUTAR: Del ejemplo 9.12, el momento de inercia de un disco de radio r y masa dm es

$$dI = \frac{1}{2}r^2\,dm = \frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2\left[\pi\rho(R^2 - x^2)\,dx\right]$$
$$= \frac{\pi\rho}{2}(R^2 - x^2)^2\,dx$$

Integrando esta expresión de $x = 0$ a $x = R$, obtenemos el momento de inercia del hemisferio derecho. Por simetría, el I total para la esfera es el doble:

$$I = (2)\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)^2\,dx$$

Integrando:

$$I = \frac{8\pi\rho}{15}R^5$$

La masa M de la esfera de volumen $V = 4\pi R^3/3$ es

$$M = \rho V = \frac{4\pi\rho R^3}{3}$$

Comparando las expresiones para I y para M, vemos que

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

EVALUAR: Este resultado concuerda con la expresión de la tabla 9.2, caso h). Observe que el momento de inercia de una esfera sólida de masa M y radio R es menor que el de un *cilindro* sólido con los mismos valores de masa y radio, $I = \frac{1}{2}MR^2$. La explicación es que una proporción mayor de la masa de la esfera está cerca del eje.

Evalúe su comprensión de la sección 9.6 Dos cilindros huecos tienen los mismos radios interno y externo, así como la misma masa; sin embargo, tienen longitudes diferentes. Uno está hecho de madera de baja densidad y el otro de plomo de alta densidad. ¿Cuál cilindro tiene el mayor momento de inercia alrededor de su eje de simetría? i) El cilindro de madera; ii) el cilindro de plomo; iii) los dos momentos de inercia son iguales.

CAPÍTULO 9 RESUMEN

Cinemática rotacional: Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo (que por lo general se llama eje z), su posición está descrita por una coordenada angular θ. La velocidad angular ω_z es la derivada con respecto al tiempo de θ. La aceleración angular α_z es la derivada con respecto al tiempo de ω_z o la segunda derivada de θ. (Véanse los ejemplos 9.1 y 9.2.) Si la aceleración angular es constante, entonces θ, ω_z y α_z están relacionadas por ecuaciones sencillas de cinemática análogas a las del movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante. (Véase el ejemplo 9.3.)

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{9.3}$$

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{9.5}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \tag{9.11}$$

(sólo α_z constante)

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_z + \omega_{0z})t \tag{9.10}$$

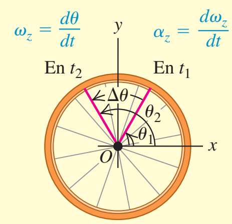
(sólo α_z constante)

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \tag{9.7}$$

(sólo α_z constante)

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \tag{9.12}$$

(sólo α_z constante)

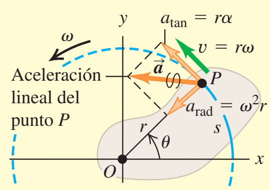


Relación entre cinemática angular y lineal: La rapidez angular ω de un cuerpo rígido es la magnitud de su velocidad angular. La razón de cambio de ω es $\alpha = d\omega/dt$. En el caso de una partícula de un cuerpo que está a una distancia r del eje de rotación, la rapidez v y las componentes de la aceleración $\vec{a}$ están relacionadas con ω y α. (Véanse los ejemplos 9.4 a 9.6.)

$$v = r\omega \tag{9.13}$$

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \tag{9.14}$$

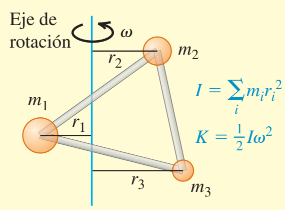
$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \tag{9.15}$$



Momento de inercia y energía cinética rotacional: El momento de inercia I de un cuerpo alrededor de un eje dado es una medida de su inercia rotacional: cuanto mayor sea el valor de I, más difícil será cambiar el estado de rotación del cuerpo. El momento de inercia se puede expresar como una sumatoria para las partículas m_i que constituyen el cuerpo, cada una de las cuales está a una distancia perpendicular r_i del eje. La energía cinética rotacional de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo depende de la rapidez angular ω y del momento de inercia I para ese eje de rotación. (Véanse los ejemplos 9.7 a 9.9.)

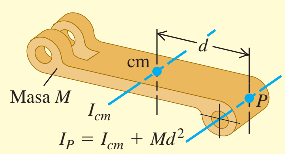
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2 \tag{9.16}$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{9.17}$$



Cálculo del momento de inercia: El teorema de los ejes paralelos relaciona los momentos de inercia de un cuerpo rígido de masa M alrededor de dos ejes paralelos: un eje que pasa por el centro de masa (momento de inercia I_{cm}) y un eje paralelo que está a una distancia d del primero (momento de inercia I_P). (Véase el ejemplo 9.10.) Si el cuerpo tiene una distribución continua de masa, el momento de inercia se calcula por integración. (Véanse los ejemplos 9.11 a 9.13.)

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \tag{9.19}$$



Términos clave

cuerpo rígido, *285*
radián, *286*
velocidad angular media, *286*
desplazamiento angular, *286*
velocidad angular instantánea, *287*
aceleración angular media, *289*
aceleración angular instantánea, *289*
rapidez angular, *293*
componente tangencial de la aceleración, *293*
componente centrípeta de la aceleración, *294*
momento de inercia, *297*
energía cinética rotacional, *297*
teorema de los ejes paralelos, *302*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Ambos segmentos del aspa rígida tienen la misma rapidez angular ω. De las ecuaciones (9.13) y (9.15), al duplicar la distancia r para la misma ω, se duplica la rapidez lineal $v = r\omega$ y se duplica la aceleración radial $a_{\text{rad}} = \omega^2 r$.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

9.1 Respuestas: a) i) y iii), b) ii) La rotación se está acelerando cuando la aceleración y la velocidad angulares tienen el mismo signo, y se está frenando cuando tienen signos opuestos. Por lo tanto, acelera para $0 < t < 2$ s (ω_z y α_z son positivas) y para $4 \text{ s} < t < 6$ s (ω_z y α_z son negativas); pero se está frenando para $2 \text{ s} < t < 4$ s (ω_z es positiva y α_z es negativa). Observe que el cuerpo gira en una dirección para $t < 4$ s (ω_z es positiva) y en la dirección opuesta para $t > 4$ s (ω_z es negativa).

9.2 Respuestas: a) i), b) ii) Cuando el DVD se detiene, $\omega_z = 0$. De la ecuación (9.7), esto sucede en el *instante* $t = (\omega_z - \omega_{0z})/\alpha_z = -\omega_{0z}/\alpha_z$ (éste es un tiempo positivo porque α_z es negativa). Si duplicamos la velocidad angular inicial ω_{0z} y duplicamos también la aceleración angular α_z, su cociente no cambia y la rotación se detiene en el mismo tiempo. El *ángulo* con el que gira el DVD está dado por la ecuación (9.10): $\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t = \frac{1}{2}\omega_{0z}t$ (ya que la velocidad angular final es $\omega_z = 0$). La velocidad angular inicial ω_{0z} se ha duplicado, pero el tiempo t es el mismo, así que el desplazamiento angular $\theta - \theta_0$ (y por ende el número de revoluciones) se ha duplicado. Podemos usar la ecuación (9.12) para obtener la misma conclusión.

9.3 Respuesta: ii) De la ecuación (9.13), $v = r\omega$. Para mantener una rapidez lineal v constante, la rapidez angular ω debe disminuir a medida que la cabeza lectora se mueve hacia afuera (mayor r).

9.4 Respuesta: i) La energía cinética del objeto que cae es $\frac{1}{2}mv^2$, y la del cilindro que gira, $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}mv^2$. Por lo tanto, la energía cinética total del sistema es $\frac{3}{4}mv^2$, de la cual dos tercios están en el bloque y un tercio está en el cilindro

9.5 Respuesta: ii) Más de la masa del taco de billar está concentrada en el extremo más grueso, así que el centro de masa está más cercano a dicho extremo. El momento de inercia en un punto P en cualquiera de sus extremos es $I_p = I_{cm} + Md^2$; el extremo más delgado está más alejado del centro de masa, por lo que la distancia d y el momento de inercia I_P son mayores para el extremo más delgado.

9.6 Respuesta: iii) Nuestro resultado del ejemplo 9.12 no depende de la longitud del cilindro L. El momento de inercia depende sólo de la distribución *radial* de la masa, no de su distribución a lo largo del eje.

PROBLEMAS

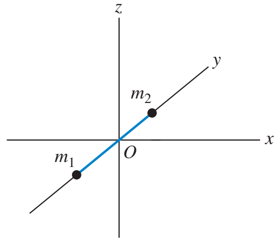
Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P9.1. ¿Cuál de las siguientes fórmulas es válida si la aceleración angular de un objeto *no* es constante? En cada caso, explique su razonamiento. *a*) $v = r\omega$; *b*) $a_{\tan} = r\alpha$; *c*) $\omega = \omega_0 + \alpha t$; *d*) $a_{\tan} = r\omega^2$; *e*) $K = \frac{1}{2}I\omega^2$.

