UNIDAD 2: MOVIMIENTO A LO LARGO DE UNA LINEA RECTA

Introducción

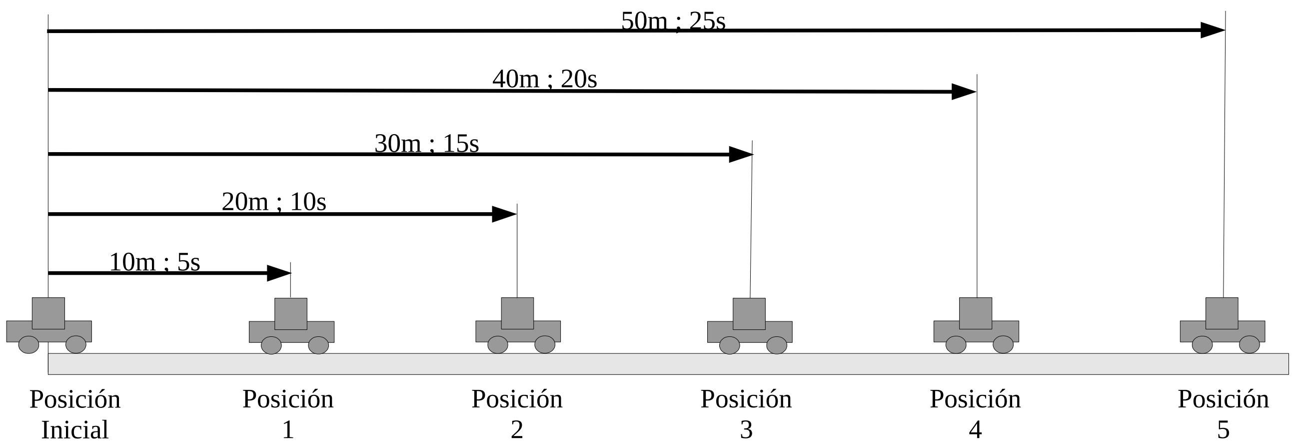
La mecánica es la parte de la Física que estudia el movimiento y las causas que lo genera siendo la cinemática la ciencia que estudia los movimientos sin importar la causa que lo genera y la dinámica estudia la causa que genera el movimiento.
Para describir un movimiento es necesario primero fijar un sistema referencial que en este caso será el sistema cartesiano ortogonal. A partir de esta referencia se ubica el punto utilizando un vector que lo posicione denominado vector posición cuyo origen es el origen de coordenadas y su extremo es el punto en cuestión.
La variación de este vector entre dos posiciones diferentes determina el vector desplazamiento obtenida mediante la diferencia de la posición final menos la inicial.
La variación de este desplazamiento en un intervalo de tiempo da origen al vector velocidad media entre esas dos posiciones.
Siguiendo con el mismo razonamiento, la variación del vector velocidad en un intervalo de tiempo definirá el vector aceleración media.
Es necesario diferenciar el vector desplazamiento de la trayectoria para un intervalo de tiempo dado, siendo esta última la curva que se genera uniendo las sucesivas posiciones del punto.
Se estudiarán diferentes tipos de movimientos comenzando por aquellos cuya trayectoria es una recta comenzando por el aquel que recorre espacios iguales en tiempos iguales denominado Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) siendo su característica la de poseer velocidad constante en módulo. Seguidamente se analizará aquel cuya velocidad varía uniformemente al que se denominará Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado.

Movimiento Rectilíneo Uniforme – MRU.

Por ejemplo se informa que un móvil se desplaza en linea recta y la posición que posee en cada instante de tiempo se presenta en la siguiente tabla:

Posición	Distancia (m)	Tiempo (s)
1	10	5
2	20	10
3	30	15
4	40	20
5	50	25

Si se realiza un esquema de la situación planteada y se define que las posiciones se medirán respecto del punto de partida o posición inicial tomado como referencia cero:



Como el movimiento se realiza en una sola dirección es posible identificarlo mediante un vector posición de una sola dimensión. Si esta se hace coincidir con el eje “x” el vector posición será

$$\vec{r}=x(t)\,\vec{i}$$

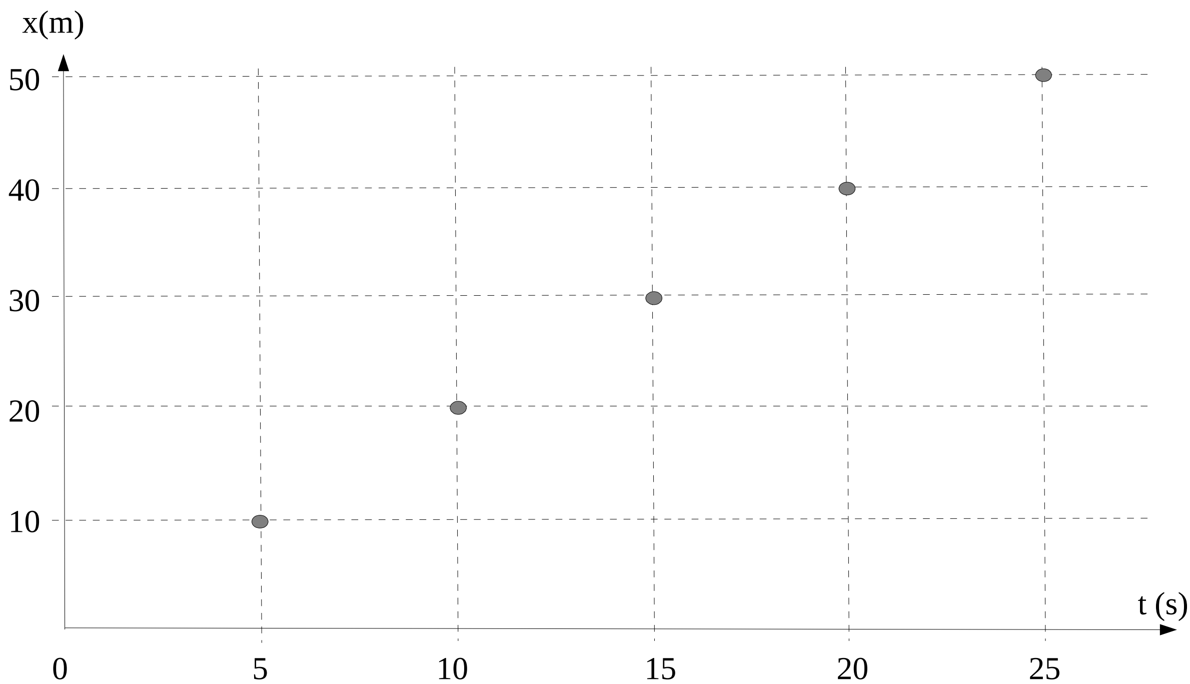
Para el caso del ejemplo la posición 1 quedará definida por el siguiente vector posición

