CAPITULO 4: MOVIMIENTO CURVILÍNEO

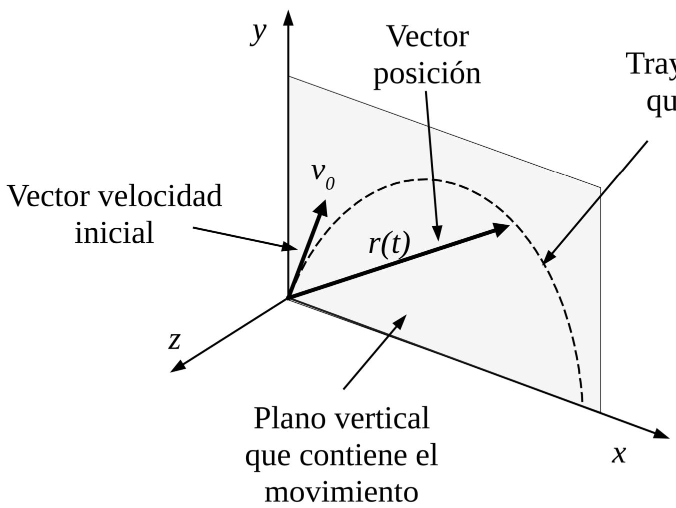
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE
✔ .

Este caso de movimiento se de

MOVIMIENTO PLANO

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE
✔ .

Este caso de movimiento se desarrolla en el espacio bidimensional por lo tanto los vectores posición tendrán dos componentes temporales que se comportarán en forma independientemente respetando el principio de independencia de los movimientos de cada componente. Como ejemplo se puede citar el caso del movimiento de proyectiles cuya trayectoria está contenida en un plano vertical a la superficie terrestre, la componente vertical se verá afectada por la aceleración de la gravedad describiendo un MRUV mientras que la componente horizontal presenta un movimiento sin aceleración[1] es decir un MRU. La superposición de ambos movimientos genera un vector posición cuyas componentes en el caso más general responderá a la siguiente expresión si se supone que el movimiento se cronometra a partir de cero.

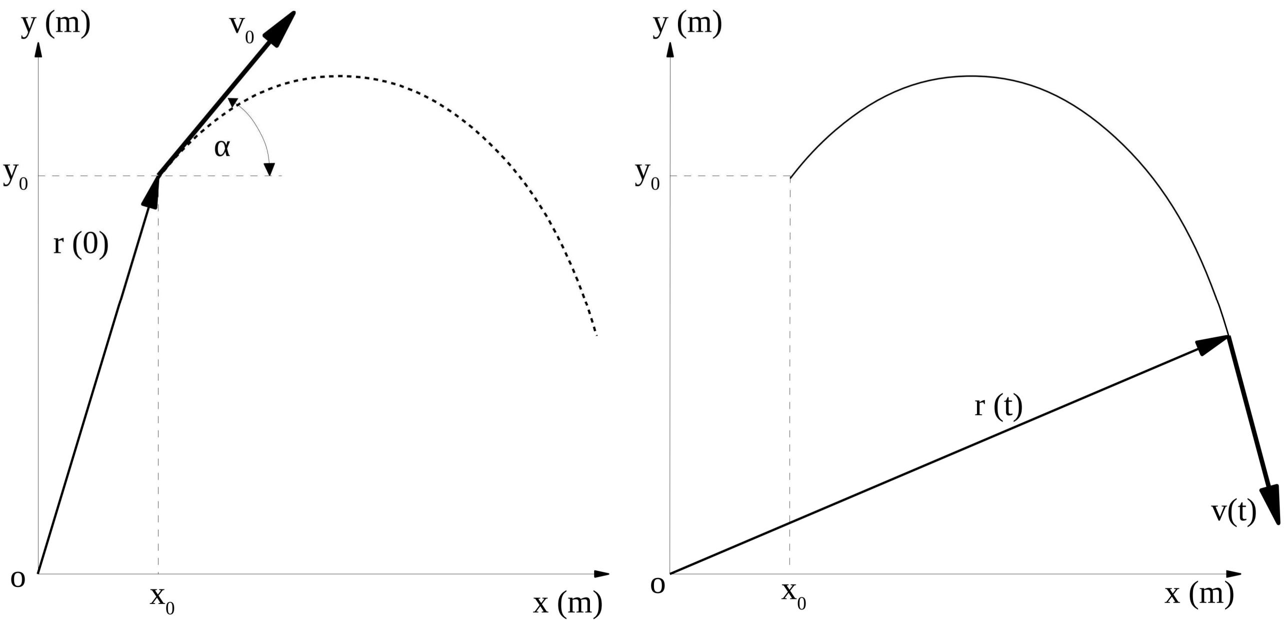


1 - Se supone un proyectil no propulsado ni que experimente resistencia al movimiento.

