

# 2

## MOVIMIENTO EN LÍNEA RECTA

### METAS DE APRENDIZAJE

**Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:**

- Cómo describir el movimiento en línea recta en términos de velocidad media, velocidad instantánea, aceleración media y aceleración instantánea.
- Cómo interpretar gráficas de posición contra tiempo, velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo para el movimiento en línea recta.
- Cómo resolver problemas que impliquen movimiento en línea recta con aceleración constante, incluyendo problemas de caída libre.
- Cómo analizar el movimiento en línea recta cuando la aceleración no es constante.

? Un velocista común acelera durante el primer tercio de la carrera y desacelera gradualmente en el resto de la competencia. ¿Es correcto decir que un corredor está *acelerando* conforme *desacelera* durante los dos tercios finales de la carrera?



¿Qué distancia debe recorrer un avión comercial antes de alcanzar la rapidez de despeje? Cuando lanzamos una pelota de béisbol verticalmente, ¿qué tanto sube? Cuando se nos resbala un vaso de la mano, ¿cuánto tiempo tenemos para atraparlo antes de que choque contra el piso? Éste es el tipo de preguntas que usted aprenderá a contestar en este capítulo. Iniciamos nuestro estudio de física con la *mecánica*, que es el estudio de las relaciones entre fuerza, materia y movimiento. En este capítulo y el siguiente estudiaremos la *cinemática*, es decir, la parte de la mecánica que describe el movimiento. Después veremos la *dinámica*: la relación entre el movimiento y sus causas.

En este capítulo nos concentramos en el tipo de movimiento más simple: un cuerpo que viaja en línea recta. Para describir este movimiento, introducimos las cantidades físicas *velocidad* y *aceleración*, las cuales en física tienen definiciones sencillas; aunque son más precisas y algo distintas de las empleadas en el lenguaje cotidiano. Un aspecto importante de las definiciones de velocidad y aceleración en física es que tales cantidades son *vectores*. Como vimos en el capítulo 1, esto significa que tienen tanto magnitud como dirección. Aquí nos interesa sólo el movimiento rectilíneo, por lo que no necesitaremos aún toda el álgebra vectorial; no obstante, el uso de vectores será esencial en el capítulo 3, al considerar el movimiento en dos o tres dimensiones.

Desarrollaremos ecuaciones sencillas para describir el movimiento rectilíneo en el importante caso en que la aceleración es constante. Un ejemplo es el movimiento de un objeto en caída libre. También consideraremos situaciones en las que la aceleración varía durante el movimiento. En estos casos habrá que integrar para describir el movimiento. (Si no ha estudiado integración aún, la sección 2.6 es opcional.)

## 2.1 Desplazamiento, tiempo y velocidad media

Suponga que una piloto de autos de arrancones conduce su vehículo por una pista recta (figura 2.1). Para estudiar su movimiento, necesitamos un sistema de coordenadas. Elegimos que el eje  $x$  vaya a lo largo de la trayectoria recta del auto, con el origen  $O$  en la línea de salida. También elegimos un punto en el auto, digamos su extremo delantero, y representamos todo el vehículo con ese punto y lo tratamos como una **partícula**.

Una forma útil de describir el movimiento de la partícula —es decir, el punto que representa el automóvil— es en términos del cambio en su coordenada  $x$  durante un intervalo de tiempo. Suponga que 1.0 s después del arranque el frente del vehículo está en el punto  $P_1$ , a 19 m del origen, y que 4.0 s después del arranque está en el punto  $P_2$ , a 277 m del origen. El **desplazamiento** de la partícula es un vector que apunta de  $P_1$  a  $P_2$  (véase la sección 1.7). La figura 2.1 muestra que este vector apunta a lo largo del eje  $x$ . La componente  $x$  del desplazamiento es simplemente el cambio en el valor de  $x$ ,  $(277 \text{ m} - 19 \text{ m}) = 258 \text{ m}$ , que hubo en un lapso de  $(4.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s}) = 3.0 \text{ s}$ . Definimos la **velocidad media** del auto durante este intervalo de tiempo como una cantidad **vectorial**, cuya componente  $x$  es el cambio en  $x$  dividido entre el intervalo de tiempo:  $(258 \text{ m})/(3.0 \text{ s}) = 86 \text{ m/s}$ .

En general, la velocidad media depende del intervalo de tiempo elegido. Durante un lapso de 3.0 s *antes* del arranque, la velocidad media fue cero, porque el auto estaba en reposo en la línea de salida y tuvo un desplazamiento cero.

Generalicemos el concepto de velocidad media. En el tiempo  $t_1$  el auto está en el punto  $P_1$ , con la coordenada  $x_1$ , y en el tiempo  $t_2$  está en el punto  $P_2$  con la coordenada  $x_2$ . El desplazamiento del auto en el intervalo de  $t_1$  a  $t_2$  es el vector de  $P_1$  a  $P_2$ . La componente  $x$  del desplazamiento, denotada con  $\Delta x$ , es el cambio en la coordenada  $x$ :

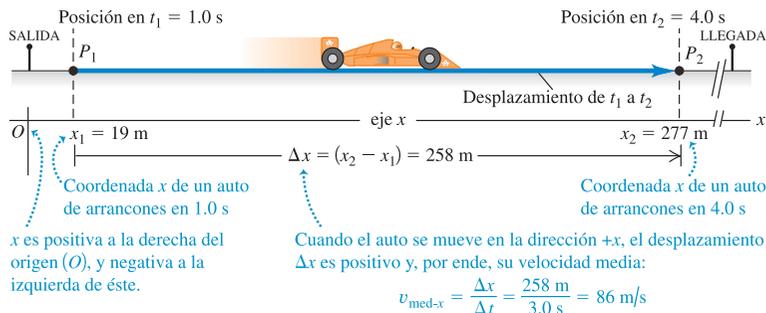
$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (2.1)$$

El auto de arrancones se mueve sólo a lo largo del eje  $x$ , de manera que las componentes  $y$  y  $z$  del desplazamiento son iguales a cero.

**CIUDADO** El significado de  $\Delta x$  Note que  $\Delta x$  *no* es el producto de  $\Delta$  y  $x$ ; es sólo un símbolo que significa “el cambio en la cantidad  $x$ ”. Siempre usaremos la letra griega mayúscula  $\Delta$  (delta) para representar un *cambio* en cierta cantidad, calculada restando el valor *inicial* del valor *final*, y nunca a la inversa. Asimismo, el intervalo de tiempo de  $t_1$  a  $t_2$  es  $\Delta t$ , el cambio en la cantidad  $t$ :  $\Delta t = t_2 - t_1$  (tiempo final menos tiempo inicial). ■

La componente  $x$  de la velocidad promedio, o **velocidad media**, es la componente  $x$  del desplazamiento,  $\Delta x$ , dividida entre el intervalo de tiempo  $\Delta t$  en el que ocurre el desplazamiento. Usamos el símbolo  $v_{\text{med-}x}$  para representar velocidad media (el

### 2.1 Posiciones de un auto de arrancones en dos instantes durante su recorrido.



subíndice “med” indica que se trata de un valor promedio y el subíndice  $x$  indica que ésta es la componente  $x$ ):

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{velocidad media, movimiento rectilíneo}) \quad (2.2)$$

En el ejemplo del auto de arrancones teníamos  $x_1 = 19 \text{ m}$ ,  $x_2 = 277 \text{ m}$ ,  $t_1 = 1.0 \text{ s}$  y  $t_2 = 4.0 \text{ s}$ , así que la ecuación (2.2) da

$$v_{\text{med-}x} = \frac{277 \text{ m} - 19 \text{ m}}{4.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = \frac{258 \text{ m}}{3.0 \text{ s}} = 86 \text{ m/s}$$

La velocidad media del auto es positiva. Esto significa que, durante el intervalo, la coordenada  $x$  aumentó y el auto se movió en la dirección  $+x$  (a la derecha en la figura 2.1).

Si una partícula se mueve en la dirección  $x$  *negativa* durante un intervalo de tiempo, su velocidad media en ese lapso es negativa. Por ejemplo, suponga que la camioneta de un juez se mueve hacia la izquierda sobre la pista (figura 2.2). La camioneta está en  $x_1 = 277 \text{ m}$  en  $t_1 = 16.0 \text{ s}$ , y en  $x_2 = 19 \text{ m}$  en  $t_2 = 25.0 \text{ s}$ . Entonces,  $\Delta x = (19 \text{ m} - 277 \text{ m}) = -258 \text{ m}$  y  $\Delta t = (25.0 \text{ s} - 16.0 \text{ s}) = 9.0 \text{ s}$ . La componente  $x$  de la velocidad media es  $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t = (-258 \text{ m})/(9.0 \text{ s}) = -29 \text{ m/s}$ .

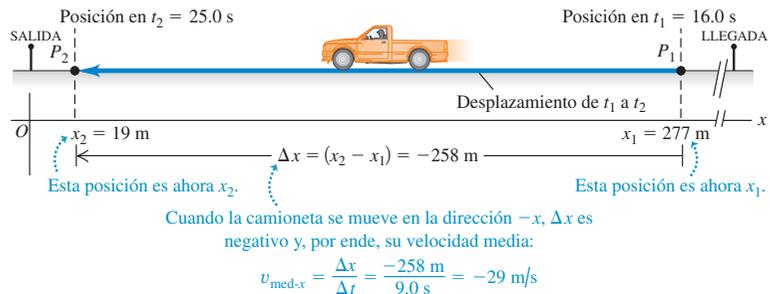
Hay algunas reglas sencillas para la velocidad media. **Siempre que  $x$  sea positiva y aumente o sea negativa y se vuelva menos negativa, la partícula se mueve en la dirección  $+x$  y  $v_{\text{med-}x}$  es positiva** (figura 2.1). **Siempre que  $x$  sea positiva y disminuya, o sea negativa y se vuelva más negativa, la partícula se mueve en la dirección  $-x$  y  $v_{\text{med-}x}$  es negativa** (figura 2.2).

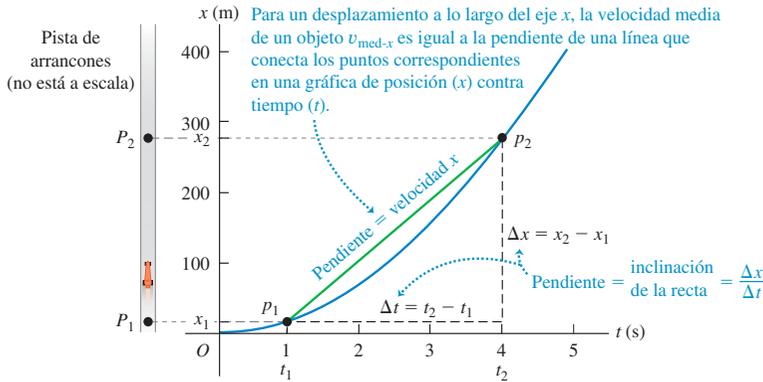
**CUIDAD** **Elección de la dirección  $x$  positiva** No sucumba a la tentación de pensar que una velocidad media positiva implica necesariamente movimiento a la derecha, como en la figura 2.1, y una velocidad media negativa implica movimiento a la izquierda, como en la figura 2.2. Tales conclusiones son correctas *sólo* si la dirección  $+x$  es hacia la derecha, como elegimos en las figuras 2.1 y 2.2. Igualmente podríamos haber decidido que la dirección  $+x$  fuera hacia la izquierda, con el origen en la llegada. Entonces, el auto habría tenido velocidad media negativa; y la camioneta del juez, positiva. En casi todos los problemas, podremos elegir la dirección del eje de coordenadas. Una vez tomada la decisión, *deberá* tomarse en cuenta al interpretar los signos de  $v_{\text{med-}x}$  y otras cantidades que describen el movimiento! ■

En el movimiento rectilíneo por lo general llamaremos a  $\Delta x$  el desplazamiento y a  $v_{\text{med-}x}$  la velocidad media. Sin embargo, no olvide que éstas son realmente las componentes  $x$  de cantidades vectoriales que, en este caso especial, *sólo* tienen componentes  $x$ . En el capítulo 3, los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración tendrán dos o tres componentes distintas de cero.

La figura 2.3 es una gráfica de la posición del auto de arrancones en función del tiempo, es decir, una **gráfica  $x-t$** . La curva de la figura *no* representa la trayectoria del auto; ésta es una línea recta, como se observa en la figura 2.1. Más bien, la gráfica es una forma de representar visualmente cómo cambia la posición del auto con el

**2.2** Posiciones de la camioneta de un juez en dos instantes durante su movimiento. Los puntos  $P_1$  y  $P_2$  ahora se refieren a las posiciones de la camioneta, por lo que son diferentes de las de la figura 2.1.





**2.3** La posición de un auto de arrancones en función del tiempo.

tiempo. Los puntos  $p_1$  y  $p_2$  en la gráfica corresponden a los puntos  $P_1$  y  $P_2$  de la trayectoria del auto. La línea  $p_1p_2$  es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con cateto vertical  $\Delta x = x_2 - x_1$  y cateto horizontal  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Así, la velocidad media del auto  $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t$  es igual a la *pendiente* de la línea  $p_1p_2$ , es decir, el cociente del cateto vertical  $\Delta x$  y el cateto horizontal  $\Delta t$ .

La velocidad media depende sólo del desplazamiento total  $\Delta x = x_2 - x_1$  que se da durante el intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , no en los pormenores de lo que sucede dentro de ese intervalo. En el tiempo  $t_1$  una motocicleta podría haber rebasado al auto de arrancones en el punto  $P_1$  de la figura 2.1, para después reventar el motor y bajar la velocidad, pasando por  $P_2$  en el mismo instante  $t_2$  que el auto. Ambos vehículos tienen el mismo desplazamiento en el mismo lapso, así que tienen la misma velocidad media.

Si expresamos la distancia en metros y el tiempo en segundos, la velocidad media se mide en metros por segundo (m/s). Otras unidades de velocidad comunes son kilómetros por hora (km/h), pies por segundo (ft/s), millas por hora (mi/h) y nudos (1 nudo = 1 milla náutica/h = 6080 ft/h). La tabla 2.1 muestra algunas magnitudes típicas de velocidad.

**Tabla 2.1** Magnitudes típicas de velocidad

Reptar de caracol	$10^{-3}$ m/s
Andar rápido	2 m/s
Hombre más rápido	11 m/s
Guepardo en carrera	35 m/s
Automóvil más rápido	341 m/s
Movimiento aleatorio de moléculas de aire	500 m/s
Avión más rápido	1000 m/s
Satélite de comunicación en órbita	3000 m/s
Electrón en un átomo de hidrógeno	$2 \times 10^6$ m/s
Luz que viaja en el vacío	$3 \times 10^8$ m/s

**Evalúe su comprensión de la sección 2.1** Cada uno de los siguientes viajes en automóvil dura una hora. La dirección  $x$  positiva es hacia el este. i) El automóvil A viaja 50 km al este. ii) El automóvil B viaja 50 km al oeste. iii) El automóvil C viaja 60 km al este, luego da vuelta y viaja 10 km al oeste. iv) El automóvil D viaja 70 km al este. v) El automóvil E viaja 20 km al oeste, luego da vuelta y viaja 20 km al este. a) Clasifique los cinco viajes en orden de velocidad media de más positivo a más negativo. b) ¿Cuáles viajes, si hay, tienen la misma velocidad media? c) ¿Para cuál viaje, si hay, la velocidad media es igual a cero?



## 2.2 Velocidad instantánea

Hay ocasiones en que la velocidad media es lo único que necesitamos saber acerca del movimiento de una partícula. Por ejemplo, una carrera en pista recta es en realidad una competencia para determinar quién tuvo la mayor velocidad media,  $v_{\text{med-}x}$ . Se entrega el premio al competidor que haya recorrido el desplazamiento  $\Delta x$  de la línea de salida a la de meta en el intervalo de tiempo más corto,  $\Delta t$  (figura 2.4).

Sin embargo, la velocidad media de una partícula durante un intervalo de tiempo no nos indica con qué rapidez, o en qué dirección, la partícula se estaba moviendo en un instante dado del intervalo. Para describir el movimiento con mayor detalle, necesitamos definir la velocidad en cualquier instante específico o punto específico del camino. Ésta es la **velocidad instantánea**, y debe definirse con cuidado.

**CAUIDADO** ¿Cuánto tiempo dura un instante? Note que la palabra “instante” tiene un significado un poco distinto en física que en el lenguaje cotidiano. Podemos utilizar la frase “duró sólo un instante” para referirnos a algo que duró un intervalo de tiempo muy corto. Sin embargo, en física un instante no tiene duración; es un solo valor de tiempo. ■

**2.4** El ganador de una carrera de natación de 50 m es el nadador cuya velocidad media tenga la mayor magnitud, es decir, quien cubra el desplazamiento  $\Delta x$  de 50 m en el tiempo transcurrido  $\Delta t$  más corto.



**2.5** Incluso al avanzar, la velocidad instantánea de este ciclista puede ser negativa: si está viajando en la dirección  $x$  negativa. En cualquier problema, nosotros decidimos cuál dirección es positiva y cuál es negativa.



Para obtener la velocidad instantánea del auto de la figura 2.1 en el punto  $P_1$ , movemos el segundo punto  $P_2$  cada vez más cerca del primer punto  $P_1$  y calculamos la velocidad media  $v_{\text{med-}x} = \Delta x / \Delta t$  para estos desplazamientos y lapsos cada vez más cortos. Tanto  $\Delta x$  y  $\Delta t$  se hacen muy pequeños; pero su cociente no necesariamente lo hace. En el lenguaje del cálculo, el límite de  $\Delta x / \Delta t$  cuando  $\Delta t$  se acerca a cero es la **derivada** de  $x$  con respecto a  $t$  y se escribe  $dx/dt$ . *La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero; es igual a la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo.* Usamos el símbolo  $v_x$ , sin “med” en el subíndice, para la **velocidad instantánea** en el eje  $x$ :

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (\text{velocidad instantánea, movimiento rectilíneo}) \quad (2.3)$$

Siempre suponemos que  $\Delta t$  es positivo, así que  $v_x$  tiene el mismo signo algebraico que  $\Delta x$ . Un valor positivo de  $v_x$  indica que  $x$  aumenta y el movimiento es en la dirección  $x$  positiva; un valor negativo de  $v_x$  indica que  $x$  disminuye y el movimiento es en la dirección  $x$  negativa. Un cuerpo puede tener  $x$  positivo y  $v_x$  negativa, o al revés;  $x$  nos dice dónde está el cuerpo, en tanto que  $v_x$  nos indica cómo se mueve (figura 2.5).

La velocidad instantánea, igual que la velocidad media, es una cantidad vectorial. La ecuación (2.3) define su componente  $x$ . En el movimiento rectilíneo, las demás componentes de la velocidad instantánea son cero y, en este caso, llamaremos a  $v_x$  simplemente velocidad instantánea. (En el capítulo 3 veremos el caso general en el que la velocidad instantánea puede tener componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  distintas de cero.) Al usar el término “velocidad”, siempre nos referiremos a la velocidad instantánea, no a la media.

Los términos “velocidad” y “rapidez” se usan indistintamente en el lenguaje cotidiano; no obstante, en física tienen diferente significado. **Rapidez** denota distancia recorrida dividida entre tiempo, con un régimen medio o instantáneo. Usaremos el símbolo  $v$  (sin subíndice) para denotar la rapidez instantánea, que mide qué tan rápido se mueve una partícula; la *velocidad* instantánea mide con qué rapidez y en qué dirección se mueve. Por ejemplo, una partícula con velocidad instantánea  $v_x = 25$  m/s y otra con  $v_x = -25$  m/s se mueven en direcciones opuestas con la misma rapidez instantánea de 25 m/s. La rapidez instantánea es la magnitud de la velocidad instantánea, así que no puede ser negativa.

**CAUIDADO Rapidez media y velocidad media** La rapidez media, sin embargo, no es la magnitud de la velocidad media. Cuando Alexander Popov estableció un récord mundial en 1994 nadando 100.0 m en 46.74 s, su rapidez media fue de  $(100.0 \text{ m}) / (46.74 \text{ s}) = 2.139$  m/s. No obstante, como nadó dos veces la longitud de una alberca de 50 m, terminó en el punto de donde partió, con un desplazamiento total de cero ¡y una *velocidad* media de cero! Tanto la rapidez media como la rapidez instantánea son escalares, no vectores, porque no contienen información de dirección. ■

### Ejemplo 2.1 Velocidades media e instantánea

Un guepardo acecha 20 m al este del escondite de un observador (figura 2.6a). En el tiempo  $t = 0$ , el guepardo ataca a un antílope y empieza a correr en línea recta. Durante los primeros 2.0 s del ataque, la coordenada  $x$  del guepardo varía con el tiempo según la ecuación  $x = 20 \text{ m} + (5.0 \text{ m/s}^2)t^2$ . *a)* Obtenga el desplazamiento del guepardo entre  $t_1 = 1.0$  s y  $t_2 = 2.0$  s. *b)* Calcule la velocidad media en dicho

intervalo. *c)* Calcule la velocidad instantánea en  $t_1 = 1.0$  s tomando  $\Delta t = 0.1$  s, luego  $\Delta t = 0.01$  s, luego  $\Delta t = 0.001$  s. *d)* Deduzca una expresión general para la velocidad instantánea en función del tiempo, y con ella calcule  $v_x$  en  $t = 1.0$  s y  $t = 2.0$  s.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Este problema requiere usar las definiciones de desplazamiento, velocidad media y velocidad instantánea. El uso de las dos primeras implica álgebra; la última requiere cálculo para derivar.

**PLANTEAR:** La figura 2.6b muestra el movimiento del guepardo. Para analizar este problema, usamos la ecuación (2.1) del desplazamiento, la ecuación (2.2) de la velocidad media y la ecuación (2.3) de la velocidad instantánea.

**EJECUTAR:** a) En  $t_1 = 1.0$  s, la posición  $x_1$  del guepardo es

$$x_1 = 20 \text{ m} + (5.0 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})^2 = 25 \text{ m}$$

En  $t_2 = 2.0$  s, su posición  $x_2$  es

$$x_2 = 20 \text{ m} + (5.0 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s})^2 = 40 \text{ m}$$

El desplazamiento en este intervalo es

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 40 \text{ m} - 25 \text{ m} = 15 \text{ m}$$

b) La velocidad media durante este intervalo es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{40 \text{ m} - 25 \text{ m}}{2.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = \frac{15 \text{ m}}{1.0 \text{ s}} = 15 \text{ m/s}$$

c) Con  $\Delta t = 0.1$  s, el intervalo es de  $t_1 = 1.0$  s a  $t_2 = 1.1$  s. En  $t_2$ , la posición es

$$x_2 = 20 \text{ m} + (5.0 \text{ m/s}^2)(1.1 \text{ s})^2 = 26.05 \text{ m}$$

La velocidad media durante estos intervalos es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{26.05 \text{ m} - 25 \text{ m}}{1.1 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = 10.5 \text{ m/s}$$

Siga este método para calcular las velocidades medias de los intervalos de 0.01 s y 0.001 s. Los resultados son 10.05 m/s y 10.005 m/s. Al disminuir  $\Delta t$ , la velocidad media se acerca a 10.0 m/s, por lo que concluimos que la velocidad instantánea en  $t = 1.0$  s es de 10.0 m/s.

