Transformada Z

Señales y Sistemas
2021

El sistema de este ejercicio es un sistema de muestreo de datos cuyo funcionamiento está dado por la ecuacion a diferencias siguiente

$$y[n+1] - y[n] = x[n]$$

En nuestro sistema la resta entre la salida del instante siguiente y la salida actual es igual a la entrada actual. Como este sistema no es físicamente posible podemos reescribirlo como la salida del momento actual es igual a la suma de la salida y la entrada en el instante anterior.

$$y[n] = x[n-1] + y[n-1]$$

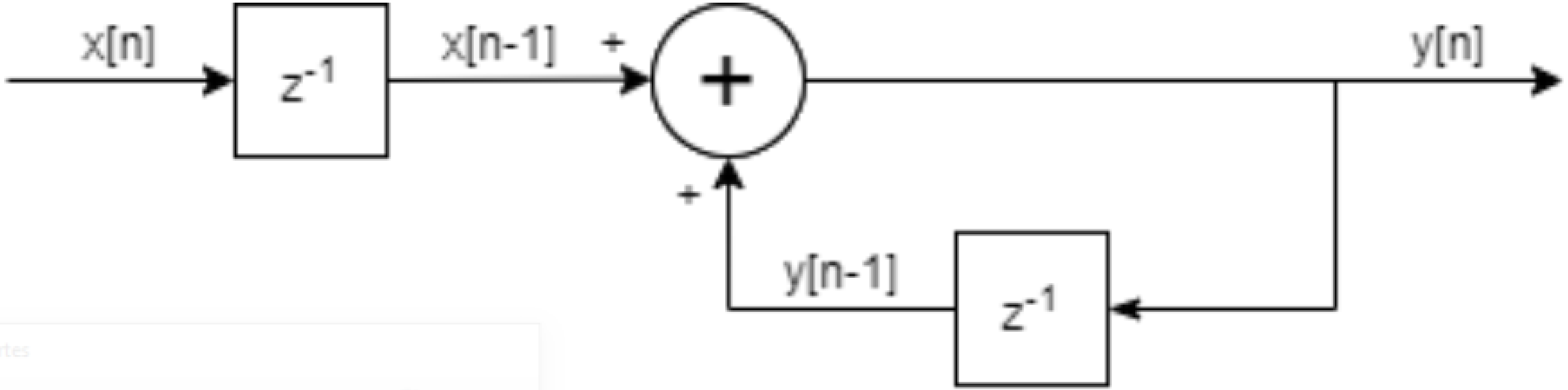


Diagrama de simulación subsistema 1

Como podemos observar este sistema es un acumulador, si la entrada x[n] no decrece en el tiempo el sistema seguirá creciendo volviendolo inestable. Afortunadamente, es controlado mediante una realimentacion proporcional al error previo

$$x[n] = k\left(\frac{1}{2^n} - y[n-1]\right)$$

Ahora $x[n]$ no es libre, sino que depende del error entre una referencia $r[n] = \frac{1}{2^n}$ y la salida de la muestra anterior $y[n-1]$. Agregamos esta ecuación al diagrama de simulación