$$\vec{r}=(10\,\vec{i})\,m$$

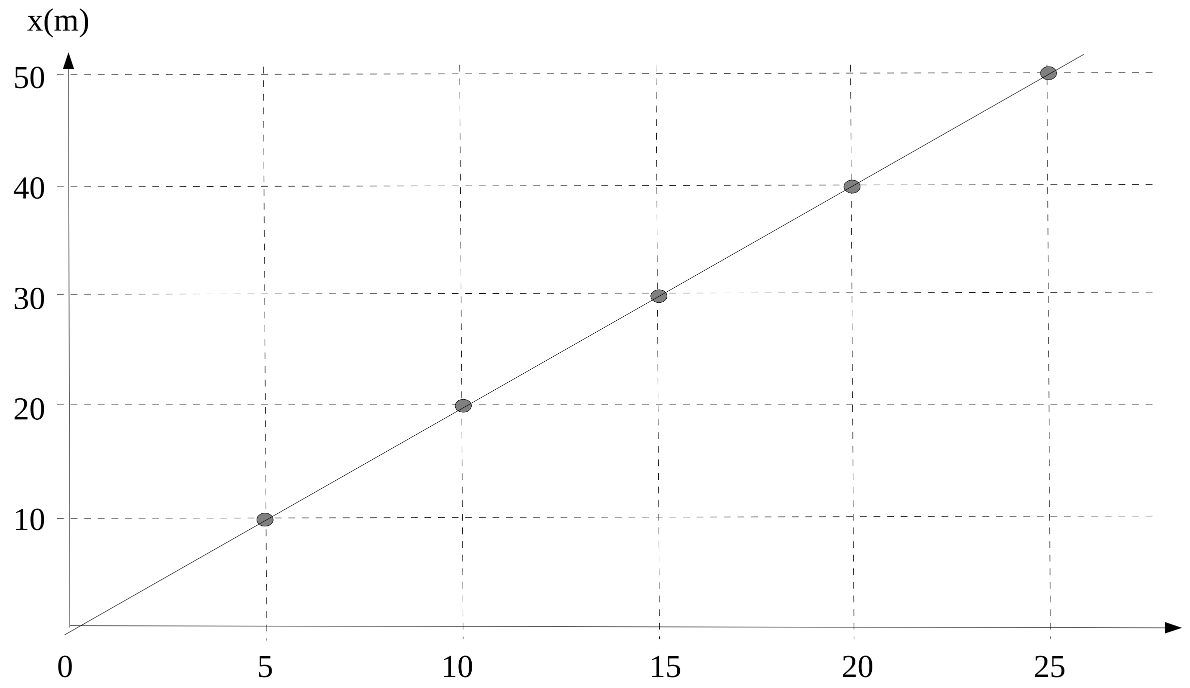
Para definir el desplazamiento entre dos puntos cualesquiera por ejemplo entre la posición 1 y 3 se realiza la diferencia entre ellas de la siguiente manera

$$\Delta\,\vec{r}=\vec{x}_{final}-\vec{x}_{inicial}$$
$$\Delta\,\vec{r}=(30\,\vec{i}-10\,\vec{i})=(20\,\vec{i})\,m$$

Esta información puede visualizarse mejor si los datos se representan ubicados en un sistema de ejes cartesianos, de manera que en el eje horizontal se indiquen los tiempos y en el eje vertical las posiciones respecto a una referencia adoptada en forma arbitraria.
En este caso la posición inicial coincide con el instante en el que se comienza a cronometrar.
Las sucesivas posiciones se indicarán mediante puntos sobre los ejes cartesianos x , t.



Este gráfico indica la posición del móvil para cada instante de acuerdo a la información dada. Pero como el movimiento se realiza en forma continua y no cada 5 segundos, el gráfico deberá ser continuo ya que en cada instante de tiempo el móvil deberá estar en la correspondiente posición, por ejemplo:



Velocidad media

La velocidad media se define como

$$\vec{v}_{med}=\frac{\vec{x_{final}}-\vec{x_{inicial}}}{t_{final}-t_{inicial}}$$

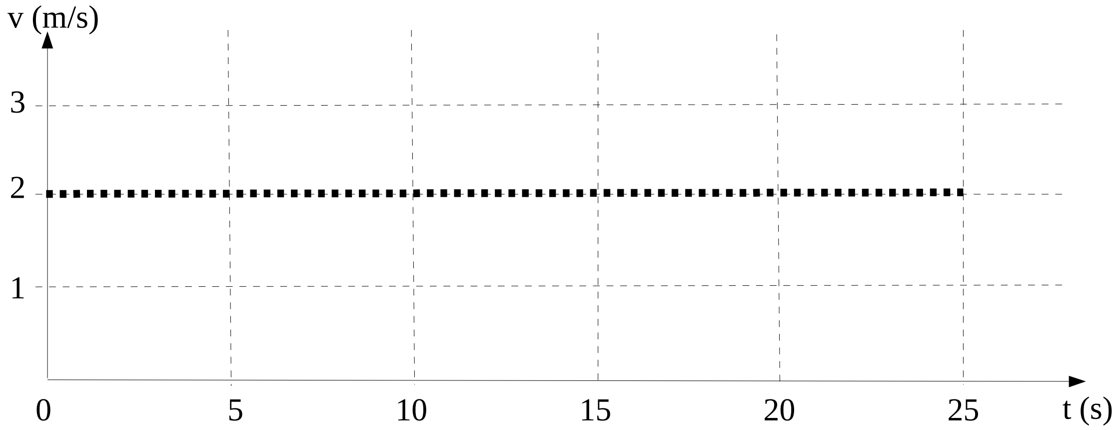
Por lo tanto la velocidad media en el tramo 0-5 segundos valdrá

$$\vec{v}_{0-5}=\frac{\vec{x}_5-\vec{x}_0}{t_5-t_0}=\frac{10-0}{5-0}=(2\vec{i})\frac{m}{s}$$