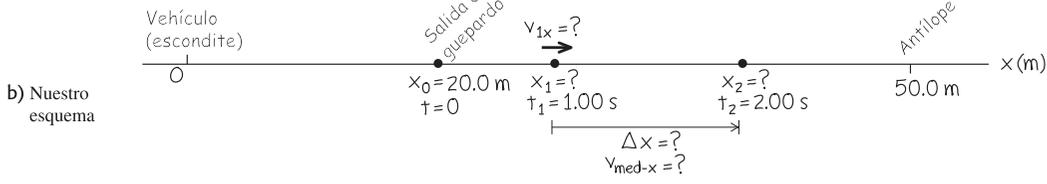
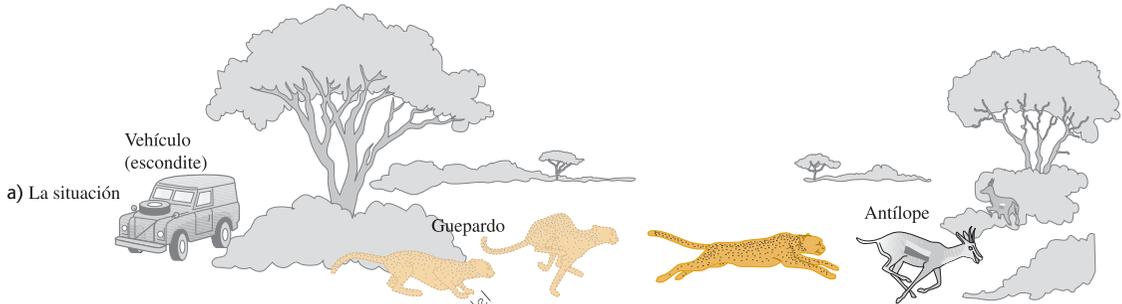
d) Al calcular la velocidad instantánea en función del tiempo, derive la expresión de  $x$  con respecto a  $t$ . La derivada de una constante es cero, y para cualquier  $n$  la derivada de  $t^n$  es  $nt^{n-1}$ , así que la derivada de  $t^2$  es  $2t$ . Por lo tanto,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (5.0 \text{ m/s}^2)(2t) = (10 \text{ m/s}^2)t$$

En  $t = 1.0$  s,  $v_x = 10$  m/s, como vimos en el inciso c). En  $t = 2.0$  s,  $v_x = 20$  m/s.

**EVALUAR:** Nuestros resultados muestran que el guepardo aumentó su rapidez de  $t = 0$  (cuando estaba en reposo) a  $t = 1.0$  s ( $v_x = 10$  m/s) a  $t = 2.0$  s ( $v_x = 20$  m/s), lo cual es razonable: el guepardo recorrió sólo 5 m durante el intervalo  $t = 0$  a  $t = 1.0$  s; sin embargo, recorrió 15 m en el intervalo  $t = 1.0$  s a  $t = 2.0$  s.

**2.6** Un guepardo agazapado en un arbusto ataca a un antílope. Los animales no están a la misma escala que el eje.



- c) Nuestro razonamiento
- ① Trazamos un eje y lo dirigimos en la dirección en que corre el guepardo, de manera que nuestros valores sean positivos.
  - ② Elegimos colocar el origen en el vehículo (escondite).
  - ③ Marcamos las posiciones iniciales del guepardo y del antílope. (No usaremos la posición del antílope, porque aún no la sabemos.)
  - ④ Nos interesa el movimiento del guepardo entre 1 s y 2 s después de que empieza a correr. Colocamos marcas que representen tales puntos.
  - ⑤ Anotamos las literales para las cantidades conocidas y desconocidas. Usamos los subíndices 1 y 2 para las marcas en  $t = 1$  s y  $t = 2$  s.



1.1 Análisis del movimiento usando diagramas

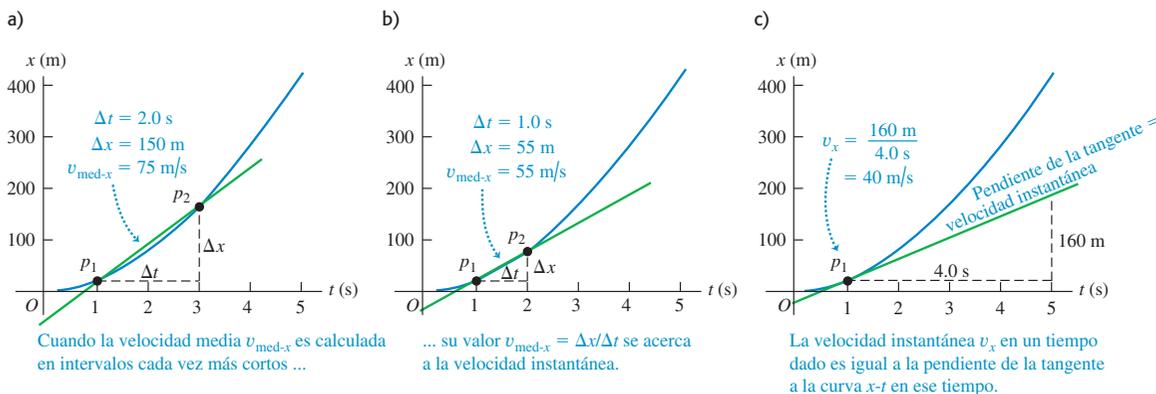
### Obtención de la velocidad en una gráfica $x-t$

La velocidad de una partícula también puede obtenerse de la gráfica de la posición de la partícula en función del tiempo. Suponga que queremos conocer la velocidad del auto de la figura 2.1 en  $P_1$ . En la figura 2.1, conforme  $P_2$  se acerca a  $P_1$ , el punto  $p_2$  en la gráfica  $x-t$  de las figuras 2.7a y 2.7b se acerca al punto  $p_1$  y la velocidad media se calcula en intervalos  $\Delta t$  cada vez más cortos. En el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , ilustrado en la figura 2.7c, la pendiente de la línea  $p_1p_2$  es igual a la pendiente de la tangente a la curva en el punto  $p_1$ . Así, en una gráfica de posición en función del tiempo para movimiento rectilíneo, la velocidad instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

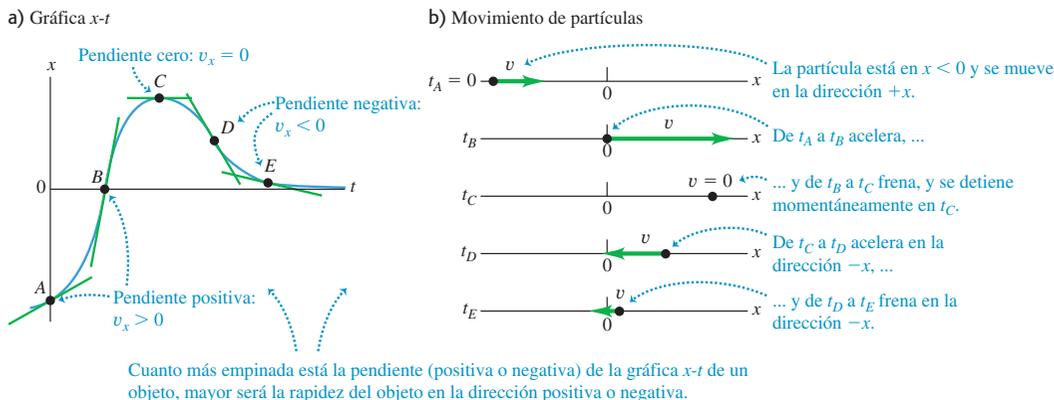
Si la tangente a la curva  $x-t$  sube hacia la derecha, como en la figura 2.7c, entonces su pendiente es positiva, la velocidad es positiva y el movimiento es en la dirección  $+x$ . Si la tangente baja hacia la derecha, la pendiente de la gráfica  $x-t$  y la velocidad son negativas, y el movimiento es en la dirección  $-x$ . Cuando la tangente es horizontal, la pendiente y la velocidad son cero. La figura 2.8 ilustra las tres posibilidades.

La figura 2.8 muestra el movimiento de una partícula en dos formas: como a) una gráfica  $x-t$  y como b) un **diagrama de movimiento** que muestra la posición de la partícula en diversos instantes, como cuadros de un filme o video del movimiento de la

**2.7** Uso de una gráfica  $x-t$  al ir de a), b) velocidad media a c) velocidad instantánea  $v_x$ . En c) obtenemos la pendiente de la tangente a la curva  $x-t$  dividiendo cualquier intervalo vertical (con unidades de distancia) a lo largo de la tangente entre el intervalo horizontal correspondiente (con unidades de tiempo).



**2.8** a) Gráfica  $x-t$  del movimiento de una partícula dada. La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la velocidad en ese punto. b) Diagrama de movimiento que muestra la posición y velocidad de la partícula en los cinco instantes rotulados en el diagrama  $x-t$ . MP

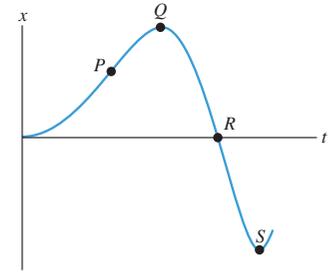


partícula, junto con flechas que representan la velocidad de la partícula en cada instante. En este capítulo, usaremos tanto las gráficas  $x-t$  como los diagramas de movimiento para ayudarle a entender el movimiento. Le recomendamos *dibujar* una gráfica  $x-t$  y un diagrama de movimiento como parte de la resolución de cualquier problema que implique movimiento.

**MP** **Evalúe su comprensión de la sección 2.2** La figura 2.9 es una gráfica  $x-t$  del movimiento de una partícula. *a)* Ordene los valores de la velocidad  $v_x$  de la partícula en los puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  del más positivo al más negativo. *b)* ¿En qué puntos  $v_x$  es positiva? *c)* ¿En cuáles puntos  $v_x$  es negativa? *d)* ¿En cuáles es cero? *e)* Ordene los valores de la *rapidez* de la partícula en los puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  del más rápido al más lento.



**2.9** Una gráfica  $x-t$  para una partícula.



## 2.3 Aceleración media e instantánea

Así como la velocidad describe la tasa de cambio de posición con el tiempo, la *aceleración* describe la tasa de cambio de velocidad con el tiempo. Al igual que la velocidad, la aceleración es una cantidad vectorial. En el movimiento rectilíneo, su única componente distinta de cero está sobre el eje en que ocurre el movimiento. Como veremos, en el movimiento rectilíneo la aceleración puede referirse tanto a aumentar la rapidez como a disminuirla.

### Aceleración media

Consideremos otra vez el movimiento de una partícula en el eje  $x$ . Suponga que, en el tiempo  $t_1$ , la partícula está en el punto  $P_1$  y tiene una componente  $x$  de velocidad (instantánea)  $v_{1x}$  y en un instante posterior  $t_2$  está en  $P_2$  y tiene una componente  $x$  de velocidad  $v_{2x}$ . Así, la componente  $x$  de la velocidad cambia en  $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$  en el intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Definimos la **aceleración media** de la partícula al moverse de  $P_1$  a  $P_2$  como una cantidad vectorial cuya componente  $x$  es  $a_{\text{med-}x}$  igual a  $\Delta v_x$ , el cambio en la componente  $x$  de la velocidad, dividido entre el intervalo de tiempo  $\Delta t$ :

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (\text{aceleración media, movimiento rectilíneo}) \quad (2.4)$$

En el movimiento rectilíneo a lo largo del eje  $x$ , por lo general llamaremos  $v_{\text{med-}x}$  a la aceleración media. (Veremos otras componentes del vector de aceleración media en el capítulo 3.)

Si expresamos la velocidad en metros por segundo y el tiempo en segundos, la aceleración media está en metros por segundo por segundo, o bien (m/s)/s. Esto suele escribirse como  $\text{m/s}^2$  y se lee “metros por segundo al cuadrado”.

**CUIDADO** **Aceleración contra velocidad** ¡No confunda aceleración con velocidad! La velocidad describe el cambio de la posición de un objeto con el tiempo; nos indica con qué rapidez y en qué dirección se mueve el objeto. La aceleración describe cómo cambia la velocidad con el tiempo; es decir, nos dice cómo cambian la rapidez y la dirección del movimiento. Podría ser útil recordar la frase “aceleración es a velocidad lo que velocidad es a posición”. También ayudaría imaginarse a usted mismo yendo en un automóvil con el cuerpo en movimiento. Si el auto acelera hacia delante y aumenta su rapidez, usted se sentiría empujado hacia atrás hacia su asiento; si acelera hacia atrás y disminuye su rapidez, se sentiría empujado hacia delante. Si la velocidad es constante y no hay aceleración, no sentiría sensación alguna. (Analizaremos la causa de estas sensaciones en el capítulo 4.) ■

### Ejemplo 2.2 Aceleración media

Una astronauta sale de una nave espacial en órbita para probar una unidad personal de maniobras. Mientras se mueve en línea recta, su compañera a bordo mide su velocidad cada 2.0 s a partir del instante  $t = 1.0$  s:

$t$	$v_x$	$t$	$v_x$
1.0 s	0.8 m/s	9.0 s	-0.4 m/s
3.0 s	1.2 m/s	11.0 s	-1.0 m/s
5.0 s	1.6 m/s	13.0 s	-1.6 m/s
7.0 s	1.2 m/s	15.0 s	-0.8 m/s

Calcule la aceleración media y diga si la rapidez de la astronauta aumenta o disminuye para cada uno de estos intervalos: a)  $t_1 = 1.0$  s a  $t_2 = 3.0$  s; b)  $t_1 = 5.0$  s a  $t_2 = 7.0$  s; c)  $t_1 = 9.0$  s a  $t_2 = 11.0$  s; d)  $t_1 = 13.0$  s a  $t_2 = 15.0$  s.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Necesitaremos la definición de aceleración media  $a_{med-x}$ . Para calcular los cambios en la rapidez, usaremos la idea de que la rapidez  $v$  es la magnitud de la velocidad instantánea  $v_x$ .

**PLANTEAR:** La figura 2.10 muestra nuestras gráficas. Usamos la ecuación (2.4) para determinar el valor de  $a_{med-x}$  a partir del cambio de *velocidad* en cada intervalo de tiempo.

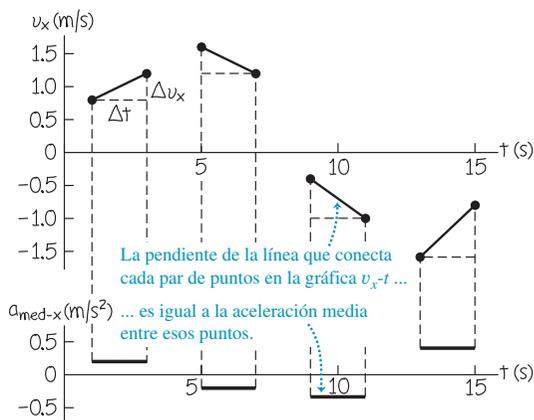
**EJECUTAR:** En la parte superior de la figura 2.10, graficamos la velocidad  $x$  en función del tiempo. En esta gráfica  $v_x-t$ , la pendiente de la línea que conecta los puntos inicial y final de cada intervalo es la aceleración media  $a_{med-x} = \Delta v_x / \Delta t$  para ese intervalo. En la parte inferior de la figura 2.10, graficamos los valores de  $a_{med-x}$ . Obtenemos:

a)  $a_{med-x} = (1.2 \text{ m/s} - 0.8 \text{ m/s}) / (3.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s}) = 0.2 \text{ m/s}^2$ . La rapidez (magnitud de la velocidad instantánea) aumenta de 0.8 m/s a 1.2 m/s.

b)  $a_{med-x} = (1.2 \text{ m/s} - 1.6 \text{ m/s}) / (7.0 \text{ s} - 5.0 \text{ s}) = -0.2 \text{ m/s}^2$ . La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 1.2 m/s.

c)  $a_{med-x} = [-1.0 \text{ m/s} - (-0.4 \text{ m/s})] / (11.0 \text{ s} - 9.0 \text{ s}) =$

**2.10** Nuestra gráfica de velocidad contra tiempo (arriba) y aceleración media contra tiempo (abajo) para la astronauta.



$-0.3 \text{ m/s}^2$ . La rapidez aumenta de 0.4 m/s a 1.0 m/s.

d)  $a_{med-x} = [-0.8 \text{ m/s} - (-1.6 \text{ m/s})] / (15.0 \text{ s} - 13.0 \text{ s}) = 0.4 \text{ m/s}^2$ . La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 0.8 m/s.

**EVALUAR:** Nuestro resultado indica que cuando la aceleración tiene la *misma* dirección (el mismo signo algebraico) que la velocidad inicial, como en los intervalos a) y c), la astronauta se mueve más rápidamente; cuando tiene la dirección *opuesta* (el signo opuesto) como en los intervalos b) y d), se frena. De manera que la aceleración positiva significa ir más rápido si la velocidad  $x$  es positiva [intervalo a)], pero frenar si la velocidad  $x$  es negativa [intervalo d)]. Asimismo, aceleración negativa implica ir más rápido si la velocidad  $x$  es negativa [intervalo c)], pero frenar si la velocidad  $x$  es positiva [intervalo b)].

### Aceleración instantánea

Ya podemos definir la **aceleración instantánea** con el mismo procedimiento que seguimos para la velocidad instantánea. Como ejemplo, suponga que un piloto de carreras acaba de entrar en una recta como se muestra en la figura 2.11. Para definir la aceleración instantánea en  $P_1$ , tomamos el segundo punto  $P_2$  en la figura 2.11 cada vez más cerca de  $P_1$ , de modo que la aceleración media se calcule en intervalos cada vez más cortos. *La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero.* En el lenguaje del cálculo, la *aceleración instantánea es la tasa instantánea de cambio de la velocidad con el tiempo.* Así,

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (\text{aceleración instantánea, movimiento rectilíneo}) \quad (2.5)$$

**2.11** Vehículo de Grand Prix en dos puntos de la recta.



Observe que la ecuación (2.5) es realmente la definición de la componente  $x$  del vector de aceleración o la **aceleración instantánea**; en el movimiento rectilíneo, las demás componentes de este vector son cero. A partir de aquí, al hablar de “aceleración” nos referiremos siempre a la aceleración instantánea, no a la aceleración media.

### Ejemplo 2.3 Aceleraciones media e instantánea

Suponga que la velocidad  $v_x$  del auto en la figura 2.11 en el tiempo  $t$  está dada por

$$v_x = 60 \text{ m/s} + (0.50 \text{ m/s}^3)t^2$$

a) Calcule el cambio de velocidad del auto en el intervalo entre  $t_1 = 1.0 \text{ s}$  y  $t_2 = 3.0 \text{ s}$ . b) Calcule la aceleración media en este intervalo. c) Obtenga la aceleración instantánea en  $t_1 = 1.0 \text{ s}$  tomando  $\Delta t$  primero como  $0.1 \text{ s}$ , después como  $0.01 \text{ s}$  y luego como  $0.001 \text{ s}$ . d) Deduzca una expresión para la aceleración instantánea en cualquier instante y úsela para obtener la aceleración en  $t = 1.0 \text{ s}$  y  $t = 3.0 \text{ s}$ .

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Este ejemplo es similar al ejemplo 2.1 de la sección 2.2. (Recomendamos repasar ahora ese ejemplo.) Ahí, calculamos la velocidad media en intervalos cada vez más cortos considerando el cambio en el desplazamiento, y obtuvimos la velocidad instantánea diferenciando la posición en función del tiempo. En este ejemplo, determinaremos la aceleración *media* considerando cambios de velocidad en un intervalo de tiempo. Asimismo, obtendremos la aceleración *instantánea* diferenciando la velocidad en función del tiempo.

**PLANTEAR:** Usaremos la ecuación (2.4) de la aceleración media y la ecuación (2.5) de la aceleración instantánea.

**EJECUTAR:** a) Primero obtenemos la velocidad en cada instante sustituyendo cada valor de  $t$  en la ecuación. En el instante  $t_1 = 1.0 \text{ s}$ ,

$$v_{1x} = 60 \text{ m/s} + (0.50 \text{ m/s}^3)(1.0 \text{ s})^2 = 60.5 \text{ m/s}$$

En el instante  $t_2 = 3.0 \text{ s}$ ,

$$v_{2x} = 60 \text{ m/s} + (0.50 \text{ m/s}^3)(3.0 \text{ s})^2 = 64.5 \text{ m/s}$$

El cambio en la velocidad  $\Delta v_x$  es

$$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = 64.5 \text{ m/s} - 60.5 \text{ m/s} = 4.0 \text{ m/s}$$

El intervalo de tiempo es  $\Delta t = 3.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s} = 2.0 \text{ s}$ .

b) La aceleración media durante este intervalo es

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{4.0 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s}} = 2.0 \text{ m/s}^2$$

Durante el intervalo de  $t_1 = 1.0 \text{ s}$  a  $t_2 = 3.0 \text{ s}$ , la velocidad y la aceleración media tienen el mismo signo (positivo en este caso) y el auto acelera.

c) Cuando  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ ,  $t_2 = 1.1 \text{ s}$  y obtenemos

$$v_{2x} = 60 \text{ m/s} + (0.50 \text{ m/s}^3)(1.1 \text{ s})^2 = 60.605 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_x = 0.105 \text{ m/s}$$

$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{0.105 \text{ m/s}}{0.1 \text{ s}} = 1.05 \text{ m/s}^2$$

Repita este modelo con  $\Delta t = 0.01 \text{ s}$  y  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ ; los resultados son  $a_{\text{med-}x} = 1.005 \text{ m/s}^2$  y  $a_{\text{med-}x} = 1.0005 \text{ m/s}^2$ , respectivamente. Al reducirse  $\Delta t$ , la aceleración media se acerca a  $1.0 \text{ m/s}^2$ , por lo que concluimos que la aceleración instantánea en  $t = 1.0 \text{ s}$  es  $1.0 \text{ m/s}^2$ .

d) La aceleración instantánea es  $a_x = dv_x/dt$ . La derivada de una constante es cero y la derivada de  $t^2$  es  $2t$ . Con esto, obtenemos

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}[60 \text{ m/s} + (0.50 \text{ m/s}^3)t^2] \\ &= (0.50 \text{ m/s}^3)(2t) = (1.0 \text{ m/s}^3)t \end{aligned}$$

Cuando  $t = 1.0 \text{ s}$ ,

$$a_x = (1.0 \text{ m/s}^3)(1.0 \text{ s}) = 1.0 \text{ m/s}^2$$

Cuando  $t = 3.0 \text{ s}$ ,

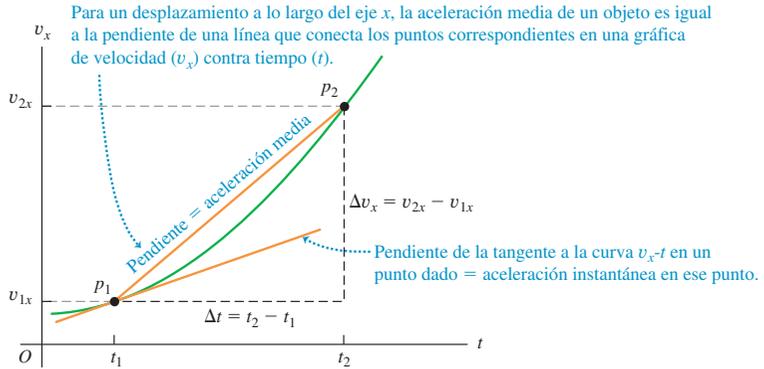
$$a_x = (1.0 \text{ m/s}^3)(3.0 \text{ s}) = 3.0 \text{ m/s}^2$$

**EVALUAR:** Observe que ninguno de los valores que obtuvimos en el inciso d) es igual a la aceleración media obtenida en b). La aceleración instantánea del auto varía con el tiempo. La tasa de cambio de la aceleración con el tiempo se suele denominar el “tirón”.

