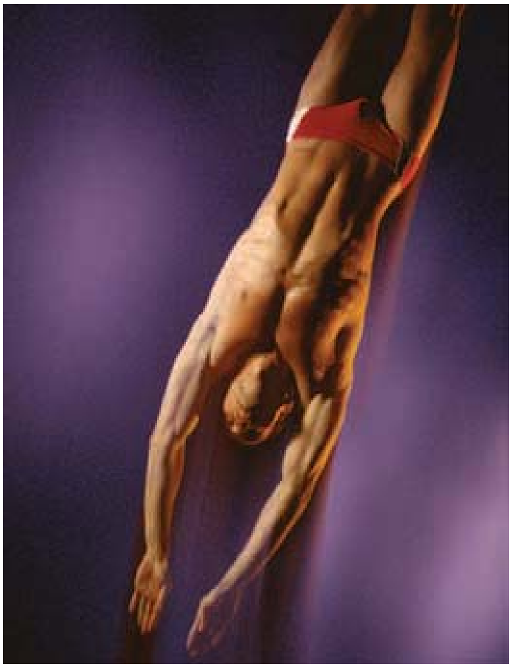
# ENERGÍA POTENCIAL Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

# 7



?Mientras este clavadista entra en el agua, ¿la fuerza de gravedad realiza trabajo positivo o negativo sobre él? ¿El agua realiza trabajo positivo o negativo sobre él?

## METAS DE APRENDIZAJE

***Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:***

- Cómo utilizar el concepto de energía potencial gravitacional en problemas que implican movimiento vertical.
- Cómo utilizar el concepto de energía potencial elástica en problemas que implican un cuerpo en movimiento unido a un resorte estirado o comprimido.
- La distinción entre fuerzas conservativas y no conservativas, y cómo resolver problemas donde ambos tipos de fuerzas actúan sobre un cuerpo en movimiento.
- Cómo calcular las propiedades de una fuerza conservativa conociendo la función de energía potencial correspondiente.
- Cómo emplear diagramas de energía para entender el movimiento rectilíneo de un objeto bajo la influencia de una fuerza conservativa.

Cuando un clavadista se tira de un trampolín a la alberca, golpea el agua rápidamente, con mucha energía cinética. ¿De dónde proviene esa energía? La respuesta que dimos en el capítulo 6 fue que la fuerza gravitacional (su peso) realiza trabajo sobre el clavadista al caer. La energía cinética del clavadista —energía asociada con su *movimiento*— aumenta en una cantidad igual al trabajo realizado.

Sin embargo, hay otra forma muy útil de ver el trabajo y la energía cinética. Este nuevo enfoque se basa en el concepto de *energía potencial*, que es energía asociada a la *posición* de un sistema, no a su movimiento. En este enfoque, hay *energía potencial gravitacional* incluso cuando el clavadista está parado en el trampolín. Al caer, no se agrega energía al sistema Tierra-clavadista, sino que una reserva de energía se *transforma* de una forma (energía potencial) a otra (energía cinética). En este capítulo, veremos cómo puede entenderse esta transformación con el teorema trabajo-energía.

Si el clavadista rebota en el extremo del trampolín antes de saltar, la tabla flexionada almacena otra clase de energía potencial llamada *energía potencial elástica*. Veremos la energía potencial elástica de sistemas sencillos como un resorte estirado o comprimido. (Otra clase importante de energía potencial se asocia a las posiciones relativas de partículas con carga eléctrica. Veremos esto en el capítulo 23.)

Demostraremos que, en algunos casos, la suma de las energías cinética y potencial de un sistema, llamada, *energía mecánica total*, es constante durante el movimiento del sistema. Esto nos llevará al enunciado general de la *ley de conservación de la energía*, que es uno de los principios más fundamentales y trascendentales de la ciencia.

**7.1** Cuando un balón de básquetbol desciende, la energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética y aumenta la rapidez del balón.

## 7.1 Energía potencial gravitacional

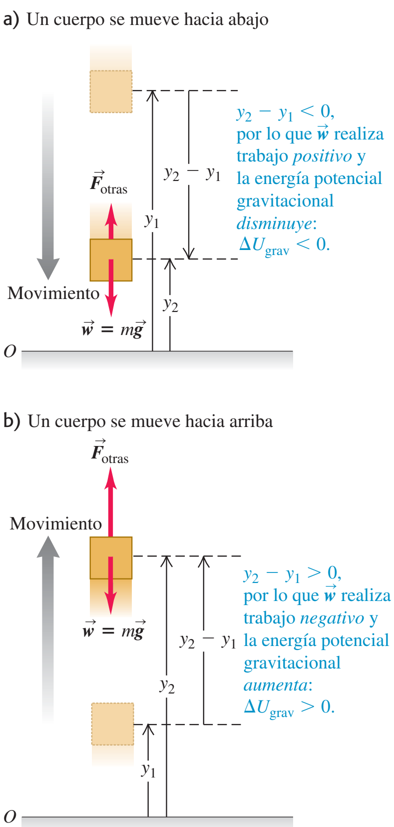
Como vimos en el capítulo 6 una partícula gana o pierde energía cinética porque interactúa con otros objetos que ejercen fuerzas sobre ella. En cualquier interacción, el cambio de energía cinética de una partícula es igual al trabajo total efectuado sobre la partícula por todas las fuerzas que actúan sobre ella.

En muchas situaciones, parece que se almacena energía en un sistema para recuperarse después. Por ejemplo, hay que efectuar trabajo para levantar una roca pesada sobre la cabeza. Parece razonable que, al levantar la roca en el aire, se está almacenando energía en el sistema, la cual se convierte después en energía cinética al dejar caer la roca.

Este ejemplo señala a la idea de una energía asociada con la *posición* de los cuerpos en un sistema. Este tipo de energía es una medida del *potencial* o *posibilidad* de efectuar trabajo. Al levantar una roca, existe la posibilidad de que la fuerza de gravitación realice trabajo sobre ella, pero sólo si la roca se deja caer al suelo. Por ello, la energía asociada con la posición se llama **energía potencial**. Lo dicho sugiere que hay energía potencial asociada al peso de un cuerpo y a su altura sobre el suelo: la *energía potencial gravitacional* (figura 7.1).

Ahora tenemos *dos* formas de describir lo que sucede cuando un cuerpo cae sin resistencia del aire. Una forma consiste en decir que disminuye la energía potencial gravitacional y aumenta la energía cinética del cuerpo que cae. La otra forma, que vimos en el capítulo 6, es que aumenta la energía cinética de un cuerpo que cae porque la fuerza de gravedad terrestre (el peso del cuerpo) realiza trabajo sobre el cuerpo. Más adelante en esta sección utilizaremos el teorema trabajo-energía para demostrar que estas dos descripciones son equivalentes.

**7.2** Cuando un cuerpo se mueve verticalmente de una altura inicial $y_1$ a una altura final $y_2$, la fuerza gravitacional $\vec{w}$ efectúa trabajo y cambia la energía potencial gravitacional.




No obstante, para empezar, deduzcamos la expresión para energía potencial gravitacional. Consideremos un cuerpo de masa $m$ que se mueve en el eje $y$ (vertical), como en la figura 7.2. Las fuerzas que actúan sobre él son su peso, de magnitud $w = mg$, y tal vez otras; llamamos a la suma vectorial (resultante) de todas las otras fuerzas $\vec{F}_{otras}$. Suponemos que el cuerpo permanece tan cerca de la superficie terrestre que el peso es constante. (En el capítulo 12 veremos que el peso disminuye con la altura.) Queremos determinar el trabajo efectuado por el peso cuando el cuerpo cae de una altura $y_1$ sobre el origen a una altura menor $y_2$ (figura 7.2a). El peso y el desplazamiento tienen la misma dirección, así que el trabajo $W_{grav}$ efectuado sobre el cuerpo por su peso es positivo;

$$W_{grav} = Fs = w(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2 \tag{7.1}$$

Esta expresión también da el trabajo correcto cuando el cuerpo *sube* y $y_2$ es mayor que $y_1$ (figura 7.2b). En tal caso, la cantidad $y_1 - y_2$ es negativa y $W_{grav}$ es negativa porque el peso y el desplazamiento tienen direcciones opuestas.

La ecuación (7.1) muestra que podemos expresar $W_{grav}$ en términos de los valores de la cantidad $mgy$ al principio y al final del desplazamiento. Esta cantidad, el producto del peso $mg$ y la altura $y$ sobre el origen de las coordenadas, es la **energía potencial gravitacional**, $U_{grav}$:

$$U_{grav} = mgy \qquad \text{(energía potencial gravitacional)} \tag{7.2}$$

Su valor inicial es $U_{grav,1} = mgy_1$ y su valor final es $U_{grav,2} = mgy_2$. El cambio en $U_{grav}$ es su valor final menos su valor inicial: $\Delta U_{grav} = U_{grav,2} - U_{grav,1}$. Podemos expresar el trabajo $W_{grav}$ realizado por la fuerza gravitacional durante el desplazamiento de $y_1$ a $y_2$ como

$$W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2} = -(U_{grav,2} - U_{grav,1}) = -\Delta U_{grav} \tag{7.3}$$

El signo negativo de $\Delta U_{grav}$ es *fundamental.* Cuando el cuerpo sube, $y$ aumenta, el trabajo realizado por la gravedad es negativo y la energía potencial gravitacional aumenta ($\Delta U_{grav} > 0$). Si el cuerpo baja, $y$ disminuye, la gravedad realiza trabajo positivo y la energía potencial gravitacional se reduce ($\Delta U_{grav} < 0$). Es como sacar dinero del banco (reducir $U_{grav}$) y gastarlo (realizar trabajo positivo). Como muestra la ecuación (7.3), la unidad de energía potencial es el joule (J), la misma del trabajo.

**CUIDADO** **¿A qué cuerpo "pertenece" la energía potencial gravitacional?** *No* es correcto llamar a $U_{grav} = mgy$ la "energía potencial gravitacional del cuerpo", ya que la energía potencial gravitacional $U_{grav}$ es una propiedad *compartida* del cuerpo y la Tierra. El valor de $U_{grav}$ aumenta si la Tierra permanece fija y la altura aumenta; también aumenta si el cuerpo está fijo en el espacio y la Tierra se aleja de él. Observe que en la fórmula $U_{grav} = mgy$ intervienen características tanto del cuerpo (su masa $m$) como de la Tierra (el valor de $g$).

## Conservación de la energía mecánica (sólo fuerzas gravitacionales)

Si quiere ver para qué sirve la energía potencial gravitacional, suponga que el peso del cuerpo es la *única* fuerza que actúa sobre él: $\vec{F}_{otras} = \mathbf{0}$. Entonces, el cuerpo cae libremente sin resistencia del aire, y podría estar subiendo o bajando. Sea $v_1$ su rapidez en $y_1$, y $v_2$ en $y_2$. El teorema trabajo-energía, ecuación (6.6), indica que el trabajo total efectuado sobre el cuerpo es igual al cambio en su energía cinética; $W_{tot} = \Delta K = K_2 - K_1$. Si la gravedad es la única fuerza que actúa, entonces, por la ecuación (7.3), $W_{tot} = W_{grav} = -\Delta U_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$. Juntando esto,

$$\Delta K = -\Delta U_{grav} \qquad \text{o bien,} \qquad K_2 - K_1 = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

que podemos reescribir como

$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2} \qquad \text{(si sólo la gravedad realiza trabajo)} \tag{7.4}$$

o bien

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \qquad \text{(si sólo la gravedad realiza trabajo)} \tag{7.5}$$

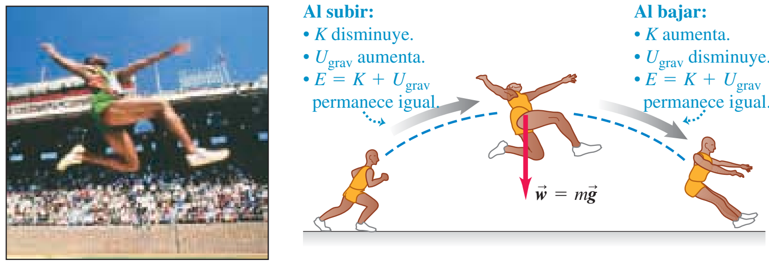
Ahora definimos la suma $K + U_{grav}$ de las energías cinética y potencial como $E$, la **energía mecánica total del sistema**. Por "sistema" nos referimos al cuerpo de masa $m$ y la Tierra considerados juntos, porque la energía potencial gravitacional $U$ es una propiedad compartida de ambos cuerpos. Así, $E_1 = K_1 + U_{grav,1}$ es la energía mecánica total en $y_1$ y $E_2 = K_2 + U_{grav,2}$ es la energía mecánica total en $y_2$. La ecuación (7.4) dice que, cuando el peso del cuerpo es la única fuerza que realiza trabajo sobre él, $E_1 = E_2$. Es decir, $E$ es constante; tiene el mismo valor en $y_1$ que en $y_2$. No obstante, dado que las posiciones $y_1$ y $y_2$ son puntos arbitrarios en el movimiento del cuerpo, la energía mecánica total $E$ tiene el mismo valor en *todos* los puntos durante el movimiento;

$$E = K + U_{grav} = \text{constante} \qquad \text{(si sólo la gravedad efectúa trabajo)}$$

Una cantidad que siempre tiene el mismo valor es una cantidad que *se conserva. Si sólo la fuerza de gravedad efectúa trabajo, la energía mecánica total es constante, es decir, se conserva* (figura 7.3). Éste es nuestro primer ejemplo de la **conservación de la energía mecánica**.

Cuando lanzamos una pelota al aire, su rapidez disminuye al subir, a medida que la energía cinética se convierte en energía potencial: $\Delta K < 0$ y $\Delta U_{grav} > 0$. Al bajar, la energía potencial se convierte en cinética y la rapidez de la pelota aumenta: $\Delta K > 0$ y $\Delta U_{grav} < 0$. No obstante, la energía mecánica *total* (cinética más potencial) es la misma en todos los puntos del movimiento, siempre que ninguna otra fuerza realice trabajo sobre la pelota (la resistencia del aire debe ser insignificante).

**7.3** Mientras el atleta está en el aire, sólo la gravedad efectúa trabajo sobre él (si despreciamos los efectos menores de la resistencia del aire). La energía mecánica (la suma de las energías cinética y potencial gravitacional) se conserva.




ActivPhysics ONLINE

5.2 Frenado de un elevador que asciende
5.3 Frenado de un elevador que baja
5.6 Rapidez de un esquiador

Sigue siendo verdad que la fuerza gravitacional efectúa trabajo sobre el cuerpo al subir o bajar éste, pero ya no tenemos que calcularlo directamente; basta ver cómo cambia el valor de $U_{grav}$.

**CUIDADO** **Elija "altura cero" siempre que desee** En lo que se refiere a la energía potencial gravitacional, quizá elijamos la altura como $y = 0$. Si desplazamos el origen de $y$, los valores de $y_1$ y $y_2$ cambiarán, al igual que los valores de $U_{grav,1}$ y $U_{grav,2}$; sin embargo, tal cambio no tiene efecto en la *diferencia* del peso $y_2 - y_1$ ni en la *diferencia* de la energía potencial gravitacional $U_{grav,2} - U_{grav,1} = mg(y_2 - y_1)$. Como veremos en el siguiente ejemplo, la cantidad que tiene importancia física no es el valor de $U_{grav}$ en cierto punto, sino la *diferencia* en $U_{grav}$ entre 2 puntos. Así, podemos definir $U_{grav}$ como cero en cualquier punto sin afectar la física de la situación.

## Ejemplo 7.1 Altura de una pelota por conservación de la energía

Usted lanza una pelota de béisbol con masa de 0.145 kg hacia arriba, dándole una velocidad inicial hacia arriba de 20.0 m/s. Determine qué altura alcanza, despreciando la resistencia del aire.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Una vez en el aire, la única fuerza que actúa sobre la pelota es la gravedad; por lo tanto, podemos usar la conservación de la energía mecánica.

**PLANTEAR:** Usaremos las ecuaciones (7.4) y (7.5); el punto 1 será el punto en que la bola sale de la mano, y el punto 2 donde la pelota alcanza su altura máxima. Al igual que en la figura 7.2, elegimos el eje $+y$ que apunta verticalmente hacia arriba. La rapidez de la pelota en el punto 1 es $v_1 = 20.0$ m/s. La pelota está instantáneamente en reposo en el punto más alto de su movimiento, así que $v_2 = 0$.

La incógnita es la distancia que la pelota se mueve verticalmente entre estos dos puntos, es decir, el desplazamiento $y_2 - y_1$. Si colocamos el origen donde la pelota sale de la mano (punto 1), entonces, $y_1 = 0$ (figura 7.4) y la incógnita es simplemente $y_2$.

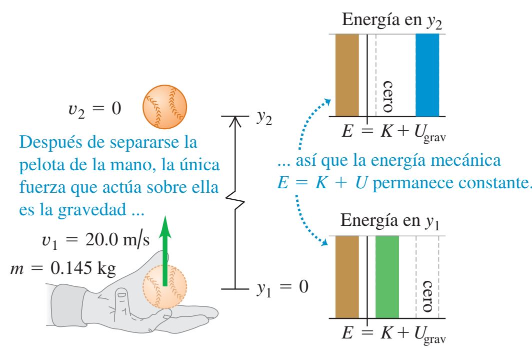
**EJECUTAR:** Puesto que $y_1 = 0$, la energía potencial en el punto 1 es $U_{grav,1} = mgy_1 = 0$. Además, dado que la pelota está en reposo en el punto 2, la energía cinética en ese punto es $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = 0$. Así que la ecuación (7.4), que dice que $K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$, se convierte en

$$K_1 = U_{grav,2}$$

Como se ve en las gráficas de barras de energía de la figura 7.4, la energía cinética de la pelota en el punto 1 se convierte totalmente en energía potencial gravitacional en el punto 2. En el punto 1, la energía cinética es

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(0.145\text{ kg})(20.0\text{ m/s})^2 = 29.0\text{ J}$$

**7.4** Después de que la pelota sale de la mano, se conserva la energía mecánica $E = K + U$.




y es igual a la energía potencial $U_{grav,2} = mgy_2$ en el punto 2, así que

$$y_2 = \frac{U_{grav,2}}{mg} = \frac{29.0\text{ J}}{(0.145\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)} = 20.4\text{ m}$$

También podemos resolver $K_1 = U_{grav,2}$ algebraicamente despejando $y_2$:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgy_2$$

$$y_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(20.0\text{ m/s})^2}{2(9.80\text{ m/s}^2)} = 20.4\text{ m}$$

**EVALUAR:** La masa se elimina, como esperábamos; en el capítulo 2 vimos que el movimiento de un cuerpo en caída libre no depende de su masa. De hecho, podríamos haber deducido el resultado $y_2 = v_1^2/2g$ utilizando la ecuación (2.13).

Al realizar el cálculo, elegimos el origen en el punto 1, de modo que $y_1 = 0$ y $U_{\text{grav},1} = 0$. ¿Qué pasa si elegimos otro origen? Suponga que lo colocamos 5.0 m debajo del punto 1, de modo que $y_1 = 5.0$ m. Entonces, la energía mecánica total en el punto 1 será en parte cinética y en parte potencial; no obstante, en el punto 2 será puramente potencial. Si realiza de nuevo el cálculo usando este origen, obtendrá $y_2 = 25.4$ m, esto es, 20.4 m sobre el punto 1, igual que con el primer origen. En cualquier problema similar, corresponde a usted elegir la altura donde $U_{\text{grav}} = 0$; no se rompa la cabeza, porque la física de la respuesta no depende de su decisión.

## Cuando realizan trabajo otras fuerzas distintas de la gravedad

Si otras fuerzas actúan sobre el cuerpo además de su peso, entonces $\vec{F}_{\text{otras}}$ de la figura 7.2 *no* es cero. En el caso del martinete del ejemplo 6.4 (sección 6.2), la fuerza aplicada por el cable y la fricción de las guías verticales son ejemplos de fuerzas que podrían estar incluidas en $\vec{F}_{\text{otras}}$. El trabajo gravitacional $W_{\text{grav}}$ aún está dado por la ecuación (7.3), pero el trabajo total $W_{\text{tot}}$ es la suma de $W_{\text{grav}}$ y el trabajo de $\vec{F}_{\text{otras}}$. Llamamos a este trabajo adicional $W_{\text{otras}}$, de modo que el trabajo total realizado por todas las fuerzas es $W_{\text{tot}} = W_{\text{grav}} + W_{\text{otras}}$. Igualando esto al cambio de energía cinética, tenemos

$$W_{\text{otras}} + W_{\text{grav}} = K_2 - K_1 \tag{7.6}$$

Además, por la ecuación (7.3), $W_{\text{grav}} = U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2}$, así que

$$W_{\text{otras}} + U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2} = K_2 - K_1$$

que podemos reacomodar así:

$$K_1 + U_{\text{grav},1} + W_{\text{otras}} = K_2 + U_{\text{grav},2} \quad \text{(si otras fuerzas además de la gravedad efectúan trabajo)} \tag{7.7}$$

Por último, usando las expresiones adecuadas para los distintos términos de energía:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + W_{\text{otras}} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \quad \text{(si otras fuerzas además de la gravedad efectúan trabajo)} \tag{7.8}$$

El significado de las ecuaciones (7.7) y (7.8) es que *el trabajo realizado por todas las fuerzas* distintas de la fuerza gravitacional *es igual al cambio en la energía mecánica total $E = K + U_{\text{grav}}$ del sistema, donde $U_{\text{grav}}$ es la energía potencial gravitacional. Si* $W_{\text{otras}}$ es positivo, $E$ aumenta y $(K_2 + U_{\text{grav},2}) > (K_1 + U_{\text{grav},1})$. Si $W_{\text{otras}}$ es negativo, $E$ disminuye (figura 7.5). En el caso especial en que sólo el peso del cuerpo realiza trabajo, $W_{\text{otras}} = 0$. Entonces, la energía mecánica total es constante, y volvemos a la ecuación (7.4) o (7.5).

**7.5** Conforme este paracaidista va cayendo, la fuerza hacia arriba de la resistencia del aire realiza trabajo negativo $W_{\text{otras}}$ sobre él. Por lo tanto, disminuye la energía mecánica total $E = K + U$: la rapidez y la energía cinética $K$ del paracaidista permanecen iguales, en tanto que disminuye la energía potencial gravitacional $U$.

### Estrategia para resolver problemas 7.1 — Problemas donde se utiliza energía mecánica I

MP

**IDENTIFICAR** *los conceptos pertinentes:* Decida si conviene resolver el problema con métodos de energía, usando $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ directamente, o con una combinación de estrategias. El enfoque de energía es muy útil si el problema implica movimiento con fuerzas variables, en una trayectoria curva (que veremos más adelante) o ambas cuestiones. Si el problema implica tiempo transcurrido, el enfoque de energía *no* suele ser el mejor porque en él no interviene el tiempo directamente.

**PLANTEAR** *el problema* utilizando los siguientes pasos:

1. Si usa el enfoque de energía, primero decida cuáles son los estados inicial y final (posiciones y velocidades) del sistema. Use el subíndice 1 para el estado inicial y el subíndice 2 para el estado final. Resulta útil hacer dibujos que muestren los estados inicial y final.
2. Defina su sistema de coordenadas, sobre todo el nivel donde $y = 0$. Esto le servirá para calcular las energías potenciales gravitacionales. La ecuación (7.2) supone que la dirección $+y$ es hacia arriba; le sugerimos tomar esa decisión de forma consistente.
3. Identifique todas las fuerzas que efectúen trabajo que no puedan describirse en términos de energía potencial. (Por ahora, esto significa cualesquiera fuerzas no gravitacionales. Sin embargo, más adelante en este capítulo veremos que el trabajo efectuado por un resorte ideal también puede expresarse como un cambio en la energía potencial.) Los diagramas de cuerpo libre siempre son útiles.

*continúa*

4. Elabore una lista de las cantidades conocidas e incógnitas, incluyendo las coordenadas y las velocidades en cada punto. Decida qué incógnitas resolverá.

