CAPITULO 7: TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE
✔ .

Si se tiene una bicicleta y un automóvil que se mueven a igual velocidad y se los quiere detener, la ¿interacción para detener cada móvil en el mismo intervalo de tiempo será la misma?. O si dos móviles de igual masa que poseen velocidades diferentes uno el doble que el otro, ¿la interacción será la misma?, ¿cuál de ellos será más "difícil" detener en el mismo intervalo de tiempo?
Sean dos cuerpos que se mueven a igual velocidad pero uno posee una masa m_1 mucho mayor que el otro de masa m_2 e impactan entre sí ¿que fenómeno físico determina las características con las que se moverán después de la colisión?. Por otro lado, si ambos cuerpos poseen iguales celeridades[1], ¿por qué aquel que posee mayor velocidad terminará moviéndose en la misma dirección pero más despacio? y, respecto al cuerpo de menor masa, ¿por qué termina dirigiéndose en sentido contrario al que traía inicialmente?.
También se podría preguntar otras alternativas tales como que ocurriría si uno de los cuerpos se encuentra en reposo y es impactado por el otro, como terminarían ambos luego de la colisión.
Independientemente de los tipos de alternativas que se presenten, es imposible contestar los interrogantes utilizando directamente la segunda ley de Newton porque se desconocen las características de las fuerzas presentes en las colisiones que, desde ya, no son fuerzas constantes y, al no poder determinar exactamente su ley de variación respecto del tiempo no se puede utilizar la expresión $\sum \vec{F}=m.\vec{a}$
Por tal motivo se utilizan conceptos que se desprenden de la segunda ley como el momento lineal o cantidad de movimiento y las denominadas fuerzas impulsivas o aquellas interacciones que se ejercen en intervalos de tiempo muy pequeños.
Para estudiar este fenómeno de interacciones en determinados intervalos de tiempo pequeños como por ejemplo el choque entre dos bolas de billar, más prolongados como patear una pelota o empujar un objeto.
Si a una partícula de masa "m" se le aplica una fuerza constante "F" durante un instante de tiempo dado se acelerará de acuerdo a la segunda ley de Newton dada por:

$$\vec{F}=m.\vec{a}$$

Aplicando la definición de aceleración se puede expresar la ecuación anterior de la siguiente manera

$$\vec{F}=m.\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

Esta última expresión se puede escribir para el caso en que de masa no se mantenga constante como sigue:

$$\vec{F}=\frac{\Delta(m.\vec{V})}{\Delta t}$$

1 - Celeridad se denomina al módulo de vector velocidad.

Al término entre paréntesis se lo define como cantidad de movimiento o momento lineal de la masa “m” que posee una velocidad instantánea “v”. La nomenclatura a utilizar para esta magnitud vectorial será “p” quedando la expresión siguiente:

$$\vec{p}=m\,.\vec{V}$$

La unidad de la cantidad de movimiento en el Sistema Internacional es $\frac{kg.m}{s}$

TEOREMA DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE ✔ .

Cuando la interacción entre dos cuerpos se produce en un cierto intervalo de tiempo puede expresarse la fuerza en función de la cantidad de movimiento como:

$$\vec{F}=\frac{d(m\,.\vec{V})}{d\,t}$$
$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{d\,t}$$

Despejando la cantidad de movimiento se obtiene la ecuación diferencial siguiente:

$$\vec{F}\,d\,t=d\vec{p}$$

Al primer término de la expresión anterior se lo definirá como Impulso de la fuerza neta, magnitud vectorial que se identifica con la letra “J” y su unidad de medida en el Sistema Internacional es N.s.

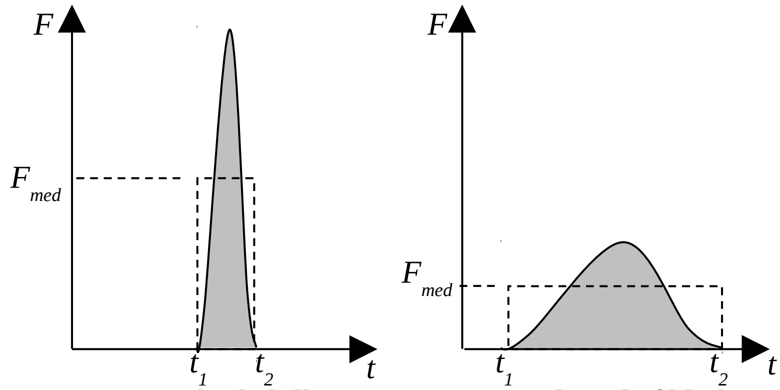
$$\vec{J}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,.dt$$