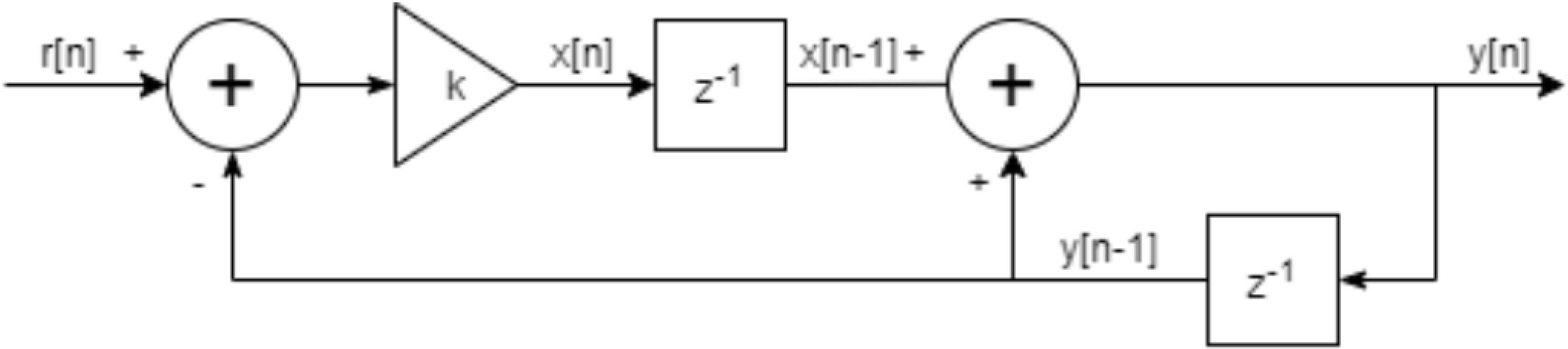


Diagrama de simulación sistema completo

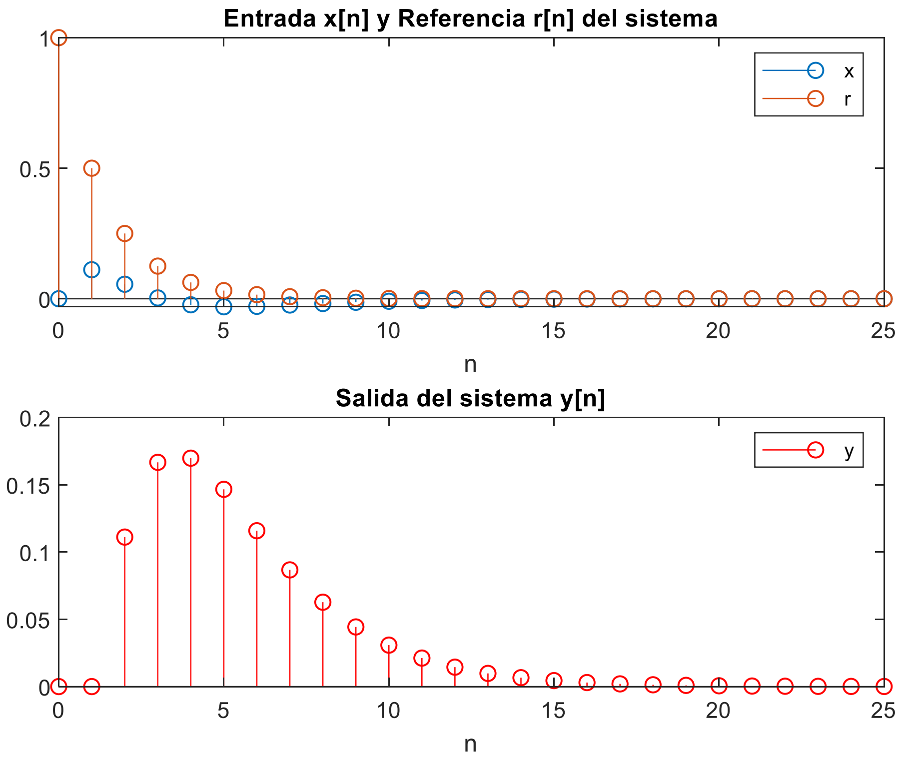
A medida que el tiempo crece, la exponencial r[n] se extingue y nos queda x[n] proporcional al negativo de la salida previa

$$\lim_{n \to \infty} x[n-1] = -ky[n-2]$$

Si reemplazamos en la salida del sistema

$$y[n] = y[n-1] - ky[n-2]$$

Podemos concluir que si k<1 entonces la salida tenderá a 0 con el correr de las muestras.



Estabilidad del sistema

Según la definicion de nuestro sistema tomamos como entrada a $r[n]$ y como salida a $y[n]$ entonces la respuesta al impulso en el dominio de la transformada Z

$$H(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

Entonces, pasamos las expresiones al dominio z para poder operar facilmente

$$r[n] = \frac{1}{2^n} \longrightarrow R(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y[n] = x[n-1] + y[n-1] \longrightarrow Y(z) = z^{-1}X(z) + z^{-1}Y(z)$$

$$x[n] = k\left(\frac{1}{2^n} - y[n-1]\right) \longrightarrow X(z) = k(R(z) - z^{-1}Y(z))$$

Reemplazamos $X(z)$

$$Y(z) = z^{-1}X(z) + z^{-1}Y(z) = z^{-1}[k(R(z) - z^{-1}Y(z))] + z^{-1}Y(z)$$

Trabajando la expresion se llega a

$$H(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{kz^{-1}}{1 - z^{-1} + kz^{-2}} = \frac{kz^{-1}}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-2})}$$

La respuesta al impulso del sistema nos identifica su comportamiento. Los valores de z que hacen cero al numerado se denominan ceros y los valores de z que hace cero al denominador se denominan polos. En este sistema tiene dos polos que dependen del valor de k y un cero en el origen. Donde