## Obtención de la aceleración en una gráfica $v_x-t$ o una gráfica $x-t$

En la sección 2.2 interpretamos las velocidades media e instantánea en términos de la pendiente de una gráfica de posición contra tiempo. Igualmente, podemos entender mejor las aceleraciones media e instantánea graficando la velocidad instantánea  $v_x$  en el eje vertical y el tiempo  $t$  en el eje horizontal, es decir, usando una **gráfica  $v_x-t$**  (figura 2.12). Los puntos rotulados  $p_1$  y  $p_2$  corresponden a los puntos  $P_1$  y  $P_2$  de la figura 2.11. La aceleración media  $a_{\text{med-}x} = \Delta v_x/\Delta t$  durante este intervalo es la pendiente de la línea  $p_1p_2$ . Al acercarse  $P_2$  a  $P_1$  en la figura 2.11,  $p_2$  se acerca a  $p_1$  en la gráfica  $v_x-t$  de la figura 2.12, y la pendiente de la línea  $p_1p_2$  se acerca a la pendiente de la tangente a la curva en el punto  $p_1$ . Así, *en una gráfica de velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente de la curva en ese punto*. En la figura 2.12, las tangentes trazadas en

**2.12** Gráfica  $v_x-t$  del movimiento de la figura 2.11.



diferentes puntos en la curva tienen pendientes diferentes, de manera que la aceleración instantánea varía con el tiempo.

**CAUIDADO** Los signos de aceleración y velocidad En sí mismo, el signo algebraico **?** de la aceleración *no* nos indica si el cuerpo está acelerando o frenando; hay que comparar los signos de la velocidad y la aceleración. Si  $v_x$  y  $a_x$  tienen el *mismo* signo, el cuerpo está acelerando; si ambas son positivas, el cuerpo se mueve en la dirección positiva con rapidez creciente. Si ambas son negativas, el cuerpo se mueve en la dirección negativa con velocidad cada vez más negativa, y la rapidez aumenta nuevamente. Si  $v_x$  y  $a_x$  tienen signos *opuestos*, el cuerpo está frenando. Si  $v_x$  es positiva y  $a_x$  negativa, el cuerpo se mueve en dirección positiva con rapidez decreciente; si  $v_x$  es negativa y  $a_x$  positiva, el cuerpo se mueve en dirección negativa con una velocidad cada vez menos negativa, y nuevamente está frenando. La figura 2.13 ilustra algunas de tales posibilidades. ■

Frecuentemente llamamos “desaceleración” a una reducción de rapidez. Dado que esto puede implicar  $a_x$  positiva o negativa, dependiendo del signo de  $v_x$ , evitaremos este término.

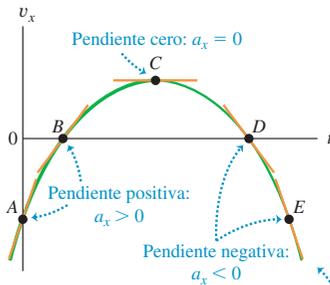
También podemos conocer la aceleración de un cuerpo a partir de una gráfica de su *posición* contra tiempo. Dado que  $a_x = dv_x/dt$  y  $v_x = dx/dt$ , escribimos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.6)$$

**2.13** a) Gráfica  $v_x-t$  del movimiento de una partícula diferente de la que se muestra en la figura 2.8. La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la aceleración en ese punto. b) Diagrama de movimiento que indica la posición, velocidad y aceleración de la partícula en los instantes rotulados en la gráfica  $v_x-t$ . Las posiciones son congruentes con la gráfica  $v_x-t$ ; por ejemplo, de  $t_A$  a  $t_B$  la velocidad es negativa, así que en  $t_B$  la partícula está en un valor más negativo de  $x$  que en  $t_A$ .



a) La gráfica  $v_x-t$  para un objeto que se mueve en el eje  $x$



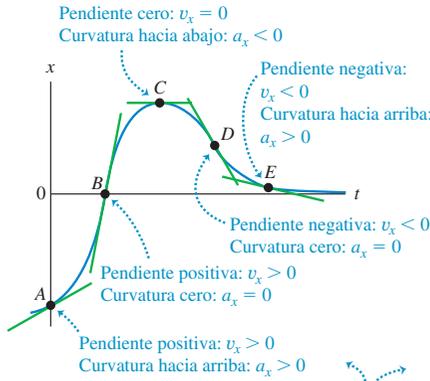
Cuanto más empinada esté la pendiente (positiva o negativa) de la gráfica  $v_x-t$  de un objeto, mayor será la aceleración del objeto en la dirección positiva o negativa.

b) Posición, velocidad y aceleración del objeto en el eje  $x$

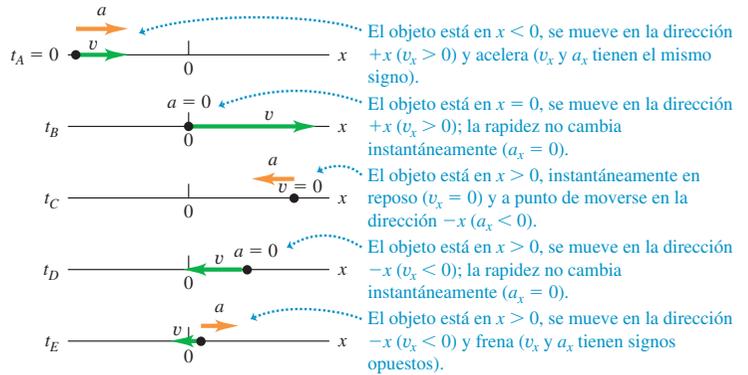


**2.14** a) La misma gráfica  $x-t$  de la figura 2.8a. La velocidad es igual a la *pendiente* de la gráfica, y la aceleración está dada por su *concavidad* o *curvatura*. b) Diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de la partícula en cada uno de los instantes rotulados en la gráfica  $x-t$ .

a) Gráfica  $x-t$



b) Movimiento del objeto



Cuanto mayor sea la curvatura (hacia arriba o hacia abajo) de la gráfica  $x-t$  de un objeto, mayor será la aceleración del objeto en la dirección  $x$  positiva o negativa.

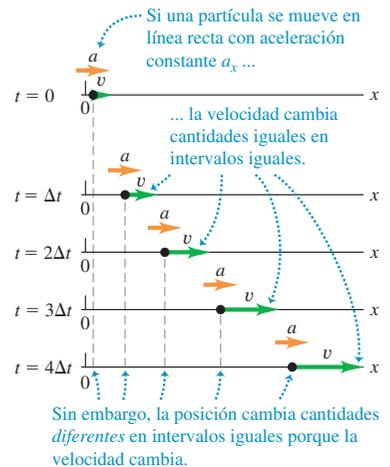
Es decir,  $a_x$  es la segunda derivada de  $x$  con respecto a  $t$ . La segunda derivada de cualquier función se relaciona directamente con la *concavidad* o *curvatura* de la gráfica de la función. En un punto donde la curva  $x-t$  sea cóncava hacia arriba (curvada hacia arriba), la aceleración es positiva y  $v_x$  aumenta; donde la curva  $x-t$  sea cóncava hacia abajo, la aceleración es negativa y  $v_x$  disminuye. Donde la gráfica  $x-t$  no tenga curvatura, como en un punto de inflexión, la aceleración es cero y la velocidad es constante. Estas tres posibilidades se ilustran en la figura 2.14.

Examinar la curvatura de una gráfica  $x-t$  es una manera sencilla de decidir qué *signo* tiene la aceleración. Esta técnica es menos útil para determinar valores numéricos de la aceleración, ya que es difícil medir con exactitud la curvatura de una gráfica.

**Evalúe su comprensión de la sección 2.3** Observe otra vez la gráfica  $x-t$  de la figura 2.9 al final de la sección 2.2. a) ¿En cuál de los puntos  $P, Q, R$  y  $S$  la aceleración  $a_x$  es positiva? b) ¿En cuáles es negativa? c) ¿En cuáles parece ser cero? d) En cada punto decida si la rapidez aumenta, disminuye o se mantiene constante.



**2.15** Diagrama de movimiento para una partícula que se mueve en línea recta en la dirección  $+x$  con aceleración positiva constante  $a_x$ . Se muestran la posición, velocidad y aceleración en cinco instantes equiespaciados.

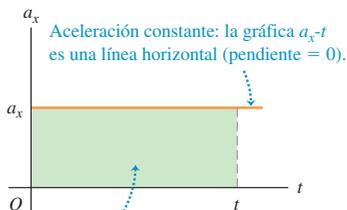


## 2.4 Movimiento con aceleración constante

El movimiento acelerado más sencillo es el rectilíneo con aceleración *constante*. En este caso, la velocidad cambia al mismo ritmo todo el tiempo. Se trata de una situación muy especial, aun cuando ocurre a menudo en la naturaleza; un cuerpo que cae tiene aceleración constante si los efectos del aire no son importantes. Lo mismo sucede con un cuerpo que se desliza por una pendiente o sobre una superficie horizontal áspera. El movimiento rectilíneo con aceleración casi constante se da también en la tecnología, como cuando un jet de combate es lanzado con catapulta desde la cubierta de un portaviones.

La figura 2.15 es un diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de una partícula que se mueve con aceleración constante. Las figuras 2.16 y 2.17 representan este movimiento con gráficas. Puesto que la aceleración  $a_x$  es constante, la **gráfica  $a_x-t$**  (aceleración contra tiempo) de la figura 2.16 es una línea horizontal. La gráfica de velocidad contra tiempo,  $v_x-t$ , tiene *pendiente* constante porque la aceleración es constante; por lo tanto, es una línea recta (figura 2.17).

**2.16** Gráfica aceleración-tiempo ( $a_x-t$ ) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante  $a_x$ .



El área bajo la gráfica  $a_x-t$  es  $v_x - v_{0x}$  = cambio de velocidad del tiempo 0 al tiempo  $t$ .

Cuando la aceleración  $a_x$  es constante, la aceleración media  $a_{med-x}$  para cualquier intervalo es  $a_x$ . Esto vuelve sencillo derivar las ecuaciones para la posición  $x$  y la velocidad  $v_x$  como funciones del tiempo. Para encontrar una expresión para  $v_x$  primero sustituimos  $a_{med-x}$  por  $a_x$  en la ecuación (2.4):

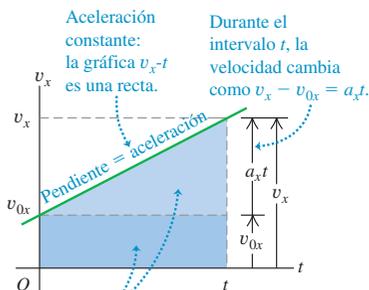
$$a_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \tag{2.7}$$

Sean ahora  $t_1 = 0$  y  $t_2$  cualquier instante posterior  $t$ . Simbolizamos con  $v_{0x}$  la componente  $x$  de la velocidad en el instante inicial  $t = 0$ ; la componente  $x$  de la velocidad en el instante posterior  $t$  es  $v_x$ . Entonces, la ecuación (2.7) se convierte en

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \quad \text{o}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (\text{sólo con aceleración constante}) \tag{2.8}$$

**2.17** Gráfica velocidad-tiempo ( $v_x-t$ ) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante  $a_x$ . La velocidad inicial  $v_{0x}$  también es positiva en este caso.



El área total bajo la gráfica  $v_x-t$  es  $x - x_0$  = cambio en la coordenada  $x$  del tiempo 0 al tiempo  $t$ .

Podemos interpretar la ecuación como sigue. La aceleración  $a_x$  es la tasa constante de cambio de velocidad, es decir, el cambio en la velocidad por unidad de tiempo. El término  $a_x t$  es el producto del cambio en la velocidad por unidad de tiempo,  $a_x$ , y el intervalo de tiempo  $t$ ; por lo tanto, es el cambio *total* de la velocidad desde el instante inicial  $t = 0$  hasta un instante posterior  $t$ . La velocidad  $v_x$  en cualquier instante  $t$  es entonces la velocidad inicial  $v_{0x}$  (en  $t = 0$ ) más el cambio en la velocidad  $a_x t$  (véase la figura 2.17).

Otra interpretación de la ecuación (2.8) es que el cambio de velocidad  $v_x - v_{0x}$  de la partícula entre  $t = 0$  y un tiempo posterior  $t$  es igual al *área* bajo la gráfica  $a_x-t$  entre esos dos instantes. En la figura 2.16, el área bajo la gráfica  $a_x-t$  es el rectángulo verde con lado vertical  $a_x$  y lado horizontal  $t$ . El área del rectángulo es  $a_x t$ , que por la ecuación (2.8) es igual al cambio en velocidad  $v_x - v_{0x}$ . En la sección 2.6 veremos que aun cuando la aceleración no sea constante, el cambio de velocidad durante un intervalo es igual al área bajo la curva  $a_x-t$ , aunque en tal caso la ecuación (2.8) no es válida.

Ahora deduiremos una ecuación para la posición  $x$  en función del tiempo cuando la aceleración es constante. Para ello, usamos dos expresiones distintas para la velocidad media  $a_{med-x}$  en el intervalo de  $t = 0$  a cualquier  $t$  posterior. La primera proviene de la definición de  $v_{med-x}$ , ecuación (2.2), que se cumple sea constante o no la aceleración. La *posición inicial* es la posición en  $t = 0$ , denotada con  $x_0$ . La posición en el  $t$  posterior es simplemente  $x$ . Así, para el intervalo  $\Delta t = t - 0$  y el desplazamiento  $\Delta x = x - x_0$ , la ecuación (2.2) da

$$v_{med-x} = \frac{x - x_0}{t} \tag{2.9}$$

También podemos obtener otra expresión para  $v_{med-x}$  que sea válida sólo si la aceleración es constante, de modo que la gráfica  $v_x-t$  sea una línea recta (como en la figura 2.17) y la velocidad cambie a ritmo constante. En este caso, la velocidad media en cualquier intervalo es sólo el promedio de las velocidades al principio y al final del intervalo. Para el intervalo de 0 a  $t$ ,

$$v_{med-x} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \quad (\text{sólo con aceleración constante}) \tag{2.10}$$

(Esto *no* se cumple si la aceleración varía y la gráfica  $v_x-t$  es una curva, como en la figura 2.13.) También sabemos que, con aceleración constante, la velocidad  $v_x$  en un instante  $t$  está dada por la ecuación (2.8). Sustituyendo esa expresión por  $v_x$  en la ecuación (2.10),

$$\begin{aligned} v_{med-x} &= \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + a_x t) \\ &= v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t \quad (\text{sólo con aceleración constante}) \end{aligned} \tag{2.11}$$



- 1.1 Análisis del movimiento con diagramas
- 1.2 Análisis del movimiento con gráficas
- 1.3 Predicción de un movimiento con base en gráficas
- 1.4 Predicción de un movimiento con base en ecuaciones
- 1.5 Estrategias para resolver problemas de cinemática
- 1.6 Esquiador en competencia de descenso

Por último, igualamos las ecuaciones (2.9) y (2.11) y simplificamos el resultado:

$$v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t = \frac{x - x_0}{t} \quad \text{o}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (\text{sólo con aceleración constante}) \quad (2.12)$$

Esta ecuación (2.12) indica que si, en el instante  $t = 0$ , una partícula está en  $x_0$  y tiene velocidad  $v_{0x}$ , su nueva posición  $x$  en un  $t$  posterior es la suma de tres términos: su posición inicial  $x_0$ , más la distancia  $v_{0x}t$  que recorrería si su velocidad fuera constante, y una distancia adicional  $\frac{1}{2}a_x t^2$  causada por el cambio de velocidad.

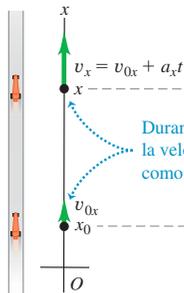
Una gráfica de la ecuación (2.12), es decir, una gráfica  $x-t$  para movimiento con aceleración constante (figura 2.18a), siempre es una *parábola*. La figura 2.18b muestra tal gráfica. La curva interseca el eje vertical ( $x$ ) en  $x_0$ , la posición en  $t = 0$ . La pendiente de la tangente en  $t = 0$  es  $v_{0x}$ , la velocidad inicial, y la pendiente de la tangente en cualquier  $t$  es la velocidad  $v_x$  en ese instante. La pendiente y la velocidad aumentan continuamente, así que la aceleración  $a_x$  es positiva. Usted puede también ver esto porque la gráfica de la figura 2.18b es cóncava hacia arriba (se curva hacia arriba). Si  $a_x$  es negativa, la gráfica  $x-t$  es una parábola cóncava hacia abajo (tiene curvatura hacia abajo).

Si hay aceleración cero, la gráfica  $x-t$  es una recta; si hay una aceleración constante, el término adicional  $\frac{1}{2}a_x t^2$  en la ecuación (2.12) para  $x$  en función de  $t$  curva la gráfica en una parábola (figura 2.19a). Podemos analizar la gráfica  $v_x-t$  de la misma forma. Si hay aceleración cero, esta gráfica es una línea horizontal (la velocidad es constante); sumar una aceleración constante da una pendiente para la gráfica  $v_x-t$  (figura 2.19b).

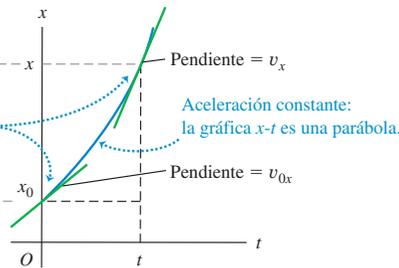


- 1.8 Los cinturones de seguridad salvan vidas
- 1.9 Frenado con derrape
- 1.10 Auto arranca y luego se detiene
- 1.11 Resolución de problemas con dos vehículos
- 1.12 Auto alcanza a camión
- 1.13 Cómo evitar un choque por atrás

a) Un auto de carreras se mueve en la dirección  $x$  con aceleración constante

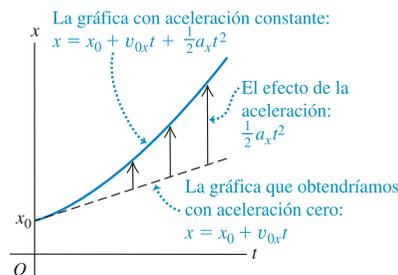


b) La gráfica  $x-t$

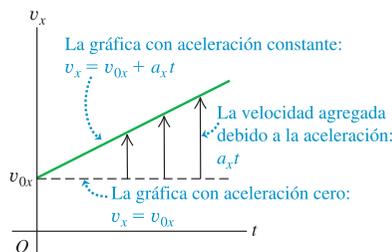


**2.18 a)** Movimiento rectilíneo con aceleración constante. **b)** Una gráfica de posición contra tiempo ( $x-t$ ) para este movimiento (el mismo movimiento que se muestra en las figuras 2.15, 2.16 y 2.17). En este caso, la posición inicial  $x_0$ , la velocidad inicial  $v_{0x}$  y la aceleración  $a_x$  son todas positivas.

a) Una gráfica  $x-t$  para un objeto que se mueve con aceleración constante positiva



b) La gráfica  $v_x-t$  para el mismo objeto



**2.19 a)** Cómo una aceleración constante influye en a) la gráfica  $x-t$  y b) la gráfica  $v_x-t$  de un cuerpo.



Así como el cambio de velocidad de la partícula es igual al área bajo la gráfica  $a_x-t$ , el desplazamiento (es decir, el cambio de posición) es igual al área bajo la gráfica  $v_x-t$ . Específicamente, el desplazamiento  $x - x_0$  de la partícula entre  $t = 0$  y cualquier instante  $t$  posterior es igual al área bajo la curva  $v_x-t$  entre esos dos instantes. En la figura 2.17 el área bajo la gráfica se dividió en un rectángulo oscuro con lado vertical  $v_{0x}$ , lado horizontal  $t$  y un triángulo rectángulo claro con lado vertical  $a_x t$  y lado horizontal  $t$ . El área del rectángulo es  $v_{0x}t$ , y la del triángulo,  $\frac{1}{2}(a_x t)(t) = \frac{1}{2}a_x t^2$ , así que el área total bajo la curva  $v_x-t$  es

$$x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

lo que concuerda con la ecuación (2.12).

El desplazamiento durante un intervalo siempre puede obtenerse del área bajo la curva  $v_x-t$ , incluso si la aceleración *no* es constante, aunque en tal caso la ecuación (2.12) no sería válida. (Demostraremos esto en la sección 2.6.)

Podemos comprobar si las ecuaciones (2.8) y (2.12) son congruentes con el supuesto de aceleración constante derivando la ecuación (2.12). Obtenemos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} + a_x t$$

que es la ecuación (2.8). Diferenciando otra vez, tenemos simplemente

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x$$

que concuerda con la definición de aceleración instantánea.

Con frecuencia es útil tener una relación entre posición, velocidad y aceleración (constante) que no incluya el tiempo. Para obtenerla, despejamos  $t$  en la ecuación (2.8), sustituimos la expresión resultante en la ecuación (2.12) y simplificamos:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{0x} \left( \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \right) + \frac{1}{2} a_x \left( \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \right)^2$$

Transferimos el término  $x_0$  al miembro izquierdo y multiplicamos la ecuación por  $2a_x$ :

$$2a_x(x - x_0) = 2v_{0x}v_x - 2v_{0x}^2 + v_x^2 - 2v_{0x}v_x + v_{0x}^2$$

Por último, al simplificar obtenemos

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (\text{sólo con aceleración constante}) \quad (2.13)$$

Podemos obtener una relación más útil igualando dos expresiones para  $v_{\text{med},x}$ , ecuaciones (2.9) y (2.10), y multiplicando por  $t$ . Al hacerlo, obtenemos

$$x - x_0 = \left( \frac{v_{0x} + v_x}{2} \right) t \quad (\text{sólo aceleración constante}) \quad (2.14)$$

Observe que la ecuación (2.14) no contiene la aceleración  $a_x$ . Esta ecuación es útil cuando  $a_x$  es constante pero se desconoce su valor.

Las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) son las *ecuaciones del movimiento con aceleración constante*. Con ellas, podemos resolver *cualquier* problema que implique movimiento rectilíneo de una partícula con aceleración constante.

En el caso específico de movimiento con aceleración constante ilustrado en la figura 2.15 y graficado en las figuras 2.16, 2.17 y 2.18, los valores de  $x_0$ ,  $v_{0x}$  y  $a_x$  son positivos. Vuelva a dibujar las figuras para los casos en que una, dos o las tres cantidades sean negativas.

Un caso especial de movimiento con aceleración constante se da cuando la aceleración es *cero*. La velocidad es entonces constante, y las ecuaciones del movimiento se convierten sencillamente en

$$v_x = v_{0x} = \text{constante}$$

$$x = x_0 + v_x t$$

**Estrategia para resolver problemas 2.1**

**Movimiento con aceleración constante**



**IDENTIFICAR** *los conceptos pertinentes:* En casi todos los problemas de movimiento rectilíneo, usted podrá usar las ecuaciones de aceleración constante, aunque a veces se topará con situaciones en que la aceleración *no es* constante. En tales casos, necesitará otra estrategia (véase la sección 2.6).

**PLANTEAR** *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Primero decida dónde está el origen de las coordenadas y cuál dirección es positiva. A menudo lo más sencillo es colocar la partícula en el origen en  $t = 0$ ; así,  $x_0 = 0$ . Siempre es útil un diagrama de movimiento que muestre las coordenadas y algunas posiciones posteriores de la partícula.
2. Recuerde que elegir la dirección positiva del eje determina automáticamente las direcciones positivas de la velocidad y la aceleración. Si  $x$  es positiva a la derecha del origen,  $v_x$  y  $a_x$  también serán positivas hacia la derecha.
3. Replantee el problema con palabras y luego traduzca su descripción a símbolos y ecuaciones. *¿Cuándo* llega la partícula a cierto punto (es decir, cuánto vale  $t$ )? *¿Dónde* está la partícula cuando tie-

ne cierta velocidad (esto es, cuánto vale  $x$  cuando  $v_x$  tiene ese valor)? El ejemplo 2.4 pregunta “¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?” En símbolos, esto indica “¿Cuánto vale  $x$  cuando  $v_x = 25$  m/s?”

4. Haga una lista de las cantidades como  $x$ ,  $x_0$ ,  $v_x$ ,  $v_{0x}$ ,  $a_x$  y  $t$ . En general, algunas serán conocidas y otras no. Escriba los valores de las conocidas y decida cuáles de las variables son las incógnitas. No pase por alto información implícita. Por ejemplo, “un automóvil está parado ante un semáforo” implica  $v_{0x} = 0$ .

