Resolución ejemplo 3 Transformada Z.

Para el sistema: $y[n+2]+2y[n+1]+2y[n]=x[n+1] \quad \forall n \geq 0$

a. Demuestre que la FT del sistema es: $D(z)=\dfrac{z}{z^2+2z+2}$

b. Determine los polos.

c. Demuestre que la respuesta al impulso del sistema está dada por:

$y_{\delta_n}=h_n=Z^{-1}\left[D(z)\right]=2^{n/2}\sin\dfrac{3n\pi}{4}\cdot u[n]$

<u>Solución:</u>

El primer paso consiste en acomodar la ecuación a diferencia atrasando en un factor de 2 todos los términos.

$$y[n]+2y[n-1]+2y[n-2]=x[n-1]$$

Una vez que tenemos ordenada la ecuación, se transforma:

$$Y(Z)+2z^{-1}Y(Z)+2z^{-2}Y(Z)=z^{-1}X(Z)$$

$$Y(Z)(1+2z^{-1}+2z^{-2})=z^{-1}X(Z)$$

Por lo tanto, la función de transferencia del sistema es:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{z^{-1}}{1+2z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{z}{z^2+2z+2}$$

La respuesta al impulso del sistema es $Y(Z) = H(Z)X(Z)$ cuando $X(Z) = 1$

Por lo tanto, la respuesta al impulso del sistema será $y[n] = Z^{-1}\{Y(Z)\}$

Si observamos en la tabla, hay una transformación que dice que:

$$r^n \sin(\Omega n)u[n] \leftrightarrow \frac{rsen(\Omega)z}{z^2 - 2rcos(\Omega)z + r^2}$$

Teniendo en cuenta esta transformación y la expresión de $Y(Z)$ que debemos antitransformar, obtenemos que $r = \sqrt{2}$, $\Omega = \frac{3\pi}{4}$. Por lo tanto queda:

$$y[n] = Z^{-1}\{Y(Z)\} = 2^{n/2}\sin(\frac{3\pi}{4}n)u[n]$$