Las interacciones de fuerzas entre masas que actúan en intervalos de tiempo tan pequeños son muy difíciles de medir, no así la cantidad de movimiento ya que se puede medir la masa y su velocidad antes y después de la interacción por lo que el impulso se puede determinar experimentalmente midiendo las variación de la cantidad de movimiento del sistema, es decir la diferencia ente las cantidades de movimiento final e inicial.

Si se analizan dos situaciones, una correspondiente al impacto del taco de billar con la bola rígida y la otra al impacto del zapato de fútbol con la pelota de cuero y además se supone que antes de la interacción ambas pelotas poseen igual masa y se encuentran en reposo y luego del impacto las velocidades de cada una son iguales, de acuerdo a lo dicho ambos cuerpos tendrán las mismas cantidades de movimiento y por ende recibieron el mismo impulso para lograrlo.

La diferencia estará en que el tiempo de interacción del taco de billar con la bola resultó considerablemente menor que el utilizado para patear la pelota con el pié.

Si se presenta la gráfica de la fuerza neta en función del tiempo para la colisión entre los dos cuerpos mencionados, se tendran dos tipos de representaciones características según el gráfico.
De acuerdo a la expresión anterior la integral definida corresponde al área sombreada la que representa el impulso dado a cada una y por lo dicho las áreas sombreadas en ambos gráficos deberán ser las mismas.



Bola de billar *Pelota de fútbol*

Esta es la razón del por qué los “airbag” protegen a las personas que se encuentran dentro de los automóviles cuando se produce una colisión, no es lo mismo impactar contra el duro tablero que contra el blando globo de aire ya que el tiempo de interacción es diferente.
Finalmente relacionando el impulso dado a una masa y la cantidad de movimiento que esta adquiere se puede enunciar el teorema del impulso y la variación de la cantidad de movimiento como:

$$\vec{J} = \Delta \vec{p}$$

El teorema es utilizado cuando las fuerzas que actúan son muy intensas (denominadas también fuerzas impulsivas) y lo hacen en intervalos de tiempo muy pequeños[1].

PARA PENSAR

APLICACIONES
Poner aplicaciones concretas

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE
✔ .

Se define como colisión o choque entre dos masas puntuales a un proceso de interacción, de contacto o a distancia[2] y de cierta duración que solo tiene lugar cuando los cuerpos se encuentran muy próximos entre sí, habiendo intercambio de energía y cantidad de movimiento.
El mecanismo de interacción puede ser elástico (dos bolas de billar, la pelota de fútbol y el jugador,

1 - El intervalo de tiempo “pequeño” es relativo y se debe adecuar al contexto analizado.
2 - Las interacciones a distancia son las electrostáticas y las nucleares que se verán en otros cursos de física.

etc.), nuclear (colisión de un neutrón con el núcleo), etc. y los teoremas de conservación permiten vincular el estado inicial de los cuerpos y el correspondiente estado final de cada uno de ellos independientemente del proceso de choque generalmente muy complicado y difícil de medir.
Un ejemplo de ello es el juego de billar donde el jugador debe decidir cómo dirigir la bola para que impacte a otra a fin de que logre una velocidad tal que se dirija y entre en la tronera. Este es un típico caso de choque en dos direcciones.
Pasa comenzar el análisis se considera un sistema aislado[1] compuesto de dos masas puntuales. Si estas interaccionan entre sí, las fuerzas actuantes cumplen con la tercera ley de Newton de acción y reacción pudiendo establecer la siguiente igualdad:

$$\vec{F}_{A-B}=-\vec{F}_{B-A}$$
$$\vec{F}_{A-B}+\vec{F}_{B-A}=0$$

F_{A-B} es la interacción de la masa "A" sobre la masa "B" en el intervalo de tiempo Δt en el que actúa. Esta interacción le imprime a la masa B una cantidad de movimiento equivalente al impulso aplicado que está dado por:

$$\vec{F}_{A-B}\Delta t=\Delta\vec{p}_B$$
$$\vec{F}_{A-B}=\frac{\Delta\vec{p}_B}{\Delta t}$$