**EJECUTAR** *la solución:* Elija una de las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) que contenga sólo una de las incógnitas. Despeje la incógnita usando sólo símbolos, sustituya los valores conocidos y calcule el valor de la incógnita. A veces tendrá que resolver dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas.

**EVALUAR** *la respuesta:* Examine sus resultados para ver si son lógicos. ¿Están dentro del intervalo general de valores esperado?

**Ejemplo 2.4 Cálculos de aceleración constante**

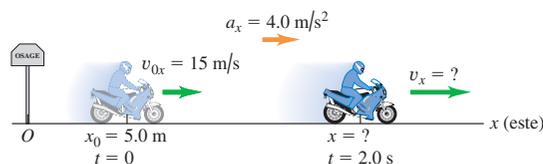
Un motociclista que viaja al este cruza una pequeña ciudad de Iowa y acelera apenas pasa el letrero que marca el límite de la ciudad (figura 2.20). Su aceleración constante es de  $4.0 \text{ m/s}^2$ . En  $t = 0$ , está a  $5.0 \text{ m}$  al este del letrero, moviéndose al este a  $15 \text{ m/s}$ . *a)* Calcule su posición y velocidad en  $t = 2.0 \text{ s}$ . *b)* ¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de  $25 \text{ m/s}$ ?

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** El enunciado del problema nos dice que la aceleración es constante, así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante.

**PLANTEAR:** Tomamos el letrero como origen de coordenadas ( $x = 0$ ) y decidimos que el eje  $+x$  apunta al este (figura 2.20, que también es un diagrama de movimiento). En  $t = 0$ , la posición inicial es  $x_0 = 5.0 \text{ m}$  y la velocidad inicial es  $v_{0x} = 15 \text{ m/s}$ . La aceleración constante es  $a_x = 4.0 \text{ m/s}^2$ . Las variables desconocidas en el inciso *a)* son los valores de la posición  $x$  y la velocidad  $v_x$  en el instante posterior  $t = 2.0 \text{ s}$ ; la incógnita en el inciso *b)* es el valor de  $x$  cuando  $v_x = 25 \text{ m/s}$ .

**2.20** Un motociclista que viaja con aceleración constante.



continúa

**EJECUTAR:** a) Podemos hallar la posición  $x$  en  $t = 2.0$  s usando la ecuación (2.12) que da la posición  $x$  en función del tiempo  $t$ :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 5.0 \text{ m} + (15 \text{ m/s})(2.0 \text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s})^2 \\ &= 43 \text{ m} \end{aligned}$$

Podemos hallar la velocidad  $v_x$  en ese instante con la ecuación (2.8), que da la velocidad  $v_x$  en función del tiempo  $t$ :

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ &= 15 \text{ m/s} + (4.0 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s}) = 23 \text{ m/s} \end{aligned}$$

b) Queremos encontrar el valor de  $x$  cuando  $v_x = 25$  m/s, pero no sabemos el momento en que el motociclista lleva tal velocidad. Por lo tanto, utilizamos la ecuación (2.13), que incluye  $x$ ,  $v_x$  y  $a_x$ , pero no incluye  $t$ :

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Despejando  $x$  y sustituyendo los valores conocidos, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \\ &= 5.0 \text{ m} + \frac{(25 \text{ m/s})^2 - (15 \text{ m/s})^2}{2(4.0 \text{ m/s}^2)} \\ &= 55 \text{ m} \end{aligned}$$

Un método alternativo aunque más largo para la misma respuesta sería usar la ecuación (2.8) para averiguar primero en qué instante  $v_x = 25$  m/s:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \quad \text{así que} \\ t &= \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{25 \text{ m/s} - 15 \text{ m/s}}{4.0 \text{ m/s}^2} = 2.5 \text{ s} \end{aligned}$$

Dado el tiempo  $t$ , podemos calcular  $x$  usando la ecuación (2.12):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 5.0 \text{ m} + (15 \text{ m/s})(2.5 \text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0 \text{ m/s}^2)(2.5 \text{ s})^2 \\ &= 55 \text{ m} \end{aligned}$$

**EVALUAR:** ¿Son lógicos los resultados? Según lo que calculamos en el inciso a), el motociclista acelera de 15 m/s (unas 34 mi/h o 54 km/h) a 23 m/s (unas 51 mi/h o 83 km/h) en 2.0 s, mientras recorre una distancia de 38 m (unos 125 ft). Ésta es una aceleración considerable, pero una motocicleta de alto rendimiento bien puede alcanzarla.

Al comparar nuestros resultados del inciso b) con los del inciso a), notamos que el motociclista alcanza una velocidad  $v_x = 25$  m/s en un instante posterior y después de recorrer una distancia mayor, que cuando el motociclista tenía  $v_x = 23$  m/s. Esto suena lógico porque el motociclista tiene una aceleración positiva y, por ende, se incrementa su velocidad.

### Ejemplo 2.5 Dos cuerpos con diferente aceleración

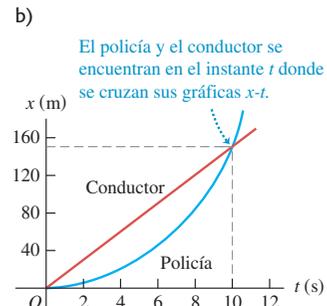
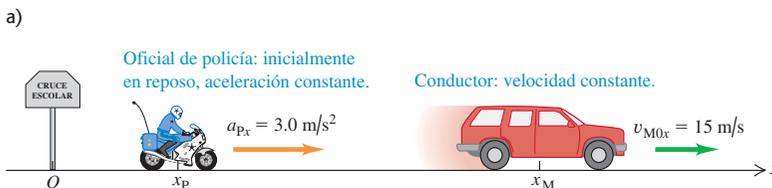
Un conductor que viaja a rapidez constante de 15 m/s (unas 34 mi/h) pasa por un cruce escolar, cuyo límite de velocidad es de 10 m/s (unas 22 mi/h). En ese preciso momento, un oficial de policía en su motocicleta, que está parado en el cruce, arranca para perseguir al infractor, con aceleración constante de 3.0 m/s<sup>2</sup> (figura 2.21a). a) ¿Cuánto tiempo pasa antes de que el oficial de policía alcance al infractor? b) ¿A qué rapidez va el policía en ese instante? c) ¿Qué distancia total habrá recorrido cada vehículo hasta ahí?

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** El oficial de policía y el conductor se mueven con aceleración constante (cero en el caso del conductor), así que podemos usar las fórmulas que ya dedujimos.

**PLANTEAR:** Tomamos como origen el cruce, así que  $x_0 = 0$  para ambos, y tomamos como dirección positiva a la derecha. Sea  $x_p$  la posición del policía y  $x_M$  la del conductor en cualquier instante. Las velocidades iniciales son  $v_{p0x} = 0$  para el policía y  $v_{M0x} = 15$  m/s para el conductor; las respectivas aceleraciones constantes son  $a_{px} = 3.0$  m/s<sup>2</sup> y  $a_{Mx} = 0$ . Nuestra incógnita en el inciso a) es el tiempo tras el cual el policía alcanza al conductor, es decir, cuando los dos vehículos están en la misma posición. En el inciso b) nos interesa la rapidez  $v$  del policía (la magnitud de su velocidad) en el tiempo obtenido en el inciso a). En el inciso c) nos interesa la posición de cualquiera de los vehículos en ese tiempo. Por lo tanto, usaremos la ecuación (2.12) (que relaciona posición y tiempo) en los

**2.21** a) Movimiento con aceleración constante que alcanza a movimiento con velocidad constante. b) Gráfica de  $x$  contra  $t$  para cada vehículo.



incisos a) y c), y la ecuación (2.8) (que relaciona velocidad y tiempo) en el inciso b).

**EJECUTAR:** a) Buscamos el valor del tiempo  $t$  cuando el conductor y el policía están en la misma posición. Aplicando la ecuación (2.12),  $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_x t^2$ , a cada vehículo, tenemos:

$$x_M = 0 + v_{M0x}t + \frac{1}{2}(0)t^2 = v_{M0x}t$$

$$x_P = 0 + (0)t + \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

Puesto que  $x_M = x_P$  en el tiempo  $t$ , igualamos las dos expresiones y despejamos  $t$ :

$$v_{M0x}t = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

$$t = 0 \quad \text{o} \quad t = \frac{2v_{M0x}}{a_{Px}} = \frac{2(15 \text{ m/s})}{3.0 \text{ m/s}^2} = 10 \text{ s}$$

Hay *dos* instantes en que los vehículos tienen la misma coordenada  $x$ . El primero,  $t = 0$ , es cuando el conductor pasa por el cruce donde está estacionada la motocicleta. El segundo,  $t = 10$  s, es cuando el policía alcanza al conductor.

b) Queremos la magnitud de la velocidad del policía  $v_{Px}$  en el instante  $t$  obtenido en a). Su velocidad en cualquier momento está dada por la ecuación (2.8):

$$v_{Px} = v_{P0x} + a_{Px}t = 0 + (3.0 \text{ m/s}^2)t$$

Usando  $t = 10$  s, hallamos  $v_{Px} = 30$  m/s. Cuando el policía alcanza al conductor, va al doble de su rapidez.

c) En 10 s, la distancia recorrida por el conductor es

$$x_M = v_{M0x}t = (15 \text{ m/s})(10 \text{ s}) = 150 \text{ m}$$

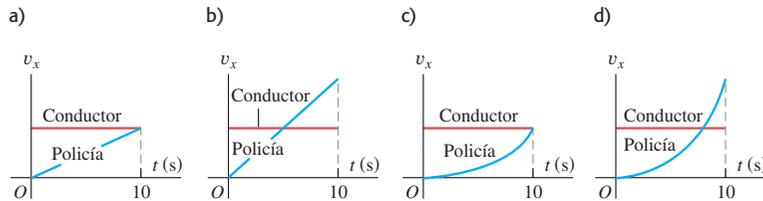
y la distancia que el policía recorre es

$$x_P = \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}(3.0 \text{ m/s}^2)(10 \text{ s})^2 = 150 \text{ m}$$

Esto comprueba que cuando el policía alcanza al conductor, ambos han recorrido la misma distancia.

**EVALUAR:** La figura 2.21b muestra las gráficas de  $x$  contra  $t$  para ambos vehículos. Aquí vemos también que hay dos instantes en que la posición es la misma (donde se cruzan las gráficas). En ninguno de ellos los dos vehículos tienen la misma velocidad (es decir, las gráficas se cruzan con distinta pendiente). En  $t = 0$ , el policía está en reposo; en  $t = 10$  s, la rapidez del policía es del doble que la del conductor.

**Evalúe su comprensión de la sección 2.4** Se muestran cuatro posibles gráficas  $v_x$ - $t$  para los dos vehículos del ejemplo 2.5. ¿Cuál es la gráfica correcta?



## 2.5 Cuerpos en caída libre

El ejemplo más conocido de movimiento con aceleración (casi) constante es la caída de un cuerpo bajo la influencia de la atracción gravitacional de la Tierra. Dicho movimiento ha interesado a filósofos y científicos desde la Antigüedad. En el siglo IV a.C., Aristóteles pensaba (erróneamente) que los objetos pesados caían con mayor rapidez que los ligeros, en proporción a su peso. Diecinueve siglos después, Galileo (véase la sección 1.1) afirmó que los cuerpos caían con una aceleración constante e independiente de su peso.

Los experimentos muestran que si puede omitirse el efecto del aire, Galileo está en lo cierto: todos los cuerpos en un lugar específico caen con la misma aceleración hacia abajo, sea cual fuere su tamaño o peso. Si además la distancia de caída es pequeña en comparación con el radio terrestre, y si ignoramos los pequeños efectos debidos a la rotación de la Tierra, la aceleración es constante. El modelo idealizado que surge de tales supuestos se denomina **caída libre**, aunque también incluye el movimiento ascendente. (En el capítulo 3 extenderemos el estudio de la caída libre para incluir el movimiento de proyectiles, que se mueven tanto horizontal como verticalmente.)

La figura 2.22 es una fotografía de una pelota que cae tomada con una lámpara estroboscópica que produce una serie de destellos intensos a intervalos iguales. En cada destello, la película registra la posición de la pelota. Como los intervalos entre

**2.22** Fotografía con múltiples destellos de una pelota en caída libre.





- 1.7 Se deja caer limonada desde un globo aerostático
- 1.10 Caída de un saltador con garrocha

destellos son iguales, la velocidad media de la pelota entre dos destellos es proporcional a la distancia entre las imágenes correspondientes en la fotografía. El aumento en las distancias muestra que la velocidad cambia continuamente: la pelota acelera hacia abajo. Al medir cuidadosamente constatamos que el cambio de velocidad es el mismo en cada intervalo, así que la aceleración de la pelota en caída libre es constante.

La aceleración constante de un cuerpo en caída libre se llama **aceleración debida a la gravedad**, y denotamos su magnitud con la letra  $g$ . Por lo regular, usaremos el valor aproximado de  $g$  cerca de la superficie terrestre:

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ cm/s}^2$$

$$= 32 \text{ ft/s}^2 \quad (\text{valor aproximado cerca de la superficie terrestre})$$

El valor exacto varía según el lugar, así que normalmente sólo lo daremos con dos cifras significativas. Dado que  $g$  es la magnitud de una cantidad vectorial, siempre es *positiva*. En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad se debe a la fuerza de atracción de la Luna, no de la Tierra, y  $g = 1.6 \text{ m/s}^2$ . Cerca de la superficie del Sol,  $g = 270 \text{ m/s}^2$ .

En los ejemplos que siguen usamos las ecuaciones para aceleración constante que dedujimos en la sección 2.4. Sugerimos al lector que repase las estrategias de resolución de problemas de esa sección antes de estudiar estos ejemplos.

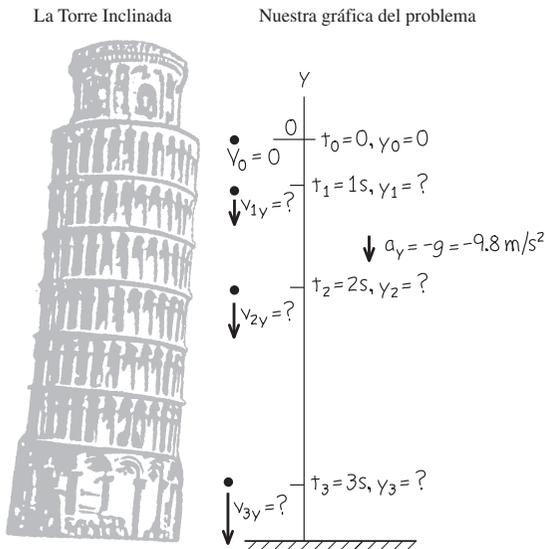
### Ejemplo 2.6 Moneda en caída libre

Se deja caer una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa; parte del reposo y cae libremente. Calcule su posición y su velocidad después de 1.0, 2.0 y 3.0 s.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** “Cae libremente” significa “tiene una aceleración constante debida a la gravedad”, así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante en la determinación de nuestras incógnitas.

#### 2.23 Una moneda en caída libre desde reposo.



**PLANTEAR:** El lado derecho de la figura 2.23 muestra nuestro diagrama de movimiento para la moneda. El movimiento es vertical, de manera que usamos un eje de coordenadas vertical y llamaremos a la coordenada  $y$  en vez de  $x$ . Sustituiremos todas las  $x$  de las ecuaciones para aceleración constante por  $y$ . Tomaremos el origen  $O$  como el punto de partida y la dirección hacia arriba como positiva. La coordenada inicial  $y_0$  y la velocidad inicial  $v_{0y}$ , son ambas cero. La aceleración es hacia abajo, en la dirección  $y$  negativa, así que  $a_y = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$ . (Recuerde que por definición  $g$  siempre es positiva.) Por lo tanto, nuestras incógnitas son los valores de  $y$  y  $v_y$  en los tres instantes especificados. Para obtenerlos usamos las ecuaciones (2.12) y (2.8), sustituyendo  $x$  por  $y$ .

**EJECUTAR:** En un instante  $t$  después de que se suelta la moneda, su posición y su velocidad son

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(-g)t^2 = (-4.9 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (-g)t = (-9.8 \text{ m/s}^2)t$$

Cuando  $t = 1.0 \text{ s}$ ,  $y = (-4.9 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})^2 = -4.9 \text{ m}$  y  $v_y = (-9.8 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s}) = -9.8 \text{ m/s}$ ; después de 1 s, la moneda está 4.9 m debajo del origen ( $y$  es negativa) y tiene una velocidad hacia abajo ( $v_y$  es negativa) con magnitud de 9.8 m/s.

La posición y la velocidad a los 2.0 s y 3.0 s se obtienen de la misma forma. ¿Puede usted demostrar que  $y = -19.6 \text{ m}$  y  $v_y = -19.6 \text{ m/s}$  en  $t = 2.0 \text{ s}$ , y que  $y = -44.1 \text{ m}$  y  $v_y = -29.4 \text{ m/s}$  en  $t = 3.0 \text{ s}$ ?

**EVALUAR:** Todos los valores que obtuvimos para  $v_y$  son negativos porque decidimos que el eje  $+y$  apuntaría hacia arriba; pero bien podríamos haber decidido que apuntara hacia abajo. En tal caso, la aceleración habría sido  $a_y = +g$  y habríamos obtenido valores positivos para  $v_y$ . No importa qué eje elija; sólo asegúrese de decirlo claramente en su solución y confirme que la aceleración tenga el signo correcto.

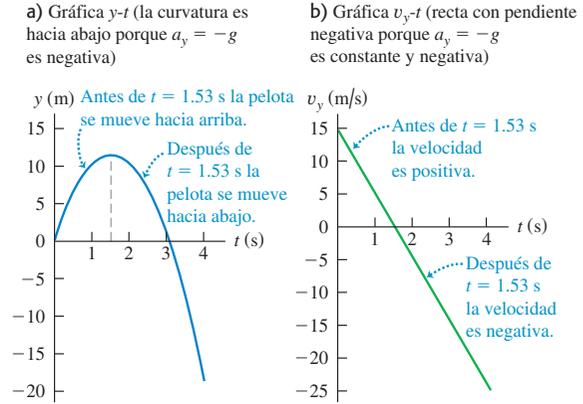


d) **CUIDADO** **Un error acerca de la caída libre** Es un error común pensar que en el punto más alto del movimiento en caída libre la velocidad es cero y la aceleración es cero. Si fuera así, ¡la pelota quedaría suspendida en el punto más alto en el aire para siempre! Recuerde que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad. Si la aceleración fuera cero en el punto más alto, la velocidad de la pelota ya no cambiaría y, al estar instantáneamente en reposo, permanecería en reposo eternamente. ■

De hecho, en el punto más alto la aceleración sigue siendo  $a_y = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$ , la misma que cuando está subiendo y cuando está bajando. Por ello, la velocidad de la pelota está cambiando continuamente, de valores positivos a valores negativos, pasando por cero.

**EVALUAR:** Una forma útil de verificar cualquier problema de movimiento consiste en dibujar las gráficas de posición y de velocidad en función del tiempo. La figura 2.25 muestra estas gráficas para este problema. Como la aceleración es constante y negativa, la gráfica  $y-t$  es una parábola con curvatura hacia abajo, y la gráfica  $v_y-t$  es una recta con pendiente negativa.

**2.25** a) Posición y b) velocidad en función del tiempo para una pelota lanzada hacia arriba con una rapidez inicial de 15 m/s.



### Ejemplo 2.8 ¿Dos soluciones o una?

Determine el instante en que la pelota del ejemplo 2.7 está 5.00 m por debajo del barandal.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Se trata de nuevo de un problema de aceleración constante. La incógnita es el tiempo en que la pelota está en cierta posición.

**PLANTEAR:** Otra vez elegimos el eje  $y$  como en la figura 2.24, así que  $y_0, v_{0y}$  y  $a_y = -g$  tienen los mismos valores que en el ejemplo 2.7. De nuevo, la posición  $y$  en función del tiempo  $t$  está dada por la ecuación (2.12):

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

Queremos despejar  $t$  con  $y = -5.00 \text{ m}$ . Puesto que la ecuación incluye  $t^2$ , es una ecuación *cuadrática* en  $t$ .

**EJECUTAR:** Primero replanteamos la ecuación en la forma cuadrática estándar para una  $x$  desconocida,  $Ax^2 + Bx + C = 0$ :

$$\left(\frac{1}{2}g\right)t^2 + (-v_{0y})t + (y - y_0) = At^2 + Bt + C = 0$$

entonces,  $A = g/2$ ,  $B = -v_{0y}$  y  $C = y - y_0$ . Usando la fórmula cuadrática (véase el Apéndice B), vemos que esta ecuación tiene *dos* soluciones:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ &= \frac{-(-v_{0y}) \pm \sqrt{(-v_{0y})^2 - 4(g/2)(y - y_0)}}{2(g/2)} \\ &= \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)}}{g} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores  $y_0 = 0$ ,  $v_{0y} = +15.0 \text{ m/s}$ ,  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$  y  $y = -5.00 \text{ m}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} t &= \frac{(15.0 \text{ m/s}) \pm \sqrt{(15.0 \text{ m/s})^2 - 2(9.80 \text{ m/s}^2)(-5.00 \text{ m} - 0)}}{9.80 \text{ m/s}^2} \\ t &= +3.36 \text{ s} \quad \text{o} \quad t = -0.30 \text{ s} \end{aligned}$$

Para decidir cuál de éstas es la respuesta correcta, la pregunta clave es: “¿son lógicas estas respuestas?” La segunda,  $t = -0.30 \text{ s}$ , simplemente es absurda; ¡se refiere a un instante 0.30 s *antes* de soltar la pelota! Lo correcto es  $t = +3.36 \text{ s}$ . La pelota está 5.00 m debajo del barandal 3.36 s *después* de que sale de la mano.

**EVALUAR:** ¿De dónde salió la “solución” errónea  $t = -0.30 \text{ s}$ ? Recuerde que la ecuación  $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$  se basa en el supuesto de que la aceleración es constante para *todos* los valores de  $t$ , positivos, negativos o cero. Tal cual, esta ecuación nos diría que la pelota se ha estado moviendo hacia arriba en caída libre desde los albores del tiempo, y pasó por la mano en  $y = 0$  en el instante especial que decidimos llamar  $t = 0$ , y después continuó su caída libre. Sin embargo, todo lo que esta ecuación describe como sucedido antes de  $t = 0$  es ficción pura, ya que la pelota entró en caída libre sólo después de salir de la mano en  $t = 0$ ; la “solución”  $t = -0.30 \text{ s}$  es parte de tal ficción.

Repita estos cálculos para determinar cuándo la pelota está 5.00 m *sobre* el origen ( $y = +5.00 \text{ m}$ ). Las dos respuestas son  $t = +0.38 \text{ s}$  y  $t = +2.68 \text{ s}$ ; ambos son valores positivos de  $t$  y se refieren al movimiento real de la pelota una vez soltada. El primer instante es cuando la pelota pasa por  $y = +5.00 \text{ m}$  de subida, y el segundo, cuando pasa por ahí de bajada. (Compare esto con el inciso b) del ejemplo 2.7.)

Determine también los instantes en que  $y = +15.0 \text{ m}$ . En este caso, ambas soluciones requieren obtener la raíz cuadrada de un número negativo, así que *no hay* soluciones reales. Esto es lógico; en el inciso c) del ejemplo 2.7 vimos que la altura máxima de la pelota es  $y = +11.5 \text{ m}$ , así que *nunca* llega a  $y = +15.0 \text{ m}$ . Aunque una ecuación cuadrática como la (2.12) siempre tiene dos soluciones, a veces una o ambas soluciones no tienen sentido físico.