**EJECUTAR** *la solución:* Escriba expresiones para las energías cinéticas y potenciales iniciales y finales ($K_1$, $K_2$, $U_{grav,1}$ y $U_{grav,2}$). Relacione después las energías cinética y potencial y el trabajo efectuado por otras fuerzas, $W_{otras}$, usando la ecuación (7.7). (Tendrá que calcular $W_{otras}$ en términos de tales fuerzas.) Si ninguna otra fuerza realiza trabajo, esta expresión se vuelve la ecuación (7.4). Es conveniente dibujar gráficas de barras que muestran los valores iniciales y finales de $K$, $U_{grav}$ y $E = K + U$. Despeje la incógnita requerida.

**EVALUAR** *la respuesta:* Verifique si su respuesta es lógica físicamente. Tenga presente, aquí y más adelante, que el trabajo efectuado por cada fuerza debe estar representado en $U_{grav,1} - U_{grav,2} = -\Delta U_{grav}$, o bien, en $W_{otras}$; pero *nunca* en ambos. El trabajo gravitacional está incluido en $\Delta U_{grav}$, así que tenga cuidado de no incluirlo otra vez en $W_{otras}$.

## Ejemplo 7.2 Trabajo y energía al lanzar una pelota de béisbol

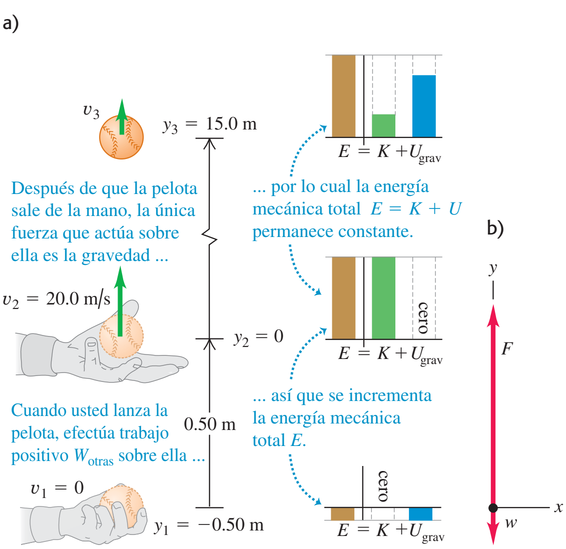
En el ejemplo 7.1, suponga que la mano sube 0.50 m al lanzar la pelota, la cual, al salir de la mano, tiene una velocidad hacia arriba de 20.0 m/s. Otra vez ignore la resistencia del aire. *a*) Suponiendo que su mano ejerce una fuerza constante hacia arriba sobre la pelota, calcule la magnitud de esa fuerza. *b*) Calcule la rapidez de la pelota en un punto 15.0 m arriba del punto de donde salió de la mano.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** En el ejemplo 7.1, usamos la conservación de la energía mecánica porque sólo la gravedad efectuaba trabajo. En este ejemplo, en cambio, debemos incluir también el trabajo no gravitacional efectuado por la mano.

**PLANTEAR:** La figura 7.6 muestra un diagrama de la situación, incluyendo un diagrama de cuerpo libre de la pelota al ser lanzada. Sea el punto 1 el punto donde la mano inicia su movimiento, el punto 2 donde la pelota sale de la mano, y el punto 3 donde la pelota está 15.0 m arriba del punto 2. La fuerza no gravitacional de su mano $\vec{F}$ sólo actúa entre los puntos 1 y 2. Utilizando el mismo sistema de coordenadas que en el ejemplo 7.1, tenemos $y_1 = -0.50$ m, $y_2 = 0$ y $y_3 = 15.0$ m.

**7.6** a) Aplicación de las nociones de energía al lanzamiento vertical de una pelota hacia arriba. b) Diagrama de cuerpo libre de la pelota al lanzarla.




La pelota parte del reposo en el punto 1, así que $v_1 = 0$, y nos dicen que la rapidez con que la pelota sale de la mano es $v_2 = 20.0$ m/s. Las incógnitas son *a*) la magnitud $F$ de la fuerza que la mano aplica y *b*) la rapidez $v_3$ en el punto 3.

**EJECUTAR:** *a*) Para determinar la magnitud de $\vec{F}$, primero usaremos la ecuación (7.7) al calcular el trabajo $W_{otras}$ efectuado por esa fuerza. Tenemos

$$K_1 = 0$$
$$U_{grav,1} = mgy_1 = (0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(-0.50 \text{ m}) = -0.71 \text{ J}$$
$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(0.145 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s})^2 = 29.0 \text{ J}$$
$$U_{grav,2} = mgy_2 = (0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0) = 0$$

La energía potencial inicial $U_{grav,1}$ es *negativa* porque la pelota inicialmente estaba abajo del origen. (No se preocupe de tener una energía potencial que sea menor que cero. Recuerde que lo importante es la *diferencia* en energía potencial de un punto al otro.) Por la ecuación (7.7), $K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2}$, así que

$$W_{otras} = (K_2 - K_1) + (U_{grav,2} - U_{grav,1})$$
$$= (29.0 \text{ J} - 0) + (0 - (-0.71 \text{ J})) = 29.7 \text{ J}$$

La energía cinética de la pelota aumenta en $K_2 - K_1 = 29.0$ J, y la energía potencial aumenta en $U_{grav,2} - U_{grav,1} = 0.71$ J; la suma es $E_2 - E_1$, el cambio en la energía mecánica total, que es igual a $W_{otras}$.

Suponiendo que la fuerza $\vec{F}$ hacia arriba aplicada por la mano es constante, el trabajo $W_{otras}$ efectuado por esta fuerza es igual a la magnitud $F$ de la fuerza multiplicada por el desplazamiento hacia arriba $y_2 - y_1$ en el que actúa:

$$W_{otras} = F(y_2 - y_1)$$
$$F = \frac{W_{otras}}{y_2 - y_1} = \frac{29.7 \text{ J}}{0.50 \text{ m}} = 59 \text{ N}$$

Esto es unas 40 veces más que el peso de la pelota.

*b*) Para obtener la rapidez en el punto 3, tomamos nota de que, entre los puntos 2 y 3, se conserva la energía mecánica total; la fuerza de la mano ya no actúa, así que $W_{otras} = 0$. Podemos calcular la energía cinética en el punto 3 mediante la ecuación (7.4):

$$K_2 + U_{grav,2} = K_3 + U_{grav,3}$$
$$U_{grav,3} = mgy_3 = (0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(15.0 \text{ m}) = 21.3 \text{ J}$$
$$K_3 = (K_2 + U_{grav,2}) - U_{grav,3}$$
$$= (29.0 \text{ J} + 0 \text{ J}) - 21.3 \text{ J} = 7.7 \text{ J}$$

Dado que $K_3 = \frac{1}{2}mv_{3y}^2$, donde $v_{3y}$ es la componente $y$ de la velocidad de la pelota en el punto 3, tenemos

$$v_{3y} = \pm\sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(7.7\ \mathrm{J})}{0.145\ \mathrm{kg}}} = \pm 10\ \mathrm{m/s}$$

El significado del signo más o del menos es que la pelota pasa *dos veces* por el punto 3, una vez de subida y otra de bajada. La energía mecánica total $E$ es constante e igual a 29.0 J mientras la pelota está en caída libre, y la energía potencial en el punto 3 es $U_{\mathrm{grav},3} = 21.3$ J, sea que la pelota esté subiendo o bajando. Así, en el punto 3 la energía cinética $K_3$ y la *rapidez* de la pelota no dependen de la dirección del movimiento de la pelota. La velocidad $v_{3y}$ es positiva ($+10$ m/s) cuando la pelota sube, y negativa ($-10$ m/s) cuando baja; la rapidez $v_3$ es de 10 m/s en ambos casos.

**EVALUAR:** Para comprobar el resultado, recordemos que en el ejemplo 7.1, la pelota alcanza una altura máxima de $y = 20.4$ m. En ese punto, toda la energía cinética que la pelota tenía cuando salió de la mano en $y = 0$ ya se convirtió en energía potencial gravitacional. En $y = 15.0$, la pelota está a tres cuartas partes del camino hacia su altura máxima, así que unas tres cuartas partes de su energía mecánica deberían estar en forma de energía potencial. (Esto se muestra en la gráfica de barras de la energía en la figura 7.6a.) ¿Puede demostrar que es así, con base en los valores obtenidos para $K_3$ y $U_{\mathrm{grav},3}$?

## Energía potencial gravitacional para movimiento en una trayectoria curva

En nuestros primeros dos ejemplos, el cuerpo se movió en una trayectoria vertical recta. ¿Qué sucede si la trayectoria es inclinada o curva (figura 7.7a)? Sobre el cuerpo actúa la fuerza gravitacional $\vec{w} = m\vec{g}$ y tal vez otras fuerzas cuya resultante llamamos $\vec{F}_{\mathrm{otras}}$. Para calcular el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional durante este desplazamiento, dividimos la trayectoria en segmentos pequeños $\Delta\vec{s}$; un segmento típico se muestra en la figura 7.7b. El trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre este segmento es el producto escalar de la fuerza y el desplazamiento. En términos de vectores unitarios, la fuerza es $\vec{w} = m\vec{g} = -mg\hat{\jmath}$ y el desplazamiento es $\Delta\vec{s} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath}$, así que el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional es

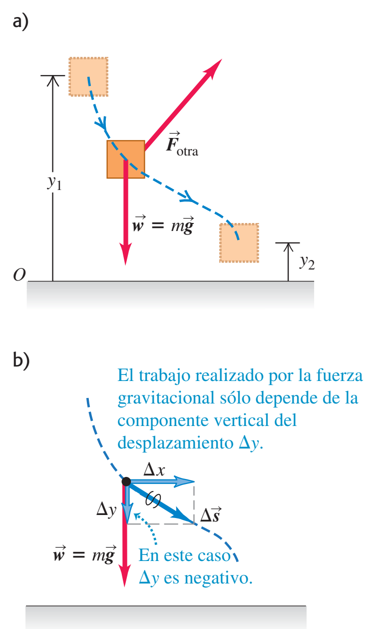
$$\vec{w}\cdot\Delta\vec{s} = -mg\hat{\jmath}\cdot(\Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath}) = -mg\Delta y$$

El trabajo efectuado por la gravedad es el mismo que si el cuerpo se hubiera desplazado verticalmente una distancia $\Delta y$, sin desplazamiento horizontal. Esto se cumple para cada segmento, así que el trabajo *total* efectuado por la fuerza gravitacional es $-mg$ multiplicado por el desplazamiento vertical *total* $(y_2 - y_1)$:

$$W_{\mathrm{grav}} = -mg(y_2 - y_1) = mgy_1 - mgy_2 = U_{\mathrm{grav},1} - U_{\mathrm{grav},2}$$

Esto es igual a la ecuación (7.1) o (7.3), donde se supuso una trayectoria completamente vertical. Así que, aun si la trayectoria de un cuerpo entre dos puntos es curva, el trabajo total efectuado por la gravedad depende sólo de la diferencia de altura entre esos dos puntos. Este trabajo no se ve afectado por ningún movimiento horizontal que pueda darse. Por lo tanto, *podemos usar la misma expresión para la energía potencial gravitacional, sea la trayectoria del cuerpo recta o curva.*

**7.7** Cálculo del cambio en energía potencial gravitacional para un desplazamiento a lo largo de una trayectoria curva.



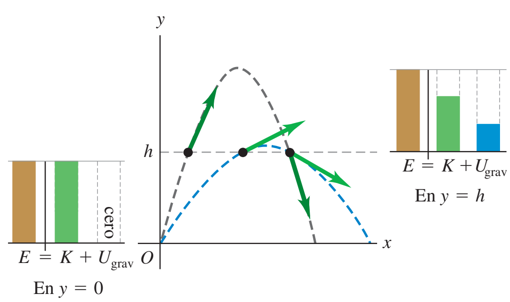

## Ejemplo conceptual 7.3 Energía en el movimiento de proyectiles

Se batean dos pelotas de béisbol idénticas con la misma rapidez y altura iniciales pero distintos ángulos iniciales. Demuestre que, a una altura dada $h$, ambas pelotas tienen la misma rapidez si puede despreciarse la resistencia del aire.

**SOLUCIÓN**

Si no hay resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre cada pelota después de ser bateada es su peso, así que la energía mecánica total de cada pelota es constante. La figura 7.8 muestra las trayectorias de dos pelotas bateadas a la misma altura con la misma rapidez inicial y, por lo tanto, la misma energía mecánica total, pero con diferentes ángulos iniciales. En todos los puntos con la misma altura, la energía potencial es la misma. Entonces, la energía cinética a esta altura debe ser igual para ambas pelotas y su rapidez es idéntica.

**7.8** Para la misma rapidez y altura iniciales, la rapidez de un proyectil a una altura dada $h$ siempre es la misma, si se desprecia la resistencia del aire.



## Ejemplo 7.4 Cálculo de rapidez en un círculo vertical

Imagine que su primo Morton baja en patineta por una rampa curva en un parque. Tratando a Morton y a su patineta como una partícula, ésta describe un cuarto de círculo de radio $R = 3.00$ m (figura 7.9). La masa total de Morton y su patineta es de 25.0 kg. Él parte del reposo y no hay fricción. *a*) Calcule su rapidez en la base de la rampa. *b*) Obtenga la fuerza normal que actúa sobre él en la base de la rampa.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** No podemos usar las ecuaciones de aceleración constante, porque la aceleración de Morton no es constante; la pendiente disminuye a medida que él desciende. En vez de ello, usaremos el enfoque de energía. Puesto que Morton se mueve en un arco circular, también usaremos lo que aprendimos acerca del movimiento circular en la sección 5.4.

**PLANTEAR:** Puesto que no hay fricción, la única fuerza además del peso de Morton es la fuerza normal $\vec{n}$ ejercida por la rampa (figura 7.9b). Aunque esta fuerza actúa en toda la trayectoria, *no* efectúa trabajo porque $\vec{n}$ siempre es perpendicular al desplazamiento de Morton. Así, $W_{otras} = 0$ y se conserva la energía mecánica.

Llamemos 1 al punto de partida, y 2 a la base de la rampa curva, y sea $y = 0$ en la base (figura 7.9a). Entonces, $y_1 = R$ y $y_2 = 0$. (Estamos tratando a Morton como si toda su masa estuviera concentrada en su centro.) Morton parte del reposo en el tope, así que $v_1 = 0$. La incógnita en el inciso *a*) es su rapidez en la base, $v_2$. En el inciso *b*), nos interesa encontrar la magnitud $n$ de la fuerza normal en el punto 2. Puesto que esta fuerza no efectúa trabajo, no aparece en la ecuación de energía, así que ahora usaremos la segunda ley de Newton.

**EJECUTAR:** *a*) Las diferentes energías son

$$K_1 = 0 \qquad U_{grav,1} = mgR$$
$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad U_{grav,2} = 0$$

Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$$
$$0 + mgR = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0$$
$$v_2 = \sqrt{2gR}$$
$$= \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(3.00\ \text{m})} = 7.67\ \text{m/s}$$

Cabe señalar que esta respuesta no depende de que la rampa sea circular; sea cual fuere la forma de la rampa, Morton tendrá la misma rapidez $v_2 = \sqrt{2gR}$ en la base. Esto se cumpliría aunque las ruedas de su patineta perdieran contacto con la rampa durante la bajada, porque la fuerza gravitacional seguiría siendo la única que efectúa trabajo. De hecho, la rapidez es la misma que si Morton hubiera caído verticalmente una altura $R$. La respuesta también es independiente de su masa.

*b*) Para obtener $n$ en el punto 2 empleando la segunda ley de Newton, necesitamos el diagrama de cuerpo libre en ese punto (figura 7.9b). En el punto 2, Morton se mueve con rapidez $v_2 = \sqrt{2gR}$ en un círculo de radio $R$; su aceleración es hacia el centro del círculo y tiene magnitud

$$a_{rad} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{2gR}{R} = 2g$$

Si tomamos la dirección $+y$ hacia arriba, la componente $y$ de la segunda ley de Newton es

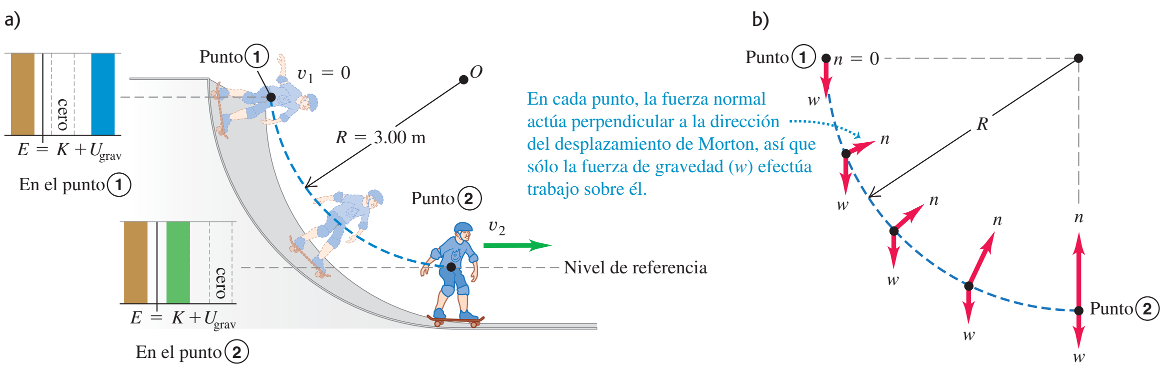
$$\sum F_y = n + (-w) = ma_{rad} = 2mg$$
$$n = w + 2mg = 3mg$$
$$= 3(25.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 735\ \text{N}$$

En el punto 2, la fuerza normal es el triple del peso de Morton. Este resultado es independiente del radio de la rampa circular. En los ejemplos 5.9 (sección 5.2) y 5.24 (sección 5.4) aprendimos que la magnitud de $n$ es el *peso aparente*, así que Morton sentirá como si tuviera tres veces su peso real $mg$. Sin embargo, tan pronto como llegue a la parte horizontal de la rampa a la derecha del punto 2, la fuerza normal bajará a $w = mg$, y Morton se sentirá normal otra vez. ¿Entiende por qué?

**EVALUAR:** Este ejemplo ilustra una regla general acerca del papel de las fuerzas en problemas en que usamos técnicas de energía: lo que importa no es sólo si *actúa* una fuerza, sino si *efectúa trabajo*. Si la fuerza no efectúa trabajo, como en el caso de la fuerza normal $\vec{n}$ en este ejemplo, no aparece en la ecuación (7.7), $K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2}$.

Observe que tuvimos que usar *tanto* el enfoque de energía *como* la segunda ley de Newton para resolver este problema: la conservación de energía nos dio la rapidez, y $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ nos dio la fuerza normal. En cada parte del problema, usamos la técnica que más fácilmente nos lleva a la respuesta.

**7.9** a) Morton baja en patineta por una rampa circular sin fricción. La energía mecánica total es constante. b) Diagramas de cuerpo libre de Morton y su patineta en varios puntos de la rampa.



## Ejemplo 7.5 Círculo vertical con fricción

En el ejemplo 7.4, suponga que la rampa tiene fricción y la rapidez de Morton en la base es de sólo 6.00 m/s. ¿Qué trabajo efectuó la fuerza de fricción sobre él?

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** La figura 7.10 muestra que de nuevo la fuerza normal no efectúa trabajo, pero ahora hay una fuerza de fricción $\vec{f}$ que *sí* realiza trabajo. Entonces, el trabajo que no es gravitacional efectuado sobre Morton entre los puntos 1 y 2, $W_{otras}$, no es cero.

**PLANTEAR:** Usamos el mismo sistema de coordenadas y los mismos puntos inicial y final que en el ejemplo 7.4 (figura 7.10). Nuestra incógnita es el trabajo realizado por la fricción, $W_f$; puesto que la fricción es la única fuerza distinta de la gravedad que efectúa trabajo, esto es igual a $W_{otras}$. Obtendremos $W_f$ con la ecuación (7.7).

**EJECUTAR:** Las energías son

$$K_1 = 0$$

$$U_{grav,1} = mgR = (25.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(3.00\ \text{m}) = 735\ \text{J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(25.0\ \text{kg})(6.00\ \text{m/s})^2 = 450\ \text{J}$$

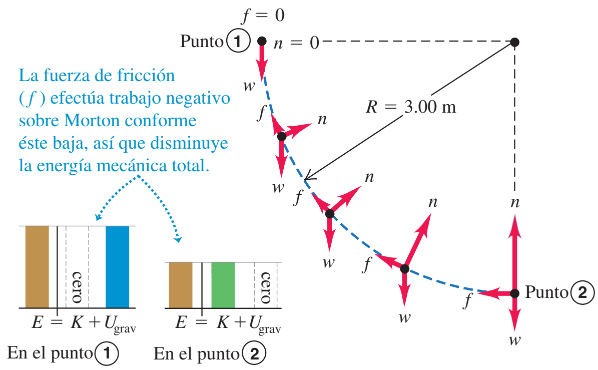
$$U_{grav,2} = 0$$

Por la ecuación (7.7),

$$\begin{aligned} W_f &= K_2 + U_{grav,2} - K_1 - U_{grav,1} \\ &= 450\ \text{J} + 0 - 0 - 735\ \text{J} = -285\ \text{J} \end{aligned}$$

El trabajo efectuado por la fuerza de fricción es $-285$ J, y la energía mecánica total *disminuye* en 285 J. ¿Entiende por qué $W_f$ debe ser negativo?

**7.10** Diagrama de cuerpo libre y gráfica de barras de la energía, para Morton bajando en patineta por una rampa con fricción.




**EVALUAR:** El movimiento de Morton está determinado por la segunda ley de Newton, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$. Pero sería muy difícil aplicar esta ley directamente al problema, porque las fuerzas normal y de fricción, así como la aceleración, están cambiando continuamente de magnitud y dirección conforme Morton baja. El enfoque de energía, en cambio, relaciona los movimientos en el tope y la base de la rampa, sin implicar los pormenores de lo que sucede en medio. Muchos problemas son fáciles si usamos consideraciones de energía, y muy complejos, si intentamos usar directamente las leyes de Newton.

## Ejemplo 7.6 Plano inclinado con fricción

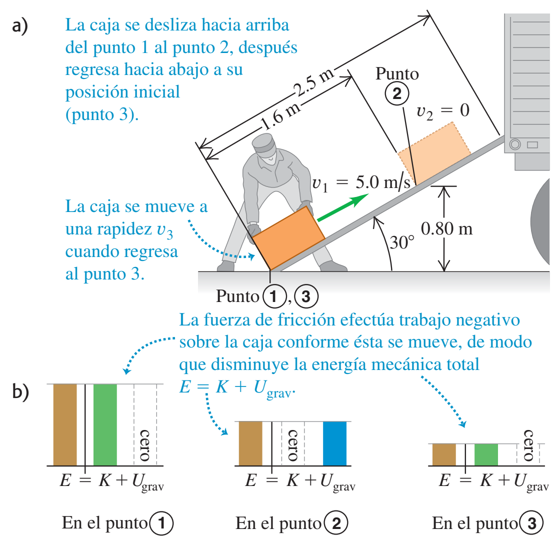
Queremos subir una caja de 12 kg a un camión deslizándola por una rampa de 2.5 m inclinada 30°. Un obrero, sin considerar la fricción, calcula que puede subir la caja por la rampa dándole una rapidez inicial de 5.0 m/s con un empujón en la base. Sin embargo, la fricción *no* es despreciable; la caja sube 1.6 m por la rampa, se para y se desliza de regreso (figura 7.11). *a*) Suponiendo que la fuerza de fricción que actúa sobre la caja es constante, calcule su magnitud. *b*) Qué rapidez tiene la caja al volver a la base de la rampa?