Lo mismo ocurre con la interacción de la masa B que "empuja" a la masa A de igual manera pero con la única diferencia del signo ya que reacciona de igual manera pero en sentido contrario generando la correspondiente cantidad de movimiento a la masa A. Por lo tanto se tendrá

$$\vec{F}_{B-A}\Delta t=\Delta\vec{p}_A$$
$$\vec{F}_{B-A}=\frac{\Delta\vec{p}_A}{\Delta t}$$

Reemplazando estas fuerzas de acción y reacción en la expresión de la tercera ley de Newton y operando algebraicamente se tendrá:

$$\frac{\Delta\vec{p}_B}{\Delta t}+\frac{\Delta\vec{p}_A}{\Delta t}=0$$
$$\frac{\Delta\vec{p}_B+\Delta\vec{p}_A}{\Delta t}=0$$
$$\Delta(\vec{p}_B+\vec{p}_A)=0$$
$$(\vec{p}_B+\vec{p}_A)_{INICIAL}=(\vec{p}_B+\vec{p}_A)_{FINAL}=cte$$

Esta última expresión indica que la cantidad de movimiento total del sistema en una colisión es la misma antes y después de la interacción, es decir se conserva. Por lo tanto si se denomina con el subíndice "1" a la situación inicial y con el subíndice "2" a la final posterior a la interacción se puede escribir que la suma vectorial de las cantidades de movimiento de la partícula "A" y la "B" antes del impacto será la misma que luego de este resaltando la característica vectorial de cada

1 - Por ejemplo, en un sistema aislado las masas contenidas en él no sufren interacciones desde fuera del sistema. Por ejemplo dos bolas de billar rodando a velocidad constante sin tocar las bandas se puede considerar un sistema aislado, si colisionan entre sí las fuerzas actuantes son internas. La fuerza peso de cada bola está equilibrada con la reacción normal de la mesa por lo que su suma resulta nula.

término, en símbolos se tendrá:

$$(\vec{p}_A + \vec{p}_B)_1 = (\vec{p}_A + \vec{p}_B)_2$$

Resumiendo, la cantidad de movimiento total de un sistema aislado en el momento de la colisión permanece constante siendo este el principio de conservación de la cantidad de movimiento.
El análisis se realizó utilizando solo dos partículas pero puede generalizarse perfectamente para un sistema de “n” partículas con un número mayor.

PARA PENSAR

APLICACIONES
Poner aplicaciones concretas

CHOQUES

Se define como colisión o choque entre dos cuerpos puntuales a un proceso de interacción, de contacto o a distancia[1] y de duración muy corta que solo tiene lugar cuando los dos cuerpos se encuentran muy próximos entre sí, habiendo intercambio de energía y cantidad de movimiento.
El mecanismo de interacción puede ser elástico (dos bolas de billar, la pelota de fútbol y el jugador, etc.), nuclear (colisión de un neutrón con el núcleo). y los teoremas de conservación permiten vincular el estado inicial de los cuerpos y el correspondiente estado final de cada uno de ellos independientemente del proceso de choque generalmente muy complicado y difícil de medir.
Un ejemplo de ello es el juego de billar donde el jugador puede predecir cómo debe dirigir la bola para que al impactar otra logre la velocidad deseada en ambas para que una entre en la tronera y la otra no. Este es un típico caso de choque en dos direcciones.

CHOQUE DE MASAS PUNTUALESEN UNA DIMENSION

Para comenzar el análisis de colisiones se comenzará con el caso de choque en una sola dirección, que corresponde al de dos masas “A” y “B” que se desplazan sobre la misma recta antes y después del impacto.
Si ambas masas se encuentran dentro de un sistema aislado y se analiza el sistema desde una referencia fija a su centro de masa[2], el impulso lineal total como se vio será nulo conservándose la cantidad de movimiento antes de la colisión subindicado con “1” y después subindicado con “2” pudiendo expresarse tal evento como:

$$(\vec{P}_A + \vec{P}_B)_1 = (\vec{P}_A + \vec{P}_B)_2$$
$$(m_A \vec{V}_{A1} + m_B \vec{V}_{B2}) = (m_A \vec{V}_{A2} + m_B \vec{V}_{B2})$$

Este principio de conservación de la cantidad de movimiento se cumple para todo tipo de colisiones

1 - Las interacciones a distancia son las electrostáticas y las nucleares que se verán en otros cursos de física.
2 - Se debe resaltar la importancia de este concepto a fin de comprender correctamente el fenómeno. Si existen dudas al respecto se sugiere repasar los mismos antes de continuar la lectura.

o choques los que pueden dividirse el tres tipos a saber:

Choque perfectamente elástico

Este posee la característica de que al colisionar los cuerpos no existe pérdida de energía, de modo que esta se mantiene igual antes y después de la colisión.