**Evalúe su comprensión de la sección 2.5** Si usted lanza una pelota hacia arriba con cierta rapidez inicial, ésta cae libremente y alcanza una altura máxima  $h$  un instante  $t$  después de que sale de su mano. *a)* Si usted arroja la pelota hacia arriba con el doble de la rapidez inicial, ¿qué nueva altura máxima alcanzará la pelota?  $h\sqrt{2}$ ; *b)* Si usted lanza la pelota hacia arriba con el doble de la rapidez inicial, ¿cuánto tiempo le tomará alcanzar su nueva altura máxima? i)  $t/2$ ; ii)  $t/\sqrt{2}$ ; iii)  $t$ ; iv)  $t\sqrt{2}$ ; v)  $2t$ .



## 2.6 \*Velocidad y posición por integración

Esta sección opcional es para estudiantes que ya aprendieron algo de cálculo integral. En la sección 2.4 analizamos el caso especial de movimiento rectilíneo con aceleración constante. Si  $a_x$  no es constante, como es común, no podremos aplicar las ecuaciones que deducimos en esa sección (figura 2.26). Pero aun si  $a_x$  varía con el tiempo, podemos usar la relación  $v_x = dx/dt$  para obtener la velocidad  $v_x$  en función del tiempo si la posición  $x$  es una función conocida de  $t$ , y podemos usar  $a_x = dv_x/dt$  para obtener la aceleración  $a_x$  en función del tiempo si  $v_x$  es una función conocida de  $t$ .

En muchas situaciones, sin embargo, no se conocen la posición ni la velocidad en función del tiempo, pero sí la aceleración. ¿Cómo obtenemos la posición y la velocidad a partir de la función de aceleración  $a_x(t)$ ? Este problema surge al volar un avión de Norteamérica a Europa (figura 2.27). La tripulación del avión debe conocer su posición precisa en todo momento. Sin embargo, un avión sobre el océano suele estar fuera del alcance de los radiofaros terrestres y del radar de los controladores de tráfico aéreo. Para determinar su posición, los aviones cuentan con un sistema de navegación inercial (INS) que mide la aceleración del avión. Esto se hace de forma análoga a como sentimos cambios en la velocidad de un automóvil en el que viajamos, aun con los ojos cerrados. (En el capítulo 4 veremos cómo el cuerpo detecta la aceleración.) Dada esta información y la posición inicial del avión (digamos, cierto embarcadero en el Aeropuerto Internacional de Miami) y su velocidad inicial (cero cuando está estacionado en ese embarcadero), el INS calcula y muestra la velocidad y posición actuales del avión en todo momento durante el vuelo. (Los aviones también utilizan el sistema de posición global, o GPS, para la navegación; no obstante, este sistema complementa el INS, en vez de remplazarlo.) Nuestro objetivo en el resto de esta sección es mostrar cómo se efectúan estos cálculos en el caso más sencillo de movimiento rectilíneo, con aceleración variable en el tiempo.

Primero consideraremos un enfoque gráfico. La figura 2.28 es una gráfica de aceleración contra tiempo para un cuerpo cuya aceleración no es constante. Podemos dividir el intervalo entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  en muchos intervalos más pequeños, llamando  $\Delta t$  a uno representativo. Sea  $a_{med-x}$  la aceleración media durante  $\Delta t$ . Por la ecuación (2.4), el cambio de velocidad  $\Delta v_x$  durante  $\Delta t$  es

$$\Delta v_x = a_{med-x} \Delta t$$

Gráficamente,  $\Delta v_x$  es igual al área de la tira sombreada con altura  $a_{med-x}$  y anchura  $\Delta t$ , es decir, el área bajo la curva entre los lados derecho e izquierdo de  $\Delta t$ . El cambio total de velocidad en cualquier intervalo (digamos,  $t_1$  a  $t_2$ ) es la suma de los cambios  $\Delta v_x$  en los subintervalos pequeños. De esta manera el cambio de velocidad total se representa gráficamente con el área *total* bajo la curva  $a_x-t$  entre las líneas verticales  $t_1$  y  $t_2$ . (En la sección 2.4 demostramos que esto se cumplía para el caso especial en que la aceleración es constante.)

En el límite donde los  $\Delta t$  se hacen muy pequeños y muy numerosos, el valor de  $a_{med-x}$  para el intervalo de cualquier  $t$  a  $t + \Delta t$  se acerca a la aceleración instantánea  $a_x$  en el instante  $t$ . En este límite, el área bajo la curva  $a_x-t$  es la *integral* de  $a_x$  (que en general es una función de  $t$ ) de  $t_1$  a  $t_2$ . Si  $v_{1x}$  es la velocidad del cuerpo en  $t_1$  y  $v_{2x}$  es la velocidad en  $t_2$ , entonces,

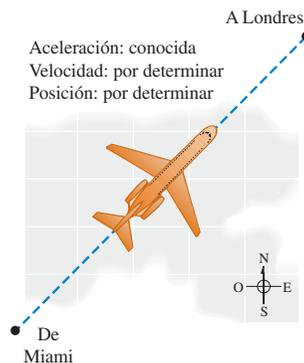
$$v_{2x} - v_{1x} = \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} dv_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x dt \tag{2.15}$$

El cambio en  $v_x$  es la integral de la aceleración  $a_x$  con respecto al tiempo.

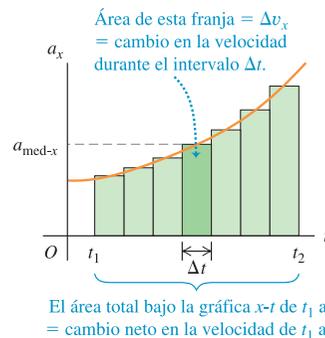
**2.26** Cuando pisamos el pedal del acelerador de un automóvil, la aceleración resultante *no* es constante: cuanto mayor sea la rapidez del auto, más lentamente adquirirá rapidez adicional. Un auto ordinario tarda el doble en acelerar de 50 km/h a 100 km/h que en acelerar de 0 a 50 km/h.



**2.27** La posición y la velocidad de un avión que cruza el Atlántico se encuentran integrando su aceleración con respecto al tiempo.



**2.28** Una gráfica  $a_x-t$  para un cuerpo cuya aceleración no es constante.



Podemos seguir exactamente el mismo procedimiento con la curva de velocidad contra tiempo. Si  $x_1$  es la posición de un cuerpo en  $t_1$  y  $x_2$  es su posición en  $t_2$ , por la ecuación (2.2) el desplazamiento  $\Delta x$  en un intervalo  $\Delta t$  pequeño es  $v_{\text{med-}x} \Delta t$ , donde  $v_{\text{med-}x}$  es la velocidad media durante  $\Delta t$ . El desplazamiento total  $x_2 - x_1$  durante  $t_2 - t_1$  está dado por

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x dt \quad (2.16)$$

El cambio en la posición  $x$  (es decir, el desplazamiento) es la integral en el tiempo de la velocidad  $v_x$ . Gráficamente, el desplazamiento entre  $t_1$  y  $t_2$  es el área bajo la curva  $v_x-t$  entre esos dos instantes. [Éste es el resultado que obtuvimos en la sección 2.4 para el caso especial en que  $v_x$  está dada por la ecuación (2.8).]

Si  $t_1 = 0$  y  $t_2$  es cualquier instante posterior  $t$ , y si  $x_0$  y  $v_{0x}$  son la posición y la velocidad en  $t = 0$ , respectivamente, entonces describimos las ecuaciones (2.15) y (2.16) como:

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt \quad (2.17)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt \quad (2.18)$$

Aquí,  $x$  y  $v_x$  son la posición y la velocidad en el instante  $t$ . Si conocemos la aceleración  $a_x$  en función del tiempo y la velocidad inicial  $v_{0x}$ , podremos usar la ecuación (2.17) para obtener la velocidad  $v_x$  en cualquier instante; es decir, podemos obtener  $v_x$  en función del tiempo. Una vez conocida esta función, y dada la posición inicial  $x_0$ , podemos usar la ecuación (2.18) para calcular la posición  $x$  en cualquier instante.

### Ejemplo 2.9 Movimiento con aceleración cambiante

Sally conduce su Mustang 1965 por una autopista recta. En el instante  $t = 0$ , cuando Sara avanza a 10 m/s en la dirección  $+x$ , pasa un letrero que está en  $x = 50$  m. Su aceleración es una función del tiempo:

$$a_x = 2.0 \text{ m/s}^2 - (0.10 \text{ m/s}^3)t$$

a) Deduzca expresiones para su velocidad y posición en función del tiempo. b) ¿En qué momento es máxima su velocidad? c) ¿Cuál es esa velocidad máxima? d) ¿Dónde está el automóvil cuando alcanza la velocidad máxima?

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** La aceleración es función del tiempo, así que no podemos usar las fórmulas para aceleración constante de la sección 2.4.

**PLANTEAR:** Utilizamos las ecuaciones (2.17) y (2.18) para obtener la velocidad y la posición en función del tiempo. Una vez que tengamos esas funciones, podremos contestar diversas preguntas acerca del movimiento.

**EJECUTAR:** a) En  $t = 0$ , la posición de Sally es  $x_0 = 50$  m y su velocidad es  $v_{0x} = 10$  m/s. Puesto que se nos da la aceleración  $a_x$  en función del tiempo, primero usamos la ecuación (2.17) para obtener la velocidad  $v_x$  en función del tiempo  $t$ . La integral de  $t^n$  es  $\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$  con  $n \neq -1$ , así que

$$\begin{aligned} v_x &= 10 \text{ m/s} + \int_0^t [2.0 \text{ m/s}^2 - (0.10 \text{ m/s}^3)t] dt \\ &= 10 \text{ m/s} + (2.0 \text{ m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0.10 \text{ m/s}^3)t^2 \end{aligned}$$

Luego usamos la ecuación (2.18) para obtener  $x$  en función de  $t$ :

$$\begin{aligned} x &= 50 \text{ m} + \int_0^t \left[ 10 \text{ m/s} + (2.0 \text{ m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0.10 \text{ m/s}^3)t^2 \right] dt \\ &= 50 \text{ m} + (10 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(2.0 \text{ m/s}^2)t^2 - \frac{1}{6}(0.10 \text{ m/s}^3)t^3 \end{aligned}$$

La figura 2.29 muestra las gráficas de  $a_x$ ,  $v_x$  y  $x$  en función del tiempo. Observe que, para cualquier  $t$ , la pendiente de la gráfica  $v_x-t$  es igual al valor de  $a_x$  y la pendiente de la gráfica  $x-t$  es igual al valor de  $v_x$ .

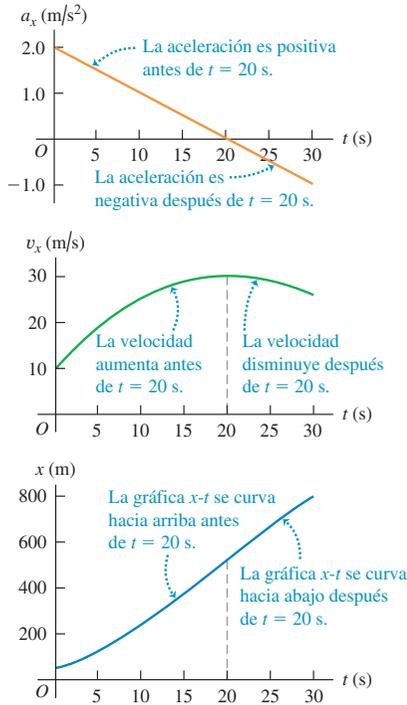
b) El valor máximo de  $v_x$  se da cuando  $v_x$  deja de aumentar y comienza a disminuir. En este instante,  $dv_x/dt = a_x = 0$ . Igualando a cero la expresión de la aceleración,

$$\begin{aligned} 0 &= 2.0 \text{ m/s}^2 - (0.10 \text{ m/s}^3)t \\ t &= \frac{2.0 \text{ m/s}^2}{0.10 \text{ m/s}^3} = 20 \text{ s} \end{aligned}$$

c) Obtenemos la velocidad máxima sustituyendo  $t = 20$  s (cuando  $v$  es máxima) en la ecuación para  $v_x$  del inciso a):

$$\begin{aligned} v_{\text{máx-}x} &= 10 \text{ m/s} + (2.0 \text{ m/s}^2)(20 \text{ s}) - \frac{1}{2}(0.10 \text{ m/s}^3)(20 \text{ s})^2 \\ &= 30 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**2.29** Posición, velocidad y aceleración del automóvil del ejemplo 2.9 como funciones del tiempo. ¿Puede usted demostrar que si continúa este movimiento, el auto parará en  $t = 44.5$  s?



d) El valor máximo de  $v_x$  se da en  $t = 20$  s. Para obtener la posición del auto en ese instante, sustituimos  $t = 20$  s en la expresión para  $x$  del inciso a):

$$x = 50 \text{ m} + (10 \text{ m/s})(20 \text{ s}) + \frac{1}{2}(2.0 \text{ m/s}^2)(20 \text{ s})^2 - \frac{1}{6}(0.10 \text{ m/s}^3)(20 \text{ s})^3 = 517 \text{ m}$$

**EVALUAR:** La figura 2.29 nos ayuda a interpretar los resultados. La gráfica superior de esta figura muestra que  $a_x$  es positiva entre  $t = 0$  y  $t = 20$  s, y negativa después. Es cero en  $t = 20$  s, cuando  $v_x$  es máxima (punto alto en la curva de en medio). El auto acelera hasta  $t = 20$  s (porque  $v_x$  y  $a_x$  tienen el mismo signo) y frena después de  $t = 20$  s (porque  $v_x$  y  $a_x$  tienen signos opuestos).

Como  $v_x$  es máxima en  $t = 20$  s, la gráfica  $x-t$  (la de arriba en la figura 2.29) tiene su pendiente positiva máxima en ese instante. Observe que la curva  $x-t$  es cóncava hacia arriba entre  $t = 0$  y  $t = 20$  s, cuando  $a_x$  es positiva, y es cóncava hacia abajo después de  $t = 20$  s, cuando  $a_x$  es negativa.

**Ejemplo 2.10 Fórmulas de aceleración constante por integración**

Use las ecuaciones (2.17) y (2.18) para obtener  $v_x$  y  $x$  en función del tiempo para el caso de aceleración constante.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Estos ejemplos servirán para verificar las ecuaciones que dedujimos en esta sección. Si están correctas, deberíamos terminar con las mismas ecuaciones de aceleración constante que dedujimos en la sección 2.4 sin usar la integración.

**PLANTEAR:** Seguimos los mismos pasos que en el ejemplo 2.9. La única diferencia es que  $a_x$  es una constante.

**EJECUTAR:** Por la ecuación (2.17), la velocidad está dada por

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt = v_{0x} + a_x \int_0^t dt = v_{0x} + a_x t$$

Pudimos obtener  $a_x$  de la integral porque es constante. Si sustituimos esta expresión para  $v_x$  en la ecuación (2.18), obtendremos

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt = x_0 + \int_0^t (v_{0x} + a_x t) dt$$

Puesto que  $v_{0x}$  y  $a_x$  son constantes, podemos sacarlas de la integral:

$$x = x_0 + v_{0x} \int_0^t dt + a_x \int_0^t t dt = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

**EVALUAR:** Estos resultados son iguales a las ecuaciones (2.8) y (2.12) para la sección 2.4, ¡como debería ser! No obstante, nuestras expresiones para las ecuaciones (2.17) y (2.18), en los casos en que la aceleración depende del tiempo, también pueden servirnos cuando la aceleración sea constante.

**Evalúe su comprensión de la sección 2.6** Si la aceleración  $a_x$  se incrementa con el tiempo, la gráfica  $v_x-t$  ¿será i) una línea recta, ii) una curva cóncava hacia arriba (con curvatura hacia arriba) o iii) una curva cóncava hacia abajo (con curvatura hacia abajo)?



## CAPÍTULO 2 RESUMEN

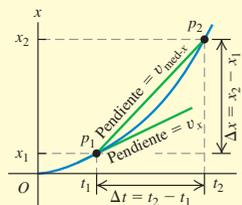
### Movimiento rectilíneo, velocidad media e instantánea:

Cuando una partícula se mueve en línea recta, describimos su posición con respecto al origen  $O$  mediante una coordenada como  $x$ . La velocidad media de la partícula,  $v_{\text{med-}x}$ , durante un intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$  es igual a su desplazamiento  $\Delta x = x_2 - x_1$  dividido entre  $\Delta t$ .

La velocidad instantánea  $v_x$  en cualquier instante  $t$  es igual a la velocidad media en el intervalo de tiempo de  $t$  a  $t + \Delta t$  en el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero. De forma equivalente,  $v_x$  es la derivada de la función de posición con respecto al tiempo. (Véase el ejemplo 2.1.)

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2)$$

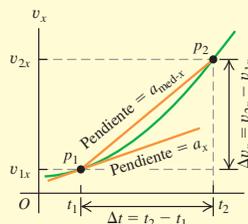
$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.3)$$



**Aceleración media e instantánea:** La aceleración media  $a_{\text{med-}x}$  durante un intervalo  $\Delta t$  es igual al cambio de velocidad  $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$  durante ese lapso dividido entre  $\Delta t$ . La aceleración instantánea  $a_x$  es el límite de  $a_{\text{med-}x}$  cuando  $\Delta t$  tiende a cero, o la derivada de  $v_x$  con respecto a  $t$ . (Véanse los ejemplos 2.2 y 2.3.)

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (2.4)$$

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (2.5)$$



### Movimiento rectilíneo con aceleración constante:

Cuando la aceleración es constante, cuatro ecuaciones relacionan la posición  $x$  y la velocidad  $v_x$  en cualquier instante  $t$  con la posición inicial  $x_0$ , la velocidad inicial  $v_{0x}$  (ambas medidas en  $t = 0$ ) y la aceleración  $a_x$ . (Véanse los ejemplos 2.4 y 2.5.)

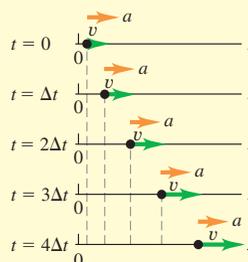
Sólo aceleración constante:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (2.8)$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (2.12)$$

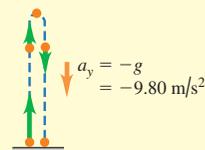
$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (2.13)$$

$$x - x_0 = \left( \frac{v_{0x} + v_x}{2} \right) t \quad (2.14)$$



**Cuerpos en caída libre:** La caída libre es un caso del movimiento con aceleración constante.

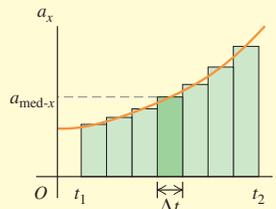
La magnitud de la aceleración debida a la gravedad es una cantidad positiva  $g$ . La aceleración de un cuerpo en caída libre siempre es hacia abajo. (Véanse los ejemplos 2.6 a 2.8.)



**Movimiento rectilíneo con aceleración variable:** Cuando la aceleración no es constante, sino una función conocida del tiempo, podemos obtener la velocidad y la posición en función del tiempo integrando la función de la aceleración. (Véanse los ejemplos 2.9 y 2.10.)

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt \quad (2.17)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt \quad (2.18)$$



## Términos clave

partícula, 37  
 velocidad media, 37  
 gráfica  $x-t$ , 38  
 velocidad instantánea, 39  
 derivada, 40

rapidez, 40  
 diagrama de movimiento, 42  
 aceleración media, 43  
 aceleración instantánea, 44  
 gráfica  $v_x-t$ , 45

gráfica  $a_x-t$ , 47  
 caída libre, 53  
 aceleración debida a la gravedad, 54

## Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Sí. Aceleración se refiere a *cualquier* cambio de velocidad, ya sea que aumente o disminuya.

## Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

**2.1 Respuestas a a):** iv), i) y iii) (empatados), v), ii); **respuesta a b):** i) y iii); **respuesta a c):** v) En a), la velocidad media es  $v_{\text{med-}x} = \Delta x / \Delta t$ . Para los cinco viajes,  $\Delta t = 1$  h. Para los viajes individuales, tenemos i)  $\Delta x = +50$  km,  $v_{\text{med-}x} = +50$  km/h; ii)  $\Delta x = -50$  km,  $v_{\text{med-}x} = -50$  km/h; iii)  $\Delta x = 60$  km  $- 10$  km  $= +50$  km,  $v_{\text{med-}x} = +50$  km/h; iv)  $\Delta x = +70$  km,  $v_{\text{med-}x} = +70$  km/h; v)  $\Delta x = \Delta x = -20$  km  $+ 20$  km  $= 0$ ,  $v_{\text{med-}x} = 0$ . En b) ambos tienen  $v_{\text{med-}x} = +50$  km/h.

**2.2 Respuestas: a) P, Q y S (empatados), R** La velocidad es **b)** positiva cuando la pendiente de la gráfica  $x-t$  es positiva (**punto P**), **c)** negativa cuando la pendiente es negativa (**punto R**) y **d)** cero cuando la pendiente es cero (**puntos Q y S**). **e) R, P, Q y S (empatados)** La rapidez es máxima cuando la pendiente de la gráfica  $x-t$  es más empinada (ya sea positiva o negativa), y cero cuando la pendiente es cero.

**2.3 Respuestas: a) S**, donde la gráfica  $x-t$  se curva (es cóncava) hacia arriba. **b) Q**, donde la gráfica  $x-t$  se curva (es cóncava) hacia abajo.

**c) P y R**, donde la gráfica  $x-t$  es una línea recta. **d)** En **P**,  $v_x > 0$  y  $a_x = 0$  (la rapidez **no cambia**); en **Q**,  $v_x > 0$  y  $a_x < 0$  (la rapidez **disminuye**); en **R**,  $v_x < 0$  y  $a_x = 0$  (la rapidez **no cambia**); y en **S**,  $v_x < 0$  y  $a_x > 0$  (la rapidez **disminuye**).

**2.4 Respuesta: b)** La aceleración del policía es constante, de manera que su gráfica  $v_x-t$  es una recta y su motocicleta se mueve más rápido que el automóvil del conductor, cuando ambos vehículos se encuentran en  $t = 10$  s.

**2.5 Respuestas: a) iii)** Use la ecuación (2.13) sustituyendo  $x$  por  $y$  y  $a_y = g$ ;  $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$ . La altura inicial es  $y_0 = 0$  y la velocidad a la altura máxima  $y = h$  es  $v_y = 0$ , así que  $0 = v_{0y}^2 - 2gh$  y  $h = v_{0y}^2 / 2g$ . Si la velocidad inicial aumenta en un factor de 2, la altura máxima aumentará en un factor de  $2^2 = 4$  y la pelota alcanzará la altura  $4h$ . **b) v)** Utilice la ecuación (2.8) reemplazando  $x$  por  $y$  y  $a_y = g$ ;  $v_y = v_{0y} - gt$ . La velocidad en la altura máxima es  $v_y = 0$ , así que  $0 = v_{0y} - gt$  y  $t = v_{0y} / g$ . Si la velocidad inicial se incrementa en un factor de 2, el tiempo para llegar a la altura máxima se incrementa en un factor de 2 y se vuelve  $2t$ .

**2.6 Respuestas: ii)** La aceleración  $a_x$  es igual a la pendiente de la gráfica  $v_x-t$ . Si  $a_x$  aumenta, la pendiente de la gráfica  $v_x-t$  también se incrementa y la curva es cóncava hacia arriba.

## PROBLEMAS

Para la tarea asignada por el profesor, visite [www.masteringphysics.com](http://www.masteringphysics.com)



### Preguntas para análisis

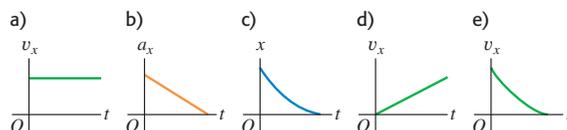
**P2.1.** ¿El velocímetro de un automóvil mide rapidez o velocidad? Explique su respuesta.

**P2.2.** La figura 2.30 muestra una serie de fotografías de alta rapidez de un insecto que vuela en línea recta de izquierda a derecha (en la dirección  $+x$ ). ¿Cuál de las gráficas de la figura 2.31 es más probable que describa el movimiento del insecto?