P9.2. Una molécula diatómica puede modelarse como dos masas puntuales, m_1 y m_2, ligeramente separadas (figura 9.26). Si la molécula está orientada a lo largo del eje y, tiene energía cinética K cuando gira alrededor del eje x. ¿Cuál es su energía cinética (en términos de K) si gira con la misma rapidez angular alrededor del *a*) eje z y *b*) eje y?

Figura **9.26** Pregunta P9.2.



P9.3. ¿Qué diferencia hay entre aceleración tangencial y aceleración radial para un punto de un cuerpo que gira?

P9.4. En la figura 9.14, todos los puntos de la cadena tienen la misma rapidez lineal. ¿La magnitud de la aceleración lineal es también igual para todos esos puntos? ¿Qué relación hay entre las aceleraciones angulares de las dos ruedas dentadas? Explique su respuesta.

P9.5. En la figura 9.14, ¿qué relación hay entre las aceleraciones radiales de los puntos en los dientes de las dos ruedas? Justifique su respuesta.

P9.6. Un volante gira con velocidad angular constante. ¿Un punto en su borde tiene aceleración tangencial? ¿Y aceleración radial? ¿Estas aceleraciones tienen magnitud constante? ¿Y dirección constante? Justifique sus respuestas.

P9.7. ¿Para qué sirve el ciclo de centrifugado de una lavadora? Explique en términos de las componentes de aceleración.

P9.8. Aunque la velocidad y la aceleración angulares pueden tratarse como vectores, no sucede lo mismo con el desplazamiento angular θ, a pesar de tener magnitud y dirección, porque θ no obedece la ley conmutativa de la suma de vectores (ecuación 1.3). Demuestre esto como sigue: coloque este libro sobre un escritorio con la portada hacia arriba y de modo que pueda leer las palabras. Gire el borde lejano 90° hacia arriba y hacia usted sobre un eje horizontal. Llame a este desplazamiento θ_1. Ahora gire el borde izquierdo 90° hacia usted sobre un eje vertical. Llame a este desplazamiento θ_2. El lomo del libro deberá mirar ahora hacia usted con las palabras orientadas de modo que pueda leerlas. Ahora comience otra vez desde el principio pero realice las rotaciones en orden inverso. ¿El resultado es diferente? Es decir, ¿$\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$? Ahora repita el experimento pero con un ángulo de 1° en vez de 90°. ¿Cree que el desplazamiento infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{\theta}}$ obedece la ley conmutativa de la suma y, por lo tanto, puede considerarse un vector? De ser así, ¿qué relación hay entre la dirección de $d\vec{\boldsymbol{\theta}}$ y la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$?

P9.9. ¿Puede imaginar un cuerpo que tenga el mismo momento de inercia para todos los ejes posibles? Si es así, mencione un ejemplo; si no, explique por qué no es posible. ¿Puede imaginar un cuerpo que tenga el mismo momento de inercia para todos los ejes que pasan por cierto punto? Si es así, mencione un ejemplo e indique dónde está el punto.

P9.10. Para maximizar el momento de inercia de un volante mientras minimizamos su peso, ¿qué forma y distribución de masa debería tener? Explique su respuesta.

P9.11. ¿Cómo podría usted determinar experimentalmente el momento de inercia de un cuerpo de forma irregular alrededor de un eje dado?

P9.12. Un cuerpo cilíndrico tiene masa M y radio R. ¿La masa puede estar distribuida dentro del cuerpo de modo tal que su momento de inercia alrededor de su eje de simetría sea mayor que MR^2? Explique su respuesta.

P9.13. Describa cómo podría usar el inciso *b*) de la tabla 9.2 para deducir el resultado del inciso *d*).

P9.14. Un caparazón esférico hueco de radio R que gira alrededor de un eje que pasa por su centro tiene energía cinética rotacional K. Si usted quiere modificar esta esfera de manera que tenga tres veces más energía cinética con la misma rapidez angular manteniendo la masa igual, ¿cuál debería ser el radio en términos de R?

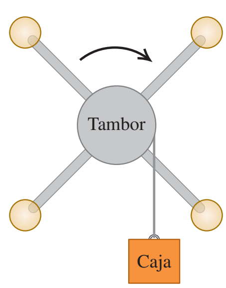
P9.15. Para que sean válidas las ecuaciones dadas en los incisos *a*) y *b*) de la tabla 9.2 para I, ¿la varilla debe tener sección transversal circular? ¿Hay alguna restricción sobre el tamaño de tal sección para que las ecuaciones sean válidas? Explique su respuesta.

P9.16. En el inciso *d*) de la tabla 9.2, el espesor de la placa debe ser mucho menor que a si se quiere que sea válida la expresión para I. En el inciso *c*), en cambio, la expresión para I es válida sin importar qué espesor tenga la placa. Explique su respuesta.

P9.17. Dos esferas idénticas A y B están unidas a un cordón muy delgado, y cada cordón está enrollado alrededor de una polea sin fricción de masa M. La única diferencia es que la polea para la esfera A es un disco sólido, en tanto que la polea para la esfera B es un disco hueco, como el del inciso *e*) de la tabla 9.2. Si ambas esferas se liberan desde el reposo y caen la misma distancia, ¿cuál tendrá mayor energía cinética? ¿O tendrán la misma? Explique su razonamiento.

P9.18. Una polea complicada consiste en cuatro esferas idénticas colocadas en los extremos de rayos que se prolongan desde un tambor giratorio (figura 9.27). Una caja está unida a una cuerda delgada y ligera que se enrolla en el borde del tambor. Cuando se libera del reposo, la caja adquiere una rapidez V después de caer una distancia d. Ahora las cuatro esferas se mueven hacia adentro más cerca del tambor, y de nuevo la caja se suelta del reposo. Después de caer una distancia d, ¿su rapidez será igual a V, mayor que V, o menor que V? Demuestre o explique por qué.

Figura 9.27 Pregunta 9.18.



P9.19. Podemos usar cualquier medida angular (radianes, grados o revoluciones) en algunas de las ecuaciones del capítulo 9; sin embargo, en otras sólo podemos usar radianes. Identifique las ecuaciones en las que es necesario usar radianes y en las que no es necesario. En cada caso, justifique sus respuestas.

P9.20. Al calcular el momento de inercia de un objeto, ¿podemos tratar toda su masa como si estuviera concentrada en el centro de masa del objeto? Justifique su respuesta.

P9.21. Una rueda gira en torno a un eje perpendicular al plano de la rueda y que pasa por el centro de la rueda. La rapidez angular de la rueda está aumentando con razón constante. El punto A está en el borde de la rueda; y el punto B, a la mitad de la distancia entre el borde y el centro. Para cada una de las cantidades siguientes, indique si su magnitud es mayor en el punto A, en el punto B o es igual en ambos puntos: *a*) rapidez angular, *b*) rapidez tangencial, *c*) aceleración angular, *d*) aceleración tangencial y *e*) aceleración radial. Justifique sus respuestas.

Ejercicios

Sección 9.1 Velocidad y aceleración angulares

9.1. *a*) ¿Qué ángulo en radianes es subtendido por un arco de 1.50 m en la circunferencia de un círculo con 2.50 m de radio? ¿Cuánto es esto en grados? *b*) Un arco de 14.0 cm de longitud en la circunferencia de un círculo subtiende un ángulo de 128°. ¿Qué radio tiene el círculo? *c*) El ángulo entre dos radios de un círculo con 1.50 m de radio es 0.700 rad. ¿Qué longitud tiene el arco delimitado en la circunferencia por estos dos radios?

9.2. Una hélice de avión gira a 1900 rpm (rev/min). *a*) Calcule su velocidad angular en rad/s. *b*) ¿Cuántos segundos tarda la hélice en girar 35°?

9.3. La velocidad angular de un volante obedece la ecuación $\omega_z(t) = A + Bt^2$, donde t está en segundos y A y B son constantes cuyos valores numéricos son 2.75 y 1.50, respectivamente. *a*) ¿Cuáles son las unidades de A y B si ω está en rad/s? *b*) ¿Cuál es la aceleración angular del volante en i) $t = 0.00$ y ii) $t = 5.00$ s? *c*) ¿Con qué ángulo gira el volante durante los primeros 2.00 s? (*Sugerencia*: véase la sección 2.6.)

9.4. Una aspa de ventilador gira con velocidad angular dada por $\omega_z(t) = \gamma - \beta t^2$, donde $\gamma = 5.00$ rad/s y $\beta = 0.800$ rad/s^3. *a*) Calcule la aceleración angular en función del tiempo. *b*) Calcule la aceleración angular instantánea α_z en $t = 3.00$ s y la aceleración angular media $\alpha_{\text{med-}z}$ para el intervalo de $t = 0$ a $t = 3.00$ s. ¿Qué diferencia hay entre ambas cantidades? Si son diferentes, ¿por qué lo son?