Choque perfectamente inelástico

Este tipo de colisión se caracteriza por quedar los cuerpos adheridos y por lo tanto con la misma velocidad final y además se produce la máxima variación negativa de la energía.

Choques inelásticos

Este tipo de colisión se encuentra entre los dos mencionados y la pérdida de energía también es intermedia, es decir, no quedan adheridos al final del impacto y “pierden” algo de energía aunque no tanto como en choque inelástico.

COEFICIENTE DE RESTITUCION

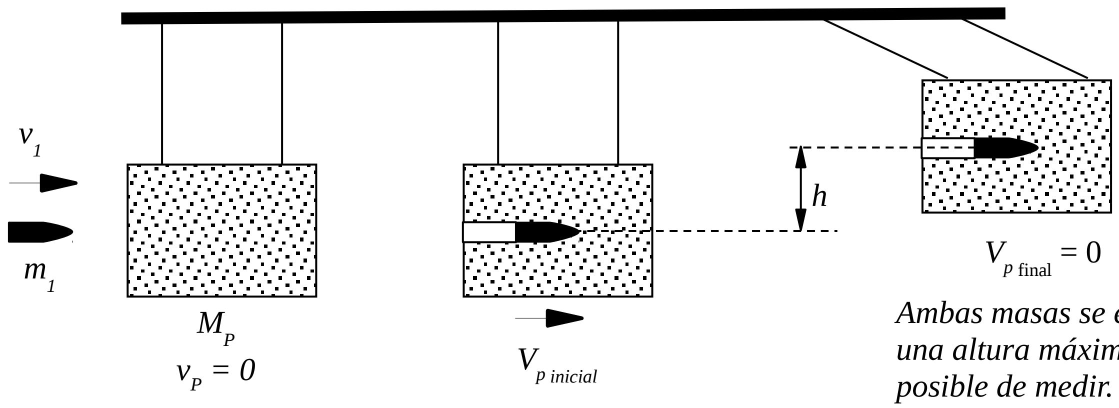
Matemáticamente al coeficiente de restitución se expresa como el cociente de las velocidades relativas inmediato posterior y anterior a la colisión cambiado de signo:

$$e=-\frac{v_{B2}-v_{A2}}{v_{B1}-v_{A1}}$$

Este coeficiente “*e*” determina el tipo de colisión entre ambas partículas y para cada caso valdrá:
$e = 1 \rightarrow$ choque perfectamente elástico (no pierde energía)
$0 < e < 1 \rightarrow$ choque inelástico (pierde algo de energía)
$e = 0 \rightarrow$ choque perfectamente inelástico (pierde la mayor cantidad de energía)

PENDULO BALISTICO

Se denomina así al equipo diseñado para medir indirectamente la velocidad de un proyectil que viaja a grandes velocidades utilizando el concepto de choque perfectamente inelástico.
Este equipo es básicamente un péndulo cuya masa “*M*”, suspendida mediante dos vínculos de igual longitud para evitar su rotación, es considerablemente mayor a la masa “*m*” del proyectil cuya velocidad “V_1” se desea medir. El equipo se presenta en el siguiente esquema donde se muestran tres situaciones diferentes.



Situación inicial antes del impacto

El proyectil se introduce en el bloque quedando ambas masas unidas e iniciando estas el movimiento con una velocidad inicial del péndulo $V_{Pinicial}$

Ambas masas se elevan una altura máxima “h” posible de medir.