**Figura 2.30** Pregunta P2.2.



**Figura 2.31** Pregunta P2.2.



**P2.3.** ¿Un objeto con aceleración constante puede invertir la dirección en la que se mueve? ¿Puede invertirla *dos veces*? En cada caso, explique su razonamiento.

**P2.4.** ¿En qué condiciones la velocidad media es igual a la velocidad instantánea?

**P2.5.** ¿Para un objeto es posible a) frenar mientras su aceleración incrementa en magnitud; b) aumentar su rapidez mientras disminuye su aceleración? En cada caso, explique su razonamiento.

**P2.6.** ¿En qué condiciones la magnitud de la velocidad media es igual a la rapidez media?

**P2.7.** Cuando un Dodge Viper está en el negocio “Lavamóvil”, un BMW Z3 está en las calles Olmo y Central. Luego, cuando el Dodge llega a Olmo y Central, el BMW llega a “Lavamóvil”. ¿Qué relación hay entre las velocidades medias de los automóviles entre esos instantes?

**P2.8.** En el estado de Massachusetts un conductor fue citado en el tribunal por exceso de rapidez. La prueba contra el conductor era que una mujer policía observó al automóvil del conductor junto a un segundo auto, en un momento en que la mujer policía ya había determinado que el segundo auto excedía el límite de rapidez. El conductor alegó que: “el otro auto me estaba rebasando, y yo no iba a exceso de rapidez”. El juez dictaminó contra él porque, según dijo, “si los autos estaban juntos, ambos iban a exceso de rapidez”. Si usted fuera el abogado del conductor, ¿cómo defendería su caso?

**P2.9.** ¿Puede usted tener desplazamiento 0 y velocidad media distinta de 0? ¿Y velocidad distinta de 0? Ilustre sus respuestas en una gráfica  $x-t$ .

**P2.10.** ¿Puede usted tener aceleración 0 y velocidad distinta de 0? Explique, usando una gráfica  $v_x-t$ .

**P2.11.** ¿Puede usted tener velocidad cero y aceleración media distinta de cero? ¿Y velocidad cero y aceleración distinta de cero? Explique, usando una gráfica  $v_x-t$  y dé un ejemplo de dicho movimiento.

**P2.12.** Un automóvil viaja al oeste. ¿Puede tener una velocidad hacia el oeste y simultáneamente una aceleración hacia el este? ¿En qué circunstancias?

**P2.13.** La camioneta del juez en la figura 2.2 está en  $x_1 = 277$  m en  $t_1 = 16.0$  s, y en  $x_2 = 19$  m en  $t_2 = 25.0$  s. *a)* Dibuje dos posibles gráficas  $x-t$  distintas para el movimiento de la camioneta. *b)* ¿La velocidad media  $v_{med-x}$  en el intervalo de  $t_1$  a  $t_2$  tiene el mismo valor en ambas gráficas? ¿Por qué?

**P2.14.** Con aceleración constante, la velocidad media de una partícula es la mitad de la suma de sus velocidades inicial y final. ¿Se cumple esto si la aceleración *no* es constante? Explique su respuesta.

**P2.15.** Usted lanza una pelota verticalmente hasta una altura máxima mucho mayor que su propia estatura. ¿La magnitud de la aceleración es mayor mientras se lanza o después de que se suelta? Explique su respuesta.

**P2.16.** Demuestre lo que sigue. *a)* En tanto puedan desprejarse los efectos del aire, si se lanza algo verticalmente hacia arriba tendrá la misma rapidez cuando regrese al punto de lanzamiento que cuando se soltó. *b)* El tiempo de vuelo será el doble del tiempo de subida.

**P2.17.** Un grifo de agua que gotea deja caer constantemente gotas cada 1.0 s. Conforme dichas gotas caen, la distancia entre ellas aumenta, disminuye o permanece igual? Demuestre su respuesta.

**P2.18.** Si se conocen la posición y velocidad iniciales de un vehículo y se registra la aceleración en cada instante, ¿puede calcularse su posición después de cierto tiempo con estos datos? Si se puede, explique cómo.

**P2.19.** Desde la azotea de un rascacielos, usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba con rapidez  $v_0$  y una pelota directamente hacia abajo con rapidez  $v_0$ . *a)* ¿Qué pelota tiene mayor rapidez cuando llega al suelo? *b)* ¿Cuál llega al suelo primero? *c)* ¿Cuál tiene un mayor desplazamiento cuando llega al suelo? *d)* ¿Cuál recorre la mayor distancia cuando llega al suelo?

**P2.20.** Se deja caer una pelota desde el reposo en la azotea de un edificio de altura  $h$ . En el mismo instante, una segunda pelota se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo, de modo que tenga rapidez cero cuando llegue al nivel de la azotea. Cuando las dos pelotas se cruzan, ¿cuál tiene mayor rapidez (o ambas tienen la misma rapidez)? Explique su respuesta. ¿Dónde estarán las dos pelotas cuando se crucen: a una altura  $h/2$  sobre el suelo, más abajo de esa altura o arriba de esa altura? Explique su respuesta.

## Ejercicios

### Sección 2.1 Desplazamiento, tiempo y velocidad media

**2.1.** Un cohete que lleva un satélite acelera verticalmente alejándose de la superficie terrestre. 1.15 s después del despegue, el cohete libra el tope de su plataforma de lanzamiento, a 63 m sobre el suelo; y después de otros 4.75 s, está a 1.00 km sobre el suelo. Calcule la magnitud de la velocidad media del cohete en *a)* la parte de 4.75 s de su vuelo; *b)* los primeros 5.90 s de su vuelo.

**2.2.** En un experimento, se sacó a una pardela (una ave marina) de su nido, se le llevó a 5150 km de distancia y luego fue liberada. El ave regresó a su nido 13.5 días después de haberse soltado. Si el origen es el nido y extendemos el eje  $+x$  al punto de liberación, ¿cuál fue la velocidad media del ave en m/s *a)* en el vuelo de regreso? *b)* ¿Y desde que se sacó del nido hasta que regresó?

**2.3. Viaje a casa.** Suponga que usted normalmente conduce por la autopista que va de San Diego y Los Ángeles con una rapidez media de 105 km/h (65 m/h) y el viaje le toma 2 h y 20 min. Sin embargo, un viernes por la tarde el tráfico le obliga a conducir la misma distancia con una rapidez media de sólo 70 km/h (43 mi/h). ¿Cuánto tiempo más tardará el viaje?

**2.4. De pilar a poste.** Partiendo de un pilar, usted corre 200 m al este (la dirección  $+x$ ) con rapidez media de 5.0 m/s, luego 280 m al oeste con rapidez media de 4.0 m/s hasta un poste. Calcule *a)* su rapidez media del pilar al poste y *b)* su velocidad media del pilar al poste.

**2.5.** Dos corredores parten simultáneamente del mismo punto de una pista circular de 200 m y corren en direcciones *opuestas*. Uno corre con una rapidez constante de 6.20 m/s, y el otro, con rapidez constante de 5.50 m/s. ¿Cuándo se encuentren primero? *a)* ¿cuánto tiempo habrán estado corriendo?, *b)* ¿qué distancia desde el punto de salida habrá cubierto cada uno?

**2.6.** Suponga que los dos corredores del ejercicio 2.5 salen al mismo tiempo del mismo lugar, pero ahora corren en la *misma* dirección. *a)* ¿Cuándo el más rápido alcanzará primero al más lento y qué distancia desde el punto de partida habrá cubierto cada uno? *b)* ¿Cuándo el más rápido alcanzará al más lento por *segunda vez*, y qué distancia habrán cubierto en ese instante desde el punto de salida?

**2.7. Estudio de los terremotos.** Los terremotos producen varios tipos de ondas de choque. Las más conocidas son las ondas P (P por *primaria* o *presión*) y las ondas S (S por *secundaria* o *esfuerzo cortante*). En la corteza terrestre, las ondas P viajan a aproximadamente 6.5 km/s, en tanto que las ondas S se desplazan a aproximadamente 3.5 km/s. Las rapidez reales varían según el tipo de material por el que viajen. El tiempo de propagación, entre la llegada de estas dos clases de onda a una estación de monitoreo sísmico, le indica a los geólogos a qué distancia ocurrió el terremoto. Si el tiempo de propagación es de 33 s, a qué distancia de la estación sísmica sucedió el terremoto?

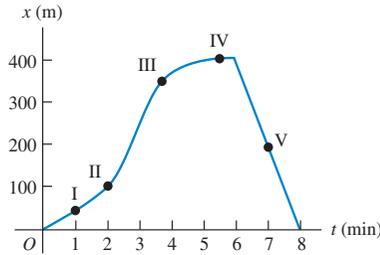
**2.8.** Un Honda Civic viaja en línea recta en carretera. Su distancia  $x$  de un letrero de alto está dada en función del tiempo  $t$  por la ecuación  $x(t) = \alpha t^2 - \beta t^3$ , donde  $\alpha = 1.50$  m/s<sup>2</sup> y  $\beta = 0.0500$  m/s<sup>3</sup>. Calcule la velocidad media del auto para los intervalos *a)*  $t = 0$  a  $t = 2.00$  s; *b)*  $t = 0$  a  $t = 4.00$  s; *c)*  $t = 2.00$  s a  $t = 4.00$  s.

### Sección 2.2 Velocidad instantánea

**2.9.** Un automóvil está parado ante un semáforo. Después viaja en línea recta y su distancia con respecto al semáforo está dada por  $x(t) = bt^2 - ct^3$ , donde  $b = 2.40$  m/s<sup>2</sup> y  $c = 0.120$  m/s<sup>3</sup>. *a)* Calcule la velocidad media del auto entre el intervalo  $t = 0$  a  $t = 10.0$  s. *b)* Calcule la velocidad instantánea del auto en  $t = 0$ ;  $t = 5.0$  s;  $t = 10.0$  s. *c)* ¿Cuánto tiempo después de arrancar el auto vuelve a estar parado?

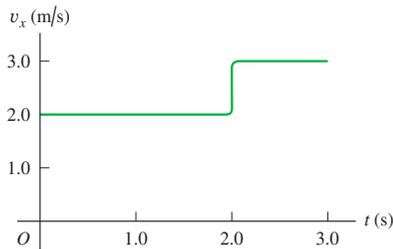
**2.10.** Una profesora de física sale de su casa y camina por la acera hacia el campus. A los 5 min, comienza a llover y ella regresa a casa. Su distancia con respecto a su casa en función del tiempo se muestra en la figura 2.32. ¿En cuál punto rotulado su velocidad es *a)* cero, *b)* constante y positiva, *c)* constante y negativa, *d)* de magnitud creciente y *e)* de magnitud decreciente?

Figura 2.32 Ejercicio 2.10.



**2.11.** Una pelota se mueve en línea recta (el eje  $x$ ). En la figura 2.33 la gráfica muestra la velocidad de esta pelota en función del tiempo. *a)* ¿Cuáles son la rapidez media y la velocidad media de la pelota durante los primeros 3.0 s? *b)* Suponga que la pelota se mueve de tal manera que el segmento de la gráfica después de 2.0 s era  $-3.0$  m/s en vez de  $+3.0$  m/s. En este caso, calcule la rapidez media y la velocidad media de la pelota.

Figura 2.33 Ejercicio 2.11.



### Sección 2.3 Aceleración media e instantánea

**2.12.** Un piloto de pruebas de Automotores Galaxia, S.A., está probando un nuevo modelo de automóvil con un velocímetro calibrado para indicar m/s en lugar de mi/h. Se obtuvo la siguiente serie de lecturas durante una prueba efectuada en una carretera recta y larga:

Tiempo (s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Rapidez (m/s)	0	0	2	6	10	16	19	22	22

*a)* Calcule la aceleración media en cada intervalo de 2 s. ¿La aceleración es constante? ¿Es constante durante alguna parte de la prueba? *b)* Elabore una gráfica  $v_x-t$  con los datos, usando escalas de 1 cm = 1 s horizontalmente, y 1 cm = 2 m/s verticalmente. Dibuje una curva suave que pase por los puntos graficados. Mida la pendiente de la curva para obtener la aceleración instantánea en:  $t = 9$  s, 13 s y 15 s.

**2.13. ¡El automóvil más rápido (y más caro)!** La siguiente tabla presenta los datos de prueba del Bugatti Veyron, el auto más rápido fabricado. El vehículo se mueve en línea recta (el eje  $x$ ).

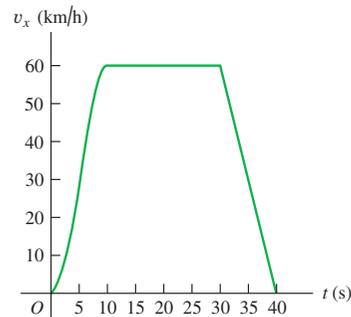
Tiempo (s)	0	2.1	20.0	53
Rapidez (mi/h)	0	60	200	253

*a)* Elabore una gráfica  $v_x-t$  de la velocidad de este auto (en mi/h) en función del tiempo. ¿Su aceleración es constante? *b)* Calcule la aceleración media del auto (en  $m/s^2$ ) entre i) 0 y 2.1 s; ii) 2.1 s y 20.0 s; iii) 20.0 s y 53 s. ¿Estos resultados son congruentes con el inciso *a)* de

su gráfica? (Antes de decidirse a comprar este vehículo, le sería útil saber que sólo se fabricarán 300, que a su máxima rapidez se le acaba la gasolina en 12 minutos y ¡que cuesta 1,250,000 dólares!)

**2.14.** La figura 2.34 muestra la velocidad de un automóvil solar en función del tiempo. El conductor acelera desde un letrero de alto, viaja 20 s con rapidez constante de 60 km/h y frena para detenerse 40 s después de partir del letrero. *a)* Calcule la aceleración media para estos intervalos: i)  $t = 0$  a  $t = 10$  s; ii)  $t = 30$  s a  $t = 40$  s; iii)  $t = 10$  s a  $t = 30$  s; iv)  $t = 0$  a  $t = 40$  s. *b)* ¿Cuál es la aceleración instantánea en  $t = 20$  s y en  $t = 35$  s?

Figura 2.34 Ejercicio 2.14.



**2.15.** Una tortuga camina en línea recta sobre lo que llamaremos eje  $x$  con la dirección positiva hacia la derecha. La ecuación de la posición de la tortuga en función del tiempo es  $x(t) = 50.0 \text{ cm} + (2.00 \text{ cm/s})t - (0.0625 \text{ cm/s}^2)t^2$ . *a)* Determine la velocidad inicial, posición inicial y aceleración inicial de la tortuga. *b)* ¿En qué instante  $t$  la tortuga tiene velocidad cero? *c)* ¿Cuánto tiempo después de ponerse en marcha regresa la tortuga al punto de partida? *d)* ¿En qué instantes  $t$  la tortuga está a una distancia de 10.0 cm de su punto de partida? ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la tortuga en cada uno de esos instantes? *e)* Dibuje las gráficas:  $x-t$ ,  $v_x-t$  y  $a_x-t$  para el intervalo de  $t = 0$  a  $t = 40.0$  s.

**2.16.** Una astronauta salió de la Estación Espacial Internacional para probar un nuevo vehículo espacial. Su compañero mide los siguientes cambios de velocidad, cada uno en un intervalo de 10 s. Indique la magnitud, el signo y la dirección de la aceleración media en cada intervalo. Suponga que la dirección positiva es a la derecha. *a)* Al principio del intervalo, la astronauta se mueve a la derecha sobre el eje  $x$  a 15.0 m/s, y al final del intervalo se mueve a la derecha a 5.0 m/s. *b)* Al principio se mueve a la izquierda a 5.0 m/s y al final lo hace a la izquierda a 15.0 m/s. *c)* Al principio se mueve a la derecha a 15.0 m/s y al final lo hace a la izquierda a 15.0 m/s.

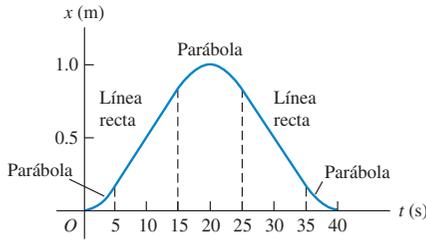
**2.17. Aceleración de un automóvil.** Con base en su experiencia al viajar en automóvil, estime la magnitud de la aceleración media de un auto, cuando *a)* acelera en una autopista desde el reposo hasta 65 mi/h, y *b)* frena desde una rapidez de autopista hasta un alto total. *c)* Explique por qué en cada caso la aceleración media podría considerarse ya sea positiva o negativa.

**2.18.** La velocidad de un automóvil en función del tiempo está dada por  $v_x(t) = \alpha + \beta t^2$ , donde  $\alpha = 3.00 \text{ m/s}$  y  $\beta = 0.100 \text{ m/s}^3$ . *a)* Calcule

la aceleración media entre  $t = 0$  y  $t = 5.00$  s. *b*) Calcule la aceleración instantánea en  $t = 0$  y en  $t = 5.00$  s. *c*) Dibuje las gráficas  $v_x-t$  y  $a_x-t$  exactas para el movimiento del auto entre  $t = 0$  y  $t = 5.00$  s.

**2.19.** La figura 2.35 es una gráfica de la coordenada de una araña que camina sobre el eje  $x$ . *a*) Grafique su velocidad y aceleración en función del tiempo. *b*) En un diagrama de movimiento (como el de las figuras 2.13b y 2.14b), muestre la posición, velocidad y aceleración de la araña en los cinco tiempos:  $t = 2.5$  s,  $t = 10$  s,  $t = 20$  s,  $t = 30$  s y  $t = 37.5$  s.

Figura 2.35 Ejercicio 2.19.



**2.20.** La posición del frente de un automóvil de pruebas controlado por microprocesador está dada por  $x(t) = 2.17 \text{ m} + (4.80 \text{ m/s}^2)t^2 - (0.100 \text{ m/s}^6)t^6$ . *a*) Obtenga su posición y aceleración en los instantes en que tiene velocidad cero. *b*) Dibuje las gráficas  $x-t$ ,  $v_x-t$  y  $a_x-t$  para el movimiento del frente del auto entre  $t = 0$  y  $t = 2.00$  s.

**Sección 2.4 Movimiento con aceleración constante**

**2.21.** Un antílope con aceleración constante cubre la distancia de 70.0 m entre dos puntos en 7.00 s. Su rapidez al pasar por el segundo punto es 15.0 m/s. *a*) ¿Qué rapidez tenía en el primero? *b*) ¿Qué aceleración tiene?

**2.22.** La catapulta del portaaviones USS Abraham Lincoln acelera un jet de combate F/A-18 Hornet, desde el reposo hasta una rapidez de despegue de 173 mi/h en una distancia de 307 ft. Suponga aceleración constante. *a*) Calcule la aceleración del avión en  $\text{m/s}^2$ . *b*) Calcule el tiempo necesario para acelerar el avión hasta la rapidez de despegue.

**2.23. Un lanzamiento rápido.** El lanzamiento más rápido medido de una pelota de béisbol sale de la mano del pitcher a una rapidez de 45.0 m/s. Si el pitcher estuvo en contacto con la pelota una distancia de 1.50 m y produjo aceleración constante, *a*) ¿qué aceleración le dio a la pelota, y *b*) ¿cuánto tiempo le tomó lanzarla?

**2.24. Servicio de tenis.** En el servicio de tenis más rápido medido, la pelota sale de la raqueta a 73.14 m/s. En el servicio una pelota de tenis normalmente está 30.0 ms en contacto con la raqueta y parte del reposo. Suponga aceleración constante. *a*) ¿Cuál era la aceleración de la pelota durante este servicio? *b*) ¿Qué distancia recorrió la pelota durante el servicio?

**2.25. Bolsas de aire del automóvil.** El cuerpo humano puede sobrevivir a un incidente de trauma por aceleración negativa (parada repentina), si la magnitud de la aceleración es menor que  $250 \text{ m/s}^2$ . Si usted sufre un accidente automovilístico con rapidez inicial de 105 km/h (65 mi/h) y es detenido por una bolsa de aire que se infla desde el tablero, ¿en qué distancia debe ser detenido por la bolsa de aire para sobrevivir al percance?

**2.26. Ingreso a la autopista.** Un automóvil está parado en una rampa de acceso a una autopista esperando un hueco en el tráfico. El conductor acelera por la rampa con aceleración constante para entrar en la autopista. El auto parte del reposo, se mueve en línea recta y tiene una rapidez de 20 m/s (45 mi/h) al llegar al final de la rampa de 120 m de

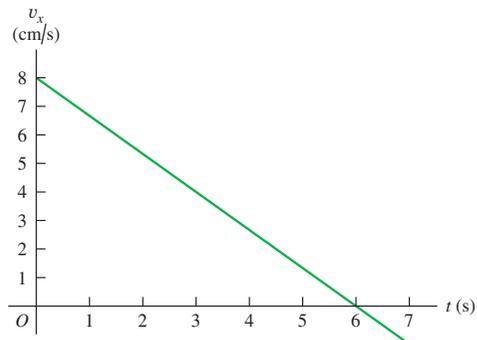
largo. *a*) ¿Qué aceleración tiene el auto? *b*) ¿Cuánto tarda el auto en salir de la rampa? *c*) El tráfico de la autopista se mueve con rapidez constante de 20 m/s. ¿Qué distancia recorre el tráfico mientras el auto se mueve por la rampa?

**2.27. Lanzamiento del transbordador espacial.** En el lanzamiento el transbordador espacial pesa 4.5 millones de libras. Al lanzarse desde el reposo, tarda 8.00 s en alcanzar los 161 km/h y al final del primer minuto, su rapidez es de 1610 km/h. *a*) ¿Cuál es la aceleración media (en  $\text{m/s}^2$ ) del transbordador i) durante los primeros 8.00 s, y ii) entre 8 s y el final del primer minuto? *b*) Suponiendo que la aceleración es constante durante cada intervalo (aunque no necesariamente la misma en ambos intervalos), ¿qué distancia recorre el transbordador i) durante los primeros 8.00s, y ii) durante el intervalo de 8.00 s a 1.00 min?

**2.28.** Según datos de pruebas efectuadas recientemente, un automóvil recorre 0.250 millas en 19.9 s, partiendo del reposo. El mismo auto, viajando a 60.0 mph y frenando en pavimento seco, se detiene en 146 ft. Suponga una aceleración constante en cada parte del movimiento, pero no necesariamente la misma aceleración al arrancar que al frenar. *a*) Calcule la aceleración del auto al arrancar y al frenar. *b*) Si su aceleración es constante, ¿con qué rapidez (en mi/h) debería estar viajando el auto después de acelerar durante 0.250 mi? La rapidez real medida es de 70.0 m/h; ¿qué le dice esto acerca del movimiento? *c*) ¿Cuánto tarda este auto en detenerse cuando viaja a 60.0 mi/h?

**2.29.** Un gato camina en línea recta en lo que llamaremos eje  $x$  con la dirección positiva a la derecha. Usted, que es un físico observador, efectúa mediciones del movimiento del gato y elabora una gráfica de la velocidad del felino en función del tiempo (figura 2.36). *a*) Determine la velocidad del gato en  $t = 4.0$  s y en  $t = 7.0$  s. *b*) ¿Qué aceleración tiene el gato en  $t = 3.0$  s? ¿En  $t = 6.0$  s? ¿En  $t = 7.0$  s? *c*) ¿Qué distancia cubre el gato durante los primeros 4.5 s? ¿Entre  $t = 0$  y  $t = 7.5$  s? *d*) Dibuje gráficas claras de la aceleración del gato y su posición en función del tiempo, suponiendo que el gato partió del origen.

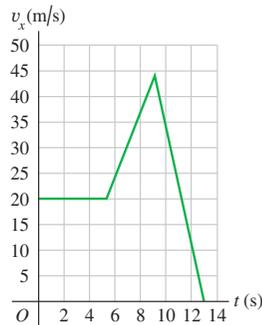
Figura 2.36 Ejercicio 2.29.