9.5. Un niño está empujando un carrusel (tiovivo). El ángulo que describe el carrusel al girar varía con el tiempo según $\theta(t) = \gamma t + \beta t^3$, donde $\gamma = 0.400$ rad/s y $\beta = 0.0120$ rad/s^3. *a*) Calcule la velocidad angular del carrusel en función del tiempo. *b*) ¿Qué valor inicial tiene la velocidad angular? *c*) Calcule el valor instantáneo de la velocidad angular ω_z en $t = 5.00$ s y la velocidad angular media $\omega_{\text{med-}z}$ en el intervalo de $t = 0.00$ a $t = 5.00$ s. Demuestre que $\omega_{\text{med-}z}$ *no* es igual al promedio de las velocidades angulares instantáneas en $t = 0$ y $t = 5.00$ s, y explique por qué.

9.6. En $t = 0$, se invierte la corriente de un motor eléctrico de corriente continua, causando un desplazamiento angular del eje del motor dado por $\theta(t) = (250\ \text{rad/s})t - (20.0\ \text{rad/s}^2)t^2 - (1.50\ \text{rad/s}^3)t^3$. *a*) ¿En qué instante la velocidad angular del eje del motor es cero? *b*) Calcule la aceleración angular en ese instante. *c*) ¿Cuántas revoluciones gira el eje del motor entre el momento en que se invierte la corriente y el instante en el que la velocidad angular es cero? *d*) ¿Con qué rapidez estaba girando el eje en $t = 0$, cuando se invirtió la corriente? *e*) Calcule la velocidad angular media para el periodo entre $t = 0$ y el instante calculado en el inciso *a*).

9.7. El ángulo θ que describe una unidad de disco al girar está dado por $\theta(t) = a + bt - ct^3$, donde *a*, *b* y *c* son constantes positivas, *t* está en segundos y θ está en radianes. Cuando $t = 0$, $\theta = \pi/4$ rad y la velocidad angular es 2.00 rad/s, y cuando $t = 1.50$ s, la aceleración angular es 1.25 rad/s^2. *a*) Calcule *a*, *b* y *c* con sus unidades. *b*) ¿Cuál es la aceleración angular cuando $\theta = \pi/4$ rad? *c*) ¿Cuáles son θ y la velocidad angular cuando la aceleración angular es 3.50 rad/s^2?

9.8. Una rueda gira en torno a un eje que está en la dirección *z*. La velocidad angular ω_z es de -6.00 rad/s en $t = 0.00$, aumenta linealmente con el tiempo y es de $+8.00$ m/s en $t = 7.00$ s. Se considera positiva la rotación antihoraria. *a*) ¿La aceleración angular durante este intervalo de tiempo es positiva o negativa? *b*) ¿Durante qué intervalo está aumentando la rapidez de la rueda? ¿Y disminuyendo? *c*) Determine el desplazamiento angular de la rueda en $t = 7.00$ s.

Sección 9.2 Rotación con aceleración angular constante

9.9. Una rueda de bicicleta tiene una velocidad angular inicial de 1.50 rad/s. *a*) Si su aceleración angular es constante e igual a 0.300 rad/s^2, ¿qué velocidad angular tiene en $t = 2.50$ s? *b*) ¿Qué ángulo gira la rueda entre $t = 0$ y $t = 2.50$ s?

9.10. Un ventilador eléctrico se apaga, y su velocidad angular disminuye uniformemente de 500 rev/min a 200 rev/min en 4.00 s. *a*) Calcule la aceleración angular en rev/s^2 y el número de revoluciones que el motor giró en el intervalo de 4.00 s. *b*) ¿Cuántos segundos más tardará el motor en parar, si la aceleración angular se mantiene constante en el valor calculado en el inciso *a*)?

9.11. Las aspas de una licuadora giran con aceleración angular constante de 1.50 rad/s^2. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar una velocidad angular de 36.00 rad/s, partiendo del reposo? *b*) ¿Cuántas revoluciones giran las aspas en este tiempo?

9.12. *a*) Deduzca la ecuación (9.12) combinando las ecuaciones (9.7) y (9.11) para eliminar *t*. *b*) La velocidad angular de la hélice de un avión aumenta de 12.0 rad/s a 16.0 rad/s mientras gira 7.00 rad. Calcule su aceleración angular en rad/s^2.

9.13. Una tornamesa gira con aceleración angular constante de 2.25 rad/s^2. Después de 4.00 s gira con un ángulo de 60.00 rad. ¿Cuál era la velocidad angular de la rueda al empezar el intervalo de 4.00 s?

9.14. Una hoja de sierra circular de 0.200 m de diámetro parte del reposo y acelera con aceleración angular constante hasta una velocidad angular de 140 rad/s en 6.00 s. Calcule la aceleración angular y el ángulo que ha girado la hoja.

9.15. El volante de un motor de alta rapidez giraba a 500 rpm cuando se interrumpió la alimentación eléctrica. El volante tiene una masa de 40.0 kg y un diámetro de 75.0 cm. El motor no recibe electricidad durante 30.0 s y, durante ese lapso, el volante pierde rapidez por la fricción con los cojinetes de su eje, describiendo 200 revoluciones completas. *a*) ¿Con qué rapidez está girando el volante cuando se restablece la alimentación eléctrica? *b*) ¿En cuánto tiempo después de la interrupción del suministro se habría parado el volante, si el suministro no se hubiera restablecido, y cuántas revoluciones habría girado la rueda en ese tiempo?

9.16. Una unidad de disco de computadora se enciende partiendo del reposo y tiene aceleración angular constante. Si a la unidad le lleva 0.750 s realizar su *segunda* revolución completa, *a*) ¿cuánto tiempo le tomó efectuar su primera revolución completa?, y *b*) ¿cuál es su aceleración angular en rad/s^2?

9.17. Un dispositivo de seguridad detiene la hoja de una podadora eléctrica, que tenía una rapidez angular inicial ω_1, en 1.00 revolución. Con la misma aceleración constante, ¿cuántas revoluciones tardaría la hoja en parar, si la rapidez angular inicial ω_3 fuera el triple: $\omega_3 = 3\omega_1$?

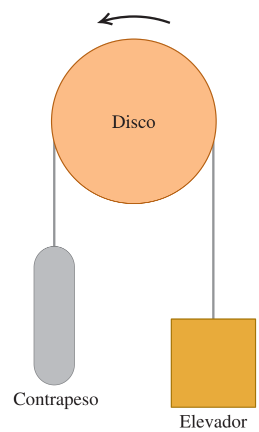
9.18. Un trozo recto de cinta reflejante se extiende del centro de una rueda a su borde. Imagine que oscurece el cuarto y usa una cámara y una lámpara estroboscópica con destellos cada 0.050 s para fotografiar la rueda que gira en sentido antihorario. Se acciona la lámpara de modo que el primer destello ($t = 0$) se da cuando la cinta está horizontal a la derecha con un desplazamiento angular de cero. Para las siguientes situaciones, dibuje la fotografía que obtendría después de cinco destellos (en $t = 0$, 0.050 s, 0.100 s, 0.150 s y 0.200 s) y grafique θ contra *t* y ω contra *t* para el intervalo entre $t = 0$ y $t = 0.200$ s. *a*) La velocidad angular es de 10.0 rev/s (constante). *b*) La rueda parte del reposo con aceleración angular constante de 25.0 rev/s^2. *c*) La rueda gira a 10.0 rev/s en $t = 0$ y cambia su velocidad angular a una razón constante de -50.0 rev/s^2.

9.19. En $t = 0$, la velocidad angular de una rueda de afilar era de 24.0 rad/s, y tuvo una aceleración angular constante de 30.0 rad/s^2, hasta que un interruptor de circuito se abrió en $t = 2.00$ s. A partir de ese momento, la rueda giró 432 rad con aceleración angular constante hasta parar. *a*) ¿Qué ángulo total giró la rueda entre $t = 0$ y el instante en que se detuvo? *b*) ¿En qué tiempo se detuvo? *c*) ¿Qué aceleración tenía al irse frenando?

Sección 9.3 Relación entre cinemática lineal y angular

9.20. En un encantador hotel del siglo XIX, un elevador antiguo está conectado a un contrapeso mediante un cable que pasa por un disco giratorio con 2.50 m de diámetro (figura 9.28). El elevador sube y baja al girar el disco, y el cable no se desliza en el borde del disco, más bien gira con él. *a*) ¿Con cuantas rpm debe girar el disco para subir 25.0 cm/s el elevador? *b*) Para empezar a mover el elevador, éste debe acelerarse a $\frac{1}{8}g$. ¿Cuál debe ser la aceleración angular del disco en rad/s^2? *c*) ¿Con qué ángulo (en radianes y grados) el disco gira cuando éste sube el elevador 3.25 m entre pisos?

Figura 9.28 Ejercicio 9.20.



9.21. Con los datos astronómicos del Apéndice F, junto con el hecho de que la Tierra gira sobre su propio eje una vez al día, calcule *a*) la rapidez angular orbital de la Tierra (en rad/s) debida a su movimiento alrededor del Sol, *b*) su rapidez angular (en rad/s) debida a su giro axial, *c*) la rapidez tangencial de la Tierra alrededor del Sol (suponiendo una órbita circular), *d*) la rapidez tangencial de un punto en el ecuador terrestre debido al giro, y *e*) las componentes de la aceleración radial y tangencial del punto del inciso *d*).