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** La fuerza de fricción efectúa trabajo sobre la caja mientras ésta se desliza. Igual que en el ejemplo 7.2, con el enfoque de energía del inciso *a*) obtendremos la magnitud de la fuerza no gravitacional que efectúa trabajo (en este caso la fricción). En el inciso *b*) podremos calcular cuánto trabajo no gravitacional efectúa esa fuerza mientras la caja se desliza rampa abajo. Entonces podremos usar el enfoque de energía otra vez para obtener la rapidez de la caja en la base de la rampa.

**PLANTEAR:** La primera parte del movimiento es del punto 1, la base de la rampa, al punto 2, donde la caja se para instantáneamente. En la segunda parte del movimiento, la caja vuelve a la base de la rampa, que llamaremos punto 3 (figura 7.11a). Tomaremos $y = 0$ (y, por

**7.11** a) Una caja sube deslizándose por una rampa, se para y se desliza de regreso. b) Gráficas de barras de la energía para los puntos 1, 2 y 3.




*continúa*

lo tanto, $U_{grav} = 0$) en el piso, así que $y_1 = 0$, $y_2 = (1.6\text{ m})$ sen $30° = 0.80$ m, y $y_3 = 0$. Nos dicen que $v_1 = 5.0$ m/s y $v_2 = 0$ (la caja está instantáneamente en reposo en el punto 2). La incógnita en el inciso *a*) es *f*, la magnitud de la fuerza de fricción. En el inciso *b*), la incógnita es $v_3$, la rapidez en la base de la rampa.

**EJECUTAR:** *a*) Las energías son

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2}(12\text{ kg})(5.0\text{ m/s})^2 = 150\text{ J} \\ U_{grav,1} &= 0 \\ K_2 &= 0 \\ U_{grav,2} &= (12\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(0.80\text{ m}) = 94\text{ J} \\ W_{otras} &= -fs \end{aligned}$$

donde *f* es la magnitud desconocida de la fuerza de fricción y $s = 1.6$ m. Con la ecuación (7.7), obtenemos

$$K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2}$$

$$\begin{aligned} W_{otras} &= -fs = (K_2 + U_{grav,2}) - (K_1 + U_{grav,1}) \\ f &= -\frac{(K_2 + U_{grav,2}) - (K_1 + U_{grav,1})}{s} \\ &= -\frac{(0 + 94\text{ J}) - (150\text{ J} + 0)}{1.6\text{ m}} = 35\text{ N} \end{aligned}$$

La fuerza de fricción de 35 N, actuando a lo largo de 1.6 m, reduce la energía mecánica de la caja de 150 J a 94 J (figura 7.11c).

*b*) Al bajar del punto 2 al punto 3 en la base de la rampa, tanto la fuerza de fricción como el desplazamiento invierten su dirección pero tienen las mismas magnitudes, así que el trabajo por fricción tiene el mismo valor negativo cuando va del punto 1 al punto 2. El trabajo total efectuado por la fricción entre los puntos 1 y 3 es

$$W_{otras} = W_{fric} = -2fs = -2(35\text{ N})(1.6\text{ m}) = -112\text{ J}$$

Del inciso *a*), $K_1 = 150$ J y $U_{grav,1} = 0$. La ecuación (7.7) da, entonces,

$$\begin{aligned} K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} &= K_3 + U_{grav,3} \\ K_3 &= K_1 + U_{grav,1} - U_{grav,3} + W_{otras} \\ &= 150\text{ J} + 0 - 0 + (-112\text{ J}) = 38\text{ J} \end{aligned}$$

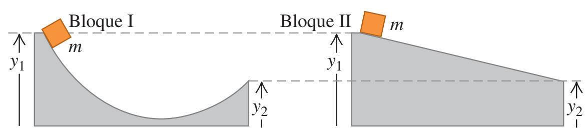
La caja vuelve a la base de la rampa con sólo 38 J de los 150 J originales de energía mecánica (figura 7.11b). Usando $K_3 = \frac{1}{2}mv_3^2$,

$$v_3 = \sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \sqrt{\frac{2(38\text{ J})}{12\text{ kg}}} = 2.5\text{ m/s}$$

**EVALUAR:** Observe que la rapidez de la caja cuando regresa a la base de la rampa, $v_3 = 2.5$ m/s, es menor que la rapidez $v_1 = 5.0$ m/s con que salió de ese punto. Eso está bien: se perdió energía debido a la fricción.

En el inciso *b*) aplicamos la ecuación (7.7) a los puntos 1 y 3, considerando el viaje redondo en conjunto. De forma alternativa, podríamos haber considerado la segunda parte del movimiento por sí mismo y aplicado la ecuación (7.7) a los puntos 2 y 3. Inténtelo y sabrá si obtiene el mismo resultado para $v_3$.

**Evalúe su comprensión de la sección 7.1** La figura muestra dos rampas distintas sin fricción. Las alturas $y_1$ y $y_2$ son iguales en cada rampa. Si un bloque con masa *m* se suelta del reposo en el extremo izquierdo de cada rampa, ¿cuál bloque tendrá mayor rapidez al llegar al extremo derecho? i) el bloque I; ii) el bloque II; iii) la rapidez es la misma para ambos bloques.




## 7.2 Energía potencial elástica

Hay muchas situaciones donde encontramos energía potencial que no sea de naturaleza gravitacional. Un ejemplo es la banda de hule de una resortera. El trabajo es efectuado por la fuerza que estira la banda, y ese trabajo se almacena hasta en la banda hasta que ésta se suelta. Entonces, la banda imparte energía cinética al proyectil.

Éste es el mismo patrón que vimos en el martinete de la sección 7.1: efectuar trabajo sobre el sistema para almacenar energía, que después se convierte en energía cinética. Describiremos el proceso de almacenar energía en un cuerpo deformable, como un resorte o una banda de hule, en términos de *energía potencial elástica* (figura 7.12). Un cuerpo es *elástico* si recupera su forma y tamaño originales después de deformarse.

Específicamente, consideraremos el almacenamiento de energía en un resorte ideal como los que estudiamos en la sección 6.3. Para mantener un resorte ideal estirado una distancia *x,* debemos ejercer una fuerza $F = kx$, donde *k* es la constante de fuerza del resorte. Ésta es una idealización útil porque muchos cuerpos elásticos exhiben tal proporcionalidad directa entre la fuerza $\vec{F}$ y el desplazamiento *x,* siempre que *x* sea lo suficientemente pequeña.

**7.12** El tendón de Aquiles, que va de la parte de atrás del tobillo al hueso del talón, actúa como un resorte natural. Cuando se estira y luego se relaja, el tendón almacena y después libera energía potencial elástica. Esta acción de resorte reduce el trabajo que al correr deben efectuar los músculos de la pierna.

Procedemos igual que con la energía potencial gravitacional. Comenzamos con el trabajo realizado por la fuerza elástica (del resorte) y lo combinamos con el teorema trabajo-energía. La diferencia es que la energía potencial gravitacional es una propiedad compartida de un cuerpo y la Tierra; no obstante, la energía potencial elástica sólo se almacena en el resorte (u otro cuerpo deformable).

La figura 7.13 muestra el resorte ideal de la figura 6.18, con su extremo izquierdo fijo y el extremo derecho conectado a un bloque de masa $m$ que puede moverse sobre el eje $x$. En la figura 7.13a, el cuerpo está en $x = 0$ con el resorte ni estirado ni comprimido. Movemos el bloque estirando o comprimiendo el resorte, y luego lo soltamos. Al moverse el bloque de una posición $x_1$ a otra posición $x_2$, ¿cuánto trabajo realiza la fuerza elástica (del resorte) sobre el bloque?

En la sección 6.3 vimos que el trabajo que debemos efectuar *sobre* el resorte para mover un extremo desde un alargamiento $x_1$ hasta otro alargamiento distinto $x_2$ es

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \qquad \text{(trabajo efectuado } \textit{sobre} \text{ un resorte)}$$

donde $k$ es la constante de fuerza del resorte. Si estiramos más el resorte, realizamos trabajo positivo sobre él; si dejamos que el resorte se relaje sosteniendo un extremo, realizamos trabajo negativo sobre él. También vimos que esta expresión para el trabajo sigue siendo correcta si el resorte se comprime, en vez de estirarse, de modo que $x_1$ o $x_2$, o ambos, son negativos. Ahora nos interesa el trabajo efectuado *por* el resorte. Por la tercera ley de Newton, un trabajo es el negativo del otro. Cambiando los signos en la ecuación, vemos que, al desplazarse de $x_1$ a $x_2$, el resorte efectúa un trabajo $W_{el}$ dado por

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \qquad \text{(trabajo efectuado } \textit{por} \text{ un resorte)}$$

El subíndice "el" significa *elástico*. Si $x_1$ y $x_2$ son positivos y $x_2 > x_1$ (figura 7.13b), el resorte efectúa trabajo negativo sobre el bloque, que se mueve en la dirección $+x$ mientras el resorte tira de él en la dirección $-x$. El resorte se estira más y el bloque se frena. Si $x_1$ y $x_2$ son positivos y $x_2 < x_1$ (figura 7.13c), el trabajo del resorte es positivo al relajarse y el bloque se acelera. Si el resorte puede comprimirse o estirarse, $x_1$ o $x_2$, o ambos, pueden ser negativos; sin embargo, la expresión para $W_{el}$ sigue siendo válida. En la figura 7.13d, $x_1$ y $x_2$ son negativos, pero $x_2$ lo es menos; el resorte comprimido efectúa trabajo positivo al relajarse, acelerando al bloque.

Como hicimos con el trabajo gravitacional, podemos expresar el trabajo del resorte en términos de una cantidad dada al principio y al final del desplazamiento. Esta cantidad es $\frac{1}{2}kx^2$, que definimos como la **energía potencial elástica**:

$$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(energía potencial elástica)} \qquad (7.9)$$

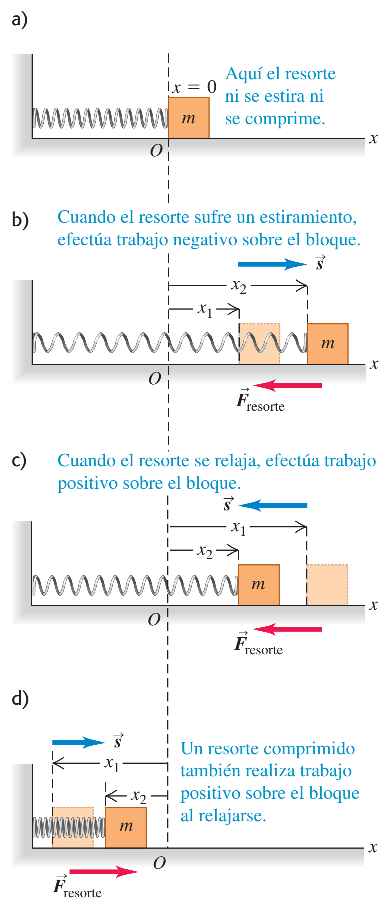
La figura 7.14 es una gráfica de la ecuación (7.9). La unidad de $U_{el}$ es el joule (J), la misma de *todas* las cantidades de energía y trabajo; esto es evidente en la ecuación (7.9), si recordamos que las unidades de $k$ son N/m y que $1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J}$.

Podemos usar la ecuación (7.9) para expresar el trabajo $W_{el}$ efectuado sobre el bloque por la fuerza elástica en términos del cambio en la energía potencial elástica:

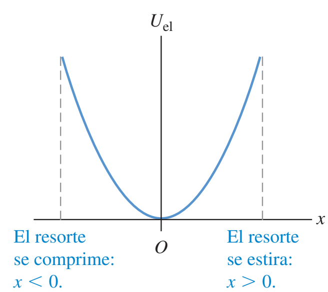
$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el} \qquad (7.10)$$

Si un resorte estirado se estira más, como en la figura 7.13b, $W_{el}$ es negativo y $U_{el}$ *aumenta*; se almacena más energía potencial en el resorte. Si un resorte estirado se relaja (figura 7.13c), $x$ disminuye, $W_{el}$ es positivo y $U_{el}$ *disminuye*; el resorte pierde energía potencial elástica. Los valores negativos de $x$ corresponden a un resorte

**7.13** Cálculo del trabajo realizado por un resorte conectado a un bloque sobre una superficie horizontal. La cantidad $x$ es la extensión o compresión del resorte.




**7.14** La gráfica de la energía potencial elástica para un resorte ideal es una parábola: $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$, donde $x$ es la extensión o compresión del resorte. La energía potencial elástica $U_{el}$ nunca es negativa.



comprimido pero, como muestra la figura 7.14, $U_{el}$ es positiva para $x$ tanto positiva como negativa, y las ecuaciones (7.9) y (7.10) son válidas en ambos casos. Cuanto más se comprima *o* estira un resorte, mayor será su energía potencial elástica.

**CUIDADO** **Energía potencial gravitacional contra energía potencial elástica** Una diferencia importante entre la energía potencial gravitacional $U_{grav} = mgy$ y la energía potencial elástica $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$ es que *no* tenemos la libertad de elegir $x = 0$ donde queramos. Para que sea congruente con la ecuación (7.9), $x = 0$ *debe* ser la posición donde el resorte no está ni estirado ni comprimido. Ahí, su energía potencial elástica y la fuerza que ejerce son ambas cero.

El teorema trabajo-energía dice que $W_{tot} = K_2 - K_1$ sin importar qué tipo de fuerzas actúen sobre el cuerpo. Si la fuerza elástica es la *única* que realiza trabajo sobre el cuerpo, entonces,

$$W_{tot} = W_{el} = U_{el,1} - U_{el,2}$$

El teorema trabajo-energía $W_{tot} = K_2 - K_1$ nos da así

$$K_1 + U_{el,1} = K_2 + U_{el,2} \quad \text{(si sólo la fuerza elástica realiza trabajo)} \tag{7.11}$$

Aquí, $U_{el}$ está dada por la ecuación (7.9), por lo que

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \quad \text{(si sólo la fuerza elástica realiza trabajo)} \tag{7.12}$$

En este caso, la energía mecánica total $E = K + U_{el}$ (la suma de las energías potenciales cinética y *elástica*) se *conserva*. Un ejemplo es el movimiento del bloque de la figura 7.13, siempre que la superficie horizontal no tenga fricción y ninguna fuerza además de la ejercida por el resorte efectúe trabajo.

Para que la ecuación (7.12) sea estrictamente correcta, el resorte ideal *no debe tener masa*; si la tiene, también tendrá energía cinética al moverse las espiras del resorte. Podemos despreciar la energía cinética del resorte, si su masa es mucho menor que la masa $m$ del cuerpo conectado al resorte. Por ejemplo, un automóvil común tiene una masa de 1200 kg o más. Los resortes de su suspensión tienen masas de unos cuantos kilogramos, así que podemos despreciarlas si queremos estudiar cómo el auto rebota sobre su suspensión.

## Situaciones con energía potencial tanto gravitacional como elástica

ActivPhysics ONLINE

5.4 Salto inverso con bungee

5.5 Bolos con impulso de resorte

Las ecuaciones (7.11) y (7.12) son válidas si la única energía potencial del sistema es la elástica. ¿Qué sucede si tenemos fuerzas *tanto* gravitacionales *como* elásticas, digamos un bloque conectado al extremo inferior de un resorte que cuelga verticalmente? ¿Y qué ocurre si el trabajo también es efectuado por otras fuerzas que *no pueden* describirse en términos de energía potencial, como la fuerza de resistencia del aire sobre un bloque en movimiento? Entonces, el trabajo total es la suma del trabajo efectuado por la fuerza gravitacional ($W_{grav}$), por la fuerza elástica ($W_{el}$) y por otras fuerzas ($W_{otras}$): $W_{tot} = W_{grav} + W_{el} + W_{otras}$. De esta manera, el teorema trabajo-energía da

$$W_{grav} + W_{el} + W_{otras} = K_2 - K_1$$

El trabajo efectuado por la fuerza gravitacional es $W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$ y el trabajo efectuado por el resorte es $W_{el} = U_{el,1} - U_{el,2}$. Por lo tanto, podemos rescribir el teorema trabajo-energía para este caso más general como

$$K_1 + U_{grav,1} + U_{el,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2} + U_{el,2} \quad \text{(válida en general)} \tag{7.13}$$

O bien, de manera equivalente,

$$K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2 \qquad \text{(válida en general)} \tag{7.14}$$

donde $U = U_{\text{grav}} + U_{\text{el}} = mgy + \frac{1}{2}kx^2$ es la *suma* de la energía potencial gravitacional y la energía potencial elástica. Para abreviar, lamamos $U$ simplemente a la "energía potencial".

La ecuación (7.14) es *la expresión más general* de la relación entre energía cinética, energía potencial y trabajo realizado por otras fuerzas, la cual nos indica:

**El trabajo realizado por todas las fuerzas distintas de la elástica o la gravitacional es igual al cambio de energía mecánica total $E = K + U$ del sistema, donde $U = U_{\text{grav}} + U_{\text{el}}$ es la suma de la energía potencial gravitacional y la energía potencial elástica.**

El "sistema" se compone del cuerpo de masa *m,* la Tierra con la que interactúa a través de la fuerza gravitacional y el resorte de constante de fuerza *k.*

Si $W_{\text{otras}}$ es positivo, $E = K + U$ aumenta; si $W_{\text{otras}}$ es negativo, $E$ disminuye. Si las fuerzas gravitacional *y* elástica son las *únicas* que efectúan trabajo sobre el cuerpo, $W_{\text{otras}} = 0$ y la energía mecánica total (que incluye energías potenciales gravitacional y elástica) se conserva. (Compare la ecuación (7.14) con las ecuaciones (7.7) y (7.8), que describen situaciones donde hay energía potencial gravitacional pero no energía potencial elástica.)

El salto con bungee (figura 7.15) es un ejemplo de transformaciones entre energía cinética, energía potencial elástica y energía potencial gravitacional. Al caer la persona, la energía potencial gravitacional disminuye y se convierte en la energía cinética del saltador y la energía potencial elástica de la cuerda del bungee. Más allá de cierto punto de la caída, la rapidez de la persona disminuye, con lo que tanto la energía potencial gravitacional como la energía cinética se convierten en energía potencial elástica.

**7.15** La caída de una persona atada a un bungee implica interacciones entre energía cinética, energía potencial gravitacional y energía potencial elástica. Sin embargo, la energía mecánica no se conserva, porque tanto fuerzas de fricción dentro de la cuerda del bungee como la resistencia del aire también efectúan trabajo. (Si la energía mecánica *se conservara*, ¡la persona seguiría rebotando eternamente!)

## Estrategia para resolver problemas 7.2 — Problemas utilizando energía mecánica II

MP

La Estrategia para resolver problemas 7.1 (sección 7.1) es igualmente útil para resolver problemas que implican fuerzas elásticas además de gravitacionales. Lo único nuevo es que ahora la energía potencial $U$ incluye la energía potencial elástica $U_{\text{el}} = \frac{1}{2}kx^2$, donde $x$ es el desplazamiento del resorte *respecto a su longitud no estirada.* La energía potencial da cuenta del trabajo realizado por las fuerzas gravitacional y elástica; el trabajo de las otras fuerzas, $W_{\text{otras}}$, debe incluirse por separado.

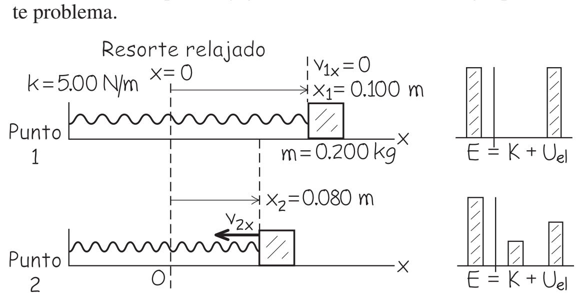
## Ejemplo 7.7 Movimiento con energía potencial elástica

Un deslizador de masa $m = 0.200$ kg descansa en un riel de aire horizontal, sin fricción, conectado a un resorte con constante de fuerza $k = 5.00$ N/m. Usted tira del deslizador, estirando el resorte 0.100 m, y luego se suelta con velocidad inicial cero. El deslizador regresa a su posición de equilibrio ($x = 0$). ¿Qué velocidad tiene cuando $x = 0.080$ m?

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Como la fuerza del resorte varía con la posición, este problema no puede resolverse con las ecuaciones para movimiento con aceleración constante; ahora usaremos la idea de que, al comenzar a moverse el deslizador, la energía potencial elástica se convierte en energía cinética. (El deslizador permanece a la misma altura durante todo el movimiento, así que la energía potencial gravitacional no es importante. Por lo tanto, $U = U_{\text{el}} = \frac{1}{2}kx^2$.)

**7.16** Nuestros esquemas y gráficas de barra de la energía para este problema.




**PLANTEAR:** La figura 7.16 muestra nuestros esquemas. La fuerza del resorte es la única que efectúa trabajo sobre el deslizador, así que

*continúa*

$W_{\text{otras}} = 0$ y podemos usar la ecuación (7.11). Sea el punto 1 donde se suelta el deslizador, y el punto 2, en $x = 0.080$ m. Conocemos la velocidad en el punto 1 ($v_{1x} = 0$); la incógnita es la velocidad $x$ en el punto 2, $v_{2x}$.

**EJECUTAR:** Las energías son

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_{1x}{}^2 = \frac{1}{2}(0.200\text{ kg})(0)^2 = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{2}kx_1{}^2 = \frac{1}{2}(5.00\text{ n/m})(0.100\text{ m})^2 = 0.0250\text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_{2x}{}^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}(5.00\text{ N/m})(0.080\text{ m})^2 = 0.0160\text{ J}$$

Entonces, por la ecuación (7.11),

$$K_2 = K_1 + U_1 - U_2 = 0 + 0.0250\text{ J} - 0.0160\text{ J} = 0.0090\text{ J}$$

$$v_{2x} = \pm\sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(0.0090\text{ J})}{0.200\text{ kg}}} = \pm 0.30\text{ m/s}$$

Elegimos la raíz negativa porque el deslizador se está moviendo en la dirección $-x$; la respuesta que queremos es $v_{2x} = -0.30$ m/s.

**EVALUAR:** ¿Qué significa la segunda solución, $v_{2x} = +0.30$ m/s? En algún momento, el resorte se comprimirá y empujará el deslizador hacia la derecha en la dirección $+x$ (véase la figura 7.13d). La segunda solución nos dice que, cuando el deslizador pase por $x = 0.080$ m moviéndose hacia la derecha, su rapidez será de 0.30 m/s: la misma que cuando pasó por este punto moviéndose hacia la izquierda.

Cuando el deslizador pase por el punto $x = 0$, el resorte estará relajado y toda la energía mecánica estará en forma de energía cinética. ¿Puede demostrar que la rapidez del deslizador en ese punto es de 0.50 m/s?

## Ejemplo 7.8 Movimiento con energía potencial elástica y trabajo efectuado por otras fuerzas

Para el sistema del ejemplo 7.7, suponga que el deslizador está inicialmente en reposo en $x = 0$, con el resorte sin estirar. Usted aplica al deslizador una fuerza constante $\vec{F}$ en la dirección $+x$ con magnitud de 0.610 N. ¿Qué velocidad tiene éste cuando se movió a $x = 0.100$ m?

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Aunque la fuerza aplicada $\vec{F}$ es constante, la fuerza del resorte no lo es, así que la aceleración del deslizador no es constante. La energía mecánica total no se conserva a causa del trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$, pero aun así podemos usar la relación de energía de la ecuación (7.13). (Al igual que en el ejemplo 7.7, ignoramos la energía potencial gravitacional porque no cambia la altura del deslizador. Por lo tanto, sólo tenemos energía potencial, así que $U = U_{\text{el}} = \frac{1}{2}kx^2$.)

**PLANTEAR:** Tomemos como punto 1 en $x = 0$, donde la velocidad es $v_{1x} = 0$, y como punto 2, $x = 0.100$ m (no son los mismos puntos rotulados en la figura 7.16). La incógnita es $v_{2x}$, la velocidad en el punto 2.

