Cociente de Energía de Señal por Bit (E_b/N_0)

Este parámetro tiene relación con la relación señal ruido y por consecuencia con la calidad de señal y la calidad de los sistemas de comunicaciones digitales.
Se usa para señales digitales o analógicas que contengan datos digitales binarios transmitidos.
Es adecuado para determinar la tasa de error y velocidad de trasmisión.

Retomando:

E_b: Representa la cantidad de energía por bit. Unidad [Joules]
N_0: El ruido de densidad espectral. Unidad: [vatios/Hz] o [W s]

Teniendo en cuenta que

1 vatio = 1 Jolue/segundo => despejando Joule => 1 Joule = 1 vatio x segundo.

Siendo S la potencia en [vatios] de un bit, y T_b el tiempo que dura un bit [segundos], podemos plantear:

$$E_b[Joules]=S[vatios]\,x\,T_b[segundos] \qquad (1)$$

Como T_b es el tiempo de un bit time, la cantidad de bits por unidad de tiempo se calcula planteando

$$\frac{1}{T_b}=C[bps\,ó\,1/s]\,ó\,C=\frac{1}{T_b} \qquad (2)$$

C resulta ser la velocidad de transmisión y está expresadas en bits/segundo o bps.
Reemplazando en (1) T_b, tenemos..

$$E_b=S\,x\,T_b=\frac{S}{C} \qquad (3)$$

Si planteamos el cociente E_b/N_0:

$$\frac{E_b}{N_0}=\frac{S/C}{N_0} \qquad (4)$$

Si N_0 es densidad de potencia del ruido, en vatios por 1 Hz de ancho de banda, podemos expresar N=kTB.
Donde llamamos T a la temperatura absoluta, expresada en Kelvin, B ancho de banda y k es la constante de Boltzman.
Si planteamos el Ruido Térmico por Hz, N_0 = k . T [W/Hz] o [W. s], donde [J/K]

Podemos finalmente, plantear la expresión reemplazando N_0:

$$\frac{E_b}{N_0}=\frac{S/C}{k.T}=\frac{S}{k.T.C} \qquad (5)$$

Se lo expresamos en decibeles:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right) dB = 10\log\left(\frac{S}{k.T.C}\right) = S_{dbW} - 10\log C - 10\log k - 10\log T \quad (6)$$

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = S_{dBW} - 10\log C + 228{,}6\, dBWk - 10\log T \quad (7)$$

También se puede plantear (5) en términos de SNR. Recordando que N_0 = N/B, con B ancho de banda y densidad espectral de ruido térmico

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{S/C}{N/B} \quad => \quad \frac{E_b}{N_0} = \frac{S.B}{N.C} \quad (8)$$

Según la fórmula de Shannon, sobre la capacidad de un canal:

$$C = B\log_2(1+S/N) \;\Rightarrow\; C/B = \log_2(1+S/N) \;\Rightarrow\; 2^{C/B} = (1+S/N) \;\Rightarrow\; S/N = 2^{C/B} - 1 \quad (9)$$

Reemplazando (8) en (9)

$\frac{E_b}{N_0} = \frac{B}{C} 2^{C/B} - 1$ C: Capacidad bps, B: Ancho de Banda Hz.

Esta fórmula es útil por que relaciona la eficiencia espectral (bits por Hz) con la energía de la señal por bit respecto del ruido.

Ejemplo

A temperatura ambiente, es decir a T = 17 °C, o 290 K, la densidad de potencia del ruido térmico será:

$$N_0 = (1{,}38 \times 10^{-23}) \times 290 = 4 \times 10^{-21}\, W/Hz = -204\, dBW/Hz$$

donde dBW corresponde a decibelios-vatio.

Ejemplo

En el siguiente ejemplo se relacionan las formulaciones de Shannon y Nyquist.
Supóngase que el espectro de un canal está situado entre 3 MHz y 4 MHz y que la SNR_{dB} = 24 dB. En este caso,

$$\begin{aligned} B &= 4\,MHz - 3\,MHz = 1\,MHz \\ SNR_{dB} &= 24\,dB = 10\log_{10}(SNR) \\ SNR &= 251 \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Shannon se tiene que

$$C = 10^6 \times \log_2(1+251) \approx 10^6 \times 8 = 8\,\mathrm{Mbps}$$

Éste es un límite teórico difícil de alcanzar. No obstante, supóngase que este límite se puede alcanzar. Según la fórmula de Nyquist, ¿cuántos niveles de señalización se necesitarán? Se tiene que

$$\begin{aligned} C &= 2B\log_2 M \\ 8\times10^6 &= 2\times10^6\times\log_2 M \\ 4 &= \log_2 M \\ M &= 16 \end{aligned}$$

Ejemplo

Supongamos que queremos encontrar el máximo E_b/N_0 necesario para conseguir una eficiencia espectral de 6 bps/Hz.

$\frac{E_b}{N_0}=\frac{1}{6}2^6-1$ =10,5 => en dB $10.\log_{10}10{,}5=10.21\,dBW$

$\frac{E_b}{N_0}=\frac{S.B}{N.C}=S/N.1/6$ => $\frac{E_b}{N_0}6=S/N$ => $S/N=18\,dBW$

Vamos a tener que lograr en el canal 18 dB para poder transmitir 6 bps por Hz.

Ejemplo

Cuál es la capacidad de un canal de “teletipo” de 300 Hz de AB y una S/N de 3 dB. Usando Shannon $C=B\log_2(1+S/R)[bps]$ pasemos 3 dB a una valor que no esté en decibeles.

$3\,dB=10\log_{10}(S/N)$ => S/N=0,5

Entonces

$C=300\log_2(1+0{,}5)[bps]=300\log_2(1{,}5)=300\times\log_{10}1{,}5/\log_{10}2=300.0{,}17609\times0{,}30102$

C =175,48 bps.

Ejemplo

En la modulación digital binaria PSK (Phase-Shift Keying), para obtener una tasa de error por bit igual a 10^{-4} (un bit erróneo cada 10.000) se necesita un cociente E_b/N_0 = 8,4 dB. Si la temperatura efectiva es 290 K (temperatura ambiente) y la velocidad de transmisión es 2.400 bps, ¿qué nivel de señal recibida se necesita? En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} 8{,}4 &= S(dBW)-10\log 2.400+222{,}6\,dBW-10\log 290 \\ &= S(dBW)-(10)(3{,}38)+228{,}6\,dBW-(10)(2{,}46) \\ S &= -161{,}8\,dBW \end{aligned}$$