La correspondiente velocidad media en el siguiente tramo, es decir entre 5 y 10 segundos será

$$\vec{v}_{5-10}=\frac{20-10}{10-5}=(2\vec{i})\frac{m}{s}$$

Las velocidades medias en cada tramo tienen el mismo valor numérico en consecuencia la velocidad media coincidirá en este caso con la obtenida si se calcula con el intervalo de 25s para todo el recorrido.
Si se gráfica la velocidad en función del tiempo se obtiene lo siguiente:



De esta manera la línea punteada gruesa corresponde a la velocidad media durante los 25 segundos que dura el movimiento y se interpreta como aquella velocidad que debería tener el móvil en forma constante para lograr el mismo desplazamiento en el mismo tiempo.
Es importante resaltar que las gráficas mostradas nada tienen que ver con la trayectoria, ya que esta última corresponde a la "huella" que deja el móvil al desplazarse que en este caso se realizó en forma rectilínea.

Velocidad instantánea

Si se comienza a disminuir el intervalo de tiempo hasta hacerlo muy pequeño, la velocidad media se transformará en instantánea, por ejemplo la velocidad que indica el velocímetro de los automóviles en cada instante. Este valor numérico de la velocidad se denomina celeridad o rapidez.
La expresión de la velocidad instantánea se define como aquella que posee un móvil en un instante determinado. Para determinarla analíticamente se recurre al concepto de límite como:

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

Esta velocidad puede ser determinada gráficamente mediante la tangente trigonométrica (o pendiente) de la recta tangente a la curva en el instante que se quiere determinar teniendo en cuenta las escalas utilizadas en cada eje.
Para determinar la ley de variación de la posición en un movimiento rectilíneo cuya velocidad permanece constante se plantea la definición dada dejando variable tanto la posición final como el tiempo final y se parte de una posición inicial x_0 para el tiempo t_0. Se realizara el cálculo de las magnitudes en forma escalar ya que el movimiento se realiza sobre una trayectoria recta. Por último se despeja la posición final quedando

$$v_{med}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x-x_0}{t-t_0}$$
$$x-x_0=v_{med}.(t-t_0)$$
$$x=x_0+v_{med}.(t-t_0)$$

Esta última expresión se conoce como ecuación horaria para el movimiento rectilíneo uniforme y responde a la ecuación de la linea recta donde la ordenada al origen corresponde a la posición inicial para el tiempo inicial t_0.
Si se comienza a cronometrar el tiempo desde cero la expresión de la ecuación horaria se reduce a la siguiente

$$x=x_0+v.(t-0)$$

$$x=x_0+v.t$$

El problema de encuentro entre dos móviles.

Si ahora se presenta el caso de dos móviles que poseen diferentes velocidades, el Móvil 1 se mueve a 100km/h y el Móvil 2 a 50km/h en sentido contrario y para el mismo instante de tiempo parten de dos posiciones diferentes separadas una distancia de 400km acercándose entre si.
Se puede de apreciar que:

- ✔ Ambos móviles se analizan a partir del mismo instante de tiempo.
- ✔ El móvil 1 parte de la posición de referencia (x_0 = 0*m*) mientras que el Móvil 2 parte a 400km de distancia desde la posición de referencia.
- ✔ El móvil 1 se aleja cada vez mas de la posición de referencia por lo que su velocidad es positiva coincidiendo con el sentido positivo de la posición.
- ✔ El móvil 2 se acerca a la posición de referencia, su posición final es menor a la inicial por lo que la velocidad será negativa.

Bajo estas condiciones ambos móviles se encontrarán en una posición x_e en un tiempo t_e que puede determinarse si se plantea un sistema de ecuaciones con cada una de las expresiones que corresponden a cada móvil. Para ello se plantean las expresiones correspondientes quedando

Móvil 1

$$x_e - x_0 = v_1 (t_e - t_0)$$
$$x_e - 0 = 100 (t_e - 0)$$
$$x_e = 100\, t_e \qquad (1)$$

Móvil 2

Para obtener la velocidad del móvil 2 se aplica la definición de velocidad que dando

$$x_e - x_0 = v_1 (t_e - t_0)$$
$$x_e - 400 = -50 (t_e - 0)$$
$$x_e = -50\, t_e + 400 \qquad (2)$$

Planteando el sistema de ecuaciones quedará

$$x_e = 100 . t_e$$
$$x_e = 400 - 50 . t_e$$

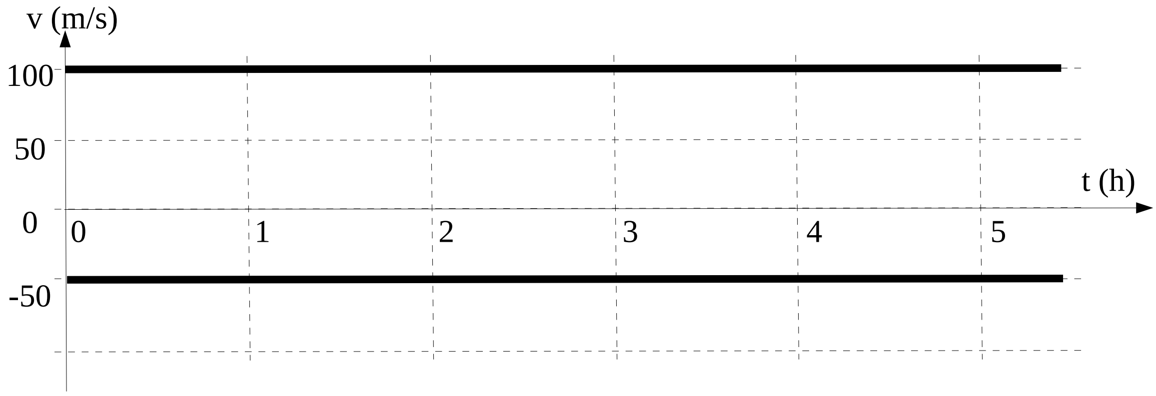
El encuentro se producirá cuando ambos móviles se encuentren en la misma posición y en el mismo tiempo, lo que matemáticamente significa encontrar la solución única del sistema. Mediante la igualación quedará