**2.30.** En  $t = 0$ , un automóvil está detenido ante un semáforo. Al encenderse la luz verde, el auto acelera a razón constante hasta alcanzar una rapidez de 20 m/s 8 s después de arrancar. El auto continúa con rapidez constante durante 60 m. Luego, el conductor ve un semáforo con luz roja en el siguiente cruce y frena a razón constante. El auto se detiene ante el semáforo, a 180 m de donde estaba en  $t = 0$ . *a*) Dibuje las gráficas  $x-t$ ,  $v_x-t$  y  $a_x-t$  exactas para el movimiento del auto. *b*) En un diagrama de movimiento (como los de las figuras 2.13b y 2.14b), muestre la posición, velocidad y aceleración del auto 4 s después de que se enciende la luz verde, mientras viaja a rapidez constante y cuando frena.

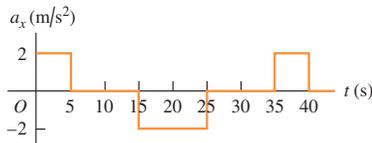
**2.31.** La gráfica de la figura 2.37 muestra la velocidad de un policía en motocicleta en función del tiempo. *a)* Calcule la aceleración instantánea en  $t = 3$  s, en  $t = 7$  s y en  $t = 11$  s. *b)* ¿Qué distancia cubre el policía en los primeros 5 s? ¿En los primeros 9 s? ¿Y en los primeros 13 s?

Figura 2.37 Ejercicio 2.31.



**2.32.** La figura 2.38 es una gráfica de la aceleración de una locomotora de juguete que se mueve en el eje  $x$ . Dibuje las gráficas de su velocidad y coordenada  $x$  en función del tiempo, si  $x = 0$  y  $v_x = 0$  cuando  $t = 0$ .

Figura 2.38 Ejercicio 2.32.

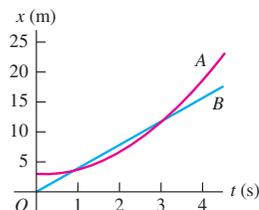


**2.33.** Una nave espacial que lleva trabajadores a la Base Lunar I viaja en línea recta de la Tierra a la Luna, una distancia de 384,000 km. Suponga que parte del reposo y acelera a  $20.0 \text{ m/s}^2$  los primeros 15.0 min, viaja con rapidez constante hasta los últimos 15.0 min, cuando acelera a  $-20.0 \text{ m/s}^2$ , parando justo al llegar a la Luna. *a)* ¿Qué rapidez máxima se alcanzó? *b)* ¿Qué fracción de la distancia total se cubrió con rapidez constante? *c)* ¿Cuánto tardó el viaje?

**2.34.** Un tren subterráneo en reposo parte de una estación y acelera a una tasa de  $1.60 \text{ m/s}^2$  durante 14.0 s, viaja con rapidez constante  $70.0 \text{ s}$  y frena a  $3.50 \text{ m/s}^2$  hasta parar en la siguiente estación. Calcule la distancia total cubierta.

**2.35.** Dos automóviles, A y B, se mueven por el eje  $x$ . La figura 2.39 grafica las posiciones de A y B contra el tiempo. *a)* En diagramas de movimiento (como las figuras 2.13b y 2.14b), muestre la posición, velocidad y aceleración de cada auto en  $t = 0$ ,  $t = 1$  s y  $t = 3$  s. *b)* ¿En qué instante(s), si acaso, A y B tienen la misma posición? *c)* Trace una gráfica de velocidad contra tiempo para A y para B. *d)* ¿En qué instante(s), si acaso, A y B tienen la misma velocidad? *e)* ¿En qué instante(s), si acaso, el auto A rebasa al auto B? *f)* ¿En qué instante(s), si acaso, el auto B pasa al A?

Figura 2.39 Ejercicio 2.35.



**2.36.** En el instante en que un semáforo se pone en luz verde, un automóvil que esperaba en el cruce arranca con aceleración constante de  $3.20 \text{ m/s}^2$ . En el mismo instante, un camión que viaja con rapidez constante de  $20.0 \text{ m/s}$  alcanza y pasa al auto. *a)* ¿A qué distancia de su punto de partida el auto alcanza al camión? *b)* ¿Qué rapidez tiene el auto en ese momento? *c)* Dibuje una gráfica  $x-t$  del movimiento de los dos vehículos, tomando  $x = 0$  en el cruce. *d)* Dibuje una gráfica  $v_x-t$  del movimiento de los dos vehículos.

**2.37. Llegada a Marte.** En enero de 2004, la NASA puso un vehículo de exploración en la superficie marciana. Parte del descenso consistió en las siguientes etapas:

Etapa A: la fricción con la atmósfera redujo la rapidez de  $19,300 \text{ km/h}$  a  $1600 \text{ km/h}$  en  $4.0 \text{ min}$ .

Etapa B: un paracaídas se abrió para frenarlo a  $321 \text{ km/h}$  en  $94 \text{ s}$ .

Etapa C: se encienden los retrocohetes para reducir su rapidez a cero en una distancia de  $75 \text{ m}$ .

Suponga que cada etapa sigue inmediatamente después de la que le precede, y que la aceleración durante cada una era constante. *a)* Encuentre la aceleración del cohete (en  $\text{m/s}^2$ ) durante cada etapa. *b)* ¿Qué distancia total (en km) viajó el cohete en las etapas A, B y C?

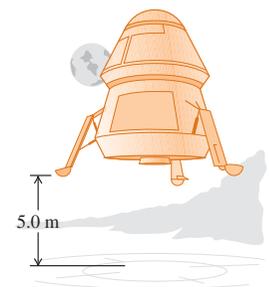
## Sección 2.5 Cuerpos en caída libre

**2.38. Gotas de lluvia.** Si pueden descontarse los efectos del aire sobre las gotas de lluvia, podemos tratarlas como objetos en caída libre. *a)* Las nubes de lluvia suelen estar a unos cuantos cientos de metros sobre el suelo. Estime la rapidez (en  $\text{m/s}$ ,  $\text{km/h}$  y  $\text{mi/h}$ ) con que las gotas llegarían al suelo si fueran objetos en caída libre. *b)* Estime (con base en sus observaciones personales) la velocidad real con que las gotas de lluvia chocan contra el suelo. *c)* Con base en sus respuestas a los incisos *a)* y *b)*, ¿es justificable ignorar los efectos del aire sobre las gotas de lluvia? Explique su respuesta.

**2.39. a)** Si una pulga puede saltar  $0.440 \text{ m}$  hacia arriba, ¿qué rapidez inicial tiene al separarse del suelo? ¿Cuánto tiempo está en el aire?

**2.40. Alunizaje.** Un alunizador está descendiendo hacia la Base Lunar I (figura 2.40) frenado lentamente por el retro-empuje del motor de descenso. El motor se apaga cuando el alunizador está a  $5.0 \text{ m}$  sobre la superficie y tiene una velocidad hacia abajo de  $0.8 \text{ m/s}$ . Con el motor apagado, el vehículo está en caída libre. ¿Qué rapidez tiene justo antes de tocar la superficie? La aceleración debida a la gravedad lunar es de  $1.6 \text{ m/s}^2$ .

Figura 2.40 Ejercicio 2.40.



**2.41. Una prueba sencilla de tiempo de reacción.** Se sostiene un metro verticalmente, de manera que su extremo inferior esté entre el pulgar y el índice de la mano del sujeto de la prueba. Al ver que sueltan el metro, el sujeto lo detiene juntando esos dos dedos. Se puede calcular el tiempo de reacción con base en la distancia que el metro cayó antes de que se le detuviera, leyendo la escala en el punto donde el sujeto lo tomó. *a)* Deduzca una relación para el tiempo de reacción en términos de esta distancia  $d$  medida. *b)* Si la distancia medida es  $17.6 \text{ cm}$ , ¿cuál será el tiempo de reacción?

**2.42.** Se deja caer un ladrillo (rapidez inicial cero) desde la azotea de un edificio. El tabique choca contra el suelo en  $2.50 \text{ s}$ . Se puede despreciar la resistencia del aire, así que el ladrillo está en caída libre.

a) ¿Qué altura (en m) tiene el edificio? b) ¿Qué magnitud tiene la velocidad del ladrillo justo antes de llegar al suelo? c) Dibuje las gráficas:  $a_y-t$ ,  $v_y-t$  y  $y-t$  para el movimiento del ladrillo.

**2.43. Falla en el lanzamiento.** Un cohete de 7500 kg despega verticalmente desde la plataforma de lanzamiento con una aceleración constante hacia arriba de  $2.25 \text{ m/s}^2$  y no sufre resistencia del aire considerable. Cuando alcanza una altura de 525 m, sus motores fallan repentinamente y ahora la única fuerza que actúa sobre él es la gravedad. a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará este cohete desde la plataforma de lanzamiento? b) Después de que el motor falla, ¿cuánto tiempo pasará antes de que se estrelle contra la plataforma de lanzamiento, y qué rapidez tendrá justo antes del impacto? c) Dibuje las gráficas  $a_y-t$ ,  $v_y-t$  y  $y-t$  del movimiento del cohete desde el instante en que despega hasta el instante justo antes de chocar contra la plataforma de lanzamiento.

**2.44.** El tripulante de un globo aerostático, que sube verticalmente con velocidad constante de magnitud 5.00 m/s, suelta un saco de arena cuando el globo está a 40.0 m sobre el suelo (figura 2.41). Después de que se suelta, el saco está en caída libre. a) Calcule la posición y velocidad del saco a 0.250 s y 1.00 s después de soltarse. b) ¿Cuántos segundos tardará el saco en chocar con el suelo después de soltarse? c) ¿Con qué rapidez chocará? d) ¿Qué altura máxima alcanza el saco sobre el suelo? e) Dibuje las gráficas  $a_y-t$ ,  $v_y-t$  y  $y-t$  para el movimiento.

Figura 2.41 Ejercicio 2.44.



**2.45.** Un estudiante lanza un globo lleno con agua, verticalmente hacia abajo desde la azotea de un edificio. El globo sale de su mano con una rapidez de 6.00 m/s. Puede despreciarse la resistencia del aire, así que el globo está en caída libre una vez soltado. a) ¿Qué rapidez tiene después de caer durante 2.00 s? b) ¿Qué distancia cae en este lapso? c) ¿Qué magnitud tiene su velocidad después de caer 10.0 m? d) Dibuje las gráficas:  $a_y-t$ ,  $v_y-t$  y  $y-t$  para el movimiento.

**2.46.** Se lanza un huevo casi verticalmente hacia arriba desde un punto cerca de la cornisa de un edificio alto; al bajar, apenas libra la cornisa y pasa por un punto 50.0 m bajo su punto de partida 5.00 s después de salir de la mano que lo lanzó. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Qué rapidez inicial tiene el huevo? b) ¿Qué altura alcanza sobre el punto de lanzamiento? c) ¿Qué magnitud tiene su velocidad en el punto más alto? d) ¿Qué magnitud y dirección tiene su aceleración en el punto más alto? e) Dibuje las gráficas  $a_y-t$ ,  $v_y-t$  y  $y-t$  para el movimiento del huevo.

**2.47.** El trineo impulsado por cohete *Sonic Wind Núm. 2*, utilizado para investigar los efectos fisiológicos de las altas aceleraciones, corre sobre una vía recta horizontal de 1070 m (3500 ft). Desde el reposo, puede alcanzar una rapidez de 224 m/s (500 mi/h) en 0.900 s. a) Calcule la aceleración en  $\text{m/s}^2$ , suponiendo que es constante. b) ¿Cuál es la relación de esta aceleración con la de un cuerpo en caída libre ( $g$ )? c) ¿Qué distancia se cubre en 0.900 s? d) En una revista se aseguró que, al final de cierta prueba, la rapidez del trineo descendió de 283 m/s (632 mi/h) a cero en 1.40 s, y que en ese tiempo la magnitud de la aceleración fue mayor que  $40g$ . ¿Son congruentes tales cifras?

**2.48.** Un peñasco es expulsado verticalmente hacia arriba por un volcán, con una rapidez inicial de 40.0 m/s. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿En qué instante después de ser expulsado el peñasco sube a 20.0 m/s? b) ¿En qué instante baja a 20.0 m/s? c) ¿Cuándo es cero el desplazamiento con respecto a su posición ini-

cial? d) ¿Cuándo es cero la velocidad del peñasco? e) ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración cuando el peñasco está i) subiendo? ii) bajando? iii) ¿en el punto más alto? f) Dibuje las gráficas  $a_y-t$ ,  $v_y-t$  y  $y-t$  para el movimiento.

**2.49.** Una roca de 15 kg se suelta desde el reposo en la Tierra y llega al suelo 1.75 s después. Cuando se suelta desde la misma altura en Encélado, una luna de Saturno, llega al suelo en 18.6. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en Encélado?

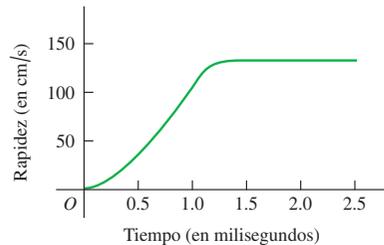
**\*Sección 2.6 Velocidad y posición por integración**

**\*2.50.** La aceleración de un autobús está dada por  $a_x(t) = \alpha t$ , donde  $\alpha = 1.2 \text{ m/s}^3$ . a) Si la velocidad del autobús en el tiempo  $t = 1.0 \text{ s}$  es 5.0 m/s, ¿cuál será en  $t = 2.0 \text{ s}$ ? b) Si la posición del autobús en  $t = 1.0 \text{ s}$  es 6.0 m, ¿cuál será en  $t = 2.0 \text{ s}$ ? c) Dibuje las gráficas:  $a_x-t$ ,  $v_x-t$  y  $x-t$  para el movimiento.

**\*2.51.** La aceleración de una motocicleta está dada por  $a_x(t) = At - Bt^2$ , con  $A = 1.50 \text{ m/s}^3$  y  $B = 0.120 \text{ m/s}^4$ . La motocicleta está en reposo en el origen en  $t = 0$ . a) Obtenga su posición y velocidad en función de  $t$ . b) Calcule la velocidad máxima que alcanza.

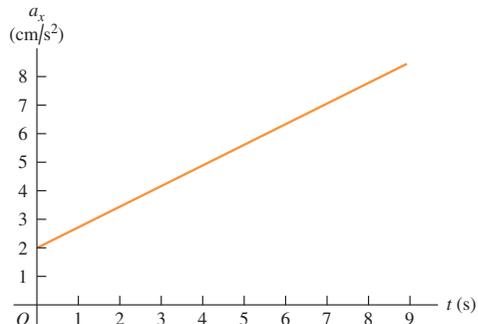
**\*2.52. Salto volador de la pulga.** Una película tomada a alta velocidad (3500 cuadros por segundo) de una pulga saltarina de 210  $\mu\text{g}$  produjo los datos que se usaron para elaborar la gráfica de la figura 2.42. (Véase "The Flying Leap of the Flea", por M. Rothschild, Y. Schlein, K. Parker, C. Neville y S. Sternberg en el *Scientific American* de noviembre de 1973.) La pulga tenía una longitud aproximada de 2 mm y saltó con un ángulo de despegue casi vertical. Use la gráfica para contestar estas preguntas. a) ¿La aceleración de la pulga es cero en algún momento? Si lo es, ¿cuándo? Justifique su respuesta. b) Calcule la altura máxima que la pulga alcanzó en los primeros 2.5 ms. c) Determine la aceleración de la pulga a los 0.5 ms, 1.0 ms y 1.5 ms. d) Calcule la altura de la pulga a los 0.5 ms, 1.0 ms y 1.5 ms.

Figura 2.42 Ejercicio 2.52.



**\*2.53.** En la figura 2.43 la gráfica describe la aceleración en función del tiempo para una piedra que rueda hacia abajo partiendo del reposo.

Figura 2.43 Ejercicio 2.53.



a) Calcule el cambio en la velocidad de la piedra entre  $t = 2.5$  s y  $t = 7.5$  s. b) Elabore una gráfica de la velocidad de la piedra en función del tiempo.

**Problemas**

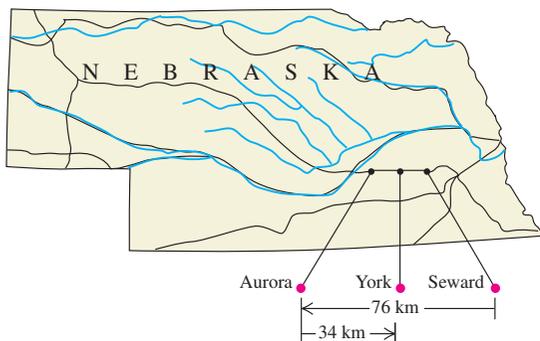
**2.54.** En un paseo de 20 millas en bicicleta, usted recorre las primeras 10 millas con rapidez media de 8 mi/h. ¿Qué rapidez media en las otras 10 mi requerirá para que la rapidez media total en las 20 millas sea: a) 4 mi/h? b) 12 mi/h? c) Dada la rapidez media indicada para las primeras 10 millas, ¿le sería posible alcanzar una rapidez media de 16 mi/h para todo el paseo de 20 millas? Explique su respuesta.

**2.55.** La posición de una partícula entre  $t = 0$  y  $t = 2.00$  s está dada por  $x(t) = (3.00 \text{ m/s}^3)t^3 - (10.0 \text{ m/s}^2)t^2 + (9.00 \text{ m/s})t$ . a) Dibuje las gráficas  $x-t$ ,  $v_x-t$  y  $a_x-t$  para la partícula. b) ¿En qué instante(s) entre  $t = 0$  y  $t = 2.00$  s está instantáneamente en reposo la partícula? ¿Coincide el resultado numérico con la gráfica  $v_x-t$  del inciso a)? c) En cada instante calculado en el inciso b), ¿la aceleración de la partícula es positiva o negativa? Demuestre que en cada caso la misma respuesta se deduce de  $a_x(t)$  y de la gráfica  $v_x-t$ . d) En qué instante(s) entre  $t = 0$  y  $t = 2.00$  s no está cambiando la velocidad instantánea de la partícula? Ubique este punto en las gráficas  $v_x-t$  y  $a_x-t$  del inciso a). e) ¿Cuál es la distancia máxima de la partícula con respecto al origen ( $x = 0$ ) entre  $t = 0$  y  $t = 2.00$  s? f) ¿En qué instante(s) entre  $t = 0$  y  $t = 2.00$  s la partícula está aumentando de rapidez a mayor ritmo? ¿En qué instante(s) entre  $t = 0$  y  $t = 2.00$  s la partícula se está frenando a mayor ritmo? Ubique esos puntos en las gráficas  $v_x-t$  y  $a_x-t$  del inciso a).

**2.56. Carrera de relevos.** En una carrera de relevos, cada competidora corre 25.0 m con un huevo sostenido en una cuchara, se da vuelta y regresa al punto de partida. Edith corre los primeros 25.0 m en 20.0 s. Al regresar se siente más confiada y tarda sólo 15.0 s. ¿Qué magnitud tiene su velocidad media en a) los primeros 25.0 m? b) ¿Y en el regreso? c) ¿Cuál es su velocidad media para el viaje redondo? d) ¿Y su rapidez media para el viaje redondo?

**2.57.** Dan entra en la carretera interestatal I-80 en Seward, Nebraska, y viaja al oeste en línea recta con velocidad media de 88 km/h. Después de 76 km, llega a la salida de Aurora (figura 2.44). Al darse cuenta de que llegó demasiado lejos, se da vuelta, y conduce 34 km al este hasta la salida de York con rapidez media de 72 km/h. Para el viaje total de Seward a la salida de York, determine a) su rapidez media y b) la magnitud de su velocidad media.

Figura 2.44 Problema 2.57.



**2.58. Tráfico en la autopista.** Según un artículo de *Scientific American* (mayo de 1990), las autopistas actuales pueden controlar cerca de 2400 vehículos por carril por hora en flujo vehicular uniforme a 96 km/h

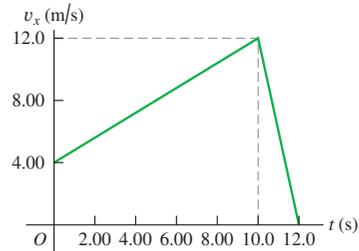
(60 mi/h). Si hay más vehículos, el flujo vehicular se hace “turbulento” (intermitente). a) Si un vehículo tiene longitud media de 4.6 m (15 ft), ¿qué espacio medio hay entre vehículos con la densidad de tráfico mencionada? b) Los sistemas de control automatizados para evitar los choques, que operan rebotando ondas de radar o sonar en los vehículos circundantes, acelerando o frenando el vehículo según sea necesario, podrían reducir mucho el espacio entre vehículos. Si el espacio medio es de 9.2 m (el largo de dos autos), cuántos vehículos por hora podrían circular a 96 km/h en un carril?

**2.59.** Un velocista de alto rendimiento acelera a su rapidez máxima en 4.0 s y mantiene esa rapidez durante el resto de la carrera de 100 m, llegando a la meta con un tiempo total de 9.1 s. a) ¿Qué aceleración media tiene durante los primeros 4.0 s? b) ¿Qué aceleración media tiene durante los últimos 5.1 s? c) ¿Qué aceleración media tiene durante toda la carrera? d) Explique por qué su respuesta al inciso c) no es el promedio de las respuestas a los incisos a) y b).

**2.60.** Un trineo parte del reposo en la cima de una colina y baja con aceleración constante. En un instante posterior, el trineo está a 14.4 m de la cima; 2.00 s después está a 25.6 m de la cima, 2.00 s después está a 40.0 m de la cima, y 2.00 s después está a 57.6 m de la cima. a) ¿Qué magnitud tiene la velocidad media del trineo en cada intervalo de 2.00 s después de pasar los 14.4 m? b) ¿Qué aceleración tiene el trineo? c) ¿Qué rapidez tiene el trineo al pasar los 14.4 m? d) ¿Cuánto tiempo tomó al trineo llegar de la cima a los 14.4 m? e) ¿Qué distancia cubrió el trineo durante el primer segundo después de pasar los 14.4 m?

**2.61.** Una gacela corre en línea recta (el eje  $x$ ). En la figura 2.45, la gráfica muestra la velocidad de este animal en función del tiempo. Durante los primeros 12.0 s, obtenga a) la distancia total recorrida y b) el desplazamiento de la gacela. c) Dibuje una gráfica  $a_x-t$  que muestre la aceleración de esta gacela en función del tiempo durante los primeros 12.0 s.

Figura 2.45 Problema 2.61.

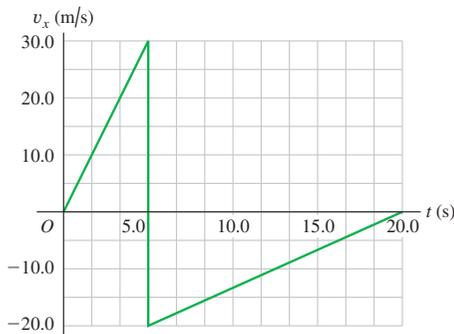


**2.62.** En el aire o en el vacío, la luz viaja con rapidez constante de  $3.0 \times 10^8$  m/s. Para contestar algunas de las preguntas podría ser necesario consultar los datos astronómicos del Apéndice F. a) Un año luz se define como la distancia que la luz recorre en 1 año. Utilice esta información para determinar cuántos metros hay en 1 año luz. b) ¿Cuántos metros recorre la luz en un nanosegundo? c) Cuando hay una erupción solar, ¿cuánto tiempo pasa antes de que pueda verse en la Tierra? d) Rebotando rayos láser en un reflector colocado en la Luna por los astronautas del Apolo, los astrónomos pueden efectuar mediciones muy exactas de la distancia Tierra-Luna. ¿Cuánto tiempo después de emitido tarda el rayo láser (que es un haz de luz) en regresar a la Tierra? e) La sonda *Voyager*, que pasó por Neptuno en agosto de 1989, estaba a cerca de 3000 millones de millas de la Tierra en ese momento, y envió a la Tierra fotografías y otra información mediante ondas de radio, que viajan con la rapidez de la luz. ¿Cuánto tardaron esas ondas en llegar del *Voyager* a la Tierra?