9.22. Disco compacto. Un disco compacto (CD) almacena música en un patrón codificado de hoyos diminutos de 10^{-7} m de profundidad, dispuestos en una pista espiral que va desde el centro hasta el borde del disco. Los radios interior y exterior de la espiral son de 25.0 mm y 58.0 mm, respectivamente. Dentro del reproductor de CD, mientras el disco gira la pista es barrida con rapidez *lineal* constante de 1.25 m/s. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene el CD cuando se barre la parte interior de la pista? ¿Y la parte exterior? *b*) La duración máxima de un CD es de 74.0 min. ¿Qué longitud tendría la pista de tal CD si se estirara en línea recta? *e*) ¿Qué aceleración angular media tiene un CD de máxima duración durante los 74.0 min? Tome la dirección de rotación del disco como positiva.

9.23. Una rueda con diámetro de 40.0 cm parte del reposo y gira con una aceleración angular constante de 3.00 rad/s^2. En el instante en que la rueda ha completado su segunda revolución, calcule la aceleración radial de un punto en el borde de dos maneras: *a*) usando la relación $a_{rad} = \omega^2 r$ y *b*) a partir de la relación $a_{rad} = v^2/r$.

9.24. Ultracentrífuga. Calcule la rapidez angular (en rpm) que debe tener una ultracentrífuga para que la aceleración radial en un punto a 2.50 cm del eje sea de 400,000 *g* (es decir, 400,000 veces la aceleración debida a la gravedad).

9.25. Un volante con radio de 0.300 m parte del reposo y acelera con aceleración angular constante de 0.600 rad/s^2. Calcule la magnitud de las aceleraciones tangencial y radial, así como de la aceleración resultante de un punto en su borde *a*) al principio; *b*) después de girar 60.0°; *c*) después de girar 120.0°.

9.26. Un ventilador eléctrico de 0.750 m de diámetro, instalado en el techo, gira sobre un eje fijo con velocidad angular inicial de 0.250 rev/s. La aceleración angular es constante de 0.900 rev/s^2. *a*) Calcule la velocidad angular del ventilador después de 0.200 s. *b*) ¿Cuántas revoluciones giró una aspa en este tiempo? *c*) ¿Qué rapidez tangencial tiene un punto en la punta del aspa en $t = 0.200$ s? *d*) ¿Qué magnitud tiene la aceleración *resultante* de un punto en la punta del aspa en $t = 0.200$ s?

9.27. Centrífuga. En un anuncio se asegura que una centrífuga sólo ocupa 0.127 m de espacio en una mesa, pero puede producir una aceleración radial de 3000 *g* a 5000 rpm. Calcule el radio que debe tener la centrífuga. ¿Es verosímil la afirmación del anuncio?

9.28. *a*) Deduzca una ecuación para la aceleración radial que incluya v y ω pero no r. *b*) Imagine que está diseñando un carrusel, donde un punto en el borde tendrá una aceleración radial de 0.500 m/s^2 cuando la velocidad tangencial en ese punto sea de 2.00 m/s. ¿Qué velocidad angular se necesita para lograr estos valores?

9.29. Perforación eléctrica. Según el manual del usuario, para hacer un agujero de 12.7 mm de diámetro en madera, plástico o aluminio, se recomienda una rapidez del taladro de 1250 rev/min. Para una broca de 12.7 mm de diámetro que gira a 1250 rev/min (constantes), calcule *a*) la rapidez lineal máxima de cualquier punto de la broca; *b*) la aceleración radial máxima de cualquier punto de la broca.

9.30. En $t = 3.00$ s, un punto en el borde de una rueda con radio de 0.200 m tiene una rapidez tangencial de 50.0 m/s, mientras la rueda se frena con aceleración tangencial de magnitud constante de 10.0 m/s^2. *a*) Calcule la aceleración angular constante de la rueda. *b*) Calcule las velocidades angulares en $t = 3.00$ s y $t = 0$. *c*) ¿Qué ángulo giró la rueda entre $t = 0$ y $t = 3.00$ s? *d*) ¿En qué instante la aceleración radial es igual a *g*?

9.31. Los ciclos de centrifugado de una lavadora tienen dos rapideces angulares, 423 rev/min y 640 rev/min. El diámetro interno del tambor es de 0.470 m. *a*) ¿Qué relación hay entre la fuerza radial máxima sobre la ropa para las dos rapideces angulares? *b*) ¿Y entre las rapideces tangenciales máximas de la ropa? *c*) Calcule la rapidez tangencial máxima de la ropa y la aceleración radial máxima en términos de *g*.

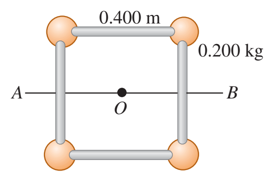
9.32. Imagine que usted debe diseñar un eje cilíndrico giratorio para levantar cubetas de cemento con un peso de 800 N, desde el suelo hasta una azotea a 78.0 m sobre el suelo. Las cubetas se colgarán de un gancho en el extremo libre de un cable que se enrolla en el eje; al girar este eje, las cubetas ascienden. *a*) ¿Qué diámetro debe tener el eje para levantar las cubetas con rapidez constante de 2.00 cm/s mientras gira a 7.5 rpm? *b*) Si el eje debe impartir a las cubetas una aceleración hacia arriba de 0.400 m/s^2, ¿qué aceleración angular deberá tener el eje?

9.33. Al montar una bicicleta de varias velocidades, el ciclista puede seleccionar el radio de la rueda dentada trasera, que está fija al eje trasero. La rueda dentada delantera tiene 12.0 cm de radio. Si la rapidez angular de la rueda dentada delantera es de 0.600 rev/s, ¿qué radio tiene la rueda dentada trasera con la que la rapidez tangencial de un punto en el borde del neumático trasero es de 5.00 m/s? El neumático tiene 0.330 m de radio.

Sección 9.4 Energía en el movimiento rotacional

9.34. Cuatro esferas pequeñas, que pueden considerarse como puntos con masa de 0.200 kg cada una, están dispuestas en un cuadrado de 0.400 m de lado, conectadas por varillas muy ligeras (figura 9.29). Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje *a*) que pasa por el centro del cuadrado, perpendicular a su plano (que pasa por *O* en la figura); *b*) que biseca el cuadrado (pasa por la línea *AB* en la figura); *c*) que pasa por los centros de las esferas superior izquierda e inferior derecha y por el punto *O*.

Figura 9.29 Ejercicio 9.34.



9.35. Calcule el momento de inercia de cada uno de los siguientes objetos uniformes en torno a los ejes indicados. Consulte la tabla 9.2 si lo requiere. *a*) Una varilla delgada de 2.50 kg con longitud de 75.0 cm, alrededor de un eje perpendicular a ella y que pasa por i) un extremo, ii) su centro y iii) alrededor de un eje paralelo a la varilla y que pasa por ella. *b*) Una esfera de 3.00 kg con diámetro de 38.0 cm, alrededor de un eje que pasa por su centro, si la esfera i) es sólida y ii) es un caparazón hueco de pared delgada. *c*) Un cilindro de 8.00 kg con longitud de 19.5 cm y diámetro de 12.0 cm, alrededor del eje central de un cilindro, si el cilindro es i) hueco de pared delgada y ii) sólido.

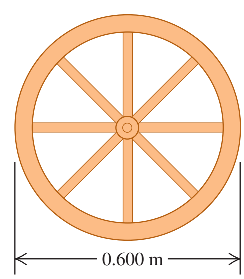
9.36. Bloques pequeños de masa *m* están sujetos en los extremos y el centro de una varilla ligera de longitud *L* y masa despreciable. Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por *a*) el centro y *b*) un punto a un cuarto de su longitud.

9.37. Dos esferas pequeñas están pegadas a los extremos de una barra uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 4.00 kg. Las esferas tienen masa de 0.500 kg cada una y se pueden tratar como masas puntuales. Calcule el momento de inercia de esta combinación en torno a cada uno de los ejes siguientes: *a*) un eje perpendicular a la barra que pasa por su centro; *b*) un eje perpendicular a la barra que pasa por una de las esferas; *c*) un eje paralelo a la barra que pasa por ambas esferas; *d*) un eje paralelo a la barra que está a 0.500 m de ella.

9.38. El bastón de una bastonera es un cilindro metálico delgado de masa *M* y longitud *L*. Cada extremo tiene una tapa de hule de masa *m*, que puede tratarse como partícula en este problema. Calcule el momento de inercia total del bastón alrededor del eje de giro usual (perpendicular al bastón y por su centro).

9.39. Una rueda de carreta (figura 9.30) tiene un radio de 0.300 m y la masa de su borde es de 1.40 kg. Cada rayo, que está sobre un diámetro y tie-

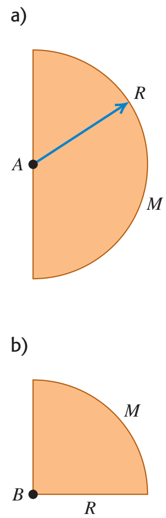
Figura 9.30 Ejercicio 9.39.



ne 0.300 m de longitud, tiene una masa de 0.280 kg. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su plano? (Use las fórmulas de la tabla 9.2.)