$$100 . t_e = 400 - 50 . t_e$$
$$100.\mathrm{t}_e + 50 . t_e = 400$$
$$150 . t_e = 400$$
$$t_e = \frac{400}{150} = 2{,}67\, hs$$

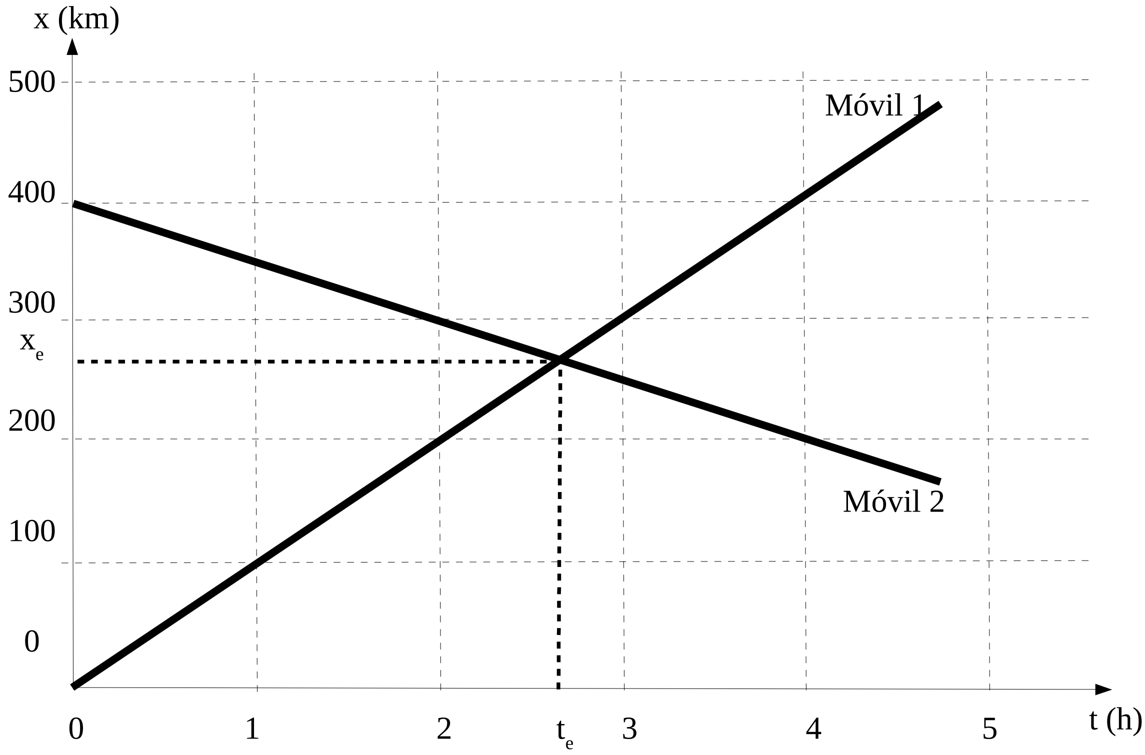
La posición de encuentro se obtiene reemplazando este valor del tiempo en cualquiera de las expresiones quedando

$$x_e = 100 . t_e$$
$$x_e = 100 . 2{,}67 = 267\, km$$

Si se grafican las velocidades de ambos móviles se tendrá



Si se realizan las correspondientes gráficas respetando la escala de tiempos se tendrá:



Aceleración media e instantánea

Si ahora el móvil se desplaza en linea recta pero ya no posee velocidad constante sino que se desplaza cada vez mas rápido, su movimiento será acelerado.
Se define la aceleración media como el cociente entre el incremento de velocidad respecto del correspondiente incremento de tiempo. La expresión es

$$\vec{a}_{med}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Se debe tener cuidado al realizar la diferencia entre el vector velocidad final e inicial por lo que se realiza el siguiente ejemplo

La aceleración para cada ejemplo se obtendrá utilizando la definición de aceleración media. Por lo tanto, si la diferencia de velocidades posee el mismo sentido el movimiento será acelerado, de lo contrario el móvil “se va frenando” por lo que el movimiento será desacelerado.
Si ahora se desea obtener la aceleración instantánea se tendrá

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Esta se puede determinar gráficamente mediante la tangente al instante que se quiere determinar en la gráfica velocidad-tiempo respetando las escalas del dibujo.

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado - (MRUV)

