Señales y Sistemas 2023

Trabajo Práctico N°3 - Serie Exponencial de Fourier Tiempo Continuo

1. Responda utilizando sus palabras las siguientes preguntas:
   a. ¿Qué representa físicamente el espectro de una señal?
   b. ¿Qué es el ancho de banda de una señal?
   c. ¿Cómo se relaciona el ancho de banda con los Coeficientes de la Serie de Fourier?
   d. ¿Qué determina que una señal tenga infinitos coeficientes de Fourier?
   e. De dos ejemplos de señales de tiempo continuo que tengan el menor ancho de banda que pueda existir y explique textualmente por qué eligió dichas señales. Grafique el espectro de ambas señales.

2. Obtener la expansión en Serie Exponencial de Fourier (SEF) de la función periódica $f(t)$ de período 2π definida por:

$$f(t) = t \quad (0 < t < 2\pi)$$

$$\text{Rta: } f(t) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(\sin nt)$$

3. Obtener la expansión en SEF de la función periódica $f(t)$ de período 2π definida por $f(t) = t^2 + t \quad (-\pi < t < \pi)$.

$$\text{Rta: } f(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^n \sin nt$$

4. Una función periódica con período 2π está definida dentro del intervalo de la siguiente manera:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi < t < 0) \\ 1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de la función y halle la expansión en SEF definiendo en forma cerrada los coeficientes c_n .

$$\text{Rta: } f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$$

5. Una función periódica con período 2π está definida dentro del intervalo de la siguiente manera:

$$f(t) = t^2 \quad (-\pi < t < \pi)$$

Dibuje la gráfica de la función y halle la expansión en SEF definiendo en forma cerrada los coeficientes c_n .

$$\text{Rta: } f(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$$

6. Obtener la expansión en SEF de la onda seno rectificada:

$$f(t) = |\sin t|$$

$$\text{Rta: } f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$$

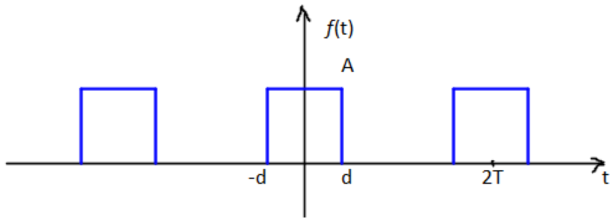
7. Aplique el teorema de Parseval a la función $f(t) = t \quad (-\pi < t < \pi)$ y demuestre que:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

8. Dibuje los espectros de magnitud y fase de la función periódica $f(t) = \dfrac{2t}{T} \quad (0 < t < 2T)$ tomando los coeficientes de la SEF.

$$\text{Rta: } \left\{ \left. \begin{aligned} C_0 &= 2 \\ C_n &= \frac{j2}{n\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} |C_n| &= \frac{2}{n\pi} \\ \angle C_n &= \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & n > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & n < 0 \end{cases} \end{aligned} \right. \right.$$

9. Para el tren infinito periódico de pulsos rectangulares idénticos de magnitud *A* centrado en el origen y período *2T* con duración en alto *2d*:



a) Determine la forma compleja de la expansión en serie de Fourier.

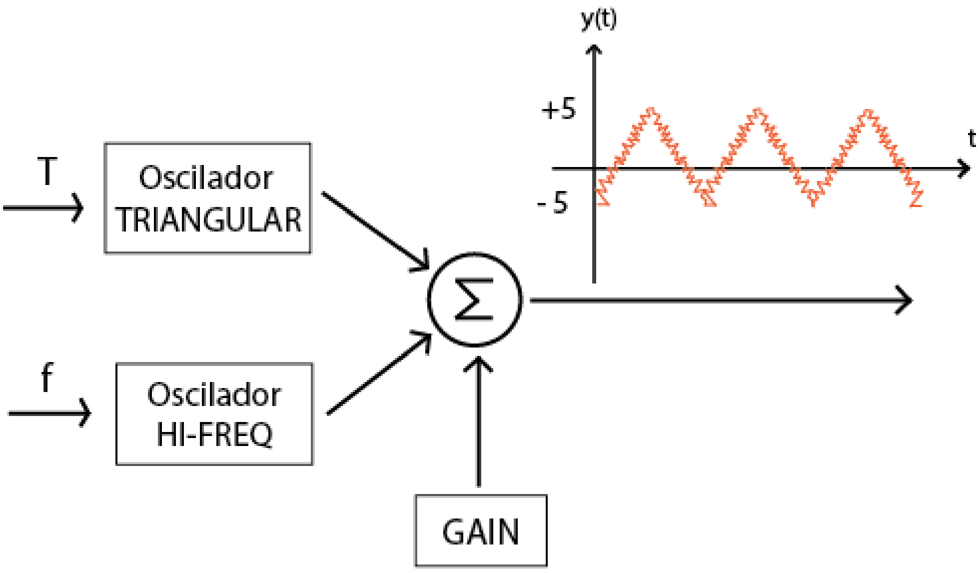
b) Dibuje el espectro en el caso particular de *d=1/10* y *T=1/2*.

c) Determine el porcentaje de la potencia total contenido dentro de la banda de frecuencia hasta el primer cruce por cero del espectro de magnitud.

Rta: $f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{Ad}{T}senc\left(\frac{n\pi d}{T}\right)e^{jn\pi t/T}$ El cruce por cero es a $10\pi\ rad/s$

$$\left.\begin{aligned} &P_1=c_0^{\,2}+2\left(c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}+c_4^{\,2}\right)\\ &C_n=\frac{A}{5}senc\left(\frac{n\pi}{5}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow P_1\approx 90{,}76\%\ P$$

10. En un sistema de síntesis musical, el sonido producido por un oscilador de onda triangular, un oscilador de alta frecuencia y una ganancia "GAIN", que en su conjunto generan una señal oscilatoria configurable y de tiempo continuo que es transferida a los parlantes luego de un proceso de acoplado y adecuación de la señal. El sistema completo se esquematiza en la siguiente figura:



El sistema permite 3 parámetros de entrada, que son, el periodo "T" del generador de onda triangular, la frecuencia de las componentes de alta frecuencia y la ganancia que determina el offset de la señal resultante. Suponiendo que el compositor ingresa T=0,0005, f=17Khz y GAIN=5, se pide:

a) Obtener matemáticamente el espectro de la señal y(t) entre los 0 Hz y los 10Khz y graficar su espectro de módulo.

b) ¿Cuál es el armónico que aporta mayor potencia de toda la señal, y cuánto vale?

c) ¿Qué efecto produce el parámetro "GAIN" en la señal que ingresa al parlante?