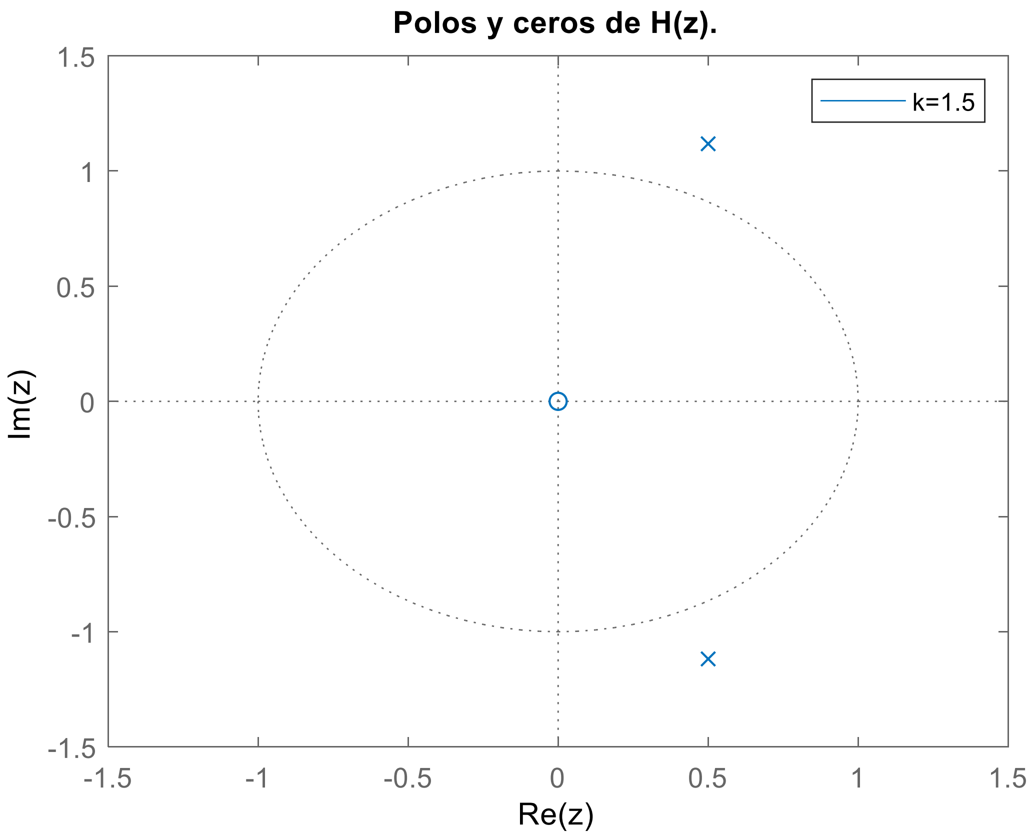
$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4k}{4}}$$

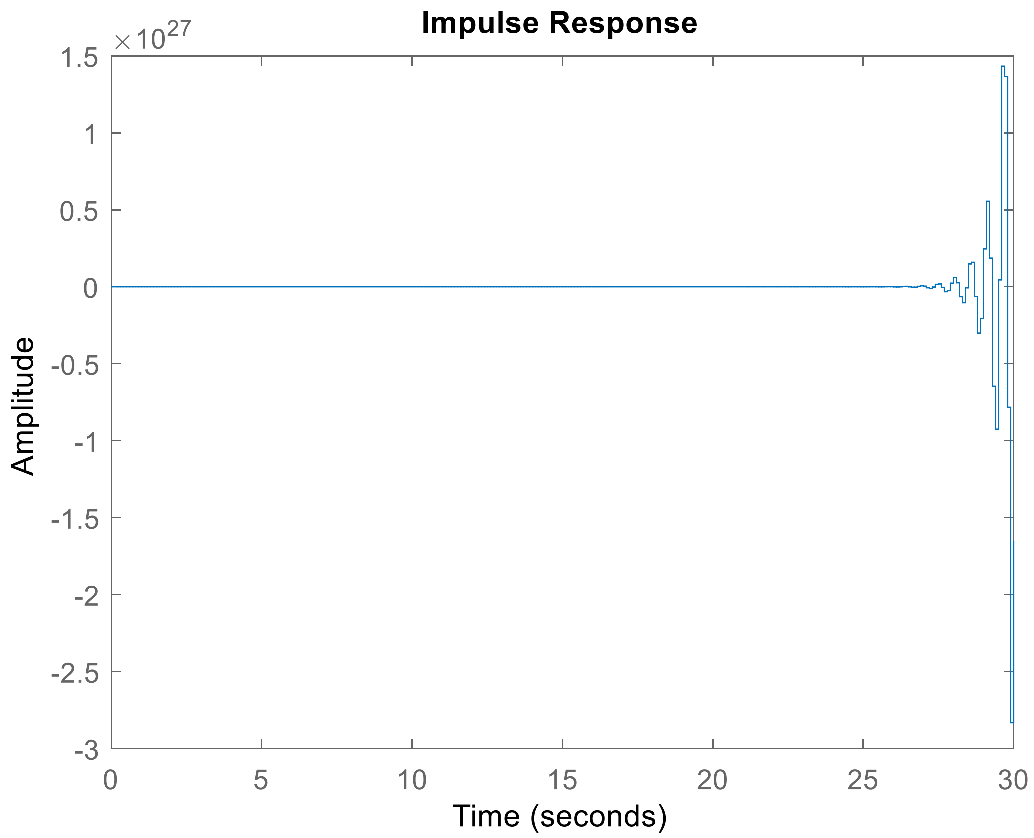
La estabilidad del sistema va a depender de donde esten situados los polos