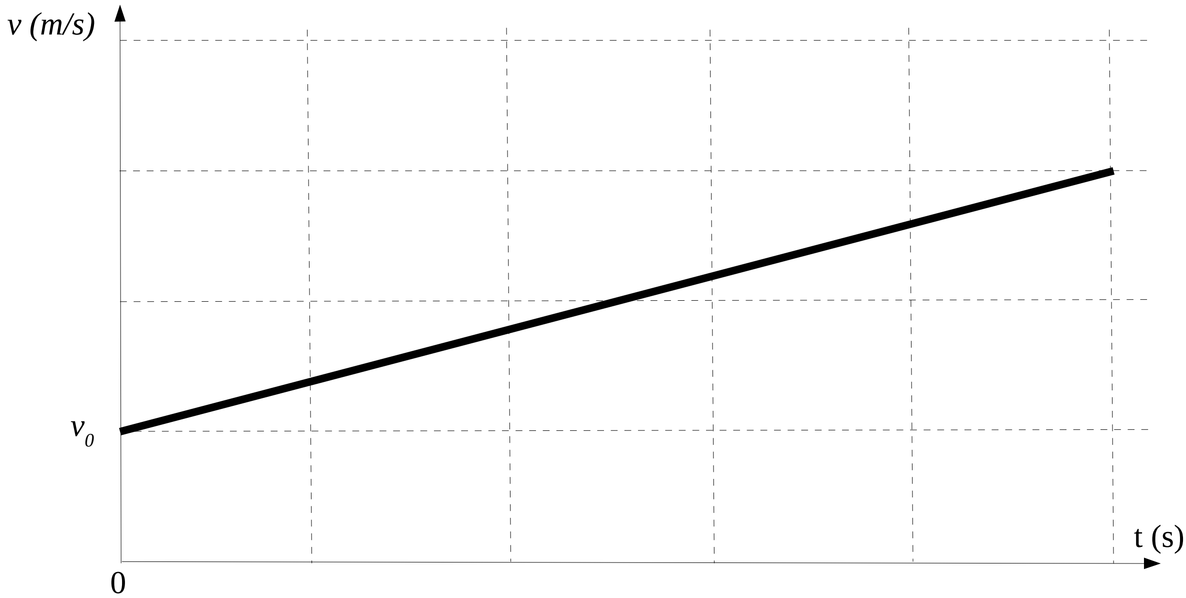
Si la aceleración es constante, la aceleración media es igual a la instantánea y en ese caso el movimiento se denomina rectilíneo y uniformemente variado.
La expresión de la velocidad para un instante cualquiera será

$$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t-t_0}$$
$$\vec{v}-\vec{v}_0=\vec{a}.(t-t_0)$$
$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}.(t-t_0)$$

Si el instante inicial es cero la expresión queda

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}.t$$

El gráfico correspondiente a este movimiento será



Para determinar la ecuación horaria (x = f(t)) del MRUV se la puede determinar mediante la expresión de la suma de dos áreas; una formada por un rectángulo de base "t" por su altura "V_0" y la del triángulo cuya área es la mitad del producto entre la base dada por "t" y la altura dada por la diferencia entre la velocidad final y la inicial, es decir "$v - v_0$". La expresión será

$$x=v_0t+\frac{t.(v-v_0)}{2}$$

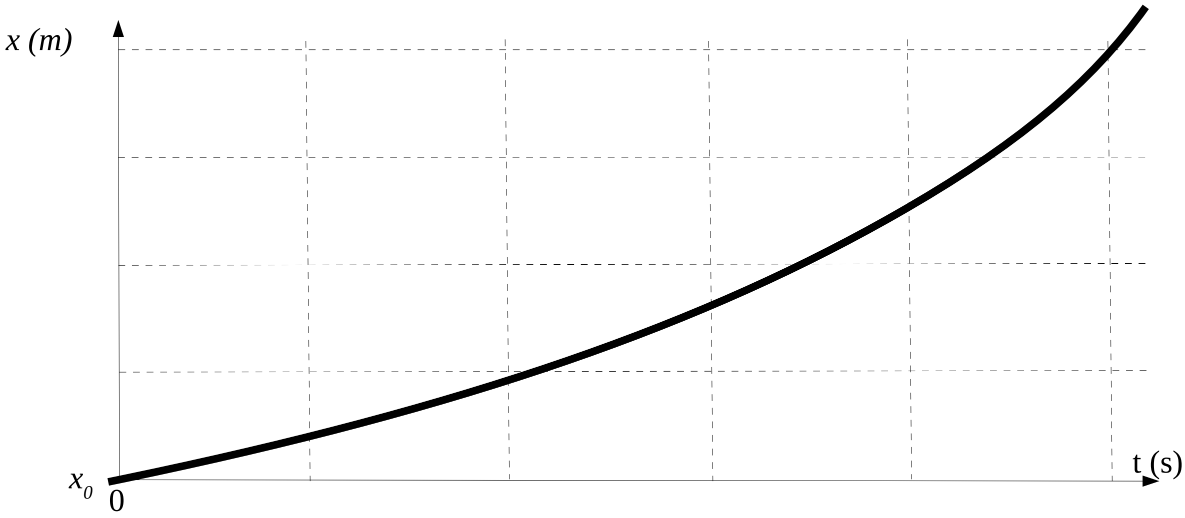
Sabiendo que la aceleración es

$$a=\frac{v-v_0}{t}$$

Se despeja de esta última la diferencia de velocidades y se reemplaza en la anterior quedando