9.40. Un disco uniforme con radio R se corta a la mitad de manera que la mitad que queda tiene masa M (figura 9.31a). *a*) ¿Cuál es el momento de inercia de esta mitad alrededor de un eje perpendicular a su plano por el punto A? *b*) ¿Por qué su respuesta al inciso *a*) resultó igual que si se tratara de un disco completo de masa M? *c*) ¿Cuál sería el momento de inercia de un cuarto del disco de masa M y radio R alrededor de un eje perpendicular a su plano que pasa por el punto B (figura 9.31b)?

Figura 9.31 Ejercicio 9.40.



9.41. Un disco compuesto con diámetro exterior de 140.0 cm está hecho de un material sólido y uniforme de 50.0 cm de radio, con densidad de área de 3.00 g/cm^2 rodeada por un anillo concéntrico, cuyo radio interior es de 50.0 cm y radio exterior de 70.0 cm con densidad de área de 2.00 g/cm^2. Calcule el momento de inercia de este objeto alrededor de un eje perpendicular al plano del objeto y que pasa por su centro.

9.42. Una hélice de avión tiene un diámetro de 2.08 m (de punta a punta) y masa de 117 kg, y gira a 2400 rpm (rev/min) alrededor de un eje que pasa por su centro. Trate la hélice como varilla delgada. *a*) ¿Qué energía cinética rotacional tiene? *b*) Suponga que, debido a restricciones de peso, usted tuviera que reducir la masa de la hélice a 75.0% de su masa original, pero siguiera requiriendo los mismos tamaño y energía cinética. ¿Cuál tendría que ser su rapidez angular en rpm?

9.43. ¿Energía proveniente de la Luna? Suponga que en algún momento en el futuro decidimos aprovechar la energía rotacional de la Luna para su uso en la Tierra. Además de los datos astronómicos del Apéndice F, tal vez usted necesite saber que la Luna gira sobre su eje una vez cada 27.3 días. Suponga que la Luna es completamente homogénea. *a*) ¿Cuánta energía total podríamos obtener de la rotación lunar? *b*) En la actualidad nuestro planeta utiliza aproximadamente 4.0×10^{20} J de energía anualmente. Si en el futuro la Tierra usara cinco veces más energía cada año, ¿cuántos años de rotación lunar nos abastecerían de energía? De acuerdo con su respuesta, ¿se trataría de una fuente de energía atractiva para invertir según la relación costo-beneficio?

9.44. Usted necesita diseñar una tornamesa industrial de 60.0 cm de diámetro con energía cinética de 0.250 J cuando gira a 45.0 rpm (rev/min). *a*) ¿Cuál debe ser el momento de inercia de la tornamesa alrededor de su eje de rotación? *b*) Si su taller elabora dicha tornamesa con la forma de un disco uniforme sólido, ¿cuál debe ser su masa?

9.45. El volante de un motor de gasolina debe ceder 500 J de energía cinética, cuando su velocidad angular se reduce de 650 rev/min a 520 rev/min. ¿Qué momento de inercia se requiere?

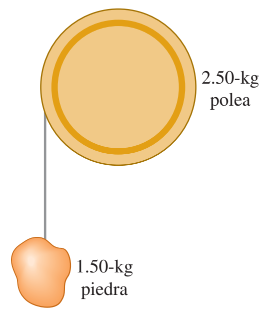
9.46. Una cuerda ligera y flexible se enrolla varias veces en un cilindro *hueco* con peso de 40.0 N y radio de 0.25 m, que gira sin fricción sobre un eje horizontal fijo. El cilindro está unido al eje mediante rayos cuyo momento de inercia es despreciable, e inicialmente está en reposo. Se tira del extremo libre de la cuerda con fuerza constante P una distancia de 5.00 m, punto en el cual la cuerda se está moviendo a 6.00 m/s. Si la cuerda no resbala sobre el cilindro, ¿cuánto vale P?

9.47. Se almacenará energía en un volante con forma de disco sólido uniforme con radio $R = 1.20$ m y masa de 70.0 kg. Para evitar que falle estructuralmente el volante, la aceleración radial máxima permitida de un punto en su borde es de 3500 m/s^2. ¿Qué energía cinética máxima puede almacenarse en el volante?

9.48. Suponga que el cilindro sólido del aparato del ejemplo 9.9 (sección 9.4) se sustituye por un cilindro hueco de paredes delgadas, con la misma masa M y radio R. El cilindro está unido al eje mediante rayos cuyo momento de inercia es despreciable. *a*) Calcule la rapidez de la masa colgante m justo antes de golpear el piso. *b*) Utilice los conceptos de energía para explicar por qué la respuesta al inciso *a*) es diferente de la rapidez calculada en el ejemplo 9.9.

9.49. Una polea sin fricción tiene la forma de un disco sólido uniforme de masa 2.50 kg y radio 20.0 cm. Una piedra de 1.50 kg se une a un alambre muy delgado que se enrolla alrededor del borde de la polea (figura 9.32), y el sistema se libera del reposo. *a*) ¿Qué tan lejos debe caer la piedra para que la polea tenga 4.50 J de energía cinética? *b*? ¿Qué porcentaje de la energía cinética total tiene la polea?

Figura 9.32 Ejercicio 9.49.



9.50. Una cubeta de masa m se ata a un cable sin masa que se enrolla alrededor del borde exterior de una polea uniforme sin fricción de radio R, similar al sistema que se presenta en la figura 9.32. En términos de las variables indicadas, ¿cuál debe ser el momento de inercia de la polea, de forma que siempre tenga la mitad de la energía cinética de la cubeta?

9.51. Cambio de escala de *I*. Si multiplicamos todas las dimensiones de diseño de un objeto por un factor de escala f, su volumen y masa se multiplicarán por f^3. *a*) ¿Por qué factor se multiplicará su momento de inercia? *b*) Si un modelo a escala $\frac{1}{48}$ tiene una energía cinética rotacional de 2.5 J, ¿cuánto valdrá la del objeto a escala normal hecho con el mismo material y girando con la misma velocidad angular?

9.52. Una escalera uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 9.00 kg está apoyada contra un muro vertical formando un ángulo de 53° con el piso. Un trabajador empuja la escalera contra la pared hasta que queda vertical. ¿Cuánto trabajo realizó esa persona contra la gravedad?

9.53. Una cuerda uniforme de 3.00 kg y 24.0 m de longitud está en el suelo en la cima de un risco vertical. En la cima un alpinista desciende hasta la mitad de la cuerda, para ayudar a su compañero a subir el acantilado. ¿Cuál fue el cambio en la energía potencial de la cuerda durante esta maniobra?

Sección 9.5 Teorema de los ejes paralelos

9.54. Calcule el momento de inercia de un aro (anillo hueco de paredes delgadas) con masa M y radio R, alrededor de un eje perpendicular al plano del aro y que pasa por un borde.

9.55. ¿Alrededor de qué eje tendrá una esfera uniforme de madera, el mismo momento de inercia que tiene una esfera hueca de plomo con los mismos valores de masa y radio alrededor de un eje que pasa por su diámetro?

9.56. Use el teorema de los ejes paralelos para demostrar que los momentos de inercia dados en los incisos *a*) y *b*) de la tabla 9.2 son congruentes.

9.57. Una lámina de acero rectangular delgada tiene lados que miden a y b y una masa de M. Use el teorema de los ejes paralelos para calcular el momento de inercia de la lámina alrededor de un eje perpendicular al plano de la lámina y que pasa por una esquina de ésta.

9.58. *a*) Para la lámina rectangular delgada que se muestra en el inciso *d*) de la tabla 9.2, calcule el momento de inercia en torno a un eje que está en el plano de la placa, pasa por el centro de la placa y es paralelo al eje que se muestra en la figura. *b*) Calcule el momento de inercia de la placa en torno a un eje que está en el plano de la placa, pasa por el centro de la placa y es perpendicular al eje del inciso *a*).

9.59. Una varilla delgada uniforme de masa M y longitud L se dobla por su centro de manera que los dos segmentos son ahora perpendiculares entre sí. Encuentre el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por *a*) el punto donde se cruzan los dos segmentos y *b*) el punto medio de la recta que conecta los dos extremos.

*Sección 9.6 Cálculos de momento de inercia

***9.60.** Utilizando la información de la tabla 9.2 y el teorema de los ejes paralelos, calcule el momento de inercia de la varilla delgada de masa M y longitud L de la figura 9.23 alrededor de un eje que pasa por O, a una distancia arbitraria h de un extremo. Compare su resultado con el obtenido por integración en el ejemplo 9.11 (sección 9.6).

***9.61.** Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de un disco sólido uniforme de masa M y radio R alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por el centro.

***9.62.** Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de una varilla delgada uniforme con masa M y longitud L alrededor de un eje en un extremo, perpendicular a la varilla.