**2.63.** Utilice la información del Apéndice F para contestar estas preguntas. *a)* ¿Qué rapidez tienen las Islas Galápagos, situadas en el ecuador, debido a la rotación de la Tierra sobre su eje? *b)* ¿Qué rapidez tiene la Tierra debido a su traslación en torno al Sol? *c)* Si la luz siguiera la curvatura de la Tierra (lo cual no sucede), ¿cuántas veces daría la vuelta al ecuador un rayo de luz en un segundo?

**2.64.** Una pelota rígida que viaja en línea recta (el eje  $x$ ) choca contra una pared sólida y rebota repentinamente durante un breve instante. En la figura 2.46, la gráfica  $v_x-t$  muestra la velocidad de esta pelota en función del tiempo. Durante los primeros 2.00 s de su movimiento, obtenga *a)* la distancia total que se mueve la pelota, y *b)* su desplazamiento. *c)* Dibuje una gráfica  $a_x-t$  del movimiento de esta pelota. *d)* ¿En los 5.00 s la gráfica que se muestra es realmente vertical? Explique su respuesta.

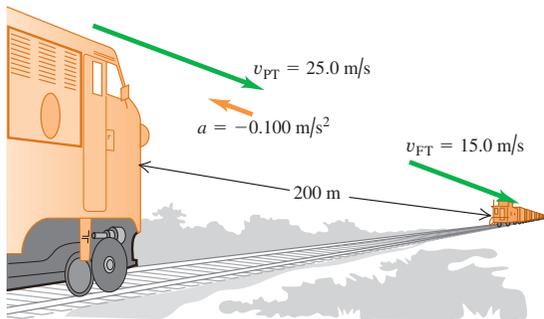
Figura 2.46 Problema 2.64.



**2.65.** Una pelota parte del reposo y baja rodando una colina con aceleración uniforme, recorriendo 150 m durante los segundos 5.0 s de su movimiento. ¿Qué distancia cubrió durante los primeros 5.0 s?

**2.66. Choque.** El maquinista de un tren de pasajeros que viaja a 25.0 m/s avista un tren de carga cuyo cabuz está 200 m más adelante en la misma vía (figura 2.47). El tren de carga viaja en la misma dirección a 15.0 m/s. El maquinista del tren de pasajeros aplica de inmediato los frenos, causando una aceleración constante de  $-0.100 \text{ m/s}^2$ , mientras el tren de carga sigue con rapidez constante. Sea  $x = 0$  el punto donde está el frente del tren de pasajeros cuando el maquinista aplica los frenos. *a)* ¿Atestiguarán las vacas una colisión? *b)* Si es así, ¿dónde ocurrirá? *c)* Dibuje en una sola gráfica las posiciones del frente del tren de pasajeros y del cabuz del tren de carga.

Figura 2.47 Problema 2.66.



**2.67.** Las cucarachas grandes pueden correr a 1.50 m/s en tramos cortos. Suponga que está de paseo, enciende la luz en un hotel y ve una cucaracha alejándose en línea recta a 1.50 m/s. Si inicialmente usted estaba 0.90 m detrás del insecto y se acerca hacia éste con una rapidez inicial de 0.80 m/s, ¿qué aceleración constante mínima necesitará para alcanzarlo cuando éste haya recorrido 1.20 m, justo antes de escapar bajo un mueble?

**2.68.** Dos automóviles están separados 200 m y avanzan frontalmente uno hacia el otro con una rapidez constante de 10 m/s. En el frente de uno de ellos, un saltamontes lleno de energía salta de atrás hacia delante entre los autos (¡sí que tiene patas fuertes!) con una velocidad horizontal constante de 15 m/s en relación con el suelo. El insecto salta en el instante en que cae, de manera que no pierde tiempo descansando en uno u otro autos. ¿Qué distancia total recorre el saltamontes antes de que los automóviles colisionen?

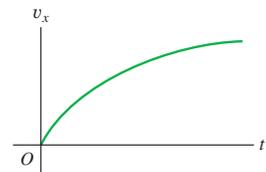
**2.69.** Un automóvil y un camión parten del reposo en el mismo instante, con el auto cierta distancia detrás del camión. El camión tiene aceleración constante de  $2.10 \text{ m/s}^2$ ; y el auto,  $3.40 \text{ m/s}^2$ . El auto alcanza al camión cuando éste ha recorrido 40.0 m. *a)* ¿Cuánto tiempo tarda el auto en alcanzar al camión? *b)* ¿Qué tan atrás del camión estaba inicialmente el auto? *c)* ¿Qué rapidez tienen los vehículos cuando avanzan juntos? *d)* Dibuje en una sola gráfica la posición de cada vehículo en función del tiempo. Sea  $x = 0$  la posición inicial del camión.

**2.70.** Dos pilotos de exhibición conducen frontalmente uno hacia el otro. En  $t = 0$  la distancia entre los automóviles es  $D$ , el auto 1 está parado y el 2 se mueve a la izquierda con rapidez  $v_0$ . El auto 1 comienza a moverse en  $t = 0$  con aceleración constante  $a_x$ . El auto 2 sigue a velocidad constante. *a)* ¿En qué instante chocarán los autos? *b)* Calcule la rapidez del auto 1 justo antes de chocar contra el auto 2. *c)* Dibuje las gráficas  $x-t$  y  $v_x-t$  para los 2 autos, y trace las curvas usando los mismos ejes.

**2.71.** Se suelta una canica desde el borde de un tazón semiesférico cuyo diámetro es de 50.0 cm y rueda de abajo hacia arriba al borde opuesto en 10.0 s. Obtenga *a)* la rapidez media y la velocidad media de la canica.

**2.72.** Mientras conduce, quizás usted haya notado que la velocidad de su automóvil no continúa incrementándose aun cuando mantenga su pie presionando el pedal del acelerador. Este comportamiento se debe a la resistencia del aire y a la fricción entre las partes móviles del vehículo. La figura 2.48 muestra una gráfica  $v_x-t$  cualitativa

Figura 2.48 Problema 2.72.



para un auto ordinario, cuando éste parte del reposo en el origen y viaja en línea recta (el eje  $x$ ). Dibuje las gráficas  $a_x-t$  y  $x-t$  cualitativas para este automóvil.

**2.73. Rebasado.** El conductor de un automóvil desea rebasar un camión que viaja a una rapidez constante de 20.0 m/s (aproximadamente 45 mi/h). Inicialmente, el auto también viaja a 20.0 m/s y su parachoques delantero está 24.0 m atrás del parachoques trasero del camión. El auto adquiere una aceleración constante de  $0.600 \text{ m/s}^2$  y regresa al carril del camión cuando su parachoques trasero está 26.0 m adelante del frente del camión. El auto tiene una longitud de 4.5 m, y el camión tiene una longitud de 21.0 m. *a)* ¿Cuánto tiempo necesita el auto para rebasar al camión? *b)* ¿Qué distancia recorre el auto en ese tiempo? *c)* ¿Qué rapidez final tiene el auto?

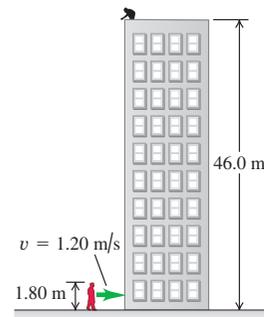
**\*2.74.** La velocidad medida de un objeto es  $v_x(t) = \alpha - \beta t^2$ , donde  $\alpha = 4.00 \text{ m/s}$  y  $\beta = 2.00 \text{ m/s}^3$ . En  $t = 0$ , el objeto está en  $x = 0$ . *a)* Calcule la posición y aceleración del objeto en función de  $t$ .

b) ¿Qué desplazamiento *positivo* máximo tiene el objeto con respecto al origen?

**\*2.75.** La aceleración de una partícula está dada por  $a_x(t) = -2.00 \text{ m/s}^2 + (3.00 \text{ m/s}^3)t$ . a) Encuentre la velocidad inicial  $v_{0x}$  tal que la partícula tenga la misma coordenada  $x$  en  $t = 4.00 \text{ s}$  que en  $t = 0$ . b) ¿Cuál será la velocidad en  $t = 4.00 \text{ s}$ ?

**2.76. Caída de huevo.** Imagine que está en la azotea del edificio de física, a 46.0 m del suelo (figura 2.49). Su profesor, que tiene una estatura de 1.80 m, camina junto al edificio a una rapidez constante de 1.20 m/s. Si usted quiere dejar caer un huevo sobre la cabeza de su profesor, ¿dónde deberá estar éste cuando usted suelte el huevo? Suponga que el huevo está en caída libre.

Figura 2.49 Problema 2.76.



**2.77.** En la Tierra un volcán puede expulsar rocas verticalmente hasta una altura máxima  $H$ . a) ¿A qué altura (en términos de  $H$ ) llegarían estas rocas si un volcán en Marte las expulsara con la misma velocidad inicial? La aceleración debida a la gravedad en Marte es de  $3.71 \text{ m/s}^2$ , y se puede despreciar la resistencia del aire en ambos planetas. b) Si en la Tierra las rocas están en el aire un tiempo  $T$ , ¿por cuánto tiempo (en términos de  $T$ ) estarán en el aire en Marte?

**2.78.** Una artista hace malabarismos con pelotas mientras realiza otras actividades. En un acto, arroja una pelota verticalmente hacia arriba y, mientras la pelota está en el aire, corre de ida y vuelta hacia una mesa que está a 5.50 m de distancia a una rapidez constante de 2.50 m/s, regresando justo a tiempo para atrapar la pelota que cae. a) ¿Con qué rapidez inicial mínima debe ella lanzar la pelota hacia arriba para realizar dicha hazaña? b) ¿A qué altura de su posición inicial está la pelota justo cuando ella llega a la mesa?

**2.79.** Los visitantes a un parque de diversiones observan a clavadistas lanzarse de una plataforma de 21.3 m (70 ft) de altura sobre una alberca. Según el presentador, los clavadistas entran al agua con una rapidez de 56 mi/h (25 m/s). Puede ignorarse la resistencia del aire. a) ¿Es correcta la aseveración del presentador? b) ¿Para un clavadista es posible saltar directamente hacia arriba de la plataforma de manera que, librando la plataforma al caer hacia la alberca, él entre al agua a 25.0 m/s? Si acaso, ¿qué rapidez inicial requiere? ¿Se necesita una rapidez inicial físicamente alcanzable?

**2.80.** Una maceta con flores cae del borde de una ventana y pasa frente a la ventana de abajo. Se puede despreciar la resistencia del aire. La maceta tarda 0.420 s en pasar por esta ventana, cuya altura es de 1.90 m. ¿A qué distancia debajo del punto desde el cual cayó la maceta está el borde superior de la ventana de abajo?

**2.81.** Algunos rifles pueden disparar una bala con una rapidez de 965 m/s justo cuando salen de la boca del cañón (esta rapidez se llama *velocidad inicial*). Si el cañón tiene 70.0 cm de largo y si la bala acelera uniformemente desde el reposo dentro del cañón, a) ¿cuál es la aceleración (en valores de  $g$ ) de la bala dentro del cañón?, y b) ¿por cuánto tiempo (en ms) está dentro del cañón? c) Si, cuando el rifle se dispara verticalmente, la bala alcanza una altura máxima  $H$ , ¿cuál debería ser la altura máxima (en términos de  $H$ ) para un rifle nuevo que produzca la mitad de la velocidad inicial de aquél?

**2.82. Un cohete de varias etapas.** En la primera etapa de un cohete de dos etapas, éste se dispara desde la plataforma de lanzamiento partiendo del reposo, pero con una aceleración constante de  $3.50 \text{ m/s}^2$  hacia arriba. A los 25.0 s después del lanzamiento, el cohete inicia la segunda etapa, la cual repentinamente aumenta su rapidez a  $132.5 \text{ m/s}$  hacia arriba. Sin embargo, este impulso consume todo el combustible, de manera

que la única fuerza que actúa sobre el cohete es la gravedad. Se desprecia la resistencia del aire. a) Obtenga la altura máxima que alcanza el cohete de dos etapas sobre la plataforma de lanzamiento. b) Después de que se inicia la segunda etapa, ¿cuánto tiempo pasará antes de que el cohete caiga a la plataforma de lanzamiento? c) ¿Qué tan rápido se moverá el cohete de dos etapas justo cuando llega a la plataforma?

**2.83. Cuidado abajo.** Sam avienta una bala de 16 lb directamente hacia arriba, imprimiéndole una aceleración constante de  $45.0 \text{ m/s}^2$  a lo largo de 64.0 cm, y soltándola a 2.20 m sobre el suelo. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Qué rapidez tiene la bala cuando Sam la suelta? b) ¿Qué altura alcanza sobre el suelo? c) ¿Cuánto tiempo tiene Sam para quitarse de abajo antes de que la bala regrese a la altura de su cabeza, a 1.83 m sobre el suelo?

**2.84.** Una profesora de física que está efectuando una demostración al aire libre, de repente cae desde el alto de un acantilado y simultáneamente grita “¡Auxilio!” Después de caer 3.0 s, escucha el eco de su grito proveniente del suelo del valle. La rapidez del sonido es de 340 m/s. a) ¿Qué altura tiene el acantilado? b) Si se desprecia la resistencia del aire, ¿con qué rapidez se estará moviendo la profesora justo antes de chocar contra el suelo? (Su rapidez real será menor que eso, debido a la resistencia del aire.)

**2.85. Malabarismo.** Un malabarista actúa en un recinto cuyo techo está 3.0 m arriba del nivel de sus manos. Lanza una pelota hacia arriba de modo que apenas llega al techo. a) ¿Qué velocidad inicial tiene la pelota? b) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al techo? En el instante en que la primera pelota está en el techo, el malabarista lanza una segunda pelota hacia arriba con dos terceras partes de la velocidad inicial de la primera. c) ¿Cuánto tiempo después de lanzada la segunda pelota se cruzan ambas pelotas en el aire? d) ¿A qué altura sobre la mano del malabarista se cruzan las dos pelotas?

**2.86.** Un helicóptero que lleva al doctor Malvado despega con aceleración constante hacia arriba de  $5.0 \text{ m/s}^2$ . El agente secreto Austin Powers se trepa de un salto al helicóptero justo cuando éste despega. Los dos hombres forcejean durante 10.0 s, después de lo cual Powers apaga el motor y se lanza desde el helicóptero. Suponga que el helicóptero está en caída libre después de que se apaga el motor y que la resistencia del aire es insignificante. a) ¿Qué altura máxima sobre el suelo alcanza el helicóptero? b) 7.0 s después de saltar del helicóptero, Powers enciende un cohete que trae sujeto a la espalda, el cual le imprime una aceleración constante hacia abajo con magnitud de  $2.0 \text{ m/s}^2$ . ¿A qué distancia sobre el suelo está Powers cuando el helicóptero se estrella contra el piso?

**2.87. Altura de edificio.** El Hombre Araña da un paso al vacío desde la azotea de un edificio y cae libremente desde el reposo una distancia  $h$  hasta la acera. En el último 1.0 s de su caída, cubre una distancia de  $h/4$ . Calcule la altura  $h$  del edificio.

**2.88. Altura de acantilado.** Imagine que está escalando una montaña y que repentinamente se encuentra en el borde de un acantilado, envuelto en niebla. Para determinar la altura del acantilado, deja caer un guijarro y 10.0 s después escucha el sonido que hace al golpear el suelo al pie del acantilado. a) Sin tomar en cuenta la resistencia del aire, ¿qué altura tiene el acantilado si la rapidez del sonido es de 330 m/s? b) Suponga que se desprecia el tiempo que el sonido tarda en llegar a sus oídos. En ese caso, ¿habría sobrestimado o subestimado la altura del acantilado? Explique su razonamiento.

**2.89. Lata que cae.** Un pintor está parado en un andamio que sube con rapidez constante. Por descuido, empuja una lata de pintura, la cual cae del andamio cuando está a 15.0 m sobre el suelo. Un observador usa su cronómetro para determinar que la lata tarda 3.25 s en llegar al suelo. No tome en cuenta la resistencia del aire. a) ¿Qué rapidez tiene la lata justo antes de llegar al suelo? b) Otro pintor está parado en una cornisa, una lata está a 4.00 m arriba de él cuando ésta se cae. Tiene reflejos felinos, y si la lata pasa frente a él, podrá atraparla. ¿Tiene oportunidad de hacerlo?

**2.90.** Decidido a probar la ley de la gravedad por sí mismo, un estudiante se deja caer desde un rascacielos de 180 m de altura, cronómetro en mano, e inicia una caída libre (velocidad inicial cero). Cinco segundos después, llega Superman y se lanza de la azotea para salvarlo, con una rapidez inicial  $v_0$  que imprimió a su cuerpo, empujándose hacia abajo desde el borde de la azotea con sus piernas de acero. Después, cae con la misma aceleración que cualquier cuerpo en caída libre. *a)* ¿Qué valor deberá tener  $v_0$  para que Superman atrape al estudiante justo antes de llegar al suelo? *b)* Dibuje en una sola gráfica las posiciones de Superman y del estudiante en función del tiempo. La rapidez inicial de Superman tiene el valor calculado en el inciso *a)*. *c)* Si la altura del rascacielos es menor que cierto valor mínimo, ni Superman podría salvar al estudiante antes de que llegue al suelo. ¿Cuál es esa altura mínima?

**2.91.** Durante el lanzamiento, a menudo los cohetes desechan partes innecesarias. Cierta cohete parte del reposo en una plataforma de lanzamiento y acelera hacia arriba a  $3.30 \text{ m/s}^2$  constantes. Cuando está a 235 m por arriba de la plataforma de lanzamiento, desecha un bote de combustible vacío simplemente desconectándolo. Una vez desconectado, la única fuerza que actúa sobre el bote es la gravedad (se puede ignorar la resistencia del aire). *a)* ¿Qué tan alto está el cohete cuando el bote llega a la plataforma, suponiendo no cambia la aceleración del cohete? *b)* ¿Cuál es la distancia total que recorre el bote entre que se suelta y choca contra la plataforma de lanzamiento?

**2.92.** Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el suelo con rapidez  $v_0$ . En el mismo instante, una segunda pelota (en reposo) se deja caer de una altura  $H$  directamente encima del punto de lanzamiento de la primera. No hay resistencia del aire. *a)* ¿Cuándo chocarán las pelotas? *b)* Obtenga el valor de  $H$  en términos de  $v_0$  y  $g$ , de modo que, cuando choquen las pelotas, la primera esté en su punto más alto.

**2.93.** Dos automóviles,  $A$  y  $B$ , viajan en línea recta. La distancia de  $A$  con respecto al punto de partida está dada, en función del tiempo, por  $x_A(t) = \alpha t + \beta t^2$ , con  $\alpha = 2.60 \text{ m/s}$  y  $\beta = 1.20 \text{ m/s}^2$ . La distancia entre  $B$  y el punto de partida es  $x_B(t) = \gamma t^2 - \delta t^3$ , con  $\gamma = 2.80 \text{ m/s}^2$  y  $\delta = 0.20 \text{ m/s}^3$ . *a)* ¿Cuál auto se adelanta justo después de salir del punto de partida? *b)* ¿En qué instante(s) los dos autos están en el mismo punto? *c)* ¿En qué instante(s) la distancia entre  $A$  y  $B$  no está aumentando ni disminuyendo? *d)* ¿En qué instante(s)  $A$  y  $B$  tienen la misma aceleración?

**2.94.** Una manzana cae libremente de un árbol, estando originalmente en reposo a una altura  $H$  sobre un césped crecido cuyas hojas miden  $h$ . Cuando la manzana llega al césped, se frena con razón constante de modo que su rapidez es 0 al llegar al suelo. *a)* Obtenga la rapidez de la manzana justo antes de tocar el césped. *b)* Obtenga la aceleración de la manzana ya dentro del césped. *c)* Dibuje las gráficas:  $y-t$ ,  $v_y-t$  y  $a_y-t$  para el movimiento de la manzana.

## Problemas de desafío

**2.95. Tomar el autobús.** Una estudiante corre a más no poder para alcanzar su autobús, que está detenido en la parada, con una rapidez de  $5.0 \text{ m/s}$ . Cuando ella está aún a  $40.0 \text{ m}$  del autobús, éste se pone en marcha con aceleración constante de  $0.170 \text{ m/s}^2$ . *a)* ¿Durante qué tiempo y qué distancia debe correr la estudiante a  $5.0 \text{ m/s}$  para alcanzar al autobús? *b)* Cuando lo hace, ¿qué rapidez tiene el autobús? *c)* Dibuje una gráfica  $x-t$  para la estudiante y para el autobús, donde  $x = 0$  sea la posición inicial de la estudiante. *d)* Las ecuaciones que usó en el inciso *a)* para calcular  $t$  tienen una segunda solución, que corresponde a un instante posterior en que la estudiante y el autobús están otra vez en el mismo lugar si continúan sus respectivos movimientos. Explique el significado de esta otra solución. ¿Qué rapidez tiene el autobús en ese punto? *e)* Si la rapidez de la estudiante fuera de  $3.5 \text{ m/s}$ , ¿alcanzaría al autobús? *f)* ¿Qué rapidez mínima requiere la estudiante para apenas alcanzar al autobús? ¿Durante qué tiempo y qué distancia deberá ella correr en tal caso?

**2.96.** En el salto vertical, un atleta se agazapa y salta hacia arriba tratando de alcanzar la mayor altura posible. Ni siquiera los campeones mundiales pasan mucho más de  $1.00 \text{ s}$  en el aire (“tiempo en suspensión”). Trate al atleta como partícula y sea  $y_{\text{máx}}$  su altura máxima sobre el suelo. Para explicar por qué parece estar suspendido en el aire, calcule la razón del tiempo que está sobre  $y_{\text{máx}}/2$  al tiempo que tarda en llegar del suelo a esa altura. Desprecie la resistencia del aire.

**2.97.** Se lanza una pelota hacia arriba desde el borde de una azotea. Una segunda pelota se deja caer desde la azotea  $1.00 \text{ s}$  después. Desprecie la resistencia del aire. *a)* Si la altura del edificio es de  $20.0 \text{ m}$ , ¿qué rapidez inicial necesitará la primera pelota para que las dos lleguen al suelo al mismo tiempo? En una sola gráfica dibuje la posición de cada pelota en función del tiempo, a partir del instante en que se lanzó la primera. Considere la misma situación, pero ahora sea la rapidez inicial  $v_0$  de la primera pelota un dato, y la altura  $h$  del edificio la incógnita. *b)* ¿Qué altura deberá tener el edificio para que las dos pelotas lleguen al suelo al mismo tiempo si  $v_0$  es i) de  $6.0 \text{ m/s}$  y ii) de  $9.5 \text{ m/s}$ ? *c)* Si  $v_0$  es mayor que cierto valor  $v_{\text{máx}}$ , no existe una  $h$  tal que ambas pelotas lleguen al piso simultáneamente. Obtenga  $v_{\text{máx}}$  cuyo valor tiene una interpretación física sencilla. ¿Cuál es? *d)* Si  $v_0$  es menor que cierto valor  $v_{\text{mín}}$ , no existe una  $h$  tal que ambas pelotas lleguen al piso al mismo tiempo. Obtenga  $v_{\text{mín}}$  cuyo valor también tiene una interpretación física sencilla. ¿Cuál es?

**2.98.** Un excursionista despierto ve un peñasco que cae desde un risco lejano y observa que tarda  $1.30 \text{ s}$  en caer el último tercio de la distancia. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a)* ¿Qué altura tiene el risco en metros? *b)* Si en el inciso *a)* usted obtiene dos soluciones de una ecuación cuadrática y usa una para su respuesta, ¿qué representa la otra solución?