$$x=v_0t+\frac{t.(a.t)}{2}$$
$$x=v_0t+\frac{a.t^2}{2}$$

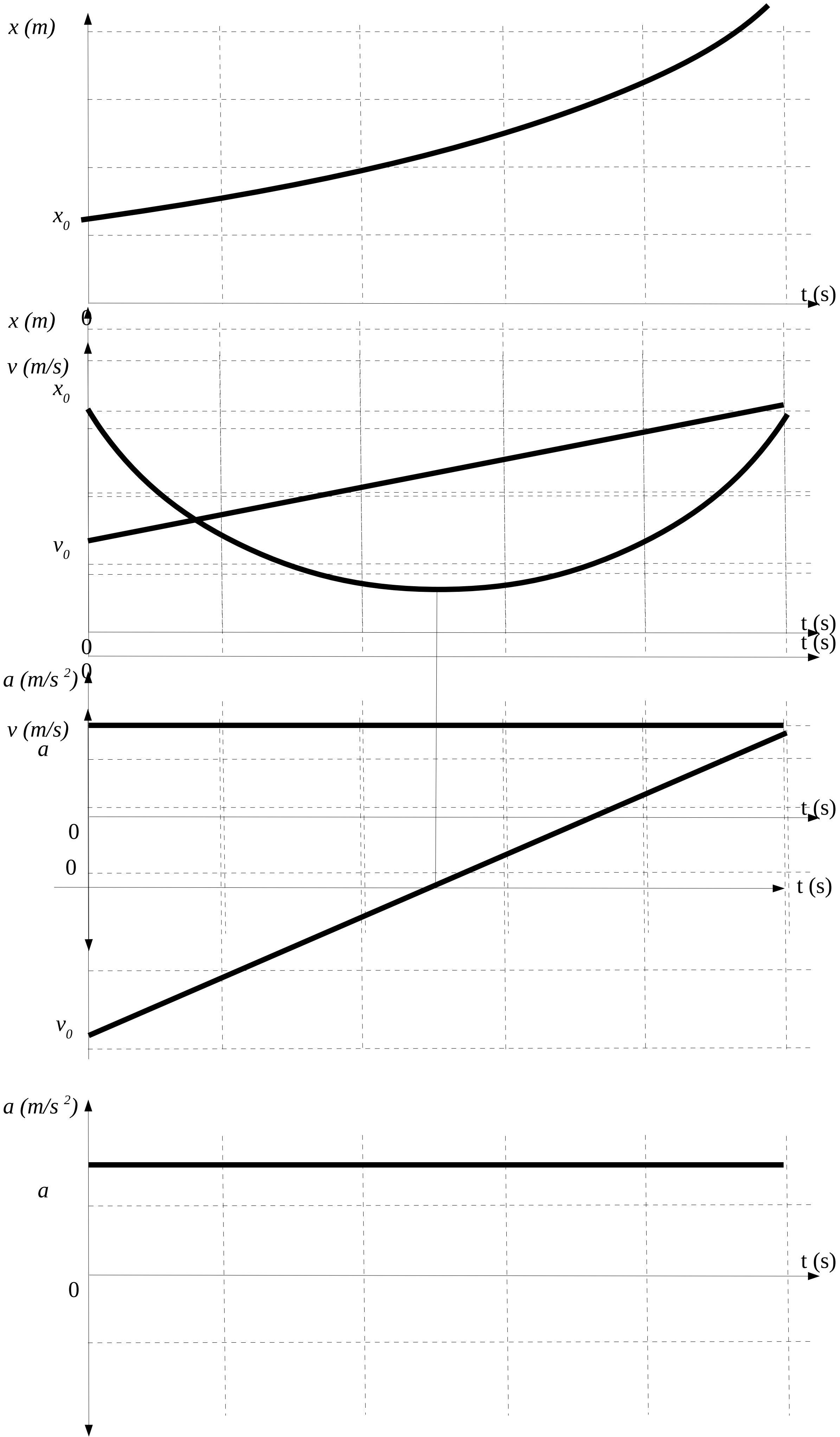
El gráfico de la posición en función del tiempo para esta expresión donde la posición inicial es nula, la velocidad inicial es >0 y la aceleración >0 la curva correspondiente es:

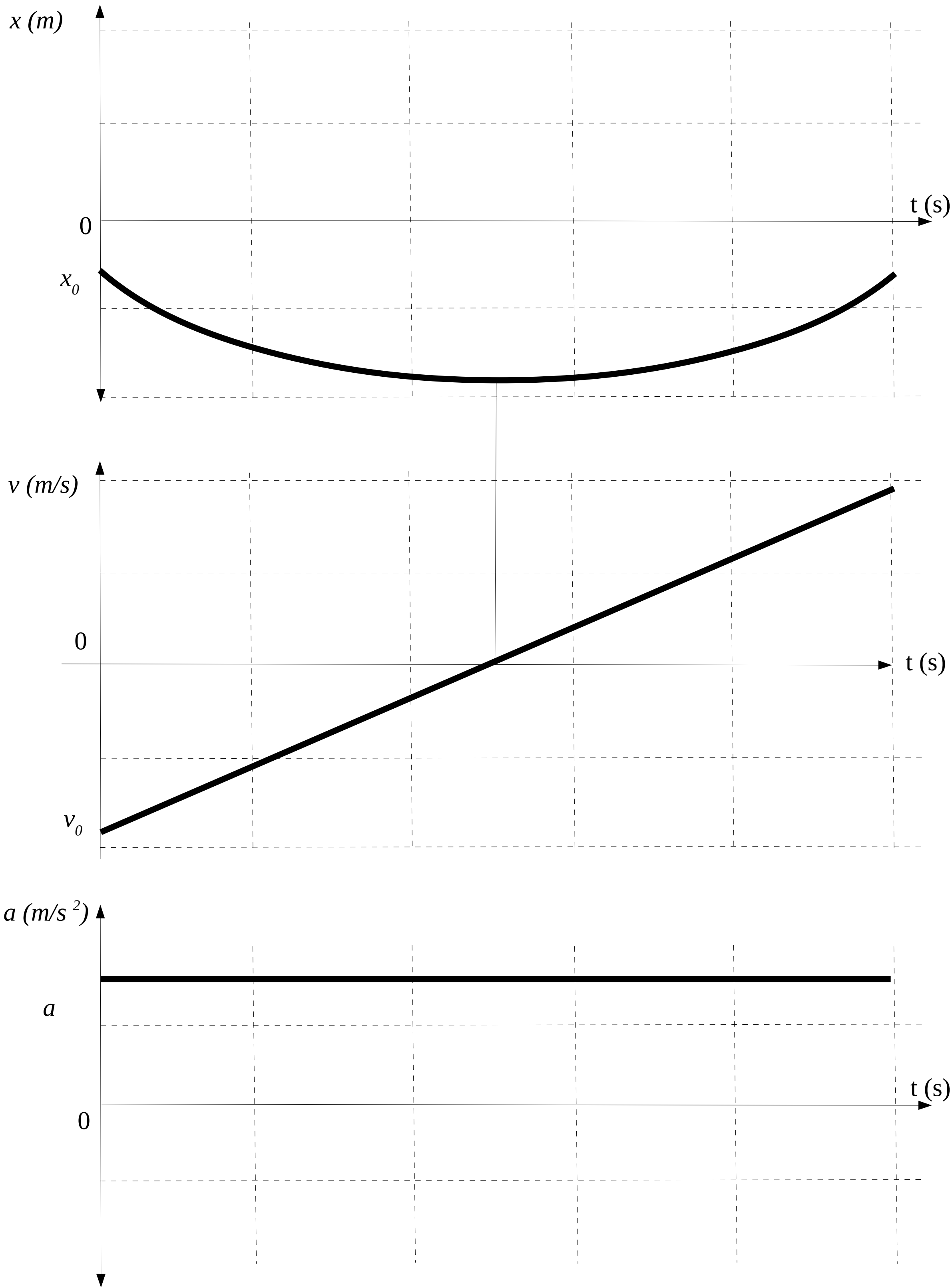


El gráfico de la aceleración respecto al tiempo para este último caso es

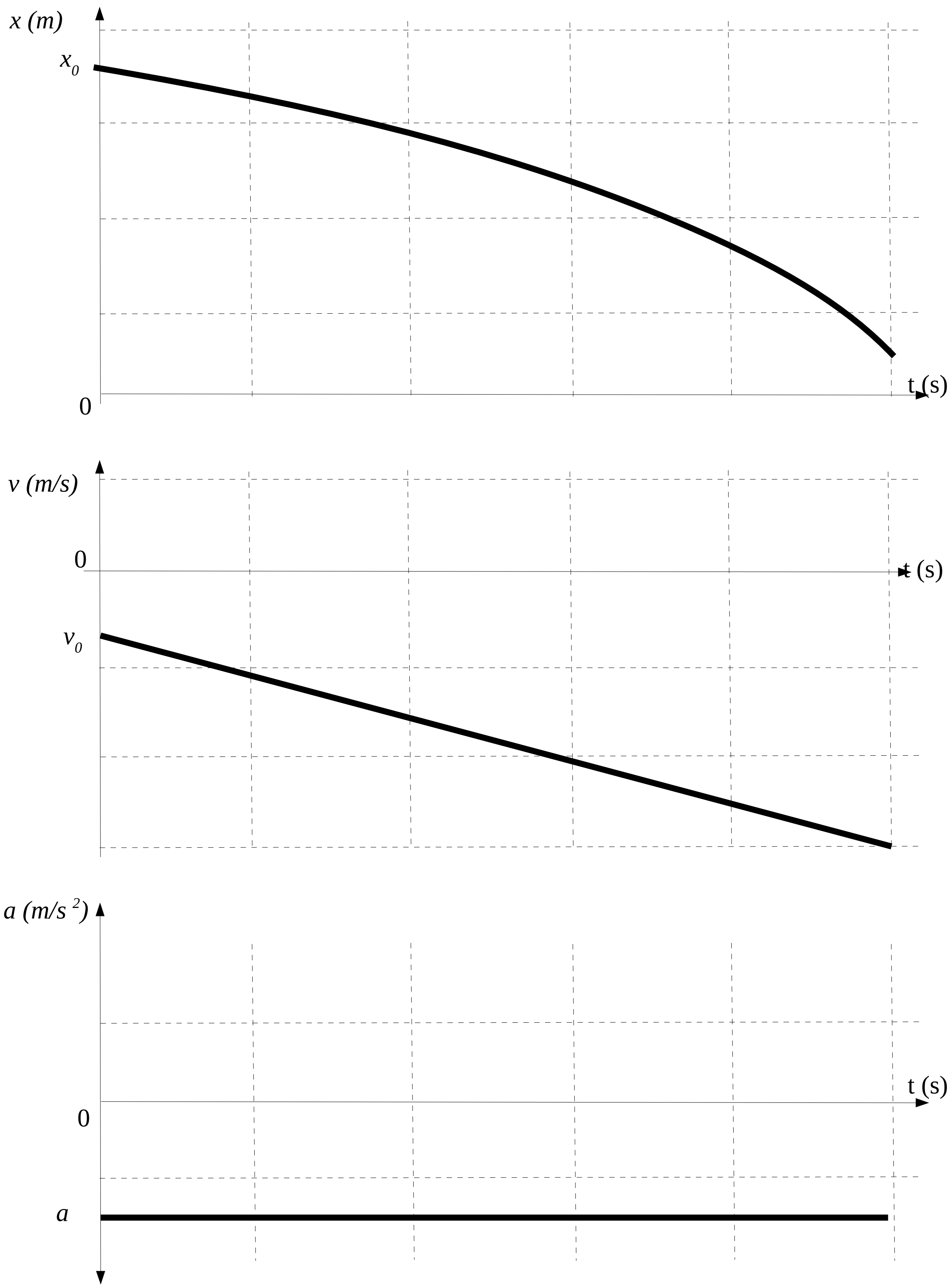
A continuación se presentan los gráficos de *x = f(t), v = f(t) y a = f(t)* para diferentes casos de este tipo de movimiento rectilíneo uniformemente variado a saber:

$x_0 > 0 \quad v_0 > 0 \quad a > 0$





x (m)
t (s)
0
x0
v (m/s)
0
t (s)
v0
a (m/s 2)
a
t (s)
0



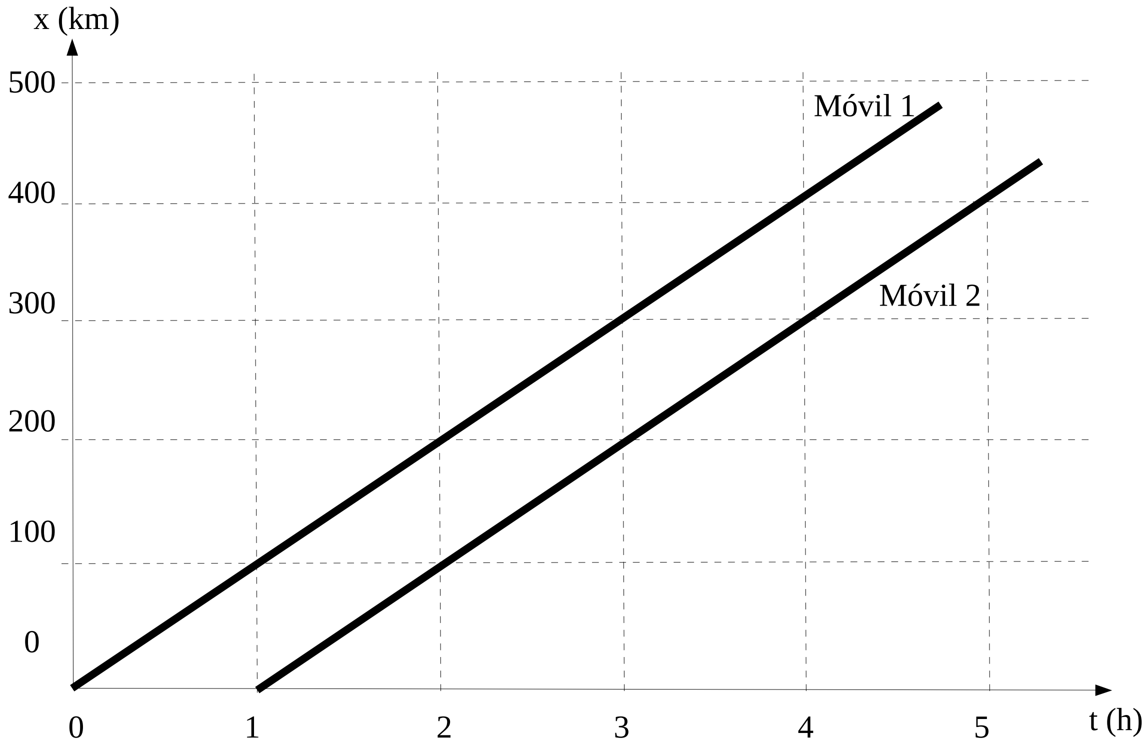
x (m)
x0
0
t (s)
v (m/s)
0
t (s)
v0
a (m/s 2)
t (s)
0
a

Cuando la referencia de tiempo es diferente a cero por ejemplo si se considera que el movimiento comienza desde un instante $t_0 \neq 0$ la expresión de la posición en función del tiempo quedará de la siguiente manera

$$x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

La gráfica resultante es básicamente la misma que las mostradas mas arriba con la única diferencia que el tiempo t_0 “mueve” la curva en forma horizontal.

Por ejemplo si dos móviles parten de la misma posición a velocidad constante de 100km/h en la misma dirección y sentido pero el Móvil 2 parte con una diferencia de una hora mas tarde, las gráficas de v = f(t) para cada uno de ellos será:

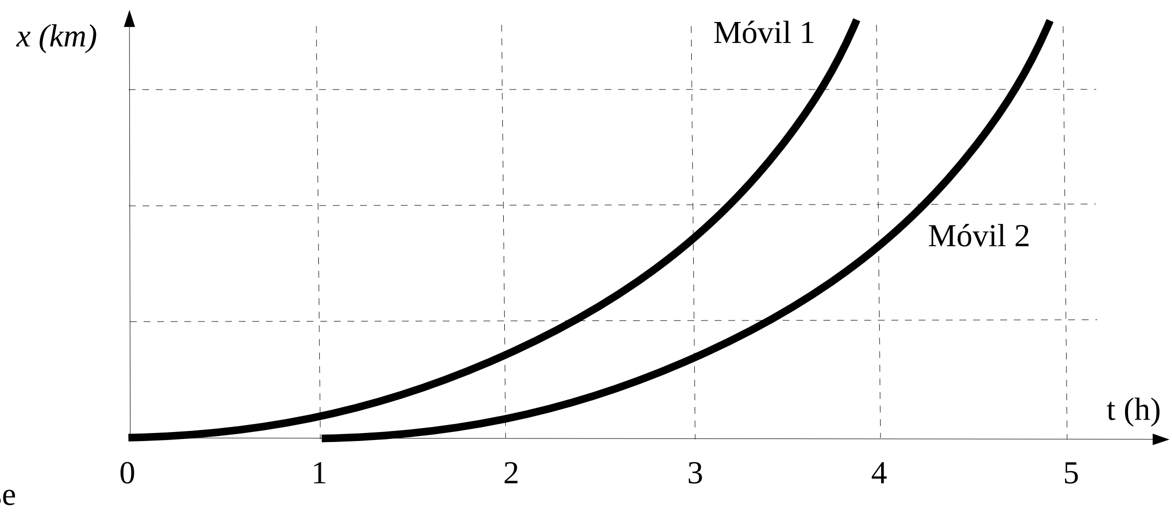


Las expresiones correspondientes serán

$$x=v(t-t_0)$$
$$x=100(t_e-0)$$
$$x=100t \qquad (Móvil\,1)$$

$$x=v(t-t_0)$$
$$x=100(t-1)$$
$$x=100t-100 \qquad (Móvil\,2)$$

Para el caso de que exista aceleración y las características de los dos móviles sea la misma, esto es $v_0=0$ pero el Móvil 2 parte una hora mas tarde, las gráficas de cada uno de ellos será la siguiente:



Si se

desea tener una expresión en el MRUV en la que no figura el tiempo se debe realizar el siguiente reemplazo:

La ecuación horaria es $x = v_0 t + \frac{1}{2} a.t^2$ para el caso de que el instante inicial $t_0 = 0$

Del concepto de aceleración se tiene que el tiempo $t = \frac{v - v_0}{a}$

Reemplazando esta última en la ecuación horaria se tendrá

$$x - x_0 = v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} a.\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$
$$x - x_0 = v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} \frac{(v - v_0)^2}{a}$$
$$x - x_0 = \frac{(v - v_0)}{a} \left(v_0 + \frac{1}{2}(v - v_0)\right)$$
$$x - x_0 = \frac{(v - v_0)}{a} \left(v_0 + \frac{v}{2} - \frac{v_0}{2}\right)$$
$$x - x_0 = \frac{(v - v_0)}{a} \frac{(v + v_0)}{2}$$
$$x - x_0 = \frac{(v^2 - v_0^2)}{2a}$$

Despejando la velocidad de la última expresión quedará

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Si la aceleración es negativa y , la velocidad final resultará menor que la inicial (siendo el paréntesis mayor que cero).