***9.63.** La masa por unidad de longitud de una varilla delgada de longitud L varía con la distancia al extremo izquierdo, donde $x = 0$, según $dm/dx = \gamma x$, donde γ tiene unidades de kg/m^2. *a*) Calcule la masa total de la varilla en términos de γ y L. *b*) Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de la varilla para un eje en el extremo izquierdo, perpendicular a la varilla. Use la expresión que dedujo en el inciso *a*) para expresar I en términos de M y L. Compare su resultado con el de una varilla uniforme y explique las diferencias. *c*) Repita el inciso *b*) para un eje en el extremo derecho de la varilla y compare los resultados de los incisos *b*) y *c*). Explique las diferencias.

Problemas

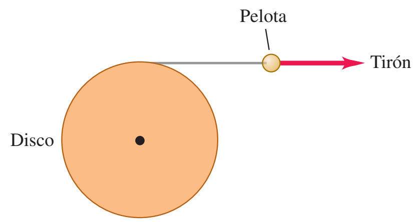
9.64. Dibuje una rueda que yace en el plano del papel y gira en sentido antihorario. Elija un punto en el borde y dibuje un vector $\vec{r}$ del centro de la rueda a ese punto. *a*) ¿Qué dirección tiene $\vec{\omega}$? *b*) Demuestre que la velocidad del punto es $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. *c*) Demuestre que la aceleración radial del punto es $\vec{a}_{\text{rad}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ (véase el ejercicio 9.28).

9.65. Viaje a Marte. Imagine que trabaja en un proyecto de la NASA para enviar un cohete a Marte. El cohete despegará de la Tierra cuando ésta y Marte estén alineados con el Sol. Si en este momento Marte está 60° adelante de la Tierra en su órbita alrededor del Sol, ¿cuándo debería lanzarse el cohete? (*Nota*: todos los planetas giran en torno al Sol en la misma dirección, y 1 año marciano equivale a 1.9 años terrestres; suponga que los dos planetas tienen órbita circular.)

9.66. Un rodillo de una imprenta gira un ángulo dado por $\theta(t) = \gamma t^2 - \beta t^3$, donde $\gamma = 3.20\ \text{rad/s}^2$ y $\beta = 0.500\ \text{rad/s}^3$. *a*) Calcule la velocidad angular del rodillo en función del tiempo. *b*) Calcule la aceleración angular del rodillo en función del tiempo. *c*) ¿Cuál es la máxima velocidad angular positiva que alcanza, y en qué instante t ocurre esto?

***9.67.** Un disco con radio de 25.0 cm tiene libertad para girar en torno a un eje perpendicular a él que pasa por su centro. Tiene un cordel delgado pero fuerte enrollado alrededor de su borde, y el cordel está unido a una pelota de la que se tira tangencialmente para alejarla del borde del disco (figura 9.33). El tirón aumenta en magnitud y produce una aceleración de la pelota que obedece la ecuación $a(t) = At$, donde t está en segundos y A es constante. El cilindro parte del reposo y al final del tercer segundo, la aceleración de la pelota es de $1.80\ \text{m/s}^2$. *a*) Calcule A. *b*) Exprese la aceleración angular del disco en función del tiempo. *c*) ¿Cuánto tiempo después de que el disco comenzó a girar alcanzará una rapidez angular de 15.0 rad/s? *d*) ¿Con qué ángulo ha girado el disco justo cuando alcanza 15.0 rad/s? (*Sugerencia:* véase la sección 2.6.)

Figura 9.33 Problema 9.67.

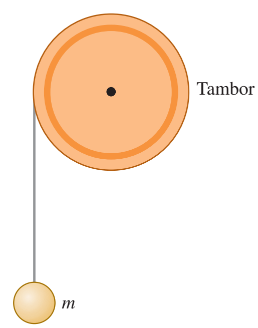


9.68. Cuando un coche de juguete de 0.180 kg y 15.0 cm de longitud es empujado rápidamente por el piso, almacena energía en su volante que tiene un momento de inercia de $4.00 \times 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. La publicidad asegura que el cochecito se puede hacer viajar con una rapidez a escala de hasta 700 km/h. La rapidez a escala es la rapidez del coche de juguete multiplicada por el cociente de la longitud de un automóvil real entre la longitud del juguete. Suponga que un automóvil real mide 3.0 m. *a*) Con una rapidez a escala de 700 km/h, ¿qué rapidez traslacional real tiene el coche? *b*) Si toda la energía cinética que está inicialmente en el volante se convierte en energía cinética traslacional del juguete, ¿cuánta energía se almacenó en el volante? *c*) ¿Qué velocidad angular inicial del volante se necesitó para almacenar la energía calculada en el inciso *b*)?

9.69. Un automóvil Chevrolet Corvette clásico modelo 1957, con masa de 1240 kg, parte del reposo y tiene una aceleración tangencial constante de $3.00\ \text{m/s}^2$ en una pista circular de prueba con radio de 60.0 m. Trate el auto como partícula. *a*) ¿Qué aceleración angular tiene? *b*) ¿Qué rapidez angular tiene 6.00 s después de arrancar? *c*) ¿Qué aceleración radial tiene en este instante? *d*) Dibuje una vista superior de la pista circular, el auto, el vector de velocidad y las componentes del vector de la aceleración a los 6.00 s. *e*) ¿Qué magnitudes tienen la aceleración total y la fuerza neta del auto en este instante? *f*) ¿Qué ángulo forman estos vectores con la velocidad del auto a los 6.00 s?

9.70. Unos ingenieros están diseñando un sistema en el que una masa m, al caer, imparte energía cinética a un tambor uniforme giratorio, al cual está unida con un alambre delgado y muy ligero que está enrollado alrededor del borde del tambor (figura 9.34). No hay fricción considerable en el eje del tambor y todo el sistema parte del reposo. Este sistema se probó en la Tierra, pero debe utilizarse en Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es de $3.71\ \text{m/s}^2$. En las pruebas en la Tierra, cuando m es de 15.0 kg y se le permite caer una distancia de 5.00 m, imparte 250.0 J de energía cinética al tambor. *a*) Si el sistema se opera en Marte, ¿qué distancia tendría que caer la masa de 15.0 kg para impartir la misma cantidad de energía cinética al tambor? *b*) ¿Con qué rapidez se moverá la masa de 15.0 kg en Marte justo cuando el tambor gane 250.0 J de energía cinética?

Figura 9.34 Problema 9.70.



9.71. La banda de una aspiradora pasa por un eje con 0.45 cm de radio y una rueda con 2.00 cm de radio. La disposición de estas piezas es similar a la de la cadena y las ruedas dentadas de la figura 9.14. El motor gira el eje a 60.0 rev/s, y la banda gira la rueda, que se conecta mediante otro eje al rodillo que saca el polvo de la alfombra que se está limpiando. Suponga que la banda no resbala ni en el eje ni en la rueda. *a*) ¿Qué rapidez tiene un punto en la banda? *b*) ¿Qué velocidad angular tiene la rueda en rad/s?

9.72. El motor de una sierra circular gira a 3450 rev/min. Una polea conectada al eje del motor impulsa una segunda polea con la mitad del diámetro mediante una correa en "V". Una hoja de 0.208 m de diámetro está montada en el mismo eje giratorio que la segunda polea. *a*) El operador se descuida y la hoja atrapa y lanza hacia atrás un trocito de madera, el cual se mueve con rapidez lineal igual a la rapidez tangencial del borde de la hoja. Calcule dicha rapidez. *b*) Calcule la aceleración radial de un punto en el borde exterior de la hoja para saber por qué el aserrín no se adhiere a los dientes.

9.73. Una rueda cambia su velocidad angular con una aceleración angular constante, al girar sobre un eje fijo que pasa por su centro. *a*) Demuestre que el cambio de magnitud de la aceleración radial de un punto de la rueda, durante cualquier lapso, es el doble del producto de la aceleración angular, el desplazamiento angular y la distancia perpendicular del punto al eje. *b*) La aceleración radial de un punto de la rueda a 0.250 m del eje cambia de 25.0 m/s^2 a 85.0 m/s^2 mientras la rueda gira 15.0 rad. Calcule la aceleración tangencial de este punto. *c*) Demuestre que el cambio de energía cinética de la rueda durante cualquier lapso es el producto del momento de inercia alrededor del eje, la aceleración angular y el desplazamiento angular. *d*) Durante el desplazamiento angular de 15.0 rad del inciso *b*), la energía cinética de la rueda aumenta de 20.0 J a 45.0 J. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda en torno al eje de rotación?

9.74. Una esfera consiste en un centro esférico sólido de madera con densidad de 800 kg/m^3 y radio de 0.20 m, cubierto por una capa delgada de plomo con densidad por área de 20 kg/m^2. Calcule el momento de inercia de esta esfera en torno a un eje que pasa por su centro.

9.75. Estime el momento de inercia de usted en torno a un eje vertical que pasa por el centro de la parte superior de la cabeza, estando parado en posición erguida y con los brazos extendidos a los lados. Haga aproximaciones razonables, y mida o estime las cantidades necesarias.

9.76. Una varilla uniforme de 50.0 cm de longitud y masa de 0.320 kg se dobla en su centro para darle forma de V, con un ángulo de 70.0° en su vértice. Calcule el momento de inercia de este objeto en torno a un eje perpendicular al plano de la V y que pasa por su vértice.