Por lo tanto el vector posición de la partícula en cada instante de tiempo estará dado por un vector de dos componentes que para el caso más general será:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x_0+v_{0x}.t \\ y_0+v_{0y}.t-\frac{1}{2}g t^2 \end{pmatrix}$$

A continuación se presenta un caso de movimiento de un proyectil que responde a la expresión vectorial dada mostrando el instante inicial y otro para un instante de tiempo genérico.



Algunas aclaraciones y conceptos muy importantes respecto a estos gráficos.
En el de la izquierda se muestra el instante en el que se “dispara” el proyectil a una velocidad inicial “v_0” inclinada un cierto ángulo “α” desde la posición inicial “r(0)” correspondiente al tiempo inicial t = 0. Tal velocidad presenta dos componentes con las siguientes características.

$$\vec{v}(0)=\begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_0.\cos\alpha \\ v_0.sen\alpha \end{pmatrix}$$

$$v_{0x} \rightarrow MRU\,(a=0)$$
$$v_{0y} \rightarrow MRUV\,(a=-9{,}8\,m/s^2)$$

La linea de puntos corresponde a la trayectoria del proyectil y no debe confundirse con la ley de variación de la posición en función del tiempo, son dos conceptos muy diferentes aunque se representen con una parábola.
El gráfico de la derecha muestra el proyectil con su correspondiente vector posición en un tiempo genérico “t” posterior. La velocidad con la que “viaja” el proyectil en ese instante es, como todas las velocidades, tangente a la trayectoria y su expresión se puede determinar derivando el vector posición r(t) quedando:

$$\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y}-g\,t \end{pmatrix}$$

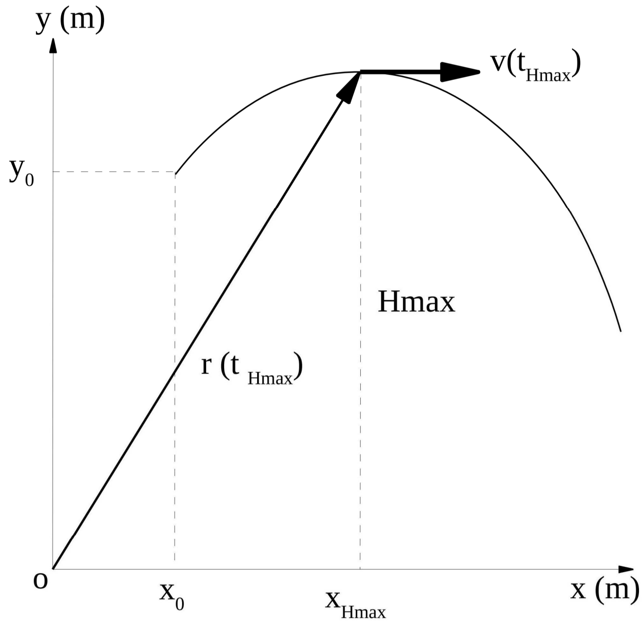
Se recalca la característica de las dos componentes, la de “x” con MRU y la de “y” con MRUV. Para obtener el vector aceleración se procede matemáticamente de igual manera quedando:

$$\vec{a}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

La altura máxima que consigue el proyectil con esas características de disparo se obtiene cuando deja de ascender, es decir cuando la componente vertical de la velocidad es nula. De la expresión del vector velocidad se obtiene:

$$v_{0\,y}-g\,t_{Hmax}=0$$

$$t_{Hmax}=\frac{v_{0\,y}}{g}=\frac{v_0\,sen\,\alpha}{g}$$



Este tiempo es el que tarda el móvil en alcanzar la altura máxima por lo que, para determinar tal posición se lo reemplaza en la expresión vectorial de la posición quedando la expresión y su correspondiente gráfico como se muestra.

$$\vec{r}(t_{Hmax})=\begin{pmatrix} x_0+v_{0\,x}\,.\,t_{Hmax} \\ y_0+v_{0\,y}\,.\,t_{Hmax}-\frac{1}{2}g\,(t_{Hmax})^2 \end{pmatrix}$$

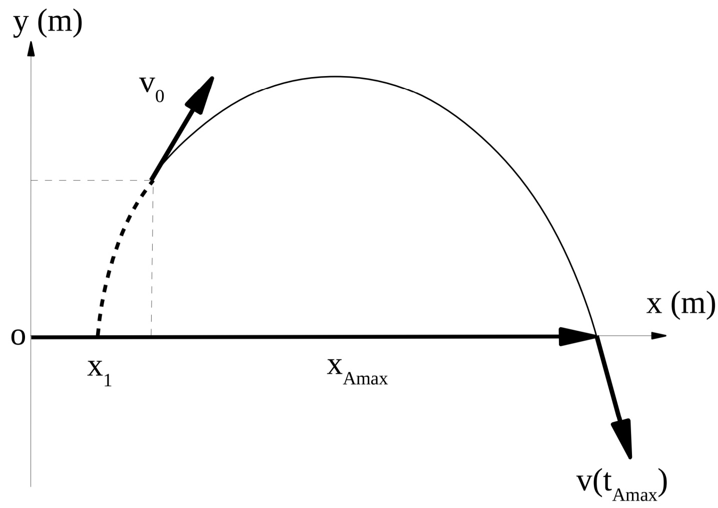
$$\vec{r}(t_{Hmax})=\begin{pmatrix} X_{Hmax} \\ Hmax \end{pmatrix}$$

Para determinar la velocidad que el móvil posee al llegar a la altura máxima se reemplaza el tiempo que tardó en llegar en la expresión de la velocidad quedando:

$$\vec{v}(t_{Hmax})=\begin{pmatrix} v_{0\,x} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_0\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este valor coincida con la mencionada característica de la velocidad para la altura máxima.