**EJECUTAR:** Las energías son

$$K_1 = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = 0$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_{2x}{}^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}(5.00\text{ N/m})(0.100\text{ m})^2 = 0.0250\text{ J}$$

$$W_{\text{otras}} = (0.610\text{ N})(0.100\text{ m}) = 0.0610\text{ J}$$

(Para calcular $W_{\text{otras}}$, multiplicamos la magnitud de la fuerza por el desplazamiento, ya que ambas tienen la dirección $+x$.) Inicialmente, la energía mecánica total es cero; el trabajo realizado por $\vec{F}$ aumenta la energía mecánica total a 0.0610 J, de los cuales 0.0250 J corresponden a energía potencial elástica. El resto es energía cinética. Por la ecuación (7.13),

$$K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2$$

$$K_2 = K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} - U_2$$

$$= 0 + 0 + 0.0610\text{ J} - 0.0250\text{ J} = 0.0360\text{ J}$$

$$v_{2x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.0360\text{ J})}{0.200\text{ kg}}} = 0.60\text{ m/s}$$

Elegimos la raíz cuadrada positiva porque el deslizador se mueve en la dirección $+x$.

**EVALUAR:** Para verificar la respuesta, piense en qué cambiaría si desconectáramos el deslizador del resorte. Entonces, $\vec{F}$ sería la única fuerza que efectúa trabajo, la energía potencial sería cero en todo momento y la ecuación (7.13) nos daría

$$K_2 = K_1 + W_{\text{otras}} = 0 + 0.0610\text{ J}$$

$$v_{2x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.0610\text{ J})}{0.200\text{ kg}}} = 0.78\text{ m/s}$$

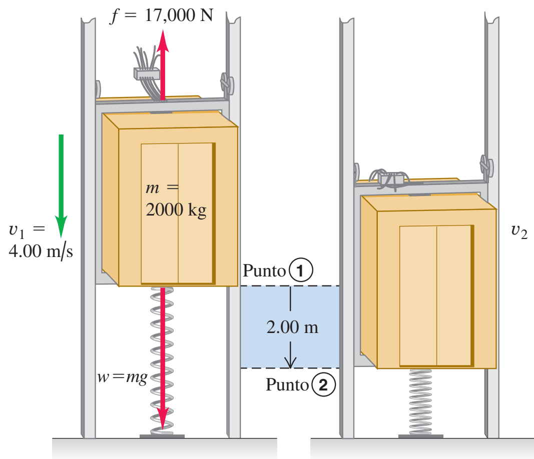
Obtuvimos una velocidad menor que este valor porque el resorte efectúa trabajo negativo sobre el deslizador al estirarse (véase la figura 7.13b).

Si usted deja de empujar el deslizador cuando éste alcanza el punto $x = 0.100$ m, más allá de este punto la única fuerza que realiza trabajo sobre el deslizador es la fuerza del resorte. Por lo tanto, para $x > 0.100$ m, se conserva la energía mecánica total $E = K + U$ y se mantiene el mismo valor de 0.0610 J. El deslizador frenará conforme el resorte siga estirándose, así que la energía cinética $K$ disminuirá al aumentar la energía potencial. El deslizador llegará al reposo en $x = x_3$; en este punto la energía cinética es cero y la energía potencial $U = U_{\text{el}} = \frac{1}{2}kx_3^2$ es igual a la energía mecánica total 0.0610 J. El lector debería ser capaz de demostrar que el deslizador llega al reposo en $x_3 = 0.156$ m, lo que significa que se mueve otros 0.056 m después de que se elimina la fuerza $\vec{F}$ en $x_2 = 0.100$ m. (Puesto que no hay fricción, el deslizador no permanecerá en reposo, sino que empezará a regresar hacia $x = 0$ debido a la fuerza del resorte estirado.)

## Ejemplo 7.9 Movimiento con fuerzas gravitacional, elástica y de fricción

En una situación de diseño “del peor caso”, un elevador de 2000 kg con cables rotos cae a 4.00 m/s cuando hace contacto con un resorte amortiguador en el fondo del cubo. Se supone que el resorte debe detener el elevador, comprimiéndose 2.00 m al hacerlo (figura 7.17). Durante el movimiento, un freno de seguridad aplica una fuerza de fricción constante de 17,000 N al elevador. Imagine que es un consultor de diseño y le piden determinar qué constante de fuerza debería tener el resorte.

**7.17** La caída de un elevador es detenida por un resorte y una fuerza de fricción constante.




### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Usaremos el enfoque de energía para determinar la constante de fuerza que aparece en la expresión de energía potencial elástica. Observe que en este problema intervienen energías potenciales *tanto* gravitacional *como* elástica. Además, la energía mecánica total no se conserva porque la fricción realiza trabajo negativo $W_{otras}$ sobre el elevador.

**PLANTEAR:** Puesto que la energía mecánica no se conserva e interviene más de un tipo de energía potencial, usaremos la forma más general de la relación de energía, la ecuación (7.13). Tomaremos como punto 1 la posición de la base del elevador cuando recién entra en contacto con el resorte, y como punto 2, su posición cuando queda en reposo. Elegimos el origen en el punto 1, así que $y_1 = 0$ y $y_2 = -2.00$ m. Entonces, la coordenada del extremo superior del resorte es la misma que la coordenada del elevador, y la energía potencial elástica en cualquier punto entre el punto 1 y el 2 es $U_{el} = \frac{1}{2}ky^2$. (La energía potencial gravitacional es $U_{grav} = mgy$, como siempre.) Conocemos las rapideces inicial y final del elevador y la magnitud de la fuerza de fricción, así que la única incógnita es la constante de fuerza $k$ (nuestra incógnita).

**EJECUTAR:** La rapidez inicial del elevador es $v_1 = 4.00$ m/s, así que su energía cinética inicial es

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(2000\text{ kg})(4.00\text{ m/s})^2 = 16{,}000\text{ J}$$

El elevador se detiene en el punto 2, así que $K_2 = 0$. La energía potencial en el punto 1, $U_1$, es cero; $U_{grav} = 0$ porque $y_1 = 0$, y $U_{el} = 0$ porque el resorte aún no está comprimido. En el punto 2, hay energía potencial tanto gravitacional como elástica, de modo que

$$U_2 = mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2$$

La energía potencial gravitacional en el punto 2 es

$$mgy_2 = (2000\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(-2.00\text{ m}) = -39{,}200\text{ J}$$

La otra fuerza es la fuerza de fricción (17,000 N), que actúa opuesta al desplazamiento de 2.00 m, por lo que

$$W_{otras} = -(17{,}000\text{ N})(2.00\text{ m}) = -34{,}000\text{ J}$$

Incluimos estos términos en $K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2$ y obtenemos

$$K_1 + 0 + W_{otras} = 0 + \left(mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2\right)$$

así que la constante de fuerza del resorte es

$$\begin{aligned} k &= \frac{2(K_1 + W_{otras} - mgy_2)}{y_2^2} \\ &= \frac{2[16{,}000\text{ J} + (-34{,}000\text{ J}) - (-39{,}200\text{ J})]}{(-2.00\text{ m})^2} \\ &= 1.06 \times 10^4\text{ N/m} \end{aligned}$$

Ésta es aproximadamente un décimo de la constante de fuerza de un resorte en la suspensión de un automóvil.

**EVALUAR:** Examinemos lo que podría parecer una paradoja aquí. La energía potencial elástica del resorte en el punto 2 es

$$\frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}(1.06 \times 10^4\text{ N/m})(-2.00\text{ m})^2 = 21{,}200\text{ J}$$

Esto es *más* que la energía mecánica total en el punto 1:

$$E_1 = K_1 + U_1 = 16{,}000\text{ J} + 0 = 16{,}000\text{ J}$$

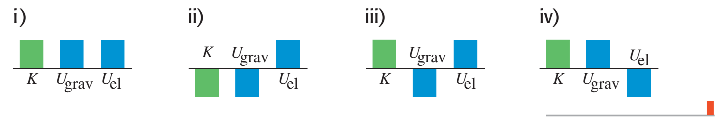
Sin embargo, la fuerza de fricción hizo que la energía mecánica del sistema *disminuyera* en 34,000 J entre el punto 1 y el punto 2. ¿Apareció energía de la nada? No se preocupe; no hay tal paradoja. En el punto 2 también hay energía potencial gravitacional *negativa*, $mgy_2 = -39{,}200$ J porque el punto 2 está debajo del origen. La energía mecánica total en el punto 2 es

$$\begin{aligned} E_2 &= K_2 + U_2 = 0 + \frac{1}{2}ky_2^2 + mgy_2 \\ &= 0 + 21{,}200\text{ J} + (-39{,}200\text{ J}) = -18{,}000\text{ J} \end{aligned}$$

Ésta no es sino la energía mecánica inicial de 16,000 J menos los 34,000 J perdidos por la fricción.

¿El elevador se quedará en el fondo del cubo? En el punto 2 el resorte comprimido ejerce una fuerza hacia arriba de magnitud $F_{resorte} = (1.06 \times 10^4\text{ N/m})(2.00\text{ m}) = 21{,}200$ N; mientras que la fuerza de gravedad sobre el elevador es sólo $w = mg = (2000\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 19{,}600$ N. Entonces, si no hubiera fricción, habría una fuerza neta hacia arriba de $21{,}200\text{ N} - 19{,}600\text{ N} = 1600$ N y el elevador rebotaría hacia arriba. Sin embargo, hay fricción por el freno de seguridad, el cual puede ejercer una fuerza de hasta 17,000 N; de esta manera, el freno evitaría que el elevador rebote.

**Evalúe su comprensión de la sección 7.2** Considere la situación del ejemplo 7.9 en el instante en que el elevador aún se mueve hacia abajo y el resorte se comprime 1.00 m. En la siguiente figura, ¿cuál de las gráficas de barra de la energía presenta con mayor precisión la energía cinética $K$, la energía potencial gravitacional $U_{grav}$ y la energía potencial elástica $U_{el}$ en dicho instante?




## 7.3 Fuerzas conservativas y no conservativas

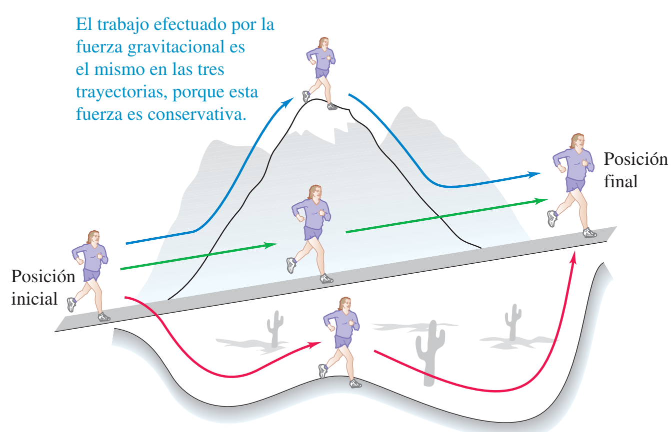
Al estudiar la energía potencial hemos hablado de "almacenar" energía cinética convirtiéndola en energía potencial, pensando siempre que podremos recuperarla después como energía cinética. Por ejemplo, una pelota lanzada hacia arriba se frena al convertir su energía cinética en potencial; sin embargo, al bajar la conversión se invierte y la pelota se acelera al convertir su energía potencial otra vez en energía cinética. Si no hay resistencia del aire, la pelota se mueve con la misma rapidez cuando regresa al punto de lanzamiento que cuando se lanzó.

Otro ejemplo es el de un deslizador que se mueve sobre un riel de aire horizontal sin fricción que choca contra un amortiguador de resorte en el extremo del riel. El resorte se comprime y el deslizador se detiene; luego rebota. Como no hay fricción, el deslizador tiene la misma rapidez y energía cinética que tenía antes de chocar. Aquí también hay una conversión bidireccional: de energía cinética a potencial y viceversa. En ambos casos, podemos definir una función de energía potencial tal que la energía mecánica total, cinética más potencial, es constante o *se conserva* durante el movimiento.

### Fuerzas conservativas

Decimos que una fuerza que ofrece esta oportunidad de conversión bidireccional entre energías cinética y potencial es una **fuerza conservativa**. Hemos visto dos ejemplos de fuerzas conservativas: la gravitacional y la de resorte. (Más adelante en este libro estudiaremos otra fuerza conservativa, la fuerza eléctrica entre los objetos cargados.) Una característica fundamental de las fuerzas conservativas es que su trabajo siempre es *reversible.* Algo que depositamos en el "banco" de energía puede retirarse después sin pérdida. Otro aspecto importante de las fuerzas conservativas es que un cuerpo puede moverse del punto 1 al punto 2 siguiendo varios caminos; pero el trabajo realizado por una fuerza conservativa es el mismo para todos (figura 7.18).

**7.18** El trabajo realizado por una fuerza conservativa como la gravedad depende sólo de los extremos de la trayectoria de movimiento, no sobre la trayectoria específica seguida entre esos puntos.



Así, si un cuerpo se mantiene cerca de la superficie terrestre, la fuerza gravitacional $m\vec{g}$ es independiente de la altura, y el trabajo realizado por tal fuerza sólo depende del cambio de altura. Si el cuerpo describe una trayectoria cerrada, volviendo al punto de partida, el trabajo *total* de la fuerza gravitacional siempre es cero.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa *siempre* tiene estas propiedades:

1. Puede expresarse como la diferencia entre los valores inicial y final de una función de *energía potencial*.
2. Es reversible.
3. Es independiente de la trayectoria del cuerpo y depende sólo de los puntos inicial y final.
4. Si los puntos inicial y final son el mismo, el trabajo total es cero.

Si las *únicas* fuerzas que efectúan trabajo son conservativas, la energía mecánica total $E = K + U$ es constante.

## Fuerzas no conservativas

No todas las fuerzas son conservativas. Considere la fuerza de fricción que actúa sobre la caja que se desliza por la rampa del ejemplo 7.6 (sección 7.1). El cuerpo sube y luego regresa al punto de partida, pero el trabajo total efectuado por la fricción sobre él *no* es cero. Al invertirse la dirección del movimiento, se invierte la fuerza de fricción, que realiza trabajo *negativo* en *ambas* direcciones. Si un automóvil con frenos bloqueados se derrapa por el pavimento con rapidez (y energía cinética) decreciente(s), la energía cinética perdida no se puede recuperar invirtiendo el movimiento ni de ninguna otra manera, y la energía mecánica *no* se conserva. *No* hay función de energía potencial para la fuerza de fricción.

Asimismo, la fuerza de resistencia de fluidos (sección 5.3) no es conservativa. Si lanzamos una pelota hacia arriba, la resistencia del aire efectúa trabajo negativo sobre ella al subir *y* al bajar. La pelota regresa a la mano con menor rapidez y menos energía cinética que cuando salió, y no hay forma de recuperar la energía mecánica perdida.

El trabajo realizado por una **fuerza no conservativa** *no* puede representarse con una función de energía potencial. Algunas fuerzas no conservativas, como la fricción cinética o la resistencia de fluidos, hacen que se pierda o se disipe energía mecánica: son **fuerzas disipadoras**. También hay fuerzas no conservativas que *aumentan* la energía mecánica. Los fragmentos de un petardo que estalla salen despedidos con una energía cinética muy grande, debido a una reacción química de la pólvora con el oxígeno. Las fuerzas liberadas por esta reacción no son conservativas porque el proceso no es reversible. ¡Los trozos nunca se volverán a unir espontáneamente para formar un petardo!

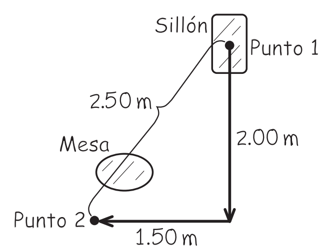
### Ejemplo 7.10 El trabajo de fricción depende de la trayectoria

Imagine que está reacomodando sus muebles y desea mover 2.50 m un sillón de 40.0 kg en una habitación. Sin embargo, el camino rectilíneo está bloqueado por una pesada mesa de centro que no desea mover. Por lo tanto, mueve el sillón siguiendo una doble trayectoria, cuyos lados tienen 2.00 m y 1.50 m de longitud. En comparación con la trayectoria recta, ¿cuánto trabajo más se debe realizar usted para empujar el sillón por la trayectoria acodada? El coeficiente de fricción cinética es de 0.200.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Aquí efectúan trabajo tanto usted como la fuerza de fricción, así que deberemos usar la relación de energía que incluye fuerzas distintas de la elástica o gravitacional. Con esa relación, obtendremos un vínculo entre el trabajo efectuado por *usted* y el efectuado por la *fricción*.

**7.19** Nuestro esquema para este problema.




**PLANTEAR:** El esquema de la situación se muestra en la figura 7.19. El sillón está en reposo tanto en el punto 1 como en el punto 2, así que

*continúa*

$K_1 = K_2 = 0$. No hay energía potencial elástica (no hay resortes), y la energía potencial gravitacional no cambia porque el movimiento del sillón es sólo horizontal: $U_1 = U_2$. De la ecuación (7.14), se sigue que $W_{\text{otras}} = 0$. El otro trabajo realizado sobre el sillón es la suma del trabajo positivo que usted realiza, $W_{\text{ud}}$ y el trabajo negativo $W_{\text{fric}}$, de la fuerza de fricción cinética. Puesto que la suma es cero, tenemos

$$W_{\text{ud}} = -W_{\text{fric}}$$

Por lo tanto, para determinar $W_{\text{ud}}$, calcularemos el trabajo efectuado por la fricción.

**EJECUTAR:** Como el piso es horizontal, la fuerza normal sobre el sillón es igual a su peso $mg$, y la magnitud de la fuerza de fricción es $f_k = \mu_k n = \mu_k mg$. El trabajo que usted debe efectuar en cada trayectoria es entonces

$$\begin{aligned} W_{\text{ud}} &= -W_{\text{fric}} = -(-f_k s) = +\mu_k mgs \\ &= (0.200)(40.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(2.50\ \text{m}) \\ &= 196\ \text{J} \qquad \text{(trayectoria rectilínea)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{ud}} &= -W_{\text{fric}} \\ &= (0.200)(40.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{m} + 1.50\ \text{m}) \\ &= 274\ \text{J} \qquad \text{(trayectoria acodada)} \end{aligned}$$

El trabajo extra que usted debe realizar es 274 J − 196 J = 78 J.

**EVALUAR:** El trabajo efectuado por la fricción es $W_{\text{fric}} = -W_{\text{ud}} = -196$ J por el camino recto; y $-274$ J por el camino acodado. El trabajo efectuado por la fricción depende del camino seguido, y esto demuestra que la fricción es una fuerza *no conservativa*.

## Ejemplo 7.11 ¿Conservativa o no conservativa?

En cierta región del espacio, la fuerza que actúa sobre un electrón es $\vec{F} = Cx\hat{\jmath}$, donde $C$ es una constante positiva. El electrón se mueve en sentido antihorario en un cuadrado sobre el plano $xy$ (figura 7.20). Las esquinas del cuadrado están en $(x, y) = (0, 0)$, $(L, 0)$, $(L, L)$ y $(0, L)$. Calcule el trabajo de $\vec{F}$ sobre el electrón durante una vuelta. ¿Esta fuerza es conservativa o no conservativa?

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** En el ejemplo 7.10, la fuerza de fricción tenía magnitud constante y siempre era opuesta al desplazamiento, así que era fácil calcular el trabajo efectuado. Aquí, en cambio, la fuerza $\vec{F}$ no es constante y en general no está en la misma dirección que el desplazamiento.

**PLANTEAR:** Para obtener trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$, usaremos la expresión más general del trabajo (ecuación 6.14):

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

donde $d\vec{l}$ es un desplazamiento infinitesimal. Calculemos el trabajo realizado en cada tramo del cuadrado y luego sumemos los resultados para obtener el trabajo efectuado en el viaje "de ida y vuelta".

**EJECUTAR:** En el primer tramo, de (0, 0) a $(L, 0)$, la fuerza varía pero siempre es perpendicular al desplazamiento, así que $\vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, y el trabajo efectuado sobre el primer tramo es $W_1 = 0$. La fuerza tiene siempre el mismo valor $\vec{F} = CL\hat{\jmath}$ sobre el segundo tramo de $(L, 0)$ a $(L, L)$. El desplazamiento en este tramo es en la dirección $+y$, así que $d\vec{l} = dy\hat{\jmath}$ y

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = CL\hat{\jmath} \cdot dy\hat{\jmath} = CL\,dy$$

El trabajo efectuado en el segundo tramo es entonces

$$W_2 = \int_{(L,0)}^{(L,L)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{y=0}^{y=L} CL\,dy = CL\int_0^L dy = CL^2$$

En el tercer tramo, de $(L, L)$ a $(0, L)$, $\vec{F}$ es otra vez perpendicular al desplazamiento, de manera que $W_3 = 0$. La fuerza es cero en el tramo final, de $(0, L)$ a (0, 0), así que no se efectúa trabajo y $W_4 = 0$. El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ en el viaje "de ida y vuelta" es

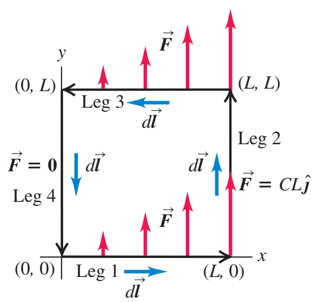
$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 0 + CL^2 + 0 + 0 = CL^2$$

Los puntos inicial y final son el mismo, pero el trabajo total de $\vec{F}$ no es cero. Se trata de una fuerza no conservativa; *no puede* representarse con una función de energía potencial.

**EVALUAR:** Dado que $W$ es positivo, *aumenta* la energía mecánica del electrón en el recorrido. Esto no es una curiosidad matemática; es una descripción de lo que sucede en una planta generadora de electricidad. Una espira de alambre se mueve en un campo magnético, el cual produce una fuerza no conservativa similar a la del ejemplo. Los electrones que se mueven en el alambre adquieren energía al dar vuelta a la espira, y esa energía se conduce a través de líneas de transmisión al consumidor. (Veremos esto con detalle en el capítulo 29.)

Si el electrón viajara por la espira en sentido horario en vez de antihorario, la fuerza $\vec{F}$ no cambiaría, pero se invertiría la dirección de cada desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$. Por lo tanto, el trabajo tendría signo opuesto y, para el recorrido completo en sentido horario, sería $W = -CL^2$. Este comportamiento es distinto del de la fuerza de fricción no conservativa. Cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie estacionaria con fricción, el trabajo de la fricción siempre es negativo, sea cual fuere la dirección del movimiento (véase el ejemplo 7.6 en la sección 7.1).

**7.20** Un electrón que se mueve alrededor de una espira cuadrada mientras sobre él actúa una fuerza $\vec{F} = Cx\hat{\jmath}$.



## La ley de conservación de la energía

Las fuerzas no conservativas no pueden representarse en términos de energía potencial; no obstante, podemos describir sus efectos en términos de energías distintas de la cinética y la potencial. Cuando un automóvil con frenos bloqueados se derrapa hasta detenerse, se calientan los neumáticos y el camino. La energía asociada a este cambio en el estado de los materiales se denomina **energía interna**. Cuando se eleva la temperatura de un cuerpo, aumenta su energía interna; si se reduce su temperatura, disminuye su energía interna.

Para captar el significado de la energía interna, consideremos un bloque que se desliza por una superficie áspera. Cuando se desliza, la fricción realiza trabajo *negativo* sobre el bloque, y el cambio de energía interna del bloque y la superficie es *positivo* (ambos se calientan). Experimentos cuidadosos demuestran que el aumento en la energía interna es *exactamente* igual al valor absoluto del trabajo efectuado por la fricción. Dicho de otro modo,

$$\Delta U_{\text{int}} = -W_{\text{otras}}$$

donde $\Delta U_{\text{int}}$ es el cambio de energía interna. Si sustituimos esto en la ecuación (7.7) o (7.14), vemos que

$$K_1 + U_1 - \Delta U_{\text{int}} = K_2 + U_2$$

Si escribimos $\Delta K = K_2 - K_1$ y $\Delta U = U_2 - U_1$, podemos expresar finalmente esto como

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{\text{int}} = 0 \qquad \text{(ley de conservación de la energía)} \qquad (7.15)$$

Este notable enunciado es la forma general de la **ley de conservación de la energía**. En un proceso dado, las energías cinética, potencial e interna de un sistema pueden cambiar; pero la *suma* de todos los cambios siempre es cero. Una disminución en una forma de energía se compensa con un aumento en las otras (figura 7.21). Si ampliamos nuestra definición de energía para incluir la energía interna, la ecuación (7.15) dice que *la energía nunca se crea ni se destruye, sólo cambia de forma.* No se ha observado aún una excepción a esta regla.