Ambas masas a analizar forman un sistema aislado ya que el proyectil se puede suponer para esa situación que viaja con velocidad constante y el péndulo se encuentra en equilibrio estático.
En la situación inicial el proyectil se encuentra a punto de impactar con el péndulo y debido a que la resultante de las fuerzas exteriores o fuerza neta es cero se conserva la cantidad de movimiento lineal pudiéndose expresar la cantidad de movimiento inicial como la del proyectil ya que la masa del péndulo no se mueve:

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{V}_1 + M_P \vec{0} = m_1 \vec{V}_1$$

La cantidad de movimiento final una vez que el proyectil se incrustó en el péndulo esta dada por

$$(m_1 + M_P)\vec{V}_f$$

Igualando ambas expresiones se tendrá:

$$m_1 \vec{V}_1 = (m_1 + M_P)\vec{V}_f$$

Despejando la velocidad del proyectil de la expresión quedará:

$$\vec{V}_1 = \frac{(m_1 + M_P)\vec{V}_{P\,inicial}}{m_1}$$

Con la velocidad con las que ambas masas comienzan a moverse luego del impacto se puede determinar la energía cinética que posee el sistema inmediatamente después de la colisión que se transformará enteramente en energía potencial al detenerse cuando logran la altura máxima "*h*", por lo tanto se puede expresar utilizando consideraciones energéticas ya que en este tramo la energía mecánica se conserva:

$$E_1 = E_2$$
$$\frac{1}{2}(m_1 + M_P)V_{P\,inicial}^2 = (m_1 + M_P)gh$$
$$V_{P\,inicial} = \sqrt{\frac{2(m_1 + M_P)gh}{(m_1 + M_P)}}$$

$$V_{P\,inicial} = \sqrt{2gh}$$

Reemplazando esta velocidad en la expresión dada por la conservación de la cantidad de movimiento de más arriba se tendrá:

$$V_1 = \frac{(m_1 + M_P)\sqrt{2gh}}{m_1}$$

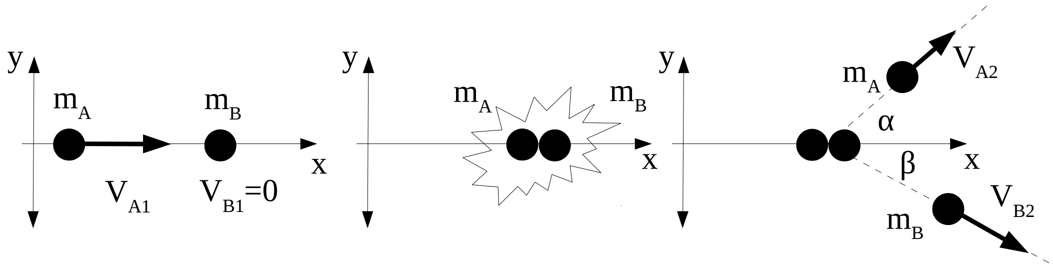
De esta manera conociendo cada una de las masas y la altura a la que se eleva el péndulo se puede determinar experimentalmente la velocidad del proyectil.

PARA PENSAR

APLICACIONES
Conociendo las masas y midiendo la altura a la que se elevan estas luego de que el proyectil se incruste en la masa del péndulo se puede determinar indirectamente la velocidad del proyectil antes del impácto.

CHOQUES EN DOS DIMENSIONES DE MASAS PUNTUALES

Si se tiene en cuenta que las cantidades de movimiento son magnitudes vectoriales, todo lo desarrollado se aplica exactamente en dos dimensiones. Para ejemplificar este caso se tiene una colisión entre dos masas puntuales según se indica en el esquema siguiente que para facilitar el estudio se definirá a la masa que es colisionada en reposo y el movimiento de la masa que colisiona en la dirección del eje “x”.



Antes de la colisión Durante la colisión Después de la colisión

Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento se puede plantear que:

$$m_A \vec{V}_{A1} + m_B \vec{V}_{B1} = m_A \vec{V}_{A2} + m_B \vec{V}_{B2}$$

Como en este caso particular la masa “B” se encuentra en reposo antes de la interacción queda:

$$m_A \vec{V}_{A1} = m_A \vec{V}_{A2} + m_B \vec{V}_{B2}$$

$$\begin{pmatrix} m_A V_{A1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_A V_{A2} \cos\alpha \\ m_A V_{A2} sen\,\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_B V_{B2} \cos\beta \\ -m_B V_{B2} sen\,\beta \end{pmatrix}$$