- Si los polos se encuentran dentro del círculo unitario, la ROC contiene al círculo unitario y en consecuencia el sistema es estable.

Si graficamos la respuesta al impulso del sistema para distintos valores de k podemos ver para qué valores resulta estable. Cuando k < 1/4 el numerador de la raiz es positivo por lo que solo tenemos componentes reales. Verificamos mediante el grafico de polos y ceros

Ubicación de polos y ceros respecto de k





El sistema es estable para k<1.

Respuesta del sistema con condiciones iniciales

Si el sistema no parte del reposo entonces se comporta de manera distinta. Mediante el uso de la trasnformada Z unilateral podemos incluir las condiciones iniciales del sistema. En el caso de la trasnformada z bilateral se suponen siempre nulas.

Calculamos las trasnformadas unilaterales para las ecuaciones del sistema

$$r[n] = \frac{1}{2^n} \longrightarrow R(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y[n] = x[n-1] + y[n-1] \longrightarrow Y(z) = [z^{-1}X(z) + x[-1]] + [z^{-1}Y(z) + y[-1]]$$

$$x[n] = k\left(\frac{1}{2^n} - y[n-1]\right) \longrightarrow X(z) = k[R(z) - (z^{-1}Y(z) + y[-1])]$$

Reemplazando

$$X(z) = k\left(\frac{1}{1 - az^{-1}} - z^{-1}Y(z) - y[-1]\right)$$

$$Y(z) = z^{-1}\left[k\left(\frac{1}{1-az^{-1}} - z^{-1}Y(z) - y[-1]\right)\right] + x[-1] + z^{-1}Y(z) + y[-1]$$

despejando $Y(z)$

$$Y(z)(1 - z^{-1} + kz^{-2}) = \frac{kz^{-1}}{1-az^{-1}} - ky[-1]z^{-1} + x[-1] + y[-1]$$

$$Y(z) = \frac{kz^{-1}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1}+kz^{-2})} + \frac{(x[-1]+y[-1]) - ky[-1]z^{-1}}{(1-z^{-1}+kz^{-2})}$$

De acuerdo a esta expresión la salida depende de dos términos. El primero a la izquierda, se denomina **respuesta de estado cero** ya que coicide con la respuesta si las condiciones iniciales fueran nulas. El segundo término si depende de las condiciones iniciales pero no se ve afectado por la entrada, por eso se llama **respuesta de entrada cero**.

$$Y(z) = Y_{estado_0}(z) + Y_{entrada_0}(z)$$

Las condiciones iniciales planteadas en el ejercicio son

$$CI : y[0] - y[1] = 0$$

sin embargo, anteriormente atrasamos una muestra esta ecuación para poder interpretarlo físicamente

$$CI : y[-1] - y[0] = 0$$

teniendo en cuenta que $y[n] = x[n-1] + y[n-1]$ y estableciendo $n = 0$ nos queda