Observe que el concepto de trabajo no aparece en la ecuación (7.15). Esta ecuación nos invita a pensar sólo en términos de conversión de energía de una forma a otra. Por ejemplo, si lanzamos una pelota hacia arriba, convertimos parte de la energía interna de las moléculas de nuestro cuerpo en energía cinética de la pelota, que se convierte en energía potencial gravitacional conforme la pelota sube, y otra vez en energía cinética al bajar. Si hay resistencia del aire, parte de la energía calienta el aire y la pelota, aumentando su energía interna. La energía se convierte en la forma cinética cuando la pelota cae. Si atrapamos la pelota al caer, la energía que no se perdió en el aire se convertirá otra vez en energía interna; la pelota y su mano ahora están más calientes que al principio.

En los capítulos 19 y 20 estudiaremos la relación entre energía interna, cambios de temperatura, calor y trabajo. Éste es el corazón del campo de la física llamado *termodinámica.*

ActivPhysics ONLINE

5.7 Máquina de Atwood modificada

**7.21** Cuando se quema un litro de gasolina en el motor de un automóvil, libera $3.3 \times 10^7$ J de energía interna. Por lo tanto, $\Delta U_{\text{int}} = -3.3 \times 10^7$ J, donde el signo menos indica que disminuyó la cantidad de energía almacenada en la gasolina. Esa energía se puede convertir en energía cinética (para que aumente la rapidez del auto) o en energía potencial (para que el auto suba una cuesta).

### Ejemplo 7.12 Trabajo efectuado por la fricción

Examinemos otra vez el ejemplo 7.5 de la sección 7.1, donde Morton baja en patineta una rampa curva. Su energía cinética inicial es cero, y la potencial es 735 J. Abajo, su energía cinética es de 450 J y la potencial es cero. Por lo tanto, $\Delta K = +450$ J y $\Delta U = -735$ J. El trabajo $W_{\text{otras}} = W_{\text{fric}}$ efectuado por las fuerzas de fricción no conservativas es $-285$ J, así que el cambio de energía interna es $\Delta U_{\text{int}} = -W_{\text{otras}} = +285$ J. Las ruedas, los cojinetes y la rampa se calientan un poco cuando baja Morton. Según la ecuación (7.15), la suma de los cambios de energía es cero:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{\text{int}} = +450\ \text{J} + (-735\ \text{J}) + 285\ \text{J} = 0$$

Se conserva la energía total del sistema (incluidas las formas de energía no mecánicas).

**Evalúe su comprensión de la sección 7.3** En una estación generadora hidroeléctrica, el agua que cae impulsa las turbinas ("ruedas de agua") que a la vez impulsan generadores eléctricos. En comparación con la cantidad de energía potencial gravitacional liberada por el agua que cae, ¿qué tanta energía eléctrica se produce? i) la misma; ii) más; iii) menos.

## 7.4 Fuerza y energía potencial

En los dos tipos de fuerzas conservativas (gravitacional y elástica) que estudiamos, comenzamos con una descripción del comportamiento de la *fuerza* y de él dedujimos una expresión para la *energía potencial*. Por ejemplo, para un cuerpo de masa $m$ en un campo gravitacional uniforme, la fuerza gravitacional es $F_y = -mg$. Vimos que la energía potencial correspondiente es $U(y) = mgy$. Para estirar un resorte ideal una distancia $x$, ejercemos una fuerza igual a $+kx$. Por la tercera ley de Newton, la fuerza que un resorte ideal ejerce sobre un cuerpo es opuesta, $F_x = -kx$. La función de energía potencial correspondiente es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

No obstante, en su estudio de la física el lector encontrará situaciones donde tiene una expresión para la *energía potencial* en función de la posición y necesita determinar *la fuerza* correspondiente. Veremos varios ejemplos de este tipo cuando estudiemos las fuerzas eléctricas más adelante. En general, es mucho más fácil calcular primero la energía potencial eléctrica, y luego determinar la fuerza eléctrica correspondiente.

Veamos cómo calcular la fuerza que corresponde a una expresión de energía potencial dada. Primero, consideremos un movimiento rectilíneo sobre el eje $x$. Denotamos la componente $x$ de la fuerza, que es función de $x$, con $F_x(x)$; y la energía potencial, con $U(x)$. Esta notación nos recuerda que tanto $F_x$ como $U$ son *funciones* de $x$. Ahora recordamos que, en cualquier desplazamiento, el trabajo $W$ efectuado por una fuerza conservativa es el negativo del cambio de energía potencial $\Delta U$:

$$W = -\Delta U$$

Apliquemos esto a un desplazamiento pequeño $\Delta x$. El trabajo efectuado por $F_x(x)$ durante este desplazamiento es aproximadamente igual a $F_x(x)\,\Delta x$. Decimos "aproximadamente" porque $F_x(x)$ podría variar un poco en el intervalo $\Delta x$; pero se cumple, al menos aproximadamente, que

$$F_x(x)\,\Delta x = -\Delta U \qquad \text{y} \qquad F_x(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Probablemente ya ve usted hacia dónde vamos. En el límite $\Delta x \rightarrow 0$, la variación de $F_x$ se hace despreciable y tenemos la relación exacta

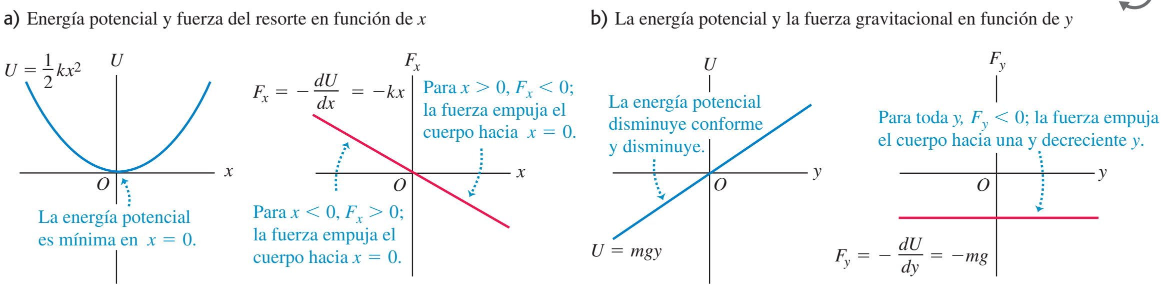
$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \text{(fuerza a partir de la energía potencial, en una dimensión)} \tag{7.16}$$

Este resultado es lógico; en las regiones donde $U(x)$ cambia más rápidamente con $x$ (donde $dU(x)/dx$ es grande), se efectúa trabajo máximo durante un desplazamiento dado, y esto corresponde a una magnitud de fuerza grande. Además, si $F_x(x)$ está en la dirección $+x$, $U(x)$ *disminuye* al aumentar $x$. De esta manera, $F_x(x)$ y $dU(x)/dx$ deberían tener signos opuestos. El significado físico de la ecuación (7.16) es que *una fuerza conservativa siempre trata de llevar el sistema a una energía potencial menor*.

Como verificación, consideremos la función de la energía potencial elástica, $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Si sustituimos esto en la ecuación (7.16):

$$F_x(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

**7.22** Una fuerza conservativa es el negativo de la derivada de la energía potencial correspondiente.




que es la expresión correcta para la fuerza ejercida por un resorte ideal (figura 7.22a). Asimismo, tenemos $U(y) = mgy$ para la energía potencial gravitacional; después de cambiar $x$ a $y$ (el eje donde se efectúa el movimiento), tenemos $F_y = -dU/dy = -d(mgy)/dy = -mg$, que es la expresión correcta para la fuerza gravitacional (figura 7.22b).

## Ejemplo 7.13 Fuerza eléctrica y su energía potencial

Una partícula con carga eléctrica se sostiene en reposo en $x = 0$; mientras que otra con idéntica carga puede moverse libremente en el eje $+x$. La energía potencial del sistema es

$$U(x) = \frac{C}{x}$$

donde $C$ es una constante positiva que depende de la magnitud de las cargas. Deduzca una expresión para la componente $x$ de fuerza que actúa sobre la partícula cargada móvil, en función de su posición.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Tenemos la función de energía potencial $U(x)$, y buscamos la función $F_x(x)$.

**PLANTEAR:** Utilizaremos la ecuación (7.16), $F_x(x) = -dU(x)/dx$.

**EJECUTAR:** La derivada con respecto a $x$ de la función $1/x$ es $-1/x^2$, así que la fuerza sobre la partícula con carga móvil para $x > 0$ es

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -C\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{C}{x^2}$$

**EVALUAR:** La componente $x$ de fuerza es positiva, y corresponde a una interacción de repulsión entre cargas eléctricas iguales. La energía potencial es muy grande cuando las partículas están muy juntas (si $x$ es pequeña) y se acerca a cero cuando se alejan entre sí ($x$ se hace grande); la fuerza empuja la carga móvil hacia valores positivos grandes de $x$, para los que la energía potencial es menor. La fuerza $F_x(x) = C/x^2$ se hace más débil conforme las partículas se separan (aumenta $x$). Estudiaremos más a fondo las fuerzas eléctricas en el capítulo 21.

## Fuerza y energía potencial en tres dimensiones

Podemos extender este análisis a tres dimensiones, donde la partícula puede moverse en las direcciones $x$, $y$, $z$, o todas a la vez, bajo la acción de una fuerza conservativa con componentes $F_x$, $F_y$ y $F_z$. Cada componente de fuerza puede ser función de las coordenadas $x$, $y$ y $z$. La función de energía potencial $U$ también es función de las tres coordenadas espaciales. Ahora podemos usar la ecuación (7.16) para calcular cada componente de la fuerza. El cambio de energía potencial $\Delta U$ cuando la partícula se mueve una distancia pequeña $\Delta x$ en la dirección $x$ está dada otra vez por $-F_x\Delta x$; no depende de $F_y$ ni de $F_z$, que representan las componentes de la fuerza perpendicular al desplazamiento que no efectúan trabajo. Tenemos de nuevo la relación aproximada

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Las componentes de fuerza $y$ y $z$ se determinan exactamente de la misma forma:

$$F_y = -\frac{\Delta U}{\Delta y} \qquad F_z = -\frac{\Delta U}{\Delta z}$$

Si queremos que las relaciones sean exactas, deberemos tomar límites $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ y $\Delta z \to 0$ para que estos cocientes se conviertan en derivadas. Dado que $U$

puede ser función de las tres coordenadas, debemos recordar que, al calcular las derivadas, sólo una coordenada cambia a la vez. Calculamos la derivada de $U$ con respecto a $x$ suponiendo que $y$ y $z$ son constantes y sólo $x$ varía, y así sucesivamente. Éstas se llaman *derivadas parciales* y su notación usual es $\partial U/\partial x$, y así sucesivamente; el símbolo $\partial$ es una $d$ modificada, por lo que escribimos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{(fuerza a partir de la energía potencial)} \tag{7.17}$$

Podemos usar vectores unitarios para escribir una sola expresión vectorial compacta para la fuerza $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \qquad \text{(fuerza a partir de la energía potencial)} \tag{7.18}$$

La expresión en paréntesis representa una operación específica sobre la función $U$, donde se obtiene la derivada parcial de $U$ con respecto a cada coordenada, se multiplican por el vector unitario correspondiente y se suman vectorialmente. Esta operación se denomina **gradiente** de $U$ y suele abreviarse $\vec{\nabla}U$. Por lo tanto, la fuerza es el negativo del gradiente de la función de energía potencial:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \tag{7.19}$$

Como verificación, sustituyamos en la ecuación (7.19) la función $U = mgy$ para la energía potencial gravitacional:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(mgy) = -\left(\frac{\partial(mgy)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial z}\hat{k}\right) = (-mg)\hat{\jmath}$$

Ésta es la expresión que ya conocemos para la fuerza gravitacional.

## Ejemplo 7.14 Fuerza y energía potencial en dos dimensiones

Un disco de hockey se desliza sobre una mesa de hockey de aire, sin fricción; sus coordenadas son $x$ y $y$, y sobre él actúa una fuerza conservativa descrita por la función de energía potencial

$$U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

Deduzca una expresión para la fuerza que actúa sobre el disco y obtenga una expresión para la magnitud de la fuerza en función de la posición.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Al empezar con la función $U(x, y)$, queremos calcular las componentes vectoriales y la magnitud de la fuerza conservativa $\vec{F}$ correspondiente.

**PLANTEAR:** Obtendremos las componentes de la fuerza a partir de la función $U(x, y)$ empleando la ecuación (7.18). Esta función no depende de $z$, así que la derivada parcial de $U$ con respecto a $z$ es $\partial U/\partial z = 0$ y la fuerza no tiene componente $z$; luego determinaremos la magnitud de la fuerza empleando la fórmula para la magnitud de un vector: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.

**EJECUTAR:** Las componentes $x$ y $y$ de la fuerza son

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -ky$$

Por la ecuación (7.18), esto corresponde a la expresión vectorial

$$\vec{F} = -k(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$$

Ahora $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ es el vector de posición $\vec{r}$ de la partícula, así que podemos rescribir la expresión como $\vec{F} = -k\vec{r}$. Esto representa una fuerza que siempre tiene dirección opuesta al vector de posición de la partícula, es decir, que siempre está dirigida al origen. La energía potencial es mínima en el origen, así que en este caso también la fuerza empuja en la dirección de energía potencial decreciente.

La *magnitud* de la fuerza en cualquier punto es

$$F = \sqrt{(-kx)^2 + (-ky)^2} = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr$$

donde $r$ es la distancia de la partícula al origen. Ésta es la fuerza que sería ejercida sobre el disco, si éste estuviera unido a un resorte que obedece la ley de Hooke y tiene longitud despreciable (en comparación con las demás distancias del problema) cuando no está estirado. (El otro extremo está unido a la mesa de aire de hockey en el origen.)

**EVALUAR:** Podemos comprobar nuestro resultado tomando nota de que la función de energía potencial también puede expresarse como $U = \frac{1}{2}kr^2$. Escrita de este modo, $U$ es función de una sola coordenada $r$, así que podemos calcular la fuerza con la ecuación (7.16) después de sustituir $x$ por $r$:

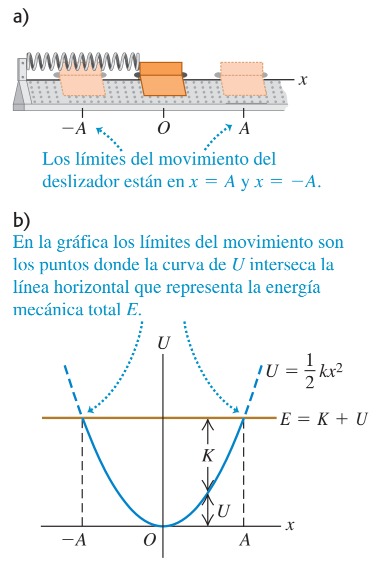
$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}kr^2\right) = -kr$$

Igual que en nuestro resultado anterior, la fuerza tiene magnitud $kr$; el signo menos indica que la fuerza está dirigida radialmente hacia adentro (hacia el origen).

**Evalúe su comprensión de la sección 7.4** Una fuerza conservativa $F_x$ actúa sobre una partícula que se mueve a lo largo del eje $x$. En cierto punto, la fuerza es cero. *a*) En ese punto, ¿cuál de los siguientes enunciados acerca del valor de la función de energía potencial $U(x)$ es correcto? i) $U(x) = 0$; ii) $U(x) > 0$; iii) $U(x) < 0$; iv) no hay información suficiente para decidir. *b*) En ese punto, ¿cuál de los siguientes enunciados acerca del valor de la derivada de $U(x)$ es correcto? i) $dU(x)/dx = 0$; ii) $dU(x)/dx > 0$; iii) $dU(x)/dx < 0$; iv) no hay información suficiente para decidir.

## 7.5 Diagramas de energía

Cuando una partícula se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza conservativa, podemos entender mejor los posibles movimientos examinando la gráfica de la función de energía potencial $U(x)$. La figura 7.23a muestra un deslizador con masa $m$ que se mueve en el eje $x$ sobre un riel de aire. El resorte ejerce sobre él una fuerza de magnitud $F_x = -kx$. La figura 7.23b es la gráfica de la función de energía potencial correspondiente $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Si la fuerza elástica del resorte es la *única* fuerza horizontal que actúa sobre el deslizador, la energía mecánica total $E = K + U$ es constante, independiente de $x$. En ese caso, una gráfica de $E$ en función de $x$ es una recta horizontal. Empleamos el término **diagrama de energía** para una gráfica así, la cual muestra tanto la función de energía potencial $U(x)$ como la energía de la partícula bajo la influencia de la fuerza que corresponde a $U(x)$.




**7.23** a) Deslizador en un riel de aire. El resorte ejerce una fuerza $F_x = -kx$. b) Función de energía potencial.

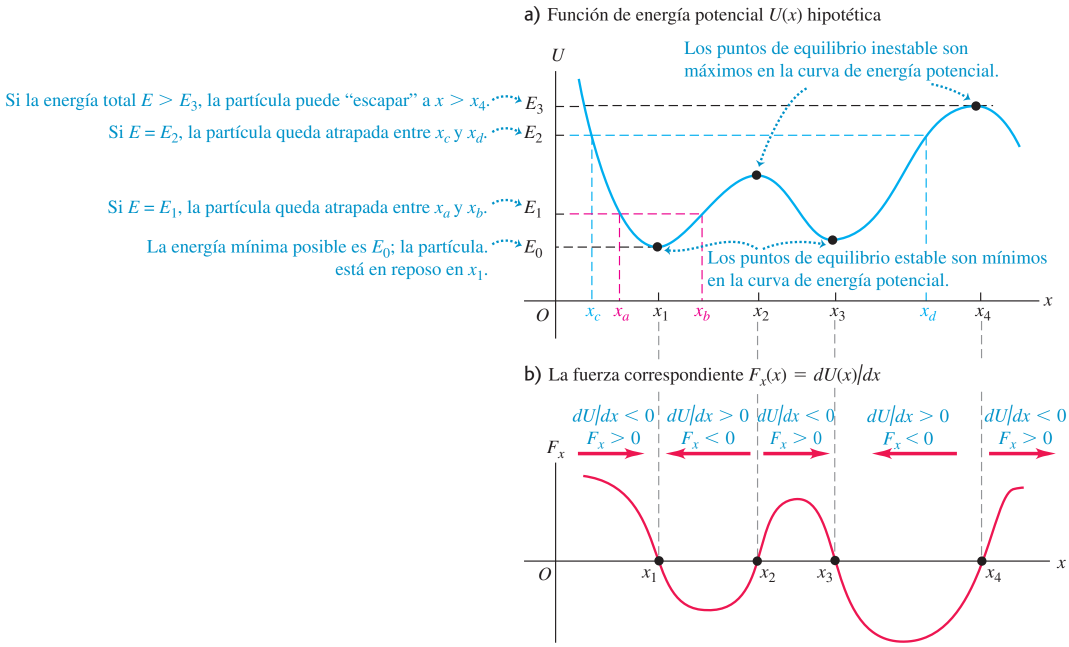
La distancia vertical entre las curvas de $U$ y $E$ en cada punto representa la diferencia $E - U$ y es igual a la energía cinética $K$ en ese punto. Vemos que $K$ es máxima en $x = 0$ y cero en los valores de $x$ donde se cruzan las curvas ($A$ y $-A$ en el diagrama). Así, la rapidez $v$ es máxima en $x = 0$ y cero en $x = \pm A$, los puntos del *máximo* desplazamiento posible desde $x = 0$ para un valor dado de la energía total $E$. La energía potencial $U$ nunca puede ser mayor que la energía total $E$, pues entonces $K$ tendría que ser negativa, lo cual es imposible. El movimiento es una oscilación entre los puntos $x = A$ y $x = -A$.

En cada punto, la fuerza $F_x$ sobre el deslizador es igual al negativo de la pendiente de la curva $U(x)$: $F_x = -dU/dx$ (véase la figura 7.22a). Cuando la partícula está en $x = 0$, la pendiente y la fuerza son cero, y tenemos una posición de *equilibrio*. Si $x$ es positivo, la pendiente de la curva de $U(x)$ es positiva y $F_x$ es negativa, dirigida hacia el origen. Si $x$ es negativo, la pendiente es negativa y $F_x$ es positiva, otra vez hacia el origen. Una fuerza así se denomina *fuerza restauradora*; si el deslizador se desplaza hacia cualquier lado de $x = 0$, la fuerza resultante tiende a "restaurarlo" a $x = 0$. Una situación parecida es una canica que rueda en una ensaladera de fondo redondo. Decimos que $x = 0$ es un punto de **equilibrio estable**. Más generalmente, *todo mínimo de una curva de energía potencial es una posición de equilibrio estable*.

La figura 7.24a muestra una función de energía potencial $U(x)$ hipotética pero más general. La figura 7.24b ilustra la fuerza $F_x = -dU/dx$ correspondiente. Donde $x_1$ y $x_3$ son puntos de equilibrio estable. En ellos, $F_x = 0$ porque la pendiente de la curva $U(x)$ es cero. Si la partícula se desplaza hacia cualquier lado, la fuerza la empuja hacia el punto de equilibrio. La pendiente de la curva $U(x)$ también es cero en $x_2$ y $x_4$, que también son puntos de equilibrio. Sin embargo, cuando la partícula se desplaza un poco a la derecha de cualquiera de ellos, la pendiente de la curva de $U(x)$ se hace negativa, lo que corresponde a una $F_x$ positiva que tiende a alejar más la partícula. Si ésta se desplaza un poco a la izquierda, $F_x$ es negativa y también tiende a alejar a la partícula del equilibrio. Esto es similar a una canica que rueda sobre la parte superior de una bola de bolos. Los puntos $x_2$ y $x_4$ son puntos de **equilibrio inestable**; *todo máximo de una curva de energía potencial es una posición de equilibrio inestable.*

**CUIDADO** **Energía potencial y la dirección de una fuerza conservativa** La dirección de la fuerza sobre un cuerpo *no* está determinada por el signo de la energía potencial $U$; lo que importa es el signo de $F_x = -dU/dx$. Como vimos en la sección 7.1, la cantidad físicamente significativa es la *diferencia* en el valor de $U$ entre dos puntos, y esto es lo que la

**7.24** La función de energía potencial $U(x)$ corresponde a los puntos donde $F_x = 0$.




derivada $F_x = -dU/dx$ mide. Esto implica que podemos agregar cualquier constante a la función de energía potencial sin alterar la física de la situación.

Si la energía total es $E_1$ y la partícula está inicialmente cerca de $x_1$, sólo puede moverse en la región entre $x_a$ y $x_b$ determinada por la intersección de las curvas de $E_1$ y $U$ (figura 7.24a). De nuevo, $U$ no puede ser mayor que $E_1$ porque $K$ no puede ser negativa. Decimos que la partícula se mueve en un *pozo de potencial*, y $x_a$ y $x_b$ son los *puntos de retorno* de su movimiento (pues en ellos la partícula se detiene e invierte su dirección). Si aumentamos la energía total al nivel $E_2$, la partícula puede ampliar su movimiento, de $x_c$ a $x_d$. Si la energía total es mayor que $E_3$, la partícula puede "escapar" y alcanzar valores indefinidamente grandes de $x$. En el otro extremo, $E_0$ representa la energía total mínima posible que el sistema puede tener.