9.77. Se ha sugerido que las plantas eléctricas deberían aprovechar las horas de bajo consumo (por ejemplo, después de media noche) para generar energía mecánica y almacenarla hasta que se necesite durante los periodos de carga máxima, como a medio día. Una propuesta consiste en almacenar la energía en enormes volantes que giren sobre cojinetes casi sin fricción. Considere un volante de hierro (con densidad de 7800 kg/m^3) con forma de disco uniforme de 10.0 cm de espesor. *a*) ¿Qué diámetro debería tener semejante disco para almacenar 10.0 megajoules de energía cinética al girar a 90.0 rpm en torno a un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro? *b*) ¿Qué aceleración centrípeta tendría un punto en su borde al girar con esta rapidez?

9.78. Al diseñar el motor para un cohete, usted desea reducir su peso remplazando una pieza esférica sólida con una coraza esférica hueca del mismo tamaño. Las piezas giran alrededor de un eje que pasa por su centro. Usted necesita asegurarse de que la pieza nueva siempre tenga la misma energía cinética de rotación que la pieza original tenía a cualquier tasa de rotación dada. Si la pieza original tenía una masa *M*, ¿cuál debe ser la masa de la pieza nueva?

9.79. La Tierra, que no es una esfera uniforme, tiene un momento de inercia de $0.3308MR^2$ alrededor de un eje que pasa por sus polos. La Tierra tarda 86,164 s en dar una revolución. Use el Apéndice F para calcular *a*) la energía cinética de la Tierra debida a esta rotación y *b*) la energía cinética de la Tierra debida a su movimiento orbital en torno al Sol. *c*) Explique cómo sabemos, por el valor el momento de inercia de la Tierra, que su masa está concentrada en su centro.

9.80. Un disco sólido uniforme de masa *m* y radio *R* pivotea sobre un eje horizontal que pasa por su centro, y un objeto pequeño con la misma masa *m* se sujeta al borde del disco. Si el disco se suelta del reposo con el objeto en el extremo de un radio horizontal, calcule la rapidez angular cuando el objeto esté directamente abajo del eje.

9.81. Un anuncio metálico de una concesionaria automotriz es un triángulo rectángulo delgado y uniforme con base de longitud *b* y altura *h*. La masa del anuncio es *M*. *a*) Calcule su momento de inercia para la rotación en torno al cateto de longitud *h*? *b*) Si $M = 5.40$ kg, $b = 1.60$ m y $h = 1.20$ m, ¿qué energía cinética tiene el letrero cuando está girando a 2.00 rev/s en torno a un eje que coincide con el cateto de 1.20 m?

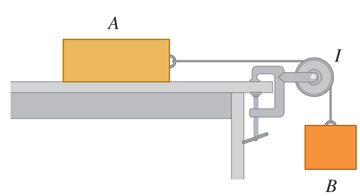
9.82. Medición de *I*. Imagine que trabaja como pasante en una empresa de ingenieros y le piden que mida el momento de inercia de una rueda grande, que gire en torno a un eje que pasa por su centro. Dado que usted fue buen estudiante de física, sabe lo que debe hacer. Mide la rueda y determina que su diámetro es de 0.740 m y que tiene un peso de 280 N. Luego monta la rueda, empleando cojinetes sin fricción, en un eje horizontal que pasa por el centro de la rueda. Enrolla una cuerda ligera en el borde de la rueda y cuelga una masa de 8.00 kg del extremo libre, como se muestra en la figura 9.18. Ahora suelta la masa desde el reposo; la masa desciende y la rueda gira mientras la cuerda se desenrolla. Usted determina que la masa tiene una rapidez de 5.00 m/s después de haber descendido 2.00 m. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la rueda para un eje perpendicular que pasa por su centro? *b*) Su jefe le dice que se requiere un *I* más grande y le pide diseñar una rueda con la misma masa y radio que tenga $I = 19.0 \ kg \cdot m^2$. ¿Qué le contesta usted?

9.83. Un metro de 0.160 kg pivotea sobre un extremo, de manera que puede girar sin fricción alrededor de un eje horizontal. El metro se sostiene en posición horizontal y se suelta. Al pasar por la vertical, calcule *a*) el cambio de energía potencial gravitacional que haya ocurrido; *b*) la rapidez angular del metro; *c*) la rapidez lineal del extremo opuesto al eje. *d*) Compare la respuesta del inciso *c*) con la rapidez de una partícula que ha caído 1.00 m desde el reposo.

9.84. Exactamente una vuelta de una cuerda flexible de masa *m* está enrollada en un cilindro uniforme de masa *M* y radio *R*, que gira sin fricción sobre un eje horizontal a lo largo del eje del cilindro. Un extremo de la cuerda está sujeto al cilindro, el cual inicia con rapidez angular ω_0. Después de una revolución, la cuerda se ha desenrollado y cuelga verticalmente, tangente al cilindro. Calcule la rapidez angular del cilindro y la rapidez lineal del extremo inferior de la cuerda en este instante. Puede ignorar el espesor de la cuerda. (*Sugerencia:* use la ecuación (9.18).)

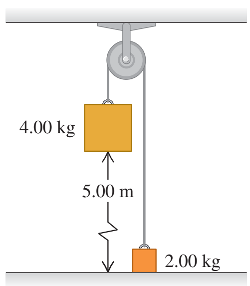
9.85. La polea de la figura 9.35 tiene radio *R* y momento de inercia *I*. La cuerda no resbala sobre la polea y ésta gira sobre un eje sin fricción. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque *A* y la mesa es μ_k. El sistema se suelta del reposo y el bloque *B* desciende. La masa de *A* es m_A; y la de *B*, m_B. Use métodos de energía para calcular la rapidez de *B* en función de la distancia *d* que ha descendido.

Figura 9.35 Problema 9.85.



9.86. La polea de la figura 9.36 tiene 0.160 m de radio y su momento de inercia es de $0.480\ \mathrm{kg \cdot m^2}$. La cuerda no resbala en la polea. Use métodos de energía para calcular la rapidez del bloque de 4.00 kg justo antes de golpear el piso.

Figura 9.36 Problema 9.86.

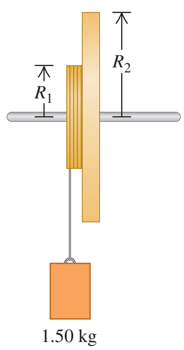


9.87. Se cuelga un aro delgado de radio R de un clavo. El aro se desplaza lateralmente (dentro de su plano) un ángulo β con respecto a su posición de equilibrio y se suelta. ¿Qué rapidez angular tiene al volver a su posición de equilibrio? (*Sugerencia:* use la ecuación (9.18).)

9.88. Un autobús en Zurich, Suiza, obtenía su potencia motriz de la energía almacenada en un volante grande, cuya rapidez se aumentaba periódicamente, cuando el autobús hacía una parada, con un motor eléctrico que entonces podía conectarse a las líneas eléctricas. El volante era un cilindro sólido con masa de 1000 kg y 1.80 m de diámetro; su rapidez angular máxima era de 3000 rev/min. *a*) Con esta rapidez angular, ¿qué energía cinética tiene el volante? *b*) Si la potencia media que requería el autobús era de 1.86×10^4 W, ¿cuánto tiempo podía operar entre paradas?

9.89. Dos discos metálicos, con radios $R_1 = 2.50$ cm y $R_2 = 5.00$ cm, y masas $M_1 = 0.80$ kg y $M_2 = 1.60$ kg, se sueldan juntos y se montan en un eje sin fricción que pasa por su centro común (figura 9.37). *a*) ¿Qué momento de inercia total tienen los discos? *b*) Un cordón ligero se enrolla en el disco más chico y se cuelga de él un bloque de 1.50 kg. Si el bloque se suelta del reposo a una altura de 2.00 m sobre el piso, ¿qué rapidez tiene justo antes de golpear el piso? *c*) Repita el inciso *b*) pero ahora con el cordón enrollado en el disco grande. ¿En qué caso el bloque alcanza mayor rapidez? Explique su respuesta.

Figura 9.37 Problema 9.89.

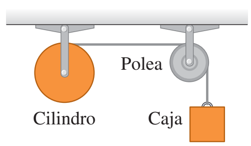


9.90. En el sistema de cilindro y masa del ejemplo 9.9 (sección 9.4), suponga que la masa m que cae está hecha de hule ideal, de modo que no pierde energía mecánica al golpear el piso. *a*) Si el cilindro no gira inicialmente y la masa m se suelta del reposo desde una altura h, ¿a qué altura rebotará la masa si lo hace verticalmente? *b*) Explique, en términos de energía, por qué la respuesta a *a*) es *menor* que h.

9.91. En el sistema que se muestra en la figura 9.18, una masa de 12.0 kg se suelta desde el reposo y cae, haciendo que el cilindro uniforme con masa de 10.0 kg y diámetro de 30.0 cm gire en torno a un eje sin fricción que pasa por su centro. ¿Qué distancia deberá descender la masa para impartir al cilindro 250 J de energía cinética?