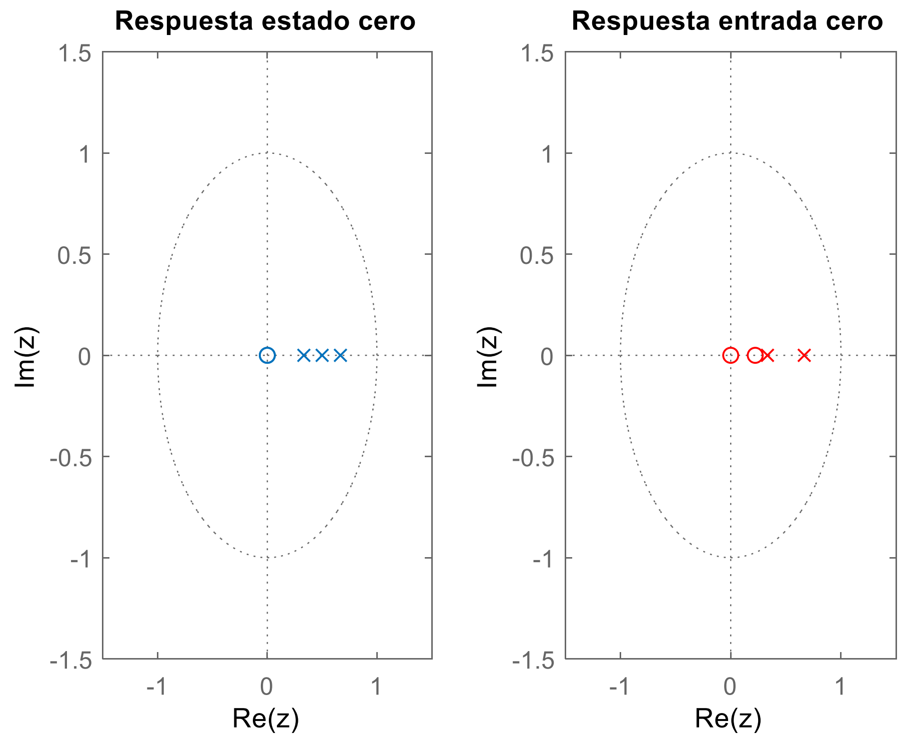
$$y[0] = x[-1] + y[-1]$$

Definimos un valor para $y[0] = y[-1] = 1$

$$Y(z) = \frac{kz^{-1}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1}+kz^{-2})} + \frac{y[0] - ky[-1]z^{-1}}{(1-z^{-1}+kz^{-2})}$$

no obstante, sin importar el valor que asignemos a las condiciones iniciales, la respuesta de entrada nula agrega un nuevo cero ubicado en $z = k$.

- Fijamos $k = 2/9$ y calculamos las respuestas para cada caso



- Observamos que los polos se encuentran dentro del círculo unitario por lo que la respuesta será estable.

Finalmente, descomponemos en fraciones parciales las expresiones de Y(z)

$$Y_{estado_0}(z) = \frac{kz^{-1}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1}+kz^{-2})} = \frac{A}{(1-az^{-1})} + \frac{B}{(1-p_1z^{-1})} + \frac{C}{(1-p_2z^{-1})}$$

$$Y_{estado_0}\begin{bmatrix} p_1p_2 & ap_2 & ap_1 & 0 \\ p_1+p_2 & a+p_2 & a+p_1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_{entrada_0}(z) = \frac{y[0]-ky[-1]z^{-1}}{(1-z^{-1}+kz^{-2})} = \frac{D}{(1-p_1z^{-1})} + \frac{E}{(1-p_2z^{-1})}$$

$$Y_{entrada_0}\begin{bmatrix} p_2 & p_1 & y[0]k \\ 1 & 1 & y[0] \end{bmatrix}$$

Resultan los siguientes sistemas de ecuaciones

Nos queda $A = -10.8, B = 7.2, C = 3.6, D = 0.1, E = 0.4$ con $a = 1/2, p_1 = 2/3, p_2 = 1/3$.

$$Y_{estado_0}(z) = \frac{-10.8}{(1 - 1/2z^{-1})} + \frac{7.2}{(1 - 2/3z^{-1})} + \frac{3.6}{(1 - 1/3z^{-1})}$$