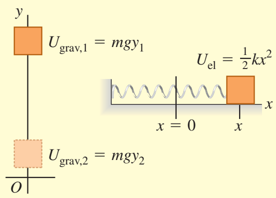
**Evalúe su comprensión de la sección 7.5** En la figura 7.24b la curva tiene un máximo en el punto entre $x_2$ y $x_3$. Cuando está en dicho punto, ¿cuál enunciado describe correctamente lo que sucede a la partícula? i) La aceleración de la partícula es cero. ii) La partícula acelera en la dirección $+x$; la magnitud de la aceleración es menor que en cualquier otro punto entre $x_2$ y $x_3$. iii) La partícula acelera en la dirección $+x$; la magnitud de la aceleración es mayor que en cualquier otro punto entre $x_2$ y $x_3$. iv) La partícula acelera en la dirección $-x$; la magnitud de la aceleración es menor que en cualquier otro punto entre $x_2$ y $x_3$. v) La partícula acelera en la direccion $-x$; la magnitud de la aceleración es mayor que en cualquier otro punto entre $x_2$ y $x_3$.

# CAPÍTULO 7 RESUMEN

**Energía potencial gravitacional y energía potencial elástica:** El trabajo efectuado sobre una partícula por una fuerza gravitacional constante puede representarse en términos de un cambio en la energía potencial gravitacional $U_{grav} = mgy$. Esta energía es una propiedad compartida de la partícula y la Tierra. Una energía potencial también se asocia con la fuerza elástica $F_x = -kx$ ejercida por un resorte ideal, donde $x$ es la distancia de estiramiento o compresión. El trabajo efectuado por esta fuerza puede representarse como un cambio en la energía potencial elástica del resorte, $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$.

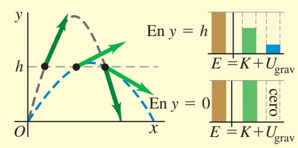
$$\begin{aligned} W_{grav} &= mgy_1 - mgy_2 \\ &= U_{grav,1} - U_{grav,2} \\ &= -\Delta U_{grav} \end{aligned} \qquad (7.1), (7.3)$$

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \\ &= U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el} \end{aligned} \qquad (7.10)$$



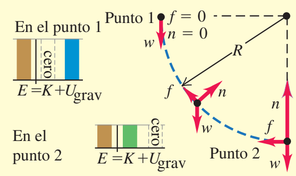

**Cuando la energía mecánica total se conserva:** La energía potencial total $U$ es la suma de las energías potenciales gravitacional y elástica: $U = U_{grav} + U_{el}$. Si sólo fuerzas gravitacional y elástica realizan trabajo sobre una partícula, se conserva la suma de las energías cinética y potencial. Esta suma, $E = K + U$, se denomina energía mecánica total. (Véanse los ejemplos 7.1, 7.3, 7.4 y 7.7.)

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \qquad (7.4), (7.11)$$



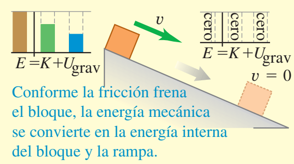

**Cuando la energía mecánica total no se conserva:** Cuando fuerzas distintas de la gravitacional y la elástica efectúan trabajo sobre una partícula, el trabajo $W_{otras}$ realizado por estas otras fuerzas es igual al cambio en la energía mecánica total (energía cinética más energía potencial total). (Véanse los ejemplos 7.2, 7.5, 7.6, 7.8 y 7.9.)

$$K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2 \qquad (7.14)$$




**Fuerzas conservativas, fuerzas no conservativas y la ley de conservación de la energía:** Todas las fuerzas son conservativas o bien no conservativas. Una fuerza conservativa es aquella para la cual la relación trabajo-energía cinética es totalmente reversible. El trabajo de una fuerza conservativa siempre puede representarse mediante una función de energía potencial, no así el de una fuerza no conservativa. El trabajo realizado por fuerzas no conservativas se manifiesta como cambios en la energía interna de los cuerpos. La suma de las energías cinética, potencial e interna siempre se conserva. (Véanse los ejemplos 7.10 a 7.12.)

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = 0 \qquad (7.15)$$

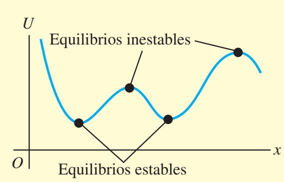



**Cálculo de la fuerza a partir de la energía potencial:** En un movimiento rectilíneo, una fuerza conservativa $F_x(x)$ es la derivada negativa de la función de energía potencial $U$ asociada a ella. En tres dimensiones, las componentes de una fuerza conservativa son las derivadas parciales negativas de $U$. (Véanse los ejemplos 7.13 y 7.14.)

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad (7.16)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$
$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad (7.17)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \qquad (7.18)$$



## Términos clave



## Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La gravedad está efectuando trabajo positivo sobre el clavadista, pues esta fuerza tiene la misma dirección hacia abajo que el desplazamiento de aquél. Esto corresponde a una disminución en la energía potencial gravitacional. El agua está efectuando trabajo negativo sobre el clavadista; ejerce una fuerza hacia arriba debido a la resistencia de fluido mientras el clavadista se mueve hacia abajo. Esto corresponde a un incremento en la energía interna del clavadista y del agua (véase la sección 7.3).

## Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

**7.1 Respuesta: iii)** La energía cinética inicial $K_1 = 0$, la energía potencial inicial $U_1 = mgy_1$ y la energía potencial final $U_2 = mgy_2$ son las mismas para ambos bloques. La energía mecánica se conserva en ambos casos, así que la energía cinética final $K = \frac{1}{2}mv_2^2$ también es la misma para ambos bloques. Por lo tanto, ¡la rapidez en el extremo derecho es la *misma* en ambos casos!

**7.2 Respuesta: iii)** El elevador aún se mueve hacia abajo, de manera que la energía cinética $K$ es positiva (recuerde que $K$ nunca puede ser negativa); el elevador está debajo del punto 1, así que $y < 0$ y $U_{grav} < 0$; y el resorte se comprime, por lo que $U_{el} > 0$.

**7.3 Respuesta: iii)** A causa de la fricción en las turbinas y entre el agua y las turbinas, algo de la energía potencial se pierde al calentar el agua y el mecanismo.

**7.4 Respuestas: *a*) iv), *b*) i)** Si $F_x = 0$ en un punto, la derivada de $U(x)$ en ese punto debe ser cero porque $F_x = -dU(x)/dx$. Sin embargo, esto no nos dice absolutamente nada acerca del *valor* de $U(x)$ en ese punto.

**7.5 Respuesta: iii)** La figura 7.24b muestra la componente de fuerza $F_x$. Donde esta tiene su valor máximo (más positivo), la componente $x$ de la fuerza y la aceleración $x$ tienen valores más positivos que en los valores adyacentes de $x$.

# PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

## Preguntas para análisis

**P7.1.** Se lanza una pelota béisbol verticalmente hacia arriba con rapidez inicial $v_0$. Si no se desprecia la resistencia del aire, cuando la pelota vuelva a su altura inicial su rapidez será menor que $v_0$. Explique esto usando conceptos de energía.

**P7.2.** Un proyectil tiene la misma energía cinética inicial sin importar su ángulo de lanzamiento. ¿Por qué no alcanza la misma altura máxima en todos los casos?

**P7.3.** ¿La rapidez de un objeto en la base de una rampa sin fricción depende de la forma de la rampa o sólo de su altura? Explique su respuesta. ¿Y cuando la rampa *sí* tiene fricción?

**P7.4.** Se deja caer un huevo a partir del reposo desde la azotea de un edificio al suelo. Un estudiante en la azotea observa la caída, que usa coordenadas con origen en la azotea; y otro estudiante en el suelo usa coordenadas con origen en el suelo. ¿Asignan ambos valores iguales o diferentes a las energías potenciales gravitacionales inicial y final, al cambio de energía potencial gravitacional y a la energía cinética del huevo, justo antes de golpear el suelo? Explique su respuesta.

**P7.5.** Un profesor de física tenía una bola de boliche colgada de una cuerda muy larga sujeta al techo de una aula muy grande. Con la finalidad de ilustrar su fe en la conservación de la energía, gustaba de retroceder a un costado del estrado, tirando de la bola hasta que la tensa cuerda la dejaba llegar justo a la punta de su nariz, y luego la soltaba. La pesada bola describía un gran arco sobre el estrado y regresaba, parándose momentáneamente justo frente a la nariz del inmóvil e impávido profesor. Un día, después de la demostración, alzó la vista justo a tiempo para ver que un estudiante en el otro lado del estrado *empujaba* la bola después de tirar de ella hasta tenerla frente a su nariz, tratando de duplicar la demostración. Termine de contar la historia y explique el posiblemente trágico desenlace.

**P7.6. ¿Energía perdida?** El principio de conservación de la energía nos dice que la energía nunca se pierde, tan sólo cambia de una forma a otra. Sin embargo, en muchas situaciones cotidianas, parece que se pierde energía. En cada caso, explique qué le ocurre a la energía "perdida". *a*) Una caja que se desliza por el piso se detiene a causa de la fricción. ¿De qué manera la fricción se lleva su energía cinética, y que le sucede a tal energía? *b*) Un automóvil se detiene cuando usted aplica los frenos. ¿Qué le ocurre a su energía cinética? *c*) La resistencia del aire "consume" algo de la energía potencial gravitacional de un objeto que cae. ¿En qué tipo de energía se convirtió la energía potencial "perdida"? *d*) Cuando un transbordador espacial que regresa toca tierra, ha perdido casi toda su energía cinética y su energía potencial gravitacional. ¿A dónde se fue toda esa energía?

**P7.7.** ¿Una fuerza de fricción puede en algún caso *aumentar* la energía mecánica de un sistema? De ser así, mencione algunos ejemplos.

**P7.8.** Una clavadista rebota en un trampolín, yendo un poco más alto cada vez. Explique cómo aumenta la energía mecánica total.

**P7.9. Física fracturada.** A menudo las personas llaman recibo de *potencia* a su recibo de electricidad, aun cuando la cantidad en la que se basa está expresada en *kilowatt-horas*. ¿Qué es lo que en realidad se les cobra a las personas en tal recibo?

**P7.10.** Una piedra de masa $m$ y otra de masa $2m$ se sueltan desde el reposo a la misma altura sin que sufran resistencia del aire durante la caída. ¿Qué enunciado sobre estas piedras es verdadero? (Puede haber más de una opción correcta.) *a*) Ambas tienen la misma energía potencial gravitacional inicial. *b*) Ambas tienen la misma energía cinética cuando llegan al suelo. *c*) Ambas llegan al suelo con la misma rapidez. *d*) Cuando llegan al suelo, la piedra más pesada tiene el doble de energía cinética que la más ligera. *e*) Cuando llegan al suelo, la piedra más pesada tiene cuatro veces la energía cinética que la más ligera.

**P7.11.** En un estanque congelado sin fricción, un disco de hockey se oprime contra un resorte ideal fijo (sin estar unido a él), comprimiendo el resorte una distancia $x_0$. La energía máxima almacenada en el resorte es $U_0$, la rapidez máxima que el disco gana después de que se libera es $v_0$ y la energía cinética máxima es $K_0$. Ahora el disco se oprime de manera que comprime el resorte el doble que antes. En este caso, *a*) ¿cuál es la energía potencial máxima almacenada en el resorte (en términos de $U_0$)? y *b*) ¿cuáles son la energía cinética máxima y la rapidez (en términos de $K_0$ y de $x_0$) del disco?

**P7.12.** Cuando la gente siente frío, a menudo frota sus manos una contra la otra para calentarlas. ¿Cómo se produce calor al hacer esto? ¿De donde proviene el calor?

**P7.13.** A menudo se escucha decir que a final de cuentas la mayoría de la energía proviene del Sol. Rastree cada una de las siguientes energías al Sol. *a*) La energía cinética de un avión a reacción; *b*) la energía potencial ganada por un alpinista; *c*) la energía eléctrica usada para hacer funcionar una computadora; *d*) La energía eléctrica de una planta hidroeléctrica.

**P7.14.** Una caja se desliza hacia abajo por una rampa, en tanto que las fuerzas de gravedad y de fricción realizan trabajo sobre ella. ¿El trabajo realizado por cada una de estas fuerzas puede expresarse en términos del cambio en una función de energía potencial? Para cada fuerza explique el porqué.

**P7.15.** En términos físicos, explique por qué la fricción es una fuerza no conservativa. ¿Puede almacenar energía para uso futuro?

**P7.16.** Un resorte atado en su posición comprimida se disuelve en ácido. ¿Qué pasa con su energía potencial?

**P7.17.** Dado que sólo los cambios en la energía potencial son importantes en cualquier problema, un estudiante decide tomar la energía potencial elástica de un resorte como cero, cuando el resorte está estirado una distancia $x_1$. Entonces, el estudiante decide que $U = \frac{1}{2}k(x - x_1)^2$. ¿Esto es correcto? Explique su respuesta.

**P7.18.** La figura 7.22a muestra la función de energía potencial para la fuerza $F_x = -kx$. Dibuje esa función para la fuerza $F_x = +kx$. Para esta fuerza, ¿$x = 0$ es un punto de equilibrio? ¿Es equilibrio estable o inestable? Explique su respuesta.

**P7.19.** La figura 7.22b muestra la función de energía potencial asociada a la fuerza gravitacional entre un objeto y la Tierra. Use esta curva para explicar por qué los objetos siempre caen hacia la Tierra al soltarse.

**P7.20.** En un sistema de dos partículas, solemos considerar que la energía potencial para la fuerza entre las partículas se acerca a cero cuando la separación entre ellas se acerca a infinito. En tal caso, explique por qué la energía potencial con una separación no infinita es positiva si las partículas se repelen y negativa si se atraen.

**P7.21.** Explique por qué los puntos $x = A$ y $x = -A$ de la figura 7.23b se llaman *puntos de retorno*. ¿Qué relación hay entre los valores de $E$ y $U$ en un punto de retorno?

**P7.22.** Una partícula está en *equilibrio neutral* si la fuerza neta que actúa sobre ella es cero, y permanece cero si la partícula se desplaza un poco en cualquier dirección. Dibuje la función de energía potencial cerca de un punto de equilibrio neutral, para el caso de movimiento unidimensional. Dé un ejemplo de un objeto en equilibrio neutral.

**P7.23.** La fuerza neta sobre una partícula de masa $m$ tiene la función de energía potencial graficada en la figura 7.24a. Si la energía total es $E_1$, dibuje la curva de la rapidez $v$ de la partícula contra su posición $x$. ¿En qué valor de $x$ es $v$ máxima? Dibuje la curva si la energía total es $E_2$.

**P7.24.** La función de energía potencial de una fuerza $\vec{F}$ es $U = \alpha x^3$, donde $\alpha$ es una constante positiva. ¿Qué dirección tiene $\vec{F}$?

# Ejercicios

## Sección 7.1 Energía potencial gravitacional

**7.1.** En un día una alpinista de 75 kg asciende desde el nivel de 1500 m de un risco vertical hasta la cima a 2400 m. El siguiente día, desciende desde la cima hasta la base del risco, que está a una elevación de 1350 m. ¿Cuál es su cambio en energía potencial gravitacional *a*) durante el primer día y *b*) durante el segundo día?

**7.2.** Un saco de 5.00 kg de harina se levanta 15.0 m verticalmente con rapidez constante de 3.50 m/s. *a*) ¿Qué fuerza se requiere? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza esa fuerza sobre el saco? ¿Qué pasa con dicho trabajo?

**7.3.** Un saco de correo de 120 kg cuelga de una cuerda vertical de 3.5 m de longitud. Un trabajador de correos desplaza el saco a una posición lateral a 2.0 m de su posición original, manteniendo la cuerda tensa en todo momento. *a*) ¿Qué fuerza horizontal se necesita para mantener el saco en la nueva posición? *b*) Cuando el saco se mueve a esta posición, ¿cuánto trabajo es efectuado i) por la cuerda y ii) por el trabajador?

**7.4.** Un nadador de 72 kg salta a la vieja piscina desde un trampolín que está a 3.25 m sobre el agua. Use la conservación de la energía para obtener su rapidez justo al momento de llegar al agua *a*) si él tan sólo se tapa la nariz y se deja caer, *b*) si se lanza valientemente directo hacia arriba (¡pero apenas más allá del trampolín!) a 2.50 m/s, y *c*) si se lanza hacia abajo a 2.50 m/s.

**7.5.** Se lanza una pelota de béisbol desde la azotea de un edificio de 22.0 m de altura con velocidad inicial de magnitud 12.0 m/s y dirigida con un ángulo de 53.1° sobre la horizontal. *a*) ¿Qué rapidez tiene la pelota justo antes de tocar el suelo? Use métodos de energía y desprecie la resistencia del aire. *b*) Repita pero con la velocidad inicial a 53.1° *abajo* de la horizontal. *c*) Si se incluye el efecto de la resistencia del aire, ¿en qué parte, *a*) o *b*), se obtiene una rapidez mayor?

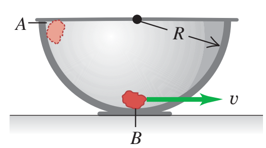
**7.6.** Una caja de masa $M$ parte del reposo en la cima de una rampa sin fricción inclinada con un ángulo $\alpha$ sobre la horizontal. Calcule su rapidez en la base de la rampa, una distancia $d$ desde donde inició. Obtenga la respuesta de dos maneras: *a*) Tome el nivel donde la energía potencial es cero como la base de la rampa con la dirección $+y$ hacia arriba. *b*) Tome el nivel cero para la energía potencial como la cima de la rampa con la dirección $+y$ hacia arriba. *c*) ¿Por qué no se tomó en cuenta la fuerza normal en la solución?

**7.7.** Resuelva el inciso *b*) del ejemplo 7.6 (sección 7.1) aplicando la ecuación (7.7) a los puntos 2 y 3, en vez de a los puntos 1 y 3 como se hizo en el ejemplo.

**7.8.** A una caja vacía se le da un empujón inicial y baja deslizándose por una rampa con rapidez inicial $v_0$, llegando a la base con rapidez $v$ y energía cinética $K$. Se colocan unos libros en la caja, de modo que se cuadruplica la masa total. El coeficiente de fricción cinética es constante y la resistencia del aire es insignificante. Con la misma $v_0$ en el tope de la rampa ¿qué rapidez y energía cinética tendría ahora la caja al llegar a la base? Explique su razonamiento.

**7.9.** Una piedra con masa de 0.20 kg se libera del reposo en el punto $A$, en el borde de un tazón hemisférico de radio $R = 0.50$ m (figura 7.25). Suponga que la piedra es pequeña en comparación con $R$, así que puede tratarse como partícula y suponga que la piedra se desliza en vez de rodar. El trabajo efectuado por la fricción sobre la piedra al bajar del punto $A$ al punto $B$ en la base del tazón es de 0.22 J. *a*) Entre los puntos $A$ y $B$, ¿cuánto trabajo es efectuado sobre la piedra por i) la fuerza normal y ii) la gravedad? *b*) ¿Qué rapidez tiene la piedra al llegar a $B$? c) De las tres fuerzas que actúan sobre la piedra cuando ésta se desliza hacia abajo por el tazón, ¿cuáles (si acaso) son constantes y cuáles no lo son? Explique su respuesta. *d*) Justo cuando la piedra llega al punto $B$, ¿cuál es la fuerza normal sobre ella hacia la base del tazón?

**Figura 7.25** Ejercicio 7.9.



**7.10.** Una piedra de masa $m$ se lanza hacia arriba a un ángulo $\theta$ sobre la horizontal y no experimenta resistencia del aire considerable. Use la conservación de la energía para demostrar que, en su punto más alto, la piedra está a una distancia $v_0^2(\mathrm{sen}^2\theta)/2g$ sobre el punto donde se lanzó. (*Sugerencia*: $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$.)

**7.11.** Imagine que, en un parque de diversiones, usted está probando una nueva montaña rusa con un carrito vacío de 120 kg de masa. Una parte de la vía es un rizo vertical con radio de 12.0 m. En el fondo del rizo (punto $A$), el carrito tiene rapidez de 25.0 m/s; y en la parte superior (punto $B$), de 8.0 m/s. ¿Cuánto trabajo efectúa la fricción cuando el carrito rueda del punto $A$ al $B$?

**7.12. Tarzán y Jane.** Tarzán, en un árbol, ve a Jane en otro árbol. Él toma el extremo de una liana de 20 m que forma un ángulo de 45° con la vertical, se deja caer de su rama y describe un arco hacia abajo para llegar a los brazos de Jane. En este punto, su liana forma un ángulo de 30° con la vertical. Calcule la rapidez de Tarzán justo antes de llegar a donde está Jane para determinar si la abrazará tiernamente o la tirará de la rama. Puede hacer caso omiso de la resistencia del aire y la masa de la liana.

**7.13.** Un horno de microondas de 10.0 kg se empuja para subirlo 8.00 m por la superficie de una rampa inclinada a 36.9° sobre la horizontal, aplicando una fuerza constante $\vec{F}$ de magnitud 110 N, que actúa paralela a la rampa. El coeficiente de fricción cinética entre el horno y la rampa es de 0.250. *a*) ¿Qué trabajo realiza la fuerza $\vec{F}$ sobre el horno? *b*) ¿Y la fuerza de fricción? *c*) Calcule el aumento en la energía potencial del horno. *d*) Use sus respuestas de los incisos *a*), *b*) y *c*) para calcular el aumento en la energía cinética del horno. *e*) Use $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ para calcular la aceleración del horno. Suponiendo que el horno parte del reposo, use la aceleración para calcular la rapidez del horno después de recorrer 8.00 m. Calcule con esto el aumento en la energía cinética del horno y compare su respuesta con la respuesta del inciso *d*).

**7.14. Péndulo.** Una piedrita de 0.12 kg está atada a un hilo sin masa de 0.80 m de longitud, formando un péndulo que oscila con un ángulo máximo de 45° con la vertical. La resistencia del aire es despreciable. *a*) ¿Qué rapidez tiene la piedra cuando el hilo pasa por la posición vertical? *b*) ¿Qué tensión hay en el hilo cuando forma un ángulo de 45° con la vertical? *c*) ¿Y cuando pasa por la vertical?

## Sección 7.2 Energía potencial elástica

**7.15.** Una fuerza de 800 N estira cierto resorte una distancia de 0.200 m. *a*) ¿Qué energía potencial tiene el resorte cuando se estira 0.200 m? *b*) ¿Y cuando se le comprime 5.00 cm?

**7.16.** Un resorte ideal de masa despreciable tiene 12.00 cm de longitud cuando nada se une a él. Cuando usted cuelga un peso de 3.15 kg del resorte, mide que la longitud de éste es de 13.40 cm. Si usted quisiera almacenar 10.0 J de energía potencial en este resorte, ¿cuál sería su longitud *total*? Suponga que sigue obedeciendo la ley de Hooke.

**7.17.** Un resorte almacena energía potencial $U_0$ cuando se comprime una distancia $x_0$ desde su longitud sin comprimir. *a*) En términos de $U_0$, ¿cuánta energía almacena el resorte cuando se comprime i) el doble de la distancia y ii) la mitad de la distancia? *b*) En términos de $x_0$, ¿cuánto debe comprimirse desde su longitud sin comprimir para almacenar i) el doble de energía y ii) la mitad de energía?

**7.18.** Una resortera dispara un guijarro de 10 g a una distancia de 22.0 m hacia arriba. *a*) ¿Cuánta energía potencial se almacenó en la banda de caucho de la resortera? *b*) Con la misma energía potencial almacenada en la banda, ¿a qué altura puede dispararse un guijarro de 25 g? *c*) ¿Qué efectos físicos despreció al resolver este problema?

**7.19.** Un resorte de masa despreciable tiene una constante de fuerza $k = 1600$ N/m. *a*) ¿Qué tanto debe comprimirse para almacenar en él 3.20 J de energía potencial? *b*) El resorte se coloca verticalmente con un extremo en el piso, y se deja caer sobre él un libro de 1.20 kg desde una altura de 0.80 m. Determine la distancia máxima que se comprimirá el resorte.

**7.20.** Un queso de 1.20 kg se coloca en un resorte vertical con masa despreciable y constante de fuerza $k = 1800$ N/m que está comprimido 15.0 cm. Cuando se suelta el resorte, ¿qué altura alcanza el queso sobre su posición original? (El queso y el resorte *no* están unidos.)