De esta última expresión se desprende que para el único caso en el que la velocidad en la altura máxima será nula se dará para cuando el móvil se arroje verticalmente hacia arriba[1].
Para determinar el alcance máximo al que llegará el proyectil medido desde la posición tomada como referencia en este caso el origen de coordenadas dado por el vector x_{Amax}. Como se puede observar tal vector presenta las siguientes componentes:



$$\vec{r}(t_{Amax})=\begin{pmatrix} x_{Amax} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t_{Amax})=\begin{pmatrix} x_0+v_{0x}.t_{Amax} \\ y_0+v_{0y}.t_{Hmax}-\frac{1}{2}g(t_{Hmax})^2 \end{pmatrix}$$

La coordenada "y" de esta expresión vectorial se anula para dos valores de tiempo, uno de ellos determina el punto x_1 que matemáticamente es correcto pero físicamente no corresponde[2] ya que el móvil nunca estuvo en la posición (x_1 , 0) y deberá descartarse. Por lo tanto el tiempo que debe utilizarse para calcular el alcance máximo será el que determina la posición final de alcance máximo(x_{Amax} , 0) con la expresión:

$$0=y_0+v_{0y}.t_{Hmax}-\frac{1}{2}g(t_{Hmax})^2$$

Este valor de tiempo se introduce en la coordenada "x" dando:

$$x_{Amax}=x_0+v_{0x}.t_{Amax}$$

Para determinar la ecuación de la trayectoria de un móvil que se desplaza según las condiciones de tiro oblicuo se debe despejar el tiempo[3] de la coordenada "x" y reemplazarlo en la coordenada "y" de la ecuación vectorial de la posición en función del tiempo.

---

1 - Para el caso de arrojarlo hacia abajo, el cos (270º) = -1 indica que en ese instante inicial el objeto es arrojado desde la altura máxima con velocidad negativa, es decir hacia abajo.

2 - Con la linea de puntos se indica la parte de la parábola que indica la raíz de la ecuación dada por el valor del tiempo que debe descartarse. Se resalta que no debe dejarse llevar por el signo de las raíces sino más bien interpretar el significado de las mismas.

3 - En este caso el tiempo es matemáticamente el parámetro común en ambas coordenadas razón por la cual se realiza el reemplazo mencionado.

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x_0+v_{0x}.t \\ y_0+v_{0y}.t-\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

$$x(t)=x_0+v_{0x}.t \rightarrow t=\frac{x(t)-x_0}{v_{0x}}$$

$$y(t)=y_0+v_{0y}.t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$y(t)=y_0+v_{0y}.(\frac{x(t)-x_0}{v_{0x}})-\frac{1}{2}g(\frac{x(t)-x_0}{v_{0x}})^2$$

Para el caso en que la posición inicial coincida con el origen la expresión de la trayectoria queda como se indica:

$$y(t)=v_{0y}.(\frac{x(t)}{v_{0x}})-\frac{1}{2}g(\frac{x(t)}{v_{0x}})^2$$

$$y(t)=v_0.sen\alpha.(\frac{x(t)}{v_0\cos\alpha})-\frac{1}{2}g(\frac{x(t)}{v_0\cos\alpha})^2$$

$$y(t)=tg\alpha.x(t)-\frac{1}{2}g\frac{x(t)^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$$

Según las propiedades trigonométricas entre la tangente y el coseno de un ángulo se cumple que[1]:

$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Reemplazando esta en la anterior queda la expresión de la trayectoria para diferentes valores del ángulo de disparo.
Agrupando los términos constantes se tendrá la ecuación de la trayectoria y= f(x) teniendo como parámetro el tiempo.

$$y(t)=[\frac{-g(tg^2\alpha+1)}{2v_0^2}].x(t)^2+[tg\alpha].x(t)$$

La correspondiente parábola tiene la siguiente forma:

$$y=[A]x^2+[B]x$$

Para determinar la máxima altura que se puede conseguir dadas las condiciones iniciales de velocidad e inclinación se deriva "y" respecto de "x" y se iguala a cero lo que dará la expresión de máxima altura según se vio[2].

1 - Se obtiene de dividir cada término la relación pitagórica por el coseno cuadrado.
2 - La derivada de esta expresión para determinar la máxima altura se deja para ser desarrollada por los lectores.