$$Y_{entrada_0}(z) = \frac{0.1}{(1 - 2/3z^{-1})} + \frac{0.4}{(1 - 1/3z^{-1})}$$

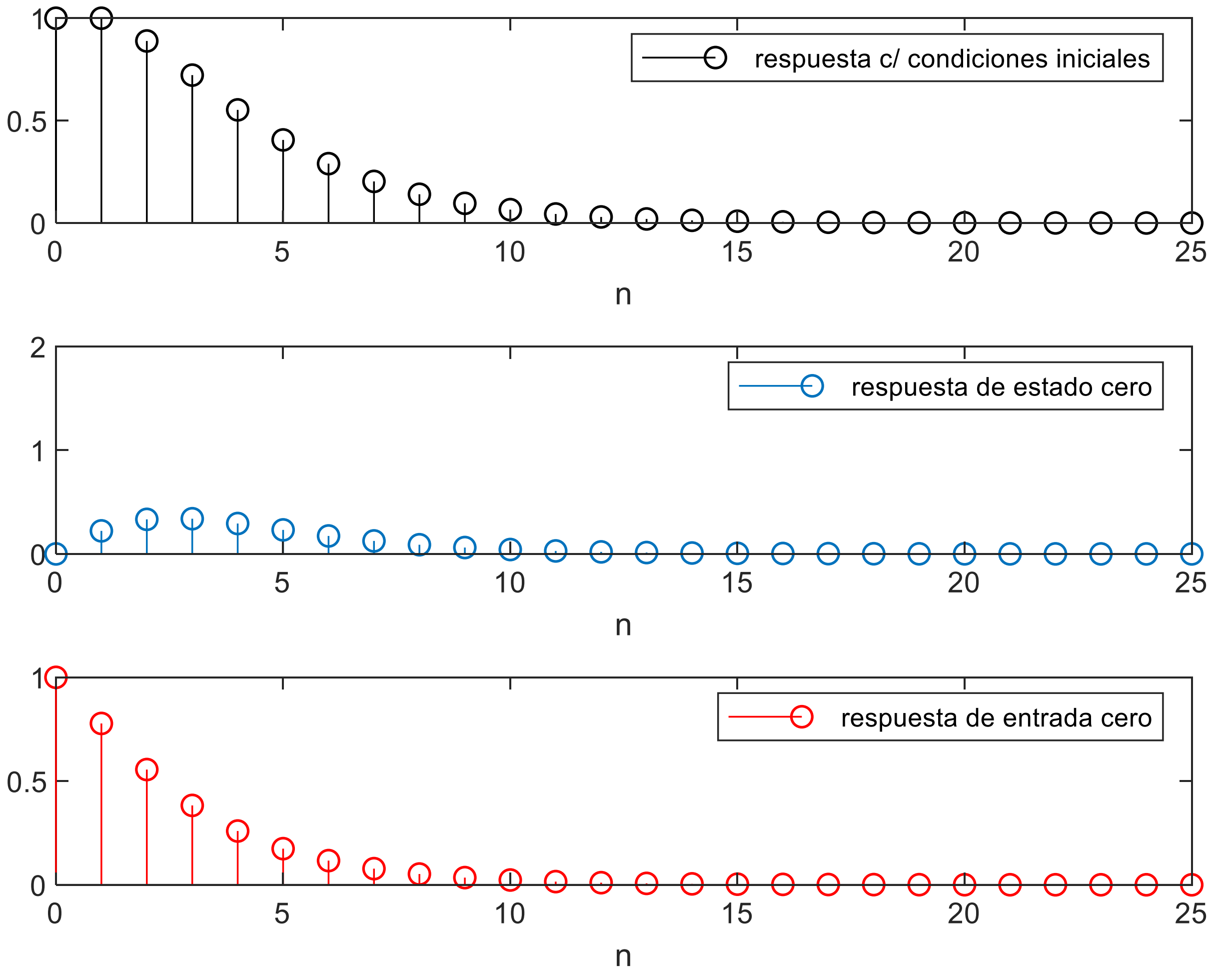
Luego antitransformamos el resultado al dominio del tiempo para obtener la respuesta completa del sistema

$$y[n] = y_{estado_0}[n] + y_{entrada_0}[n]$$

$$y[n] = [Aa^n + Bp_1{}^n + Cp_2{}^n]u[n] + [Dp_1{}^n + Ep_2{}^n]u[n]$$

$$y[n] = \left[-10.8\frac{1}{2}^n + 7.2\frac{2}{3}^n + 3.6\frac{1}{3}^n\right]u[n] + \left[0.1\frac{2}{3}^n + 0.4\frac{1}{3}^n\right]u[n]$$

A continuación, graficamos las señales obtenidas



- Podemos observar que la respuesta del sistema tiende a cero a medida que avanza el tiempo. Se verifica que el sistema es estable para $k = 2/9$.

¡Muchas Gracias!

¡Que tengan excelente semana!