**7.21.** Considere el deslizador del ejemplo 7.7 (sección 7.2) y la figura 7.16. Igual que en el ejemplo, el deslizador se suelta del reposo con el resorte estirado 0.100 m. ¿Qué desplazamiento $x$ tiene el deslizador con respecto a su posición de equilibrio cuando su rapidez es de 0.20 m/s? (Usted debería obtener más de una respuesta. Explique por qué.)

**7.22.** Considere el deslizador del ejemplo 7.8 (sección 7.2) y la figura 7.16. *a*) Igual que en el ejemplo, el deslizador se suelta del reposo con el resorte estirado 0.100 m. ¿Qué rapidez tiene el deslizador cuando regresa a $x = 0$? *b*) ¿Qué desplazamiento inicial debe tener el deslizador para que su rapidez máxima en el movimiento subsecuente sea de 2.50 m/s?

**7.23.** Una masa de 2.50 kg se empuja contra un resorte horizontal, cuya constante de fuerza es de 25.0 N/cm, sobre una mesa de aire sin fricción. El resorte está unido a la superficie de la mesa, en tanto que la masa no está unida al resorte de ninguna manera. Cuando el resorte se comprime lo suficiente como para almacenar 11.5 J de energía potencial en él, la masa se libera repentinamente del reposo. *a*) Encuentre la rapidez máxima que alcanza la masa. ¿Cuándo ocurre? *b*) ¿Cuál es la aceleración máxima de la masa, y cuando ocurre?

**7.24.** *a*) ¿Qué rapidez tiene el elevador del ejemplo 7.9 (sección 7.2) después de haber bajado 1.00 m desde el punto 1 de la figura 7.17? *b*) ¿Qué aceleración tiene el elevador cuando está 1.00 m abajo del punto 1 de la figura 7.17?

**7.25.** Imagine que le piden diseñar un resorte que confiera a un satélite de 1160 kg una rapidez de 2.50 m/s relativa a un transbordador espacial en órbita. El resorte debe imprimir al satélite una aceleración máxima de $5.00g$. La masa del resorte, la energía cinética de retroceso del transbordador y los cambios en la energía potencial gravitacional serán despreciables. *a*) ¿Qué constante de fuerza debe tener el resorte? *b*) ¿Qué distancia debe comprimirse el resorte?

## Sección 7.3 Fuerzas conservativas y no conservativas

**7.26.** Un reparador de azoteas de 75 kg sube por una escalera vertical de 7.0 m al techo plano de una casa. Después, camina 12 m sobre el techo, desciende por otra escalera vertical de 7.0 m y, por último, camina por el suelo regresando a su punto de partida. ¿Cuánto trabajo hizo sobre él la gravedad *a*) cuando subió; *b*) cuando bajó; *c*) cuando caminó por el techo y por el suelo? *d*) ¿Cuál es el trabajo total efectuado por la gravedad sobre él durante todo el recorrido? *e*) Con base en su respuesta al inciso *d*), diría usted que la gravedad es una fuerza conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

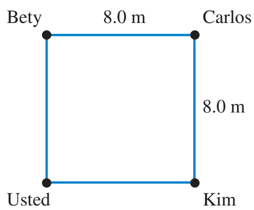
**7.27.** Se tira de una caja de 10.0 kg usando un alambre horizontal en un círculo sobre una superficie horizontal áspera, cuyo coeficiente de fricción cinética es de 0.250. Calcule el trabajo efectuado por la fricción durante un recorrido circular completo, si el radio es *a*) de 2.00 m y *b*) de 4.00 m. *c*) Con base en los resultados que acaba de obtener, diría usted que la fricción es una fuerza conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

**7.28.** En un experimento, una de las fuerzas ejercidas sobre un protón es $\vec{F} = -\alpha x^2\hat{\imath}$, donde $\alpha = 12\ \mathrm{N/m^2}$. *a*) ¿Cuánto trabajo efectúa $\vec{F}$ cuando el protón se desplaza sobre la recta del punto (0.10 m, 0) al punto (0.10 m, 0.40 m)? *b*) ¿Y sobre la recta del punto (0.10 m, 0) al punto (0.30 m, 0)? *c*) ¿Y sobre la recta del punto (0.30 m, 0) al punto (0.10 m, 0)? *d*) ¿$\vec{F}$ es una fuerza conservativa? Explique su respuesta. Si $\vec{F}$ es conservativa, ¿cuál es su función de energía potencial? Sea $U = 0$ cuando $x = 0$.

**7.29.** Un libro de 0.60 kg se desliza sobre una mesa horizontal. La fuerza de fricción cinética que actúa sobre el libro tiene una magnitud de 1.2 N. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza la fricción sobre el libro durante un desplazamiento de 3.0 m a la izquierda? *b*) Ahora el libro se desliza 3.0 m a la derecha, volviendo al punto inicial. Durante este segundo desplazamiento de 3.0 m, ¿qué trabajo efectúa la fricción sobre el libro? *c*) ¿Qué trabajo total efectúa la fricción sobre el libro durante el recorrido completo? *d*) Con base en su respuesta al inciso *c*), ¿diría que la fuerza de fricción es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

**7.30.** Usted y tres amigos están parados en las esquinas de un cuadrado de 8.0 m de lado, en el piso de un gimnasio (figura 7.26). Toman su libro de física y lo empujan de una persona a otra. La masa del libro es de 1.5 kg y el coeficiente de fricción cinética entre el libro y el piso es $\mu_k = 0.25$. *a*) El libro se desliza de usted a Bety y luego de Bety a Carlos a lo largo de las líneas que conectan a estas personas. ¿Qué trabajo realiza la fricción durante este desplazamiento? *b*) Usted desliza el libro hacia Carlos a lo largo de la diagonal del cuadrado. ¿Qué trabajo realiza la fricción durante este desplazamiento? *c*) Usted desliza el libro a Kim, quien se lo devuelve. ¿Qué trabajo total realiza la fricción durante este movimiento del libro? *d*) ¿La fuerza de fricción sobre el libro es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

**Figura 7.26** Ejercicio 7.30.




**7.31.** Un bloque con masa $m$ está unido a un resorte ideal con constante de fuerza $k$. *a*) El bloque se mueve de $x_1$ a $x_2$ (donde $x_2 > x_1$). ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza del resorte durante este desplazamiento? *b*) El bloque se mueve de $x_1$ a $x_2$ y luego de $x_2$ a $x_1$. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza del resorte durante el desplazamiento de $x_2$ a $x_1$? ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte durante todo el desplazamiento $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$? Explique su respuesta. *c*) El bloque se mueve de $x_1$ a $x_3$ (donde $x_3 > x_2$). ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza del resorte durante este desplazamiento? Después, el bloque se mueve de $x_3$ a $x_2$. ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte durante este desplazamiento? ¿Cuál es el trabajo total realizado por el resorte durante el desplazamiento de $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$? Compare su respuesta con la respuesta del inciso *a*), donde los puntos inicial y final son los mismos pero la trayectoria es distinta.

## Sección 7.4 Fuerza y energía potencial

**7.32.** La energía potencial de un par de átomos de hidrógeno separados una distancia grande $x$ está dada por $U(x) = -C_6/x^6$, donde $C_6$ es una constante positiva. ¿Qué fuerza ejerce un átomo sobre otro? ¿Esta fuerza es de atracción o de repulsión?

**7.33.** Una fuerza paralela al eje $x$ actúa sobre una partícula que se mueve sobre el eje $x$. La fuerza produce una energía potencial $U(x)$ dada por $U(x) = \alpha x^4$, donde $\alpha = 1.20\ \text{J/m}^4$. ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza cuando la partícula está en $x = -0.800$ m?

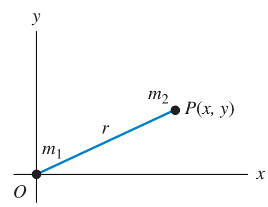
**7.34. Gravedad en una dimensión.** Dos masas puntuales, $m_1$ y $m_2$, yacen en el eje $x$, con $m_1$ fija en el origen y $m_2$ en una posición $x$ y libre para moverse. La energía potencial gravitacional de estas masas es $U(x) = -Gm_1m_2/x$, donde $G$ es una constante (llamada *constante gravitacional*). Usted aprenderá más sobre la gravitación en el capítulo 12. Obtenga la componente $x$ de la fuerza que actúa sobre $m_2$ debida a $m_1$. ¿Esta fuerza es de atracción o de repulsión? ¿Cómo lo sabe?

**7.35. Gravedad en dos dimensiones.** Dos masas puntuales, $m_1$ y $m_2$, yacen en el plano $xy$, con $m_1$ fija en el origen, y $m_2$ con libre movimiento y a una distancia $r$ en un punto $P$, cuyas coordenadas son $x$ y $y$ (figura 7.27). La energía potencial gravitacional de estas masas es $U(r) = -Gm_1m_2/r$, donde $G$ es la constante gravitacional. Demuestre que las componentes de la fuerza sobre $m_2$ debida a $m_1$ son

$$F_x = -\frac{Gm_1m_2x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \qquad \text{y} \qquad F_y = -\frac{Gm_1m_2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

(*Sugerencia*: primero escriba $r$ en términos de $x$ y $y$.) *b*) Demuestre que la magnitud de la fuerza sobre $m_2$ es $F = Gm_1m_2/r^2$. *c*) ¿$m_1$ atrae o repele a $m_2$? ¿Cómo lo sabe?

**Figura 7.27** Ejercicio 7.35.



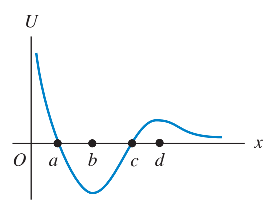

**7.36.** Sobre un objeto que se mueve en el plano $xy$ actúa una fuerza conservativa descrita por la función de energía potencial $U(x, y) = \alpha(1/x^2 + 1/y^2)$, donde $\alpha$ es una constante positiva. Deduzca una expresión para la fuerza expresada en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

## Sección 7.5 Diagramas de energía

**7.37.** La energía potencial de dos átomos en una molécula diatómica se aproxima con $U(r) = a/r^{12} - b/r^6$, donde $r$ es la distancia entre los átomos y $a$ y $b$ son constantes positivas. *a*) Determine la fuerza $F(r)$ que actúa sobre un átomo en función de $r$. Haga dos gráficas, una de $U(r)$ contra $r$ y otra de $F(r)$ contra $r$. *b*) Encuentre la distancia de equilibrio entre los dos átomos. ¿Es estable el equilibrio? *c*) Suponga que los átomos están a la distancia de equilibrio obtenida en el inciso *b*). ¿Qué energía mínima debe agregarse a la molécula para *disociarla*, es decir, para separar los dos átomos una distancia infinita? Ésta es la *energía de disociación* de la molécula. *d*) Para la molécula CO, la distancia de equilibrio entre los átomos de carbono y oxígeno es de $1.13 \times 10^{-10}$ m y la energía de disociación es de $1.54 \times 10^{-18}$ J por molécula. Calcule los valores de las constantes $a$ y $b$.

**7.38.** Una canica se mueve sobre el eje $x$. La función de energía potencial se muestra en la figura 7.28. *a*) ¿En cuál de las coordenadas $x$ marcadas es cero la fuerza sobre la canica? *b*) ¿Cuál de esas coordenadas es una posición de equilibrio estable? *c*) ¿Y de equilibrio inestable?

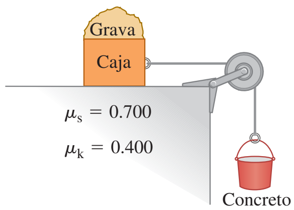
**Figura 7.28** Ejercicio 7.38.




# Problemas

**7.39.** En una obra en construcción, una cubeta de 65.0 kg de concreto cuelga de un cable ligero (pero resistente), que pasa por una polea ligera sin fricción y está conectada una caja de 80.0 kg que está en un techo horizontal (figura 7.29). El cable tira horizontalmente de la caja y una bolsa de grava de 50.0 kg descansa sobre la parte superior de la caja. Se indican los coeficientes de fricción entre la caja y el techo. *a*) Obtenga la fuerza de fricción sobre la bolsa de grava y sobre la caja. *b*) Repentinamente un trabajador quita la bolsa de grava. Utilice la conservación de la energía para calcular la rapidez de la cubeta luego de haya descendido 2.00 m partiendo del reposo. (Usted puede verificar su respuesta resolviendo este problema con las leyes de Newton.)

**Figura 7.29** Problema 7.39.

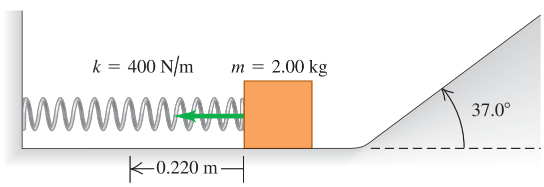



**7.40.** Dos bloques con diferente masa están unidos a cada uno de los extremos de una cuerda ligera, que pasa por una polea ligera sin fricción que está suspendida del techo. Los bloques se sueltan desde el reposo y el más pesado comienza a descender. Una vez que este bloque ha descendido 1.20 m, su rapidez es de 3.00 m/s. Si la masa total de los dos bloques es de 15.0 kg, ¿qué masa tiene cada bloque?

**7.41. Física legal.** En un accidente de tránsito, un automóvil golpeó a un peatón y luego el conductor pisó el freno para detener el auto. Durante el juicio subsecuente, el abogado del conductor alegó que éste había respetado el límite de rapidez de 35 mph que indicaban los letreros; pero que esa rapidez permitida era demasiado alta para que el conductor pudiera ver y reaccionar a tiempo ante el peatón. Imagine que el fiscal le llama como testigo experto. Su investigación del accidente produce las mediciones siguientes: las marcas de derrape producidas durante el tiempo en que los frenos estaban aplicados tenían una longitud de 280 ft, y el dibujo de los neumáticos produjo un coeficiente de fricción cinética de 0.30 con el pavimento. *a*) En su testimonio en el juzgado, ¿dirá que el conductor conducía respetando el límite de rapidez? Usted deberá ser capaz de respaldar su conclusión con un razonamiento claro, porque es seguro que uno de los abogados lo someterá a un interrogatorio. *b*) Si la multa por exceso de rapidez fuera de \$10 por cada mph más allá del límite de rapidez permitido, ¿el conductor tendría que pagar multa y, en tal caso, de cuánto sería?

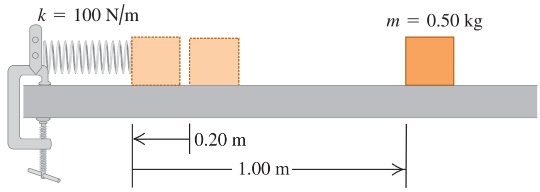
**7.42.** Un bloque de 2.00 kg se empuja contra un resorte con masa despreciable y constante de fuerza $k = 400$ N/m, comprimiéndolo 0.220 m. Al soltarse el bloque, se mueve por una superficie sin fricción que primero es horizontal y luego sube a 37.0° (figura 7.30). *a*) ¿Qué rapidez tiene el bloque al deslizarse sobre la superficie horizontal después de separarse del resorte? *b*) ¿Qué altura alcanza el bloque antes de pararse y regresar?

**Figura 7.30** Problema 7.42.




**7.43.** Un bloque con masa de 0.50 kg se empuja contra un resorte horizontal de masa despreciable, comprimiéndolo 0.20 m (figura 7.31). Al soltarse, el bloque se mueve 1.00 m sobre una mesa horizontal antes de detenerse. La constante del resorte es $k = 100$ N/m. Calcule el coeficiente de fricción cinética $\mu_k$ entre el bloque y la mesa.

**Figura 7.31** Problema 7.43.

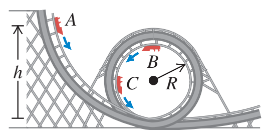



**7.44.** En una superficie horizontal, una caja con masa de 50.0 kg se coloca contra un resorte que almacena 360 J de energía. El resorte se suelta y la caja se desliza 5.60 m antes de detenerse. ¿Qué rapidez tiene la caja cuando está a 2.00 m de su posición inicial?

**7.45. Rebote de pelota.** Una pelota de caucho de 650 gramos se deja caer desde una altura de 2.50 m y en cada rebote alcanza el 75% de la altura que alcanzó en el rebote anterior. *a*) Calcule la energía mecánica inicial de la pelota, inmediatamente después de soltarse desde la altura original. *b*) ¿Cuánta energía mecánica pierde la pelota en su primer rebote? ¿Qué sucede con esa energía? *c*) ¿Cuánta energía mecánica se pierde durante el segundo rebote?

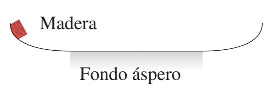
**7.46. Rizo vertical.** Un carrito de un juego de un parque de diversiones rueda sin fricción por la vía de la figura 7.32, partiendo del reposo en $A$ a una altura $h$ sobre la base del rizo. Trate el carrito como partícula. *a*) ¿Qué valor mínimo debe tener $h$ (en términos de $R$) para que el carrito se desplace por el rizo sin caer en la parte superior (el punto $B$)? *b*) Si $h = 3.50R$ y $R = 20.0$ m, calcule la rapidez, aceleración radial y aceleración tangencial de los pasajeros cuando el carrito está en el punto C, en el extremo de un diámetro horizontal. Haga un diagrama a escala aproximada de las componentes de la aceleración.

**Figura 7.32** Problema 7.46.




**7.47.** Un trozo de madera de 2.0 kg resbala por la superficie que se muestra en la figura 7.33. Los lados curvos son perfectamente lisos; pero el fondo horizontal tiene una longitud de 30 m y es áspero, con coeficiente de fricción cinética de 0.20 con la madera. El trozo de madera parte del reposo 4.0 m arriba del fondo áspero. *a*) ¿Dónde se detendrá finalmente este objeto? *b*) Para el movimiento desde que se suelta la madera hasta que se detiene, ¿cuál es el trabajo total que realiza la fricción?

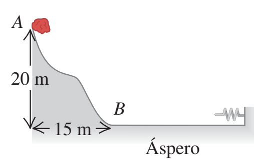
**Figura 7.33** Problema 7.47.




**7.48. Subir y bajar la loma.** Una roca de 28 kg se acerca al pie de una loma con rapidez de 15 m/s. La ladera de la loma tiene un ángulo constante de 40.0° sobre la horizontal. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la loma y la roca son 0.75 y 0.20, respectivamente. *a*) Use la conservación de la energía para obtener la altura máxima por arriba del pie de la loma a la que subirá la roca. *b*) ¿La roca permanecerá en reposo en ese punto más alto o se deslizará cuesta abajo? *c*) Si la roca resbala hacia abajo, calcule su rapidez cuando vuelva al pie de la loma.

**7.49.** Una piedra de 15.0 kg baja deslizándose una colina nevada (figura 7.34), partiendo del punto $A$ con una rapidez de 10.0 m/s. No hay fricción en la colina entre los puntos $A$ y $B$, pero sí en el terreno plano en la base, entre $B$ y la pared. Después de entrar en la región ás-

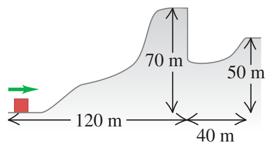
**Figura 7.34** Problema 7.49.



pera, la piedra recorre 100 m y choca con un resorte muy largo y ligero, cuya constante de fuerza es de 2.00 N/m. Los coeficientes de fricción cinética y estática entre la piedra y el suelo horizontal son de 0.20 y 0.80, respectivamente. *a*) ¿Qué rapidez tiene la piedra al llegar al punto *B*? *b*) ¿Qué distancia comprimirá la piedra al resorte? *c*) ¿La piedra se moverá otra vez después de haber sido detenida por el resorte?

**7.50.** Un bloque de 2.8 kg que se desliza remonta la colina lisa, cubierta de hielo, de la figura 7.35. La cima de la colina es horizontal y está 70 m más arriba que su base. ¿Qué rapidez mínima debe tener el bloque en la base de la colina para no quedar atrapada en el foso al otro lado de la colina?

**Figura 7.35** Problema 7.50.




**7.51. Salto con bungee.** La cuerda del bungee tiene 30.0 m de longitud y, estirada una distancia *x*, ejerce una fuerza restauradora de magnitud *kx*. Imagine que su suegro, cuya masa es de 95.0 kg, está parado en una plataforma 45.0 m sobre el suelo, con un extremo del bungee atado firmemente a su tobillo (y el otro extremo atado a la plataforma). Usted le ha prometido que, cuando se deje caer de la plataforma, caerá una distancia máxima de sólo 41.0 m antes de que el bungee lo detenga. Usted tenía varias cuerdas de bungee para elegir y las probó atándolas a un árbol y estirándolas tirando del otro extremo con una fuerza de 380.0 N. Durante esas pruebas, ¿qué distancia se estiró el bungee que debe elegir?

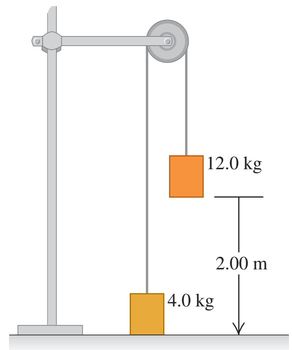
**7.52. Rampa de salto en esquí.** Imagine que está diseñando una rampa de salto en esquí para los siguientes Juegos Olímpicos Invernales. Necesita calcular la altura vertical *h* desde la puerta de salida hasta la base de la rampa. Los esquiadores se empujan con vigor en la salida de modo que, por lo regular, tienen una rapidez de 2.0 m/s al llegar a la puerta de salida. Por cuestiones de seguridad, los esquiadores no deben tener una rapidez mayor que 30.0 m/s al llegar a la base de la rampa. Usted determina que, para un esquiador de 85.0 kg bien entrenado, la fricción y la resistencia del aire efectuarán en total 4000 J de trabajo sobre él durante su descenso. Determine la altura máxima *h* con la que no se excederá la máxima rapidez segura.

**7.53.** El Gran Sandini es un cirquero de 60 kg que es disparado por un cañón de resorte. No son comunes los hombres de su calibre, así que usted le ayudará a diseñar un nuevo cañón, el cual tendrá un resorte muy grande de masa muy pequeña y constante de fuerza de 1100 N/m. El resorte se comprimirá con una fuerza de 4400 N. El interior del cañón está recubierto con teflón, por lo que la fuerza de fricción media es de sólo 40 N durante los 4.0 m que el cirquero se mueve dentro de él. ¿Con qué rapidez sale el cirquero del extremo del cañón, 2.5 m arriba de su posición inicial en reposo?

**7.54.** Imagine que está diseñando una rampa de entrega para cajas que contienen equipo para gimnasio. Las cajas de 1470 N tendrán una rapidez de 1.8 m/s en la parte más alta de una rampa inclinada 22.0° hacia abajo. La rampa ejerce una fuerza de fricción cinética de 550 N sobre cada caja, y la fricción estática máxima también tiene este valor. Cada caja comprimirá un resorte en la base de la rampa y se detendrá después de recorrer una distancia total de 8.0 m sobre la rampa. Una vez detenidas, las cajas no deben rebotar en el resorte. Calcule la constante de fuerza que debe tener el resorte para satisfacer los criterios de diseño.

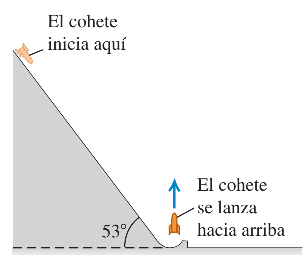
**7.55.** Un sistema que consta de dos cubetas de pintura conectadas por una cuerda ligera se suelta del reposo con la cubeta de pintura de 12.0 kg a 2.00 m sobre el piso (figura 7.36). Use el principio de conservación de la energía para calcular la rapidez con que esta cubeta golpea el piso. Puede ignorar la fricción y la masa de la polea.