De la componente “x” de la expresión anterior se puede deducir que:

$$m_A V_{A1} = m_A V_{A2} \cos\alpha + m_B V_{B2} \cos\beta$$

De igual manera con la componente “y” se puede deducir que:

$$0 = m_A V_{A2} sen\alpha - m_B V_{B2} sen\beta$$
$$m_A V_{A2} sen\alpha = m_B V_{B2} sen\beta$$

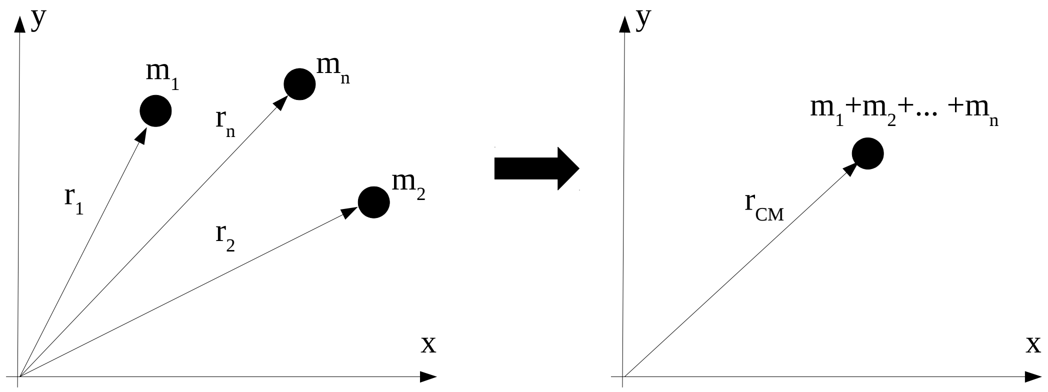
Con las expresiones anteriores se pueden obtener las características cinemáticas finales de cada una de las masas que colisionan teniendo como datos sus características antes de la colisión y los ángulos en que continúan su trayectoria.
Para el resto de los tipos de choque se trabaja de la misma manera teniendo siempre presente las características vectoriales de las cantidades de movimiento.

PARA PENSAR

APLICACIONES
Poner aplicaciones concretas

CENTRO DE MASA

Se define el centro de masa de un sistema de partículas como el lugar geométrico donde se podría considerar teóricamente concentrada toda la masa del sistema.
Se tienen "n" masas puntuales distribuidas de manera que se puedan ubicar respecto a un origen de referencia tomado arbitrariamente mediante vectores posición como se muestra en la siguiente figura.



Se puede expresar el sistema como uno solo cuya masa total sea la sumatoria de las masas individuales y ubicada en una posición que se determina de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots + m_n \vec{r}_n = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\, r_{\vec{CM}}$$

$$\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = r_{\vec{CM}}$$

En forma compacta queda:

$$\vec{r}_{CM}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Se resalta que la figura representa una distribución de masas en el plano pero se puede extender este concepto perfectamente a una distribución espacial.

PARA PENSAR

APLICACIONES
Poner aplicaciones concretas

MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA

Así como se puede determinar el vector posición del centro de masas de un sistema, se puede obtener con qué velocidad de movería simplemente determinando su variación respecto al tiempo lo que equivale matemáticamente a derivar el vector posición dado por la expresión del vector posición del centro de masa quedando:

$$\frac{\partial \vec{r}_{CM}}{\partial t}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{V}_{CM}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

De la misma forma, se puede determinar la aceleración del centro de masas mediante la determinación de la variación su vector velocidad respecto al tiempo derivando la expresión vectorial anterior como:

$$\frac{\partial \vec{V}_{CM}}{\partial t}=\vec{a}_{CM}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m a_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\frac{\vec{F}_{Externa}}{M}$$

Cuando actúan fuerzas externas sobre un cuerpo o una colección de partículas, el centro de masa se mueve como si toda la masa estuviera concentrada ahí y la fuerza neta sobre ella fuera la suma de las fuerzas externas sobre el sistema.

Las interacciones entre partículas del sistema pueden cambiar las cantidades de movimiento

individuales de las partículas no así la cantidad de movimiento total del sistema que sólo puede cambiar si actúan fuerzas externas sobre él.
Si la aceleración del centro de masa es cero, su velocidad es constante, por lo tanto la cantidad de movimiento total permanecerá constante.

PARA PENSAR

APLICACIONES
Poner aplicaciones concretas