9.92. En la figura 9.38, el cilindro y la polea giran sin fricción en torno a ejes horizontales estacionarios que pasan por su respectivo centro. Se enrolla una cuerda ligera en el cilindro, la cual pasa por la polea y tiene una caja de 3.00 kg suspendida de su extremo libre. No hay deslizamiento entre la cuerda y la superficie de la polea. El cilindro uniforme tiene masa de 5.00 kg y radio de 40.0 cm. La polea es un disco uniforme con masa de 2.00 kg y radio de 20.0 cm. La caja se suelta desde el reposo y desciende mientras la cuerda se desenrolla del cilindro. Calcule la rapidez que tiene la caja cuando ha caído 1.50 m.

Figura 9.38 Problema 9.92.



9.93. Un disco plano uniforme tiene masa M y radio R. Se perfora en él un agujero circular de radio $R/4$, centrado en un punto a $R/2$ del centro del disco. *a*) Calcule el momento de inercia del disco alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del disco. (*Sugerencia*: calcule el momento de inercia de la pieza que se quitó al disco.) *b*) Calcule el momento de inercia del disco agujerado en torno a un eje que pasa por el centro del agujero, perpendicular al plano del disco.

9.94. Se hace un péndulo con una esfera sólida uniforme de masa M y radio R suspendida del extremo de una varilla ligera. La distancia del pivote en el extremo superior de la varilla al centro de la esfera es L. El momento de inercia I_P del péndulo para la rotación alrededor del pivote suele aproximarse con ML^2. *a*) Use el teorema de los ejes paralelos para demostrar que si R es el 5% de L y se desprecia la masa de la varilla, I_p es sólo 0.1% mayor que ML^2. *b*) Si la masa de la varilla es el 1% de M y R es mucho menor que L, ¿qué relación hay entre I_{varilla} para un eje en el pivote, y ML^2?

9.95. Teorema de los ejes perpendiculares. Considere un cuerpo rígido que es una lámina delgada plana de forma arbitraria en el plano xy, con el origen de coordenadas O situado en cualquier punto dentro o fuera del cuerpo. Sean I_x e I_y los momentos de inercia alrededor de los ejes x y y, y sea I_0 el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por O, perpendicular al plano. *a*) Considerando elementos de masa m_i con coordenadas (x_i, y_i), demuestre que $I_x + I_y = I_O$. Éste es el teorema de los ejes perpendiculares. Observe que el punto O no tiene que ser el centro de masa. *b*) Para una arandela delgada con masa M y radios interior y exterior R_1 y R_2, use el teorema de los ejes perpendiculares para calcular el momento de inercia alrededor de un eje que está en el plano de la arandela y que pasa por su centro. Puede usar la información de la tabla 9.2. *c*) Use el teorema de los ejes perpendiculares para demostrar que, en el caso de una lámina delgada cuadrada con masa M y longitud de lado L, el momento de inercia en torno a *a cualquier* eje en el plano de la lámina que pase por el centro de la lámina es $\frac{1}{12}ML^2$. Puede usar la información de la tabla 9.2.

9.96. Una varilla uniforme delgada se dobla formando un cuadrado de lado a. Si la masa total es M, calcule el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro y es perpendicular al plano del cuadrado. (*Sugerencia*: use el teorema de los ejes paralelos.)

***9.97.** La densidad de un cilindro de radio R y masa M aumenta linealmente con la distancia r al eje del cilindro, $\rho = \alpha r$, donde α es una constante positiva. *a*) Calcule el momento de inercia del cilindro alrededor de un eje longitudinal que pasa por su centro, en términos de M y R. *b*) ¿Su respuesta es mayor o menor que el momento de inercia de un cilindro con la misma masa y radio pero densidad uniforme? Explique por qué este resultado es lógico cualitativamente.

Figura 9.39 Problema 9.98.

9.98. Estrellas de neutrones y restos de supernovas. La Nebulosa del Cangrejo es una nube de gas brillante de unos 10 años luz de diámetro, a una distancia aproximada de 6500 años luz de la Tierra (figura

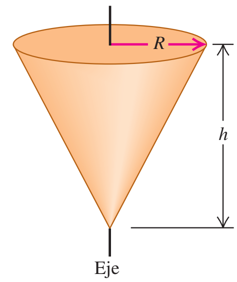
9.39). Es el residuo de una estrella que sufrió una *explosión supernova* vista en la Tierra en 1054 D.C. Esta nebulosa libera energía a razón de aproximadamente 5×10^{31} W, unas 10^5 veces la energía radiada por el Sol. El origen de esa energía es la rotación rápida de una *estrella de neutrones* en el centro de la nebulosa. Este objeto gira una vez cada 0.0331 s, y este periodo aumenta 4.22×10^{-13} s cada segundo que pasa. *a*) Si la rapidez con que la estrella de neutrones pierde energía es igual a la rapidez con que la nebulosa libera energía, calcule el momento de inercia de tal estrella. *b*) Las teorías sobre supernovas predicen que la estrella de neutrones de la Nebulosa del Cangrejo tiene una masa aproximadamente 1.4 veces mayor que la del Sol. Modelando la estrella de neutrones como esfera uniforme sólida, calcule su radio en kilómetros. *c*) ¿Qué rapidez lineal tiene un punto en el ecuador de esa estrella? Compare esto con la rapidez de la luz. *d*) Suponga que la estrella de neutrones es uniforme y calcule su densidad, comparándola con la de una roca ordinaria (3000 kg/m^3) y la densidad de un núcleo atómico (aproximadamente 10^{17} kg/m^3). Justifique la afirmación de que una estrella de neutrones es en esencia un núcleo atómico grande.

Problemas de desafío

9.99. El momento de inercia de una esfera con densidad uniforme alrededor de un eje que pasa por su centro es $\frac{2}{5}MR^2 = 0.400MR^2$. Observaciones de satélite muestran que el momento de inercia de la Tierra es de $0.3308MR^2$. Datos geofísicos sugieren que la Tierra tiene 5 regiones principales: el núcleo interior ($r = 0$ a $r = 1220$ km) con densidad media de 12,900 kg/m^3, el núcleo exterior ($r = 1220$ km a $r = 3480$ km) con densidad media de 10,900 kg/m^3, el manto inferior ($r = 3480$ km a $r = 5700$ km) con densidad media de 4900 kg/m^3, el manto superior ($r = 5700$ km a $r = 6350$ km) con densidad media de 3600 kg/m^3 y la corteza exterior y los océanos ($r = 6350$ km a $r = 6370$ km) con densidad media de 2400 kg/m^3. *a*) Demuestre que el momento de inercia alrededor de un diámetro de una coraza esférica uniforme con radio interior R_1, radio exterior R_2 y densidad ρ es $I = \rho(8\pi/15)(R_2^5 - R_1^5)$. (*Sugerencia:* forme la coraza superponiendo una esfera de densidad ρ y una esfera menor de densidad $-\rho$.) *b*) Verifique los datos dados usándolos para calcular la masa de la Tierra. *c*) Use los datos dados para calcular el momento de inercia de la Tierra en términos de MR^2.

***9.100.** Calcule el momento de inercia de un cono sólido uniforme de masa M y altura h alrededor de un eje que pasa por su centro (figura 9.40). El radio de la base circular es R.

Figura 9.40 Problema de desafío 9.100.



9.101. En un disco compacto (CD), la música se codifica en un patrón de agujeros diminutos dispuestos en una pista que corre en espiral hacia el borde del disco. Al girar el disco dentro del reproductor, la pista es barrida con una rapidez *lineal* constante de $v = 1.25$ m/s. Puesto que el radio de la pista varía al irse alejando del centro, la rapidez *angular* del disco debe cambiar al reproducirse el CD. (Véase el ejercicio 9.22.) Veamos qué aceleración angular se necesita para mantener v constante. La ecuación de una espiral es $r(\theta) = r_0 + \beta\theta$, donde r_0 es el radio de la espiral en $\theta = 0$ y β es una constante. En un CD, r_0 es el radio interior de la pista. Si tomamos la dirección de rotación del CD como positiva, β debe ser positiva para que r aumente al girar el disco y aumentar θ. *a*) Al girar el disco un ángulo pequeño $d\theta$, la distancia barrida sobre la pista es $ds = r\,d\theta$. Usando la expresión anterior para $r(\theta)$, integre ds para obtener la distancia total s barrida sobre la pista en función de ángulo total θ que ha girado el disco. *b*) Dado que la pista se barre con rapidez lineal constante v, la distancia s obtenida en el inciso *a*) es igual a vt. Use esto para obtener θ en función del tiempo. Habrá dos soluciones para θ; elija la positiva y explique por qué es la adecuada. *c*) Con su expresión para $\theta(t)$, calcule la velocidad angular ω_z y la aceleración angular α_z en función del tiempo. ¿α_z es constante? *d*) En un CD, el radio interior de la pista es de 25.0 mm, el radio aumenta 1.55 μm cada revolución y la duración del CD es de 74.0 min. Calcule r_0 y β y determine el número total de revoluciones del disco durante su reproducción. *e*) Con sus resultados de *c*) y *d*), grafique ω_z (en rad/s) contra t y α_z (en rad/s^2) contra t entre $t = 0$ y $t = 74.0$ min.