**Figura 7.36** Problema 7.55.




**7.56.** Un cohete de 1500 kg se lanza con una rapidez inicial ascendente de 50.0 m/s. Para ayudar a los motores, los ingenieros lo lanzarán desde el reposo sobre una rampa que se eleva 53° por arriba de la horizontal (figura 7.37). En la base, la rampa da vuelta hacia arriba y lanza el cohete verticalmente. Los motores proporcionan un empuje hacia delante constante de 2000 N, y la fricción con la superficie de la rampa es una constante de 500 N. ¿Qué tan lejos de la base de la rampa debería empezar el cohete, medido a lo largo de la superficie de la rampa?

**Figura 7.37** Problema 7.56.




**7.57.** Una pieza de maquinaria de masa *m* se une a un resorte ideal horizontal con constante de fuerza *k* que está unido al borde de una superficie horizontal sin fricción. La pieza se empuja contra el resorte, comprimiéndolo una distancia $x_0$, y luego se libera desde el reposo. Encuentre *a*) la rapidez y *b*) la aceleración máximas de la pieza de maquinaria. *c*) ¿En qué parte del movimiento ocurren los máximos de los incisos *a*) y *b*)? *d*) ¿Cuál sería la extensión máxima del resorte? *e*) Describa el movimiento subsecuente de esta pieza de maquinaria. ¿Alguna vez se detendrá permanentemente?

**7.58.** Una tira de madera con masa despreciable y longitud de 80.0 cm gira sobre un eje horizontal que pasa por su centro. Una rata blanca con masa de 0.500 kg se aferra a un extremo y un ratón con masa de 0.200 kg se aferra al otro de la tira, la cual está horizontal cuando el sistema se libera del reposo. Si los animales logran permanecer asidos, ¿qué rapidez tiene cada uno cuando la tira pasa por la vertical?

**7.59.** Una papa de 0.100 kg está atada a un hilo de 2.50 m, cuyo otro extremo está atado a un soporte rígido. La papa se sostiene con el hilo tensado horizontalmente y se suelta. *a*) ¿Qué rapidez tiene la papa en el punto más bajo de su movimiento? *b*) ¿Qué tensión hay en el hilo en ese punto?

**7.60.** Los siguientes datos son de una simulación por computadora de una pelota de béisbol de 0.145 kg al ser bateada, considerando la resistencia del aire:

| $t$ | $x$ | $y$ | $v_x$ | $v_y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 30.0 m/s | 40.0 m/s |
| 3.05 s | 70.2 m | 53.6 m | 18.6 m/s | 0 |
| 6.59 s | 124.4 m | 0 | 11.9 m/s | −28.7 m/s |

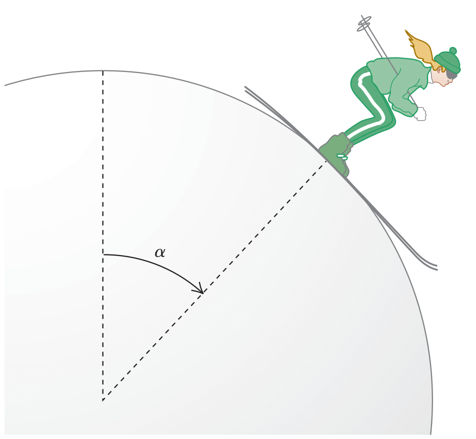
*a*) ¿Cuánto trabajo realizó el aire sobre la pelota al viajar ésta de su posición inicial a su máxima altura? *b*) ¿Y al bajar de la altura máxima a la altura inicial? *c*) Explique por qué la magnitud del trabajo calculado en el inciso *b*) es menor que la del calculado en el inciso *a*).

**7.61. Bajar el poste.** Un bombero de masa $m$ parte del reposo y baja una distancia $d$ deslizándose por un poste. Al final, él se mueve con tanta rapidez como si se hubiera dejado caer desde una plataforma de altura $h \leq d$ con resistencia del aire despreciable. *a*) ¿Qué fuerza de fricción media ejerció el bombero sobre el poste? ¿Es lógica su respuesta en los casos especiales de $h = d$ y $h = 0$? *b*) Calcule la fuerza de fricción promedio que ejerce un bombero de 75.0 kg si $d = 2.5$ m y $h = 1.0$ m. *c*) En términos de g, $h$ y $d$, ¿qué rapidez tiene el bombero cuando está una distancia $y$ arriba de la base del poste?

**7.62.** Una esquiadora de 60.0 kg parte del reposo en la cima de una ladera de 65.0 m de altura. *a*) Si las fuerzas de fricción efectúan −10.5 kJ de trabajo sobre ella al descender, ¿qué rapidez tiene al pie de la ladera? *b*) Ahora la esquiadora se mueve horizontalmente y cruza un terreno de nieve revuelta, donde $\mu_k = 0.20$. Si el terreno tiene 82.0 m de anchura y la fuerza promedio de la resistencia del aire que actúa sobre la esquiadora es de 160 N, ¿qué rapidez tiene ella después de cruzar esa zona? *c*) Ahora la esquiadora choca contra un montón de nieve, penetrando 2.5 m antes de parar. ¿Qué fuerza promedio ejerce la nieve sobre ella al detenerla?

**7.63.** Una esquiadora parte del tope de una enorme bola de nieve sin fricción, con rapidez inicial muy pequeña, y baja esquiando por el costado (figura 7.38). ¿En qué punto pierde ella contacto con la bola de nieve y sigue una trayectoria tangencial? Es decir, en el instante en que ella pierde contacto con la nieve, ¿qué ángulo $\alpha$ forma con la vertical una línea radial que va del centro de la bola a la esquiadora?

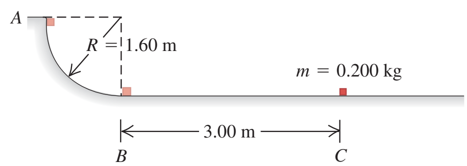
**Figura 7.38** Problema 7.63.




**7.64.** Una roca está atada a un cordón cuyo otro extremo está fijo. Se imparte a la roca una velocidad tangencial inicial que la hace girar en un círculo vertical. Demuestre que la tensión en el cordón en el punto más bajo es mayor que la tensión en el punto más alto por un factor de 6 veces el peso de la roca.

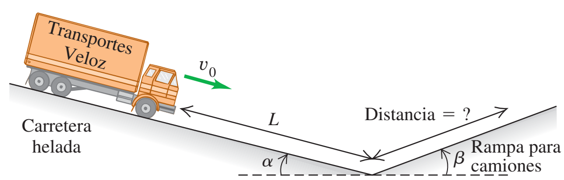
**7.65.** En un puesto de carga de camiones de una oficina de correos, un paquete pequeño de 0.200 kg se suelta del reposo en el punto $A$ de una vía que forma un cuarto de círculo con radio de 1.60 m (figura 7.39). El paquete es tan pequeño relativo a dicho radio que puede tratarse como partícula. El paquete se desliza por la vía y llega al punto $B$ con rapidez de 4.80 m/s. A partir de aquí, el paquete se desliza 3.00 m sobre una superficie horizontal hasta el punto $C$, donde se detiene. *a*) ¿Qué coeficiente de fricción cinética tiene la superficie horizontal? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza la fricción sobre el paquete al deslizarse éste por el arco circular entre $A$ y $B$?

**Figura 7.39** Problema 7.65.




**7.66.** Los frenos de un camión de masa $m$ fallan al bajar por una carretera helada con un ángulo de inclinación $\alpha$ constante hacia abajo. (figura 7.40). Inicialmente, el camión baja con rapidez $v_0$. Después de bajar una distancia $L$ con fricción despreciable, el conductor guía el camión desbocado hacia una rampa de seguridad con ángulo $\beta$ constante hacia arriba. La rampa tiene una superficie arenosa blanda donde el coeficiente de fricción por rodamiento es $\mu_r$. ¿Qué distancia sube el camión por la rampa antes de detenerse? Use métodos de energía.

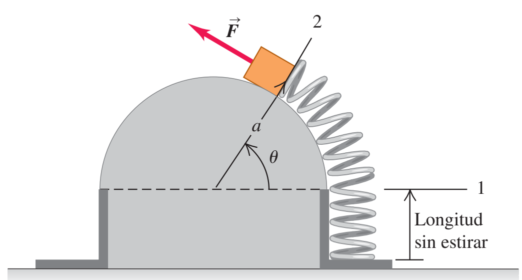
**Figura 7.40** Problema 7.66.




**7.67.** Cierto resorte *no* obedece la ley de Hooke; ejerce una fuerza de restauración $F_x(x) = -\alpha x - \beta x^2$ si se estira o comprime, donde $\alpha = 60.0$ N/m y $\beta = 18.0$ N/m$^2$. Se desprecia la masa del resorte. *a*) Calcule la función de energía potencial $U(x)$ del resorte. Sea $U = 0$ cuando $x = 0$. *b*) Un objeto con masa de 0.900 kg en una superficie horizontal sin fricción se une a este resorte, se tira de él hasta desplazarlo 1.00 m a la derecha (dirección $+x$) para estirar el resorte, y se suelta. ¿Qué rapidez tiene el objeto cuando está 0.50 m a la derecha de la posición de equilibrio $x = 0$?

**7.68.** Una fuerza variable $\vec{F}$ se mantiene tangente a una superficie semicircular sin fricción (figura 7.41). Se varía lentamente la fuerza para

**Figura 7.41** Problema 7.68.

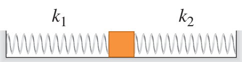


mover un bloque de peso $w$, estirando de la posición 1 a la 2 un resorte que está unido al bloque. El resorte tiene masa despreciable y constante de fuerza $k$. El extremo del resorte describe un arco de radio $a$. Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$.

**7.69.** Un bloque de hielo de 0.150 kg se coloca contra un resorte horizontal comprimido montado en una mesa horizontal que está a 1.20 m sobre el piso. El resorte tiene una constante de fuerza de 1900 N/m y masa despreciable, y está comprimido inicialmente 0.045 m. El resorte se suelta y el bloque se desliza sobre la mesa, cae por el borde y se sigue deslizando por el piso. Si la fricción entre el hielo y la mesa es despreciable, ¿qué rapidez tiene el bloque al llegar al piso?

**7.70.** Un bloque de 3.00 kg está unido a dos resortes ideales horizontales, cuyas constantes de fuerza son $k_1 = 25.0$ N/cm y $k_2 = 20.0$ N/cm (figura 7.42). El sistema está inicialmente en equilibrio sobre una superficie horizontal sin fricción. Ahora el bloque se empuja 15.0 cm a la derecha y se suelta del reposo. *a*) ¿Cuál es la rapidez máxima del bloque? ¿En qué parte del movimiento ocurre la rapidez máxima? *b*) ¿Cuál es la compresión máxima del resorte 1?

**Figura 7.42** Problema 7.70.



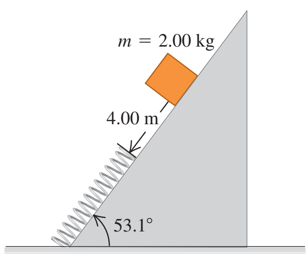

**7.71.** Un aparato experimental de masa $m$ se coloca sobre un resorte vertical de masa despreciable y se empuja hasta comprimirlo una distancia $x$. El aparato se suelta y alcanza su altura máxima a una distancia $h$ sobre el punto donde se soltó. El aparato no está unido al resorte, y ya no está en contacto con éste al alcanzar la altura $h$. La magnitud de aceleración que el aparato resiste sin dañarse es $a$, donde $a > g$. *a*) ¿Qué constante de fuerza debe tener el resorte? *b*) ¿Qué distancia $x$ debe comprimirse el resorte inicialmente?

**7.72.** Si un pez se sujeta a un resorte vertical y se baja suavemente a su posición de equilibrio, estira el resorte una distancia $d$. Si el mismo pez se sujeta al resorte no estirado y se deja caer desde el reposo, ¿cuánto llega a estirar el resorte? (*Sugerencia:* calcule la constante de fuerza del resorte en términos de $d$ y la masa $m$ del pez.)

**7.73.** Un bloque de madera con masa de 1.50 kg se coloca contra un resorte comprimido en la base de una pendiente de 30.0° (punto $A$). Al soltarse el resorte, el bloque sube por la pendiente. En el punto $B$, 6.00 m pendiente arriba de $A$, el bloque tiene una rapidez de 7.00 m/s dirigida pendiente arriba y ya no está en contacto con el resorte. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la pendiente es $\mu_k = 0.50$. La masa del resorte es despreciable. Calcule la energía potencial almacenada inicialmente en el resorte.

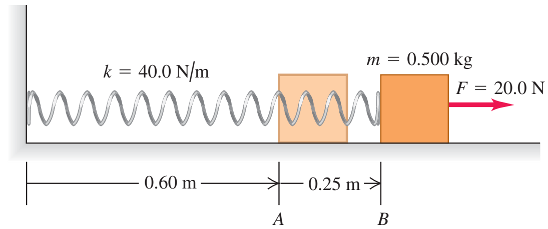
**7.74.** Un paquete de 2.00 kg se suelta en una pendiente de 53.1°, a 4.00 m de un resorte largo, cuya constante de fuerza es de 120 N/m y está sujeto a la base de la pendiente (figura 7.43). Los coeficientes de fricción entre el paquete y la pendiente son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.20$. La masa del resorte es despreciable. *a*) ¿Qué rapidez tiene el paquete justo antes de llegar al resorte? *b*) ¿Cuál es la compresión máxima del resorte? *c*) Al rebotar el paquete hacia arriba, ¿qué tanto se acerca a su posición inicial?

**Figura 7.43** Problema 7.74.




**7.75.** Un bloque de 0.500 kg unido a un resorte de 0.60 m con constante de fuerza $k = 40.0$ N/m está en reposo con su cara trasera en el punto $A$ de una mesa horizontal sin fricción (figura 7.44). La masa del resorte es despreciable. Se tira del bloque a la derecha de la superficie con una fuerza horizontal constante de 20.0 N. *a*) ¿Qué rapidez tiene el bloque cuando su cara trasera llega al punto $B$, que está 0.25 m a la derecha de $A$? *b*) En ese punto, se suelta el bloque. En el movimiento subsecuente, ¿qué tanto se acerca el bloque a la pared a la que está sujeto el extremo izquierdo del resorte?

**Figura 7.44** Problema 7.75.




**7.76. Física estudiantil.** Los miembros del club universitario Iota Eta Pi construyen una plataforma apoyada en 4 resortes verticales en las esquinas, en el sótano del club. Usando un casco protector un miembro valiente se para en medio de la plataforma; su peso comprime los resortes 0.18 m. Otros cuatro estudiantes, empujando hacia abajo las esquinas de la plataforma, comprimen los resortes 0.53 m más, hasta que la parte superior del casco del valiente queda 0.90 m abajo del techo del sótano, y simultáneamente sueltan la plataforma. Ignore las masas de los resortes y la plataforma. *a*) Calcule la rapidez del valiente justo antes de que su casco choque contra el frágil techo. *b*) Si no hubiera techo, ¿qué altura habría alcanzado el estudiante? *c*) El decano de estudiantes, después de castigar a los implicados, les sugiere que la próxima vez lo intenten en exteriores y en otro planeta. ¿Cambiaría su respuesta al inciso *b*) si la travesura se hubiera efectuado en otro planeta con un valor de $g$ distinto? Suponga que los estudiantes empujan la plataforma 0.53 m hacia abajo igual que antes. Explique su razonamiento.

**7.77.** Una fuerza conservativa actúa sobre una partícula de masa $m$ que se mueve en una trayectoria dada por $x = x_0 \cos\omega_0 t$ y $y = y_0 \operatorname{sen}\omega_0 t$, donde $x_0$, $y_0$ y $\omega_0$ son constantes. *a*) Determine las componentes de la fuerza que actúa sobre la partícula. *b*) Determine la energía potencial de la partícula en función de $x$ y $y$. Tome $U = 0$ cuando $x = 0$ y $y = 0$. *c*) Calcule la energía total de la partícula cuando: i) $x = x_0$, $y = 0$; ii) $x = 0$, $y = y_0$.

**7.78.** Al quemarse, un galón de gasolina produce $1.3 \times 10^8$ J de energía. Un automóvil de 1500 kg acelera desde el reposo hasta 37 m/s en 10 s. Su motor tiene una eficiencia de sólo el 15% (lo cual es común), lo cual significa que sólo el 15% de la energía obtenida de la combustión de la gasolina se usa para acelerar el vehículo. El resto se convierte en energía cinética interna de las piezas del motor, y se invierte en calentar los gases de escape y el motor. *a*) ¿Cuántos galones de gasolina gasta este automóvil durante la aceleración? *b*) ¿Cuántas de esas aceleraciones se requerirán para quemar un galón de gasolina?

**7.79.** Una presa hidroeléctrica tiene tras de sí un lago con área superficial de $3.0 \times 10^6$ m$^2$ y costados verticales abajo del nivel del agua, el cual está 150 m arriba de la base de la presa. Cuando el agua pasa por turbinas en la base de la presa, su energía mecánica se convierte en energía eléctrica con eficiencia del 90%. *a*) Si la energía potencial gravitacional se toma como cero en la base de la presa, ¿cuánta energía hay almacenada en el metro superior del agua del lago? La densidad del agua es de 1000 kg/m$^3$. *b*) ¿Qué volumen de agua deberá pasar por la presa para producir 1000 kilowatts-hora de energía eléctrica? ¿Qué distancia baja el nivel de agua del lago cuando esa cantidad de agua pasa por la presa?

**7.80.** ¿Cuánta energía total está almacenada en el lago del problema 7.79? Igual que en ese problema, sea cero la energía potencial gravitacional en la base de la presa. Exprese su respuesta en joules y en kilowatts-hora. (*Sugerencia:* divida el lago en capas horizontales infinitesimales con espesor $dy$ e integre para obtener la energía potencial total.)

**7.81. Gravedad en tres dimensiones.** Una masa puntual $m_1$ se fija en el origen, y otra masa puntual $m_2$ tiene libertad para moverse una distancia $r$ en un punto $P$ con coordenadas $x$, $y$ y $z$. La energía potencial gravitacional de estas masas es $U(r) = -Gm_1m_2/r$, donde $G$ es la constante gravitacional (véanse los ejercicios 7.34 y 7.35). *a*) Demuestre que las componentes de la fuerza sobre $m_2$ debida a $m_1$ son

$$F_x = -\frac{Gm_1m_2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \qquad F_y = -\frac{Gm_1m_2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F_z = -\frac{Gm_1m_2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

(*Sugerencia:* escriba primero $r$ en términos de $x$, $y$ y $z$.) *b*) Demuestre que la magnitud de la fuerza sobre $m_2$ es $F = Gm_1m_2/r^2$. *c*) ¿$m_1$ atrae o repele a $m_2$? ¿Cómo lo sabe?

**7.82.** *a*) ¿La fuerza $\vec{F} = Cy^2\hat{\jmath}$, donde $C$ es una constante negativa dada en N/m$^2$, es conservativa o no conservativa? Justifique su respuesta. *b*) ¿La fuerza $\vec{F} = Cy^2\hat{\imath}$, donde $C$ es una constante negativa dada en N/m$^2$, es conservativa o no conservativa? Justifique su respuesta.

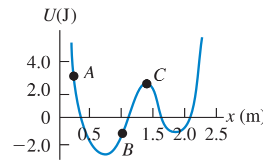
**7.83.** Varias fuerzas actúan sobre una cortadora controlada por microprocesador. Una es $\vec{F} = -\alpha xy^2\hat{\jmath}$, que tiene la dirección $-y$ y cuya magnitud depende de la posición de la cortadora. La constante es $\alpha = 2.50$ N/m$^3$. Considere el desplazamiento de la cortadora desde el origen hasta el punto $x = 3.00$ m, $y = 3.00$ m. *a*) Calcule el trabajo efectuado sobre la cortadora por $\vec{F}$ si el desplazamiento sigue la recta $y = x$ que conecta los dos puntos. *b*) Calcule el trabajo efectuado sobre la cortadora por $\vec{F}$ suponiendo ahora que ésta primero se mueve sobre el eje $x$ hasta $x = 3.00$ m, $y = 0$ y, luego, se mueve paralela al eje $y$ hasta $x = 3.00$ m, $y = 3.00$ m. *c*) Compare el trabajo hecho por $\vec{F}$ siguiendo las dos trayectorias. ¿$\vec{F}$ es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

**7.84.** Varias fuerzas actúan sobre un objeto. Una es $\vec{F} = \alpha xy\hat{\imath}$, que tiene la dirección $x$ y cuya magnitud depende de la posición del objeto. (Véase el problema 6.96.) La constante es $\alpha = 2.00$ N/m$^2$. El objeto sigue esta trayectoria: 1) Parte del origen y se mueve por el eje $y$ hasta el punto $x = 0$, $y = 1.50$ m; 2) se mueve paralelo al eje $x$ hasta el punto $x = 1.50$ m, $y = 1.50$ m; 3) se mueve paralelo al eje $y$ hasta el punto $x = 1.50$ m, $y = 0$; 4) se mueve paralelo al eje $x$ volviendo al origen. *a*) Dibuje la trayectoria en el plano $xy$. *b*) Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ sobre el objeto en cada tramo y en el viaje completo "de ida y vuelta". *c*) ¿$\vec{F}$ es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

**7.85.** Una fuerza de ley de Hooke $-kx$ y una fuerza conservativa constante $F$ en la dirección $+x$ actúan sobre un ion atómico. *a*) Demuestre que una posible función de energía potencial para esta combinación de fuerzas es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - Fx - F^2/2k$. ¿Es ésta la *única* función posible? Explique su respuesta. *b*) Encuentre la posición de equilibrio estable. *c*) Grafique $U(x)$ (en unidades de $F^2/k$) contra $x$ (en unidades de $F/k$) para valores de $x$ entre $-5F/k$ y $5F/k$. *d*) ¿Hay posiciones de equilibrio inestable? *e*) Si la energía total es $E = F^2/k$, qué valores máximos y mínimos de $x$ alcanza el ion en su movimiento? *f*) Si el ion tiene masa $m$, calcule su rapidez máxima si la energía total es $E = F^2/k$. ¿En qué valor de $x$ es máxima la rapidez?

**7.86.** Una partícula se mueve en el eje $x$ y sobre ella actúa una sola fuerza conservativa paralela al eje $x$. Tal fuerza corresponde a la función de energía potencial graficada en la figura 7.45. La partícula se suelta del reposo en el punto $A$. *a*) ¿Qué dirección tiene la fuerza sobre la partícula en $A$? *b*) ¿Y en $B$? *c*) ¿En qué valor de $x$ es máxima la energía cinética de la partícula? *d*) ¿Qué fuerza actúa sobre la partícula en $C$? *e*) ¿Qué valor máximo de $x$ alcanza la partícula durante su movimiento? *f*) ¿Qué valor o valores de $x$ corresponden a puntos de equilibrio estable? *g*) ¿Y de equilibrio inestable?

**Figura 7.45** Problema 7.86.




## Problema de desafío

**7.87.** Un protón de masa $m$ se mueve en una dimensión. La función de energía potencial es $U(x) = \alpha/x^2 - \beta/x$, donde $\alpha$ y $\beta$ son constantes positivas. El protón se libera del reposo en $x_0 = \alpha/\beta$. *a*) Demuestre que $U(x)$ puede escribirse como

$$U(x) = \frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{x_0}{x}\right]$$

Grafique $U(x)$. Calcule $U(x_0)$, ubicando así el punto $x_0$ en la gráfica. *b*) Calcule $v(x)$, la rapidez del protón en función de la posición. Grafique $v(x)$ y describa el movimiento cualitativamente. *c*) ¿Para qué valor de $x$ es máxima la rapidez del protón? ¿Cuál es el valor de esa rapidez máxima? *d*) ¿Qué fuerza actúa sobre el protón en ese punto? *e*) Si ahora el protón se libera en $x_1 = 3\alpha/\beta$, ubique $x_1$ en la gráfica de $U(x)$. Calcule $v(x)$ y describa cualitativamente el movimiento. *f*) En cada caso de protón liberado ($x = x_0$ y $x = x_1$), ¿qué valores máximos y mínimos de $x$ se alcanzan durante el movimiento?