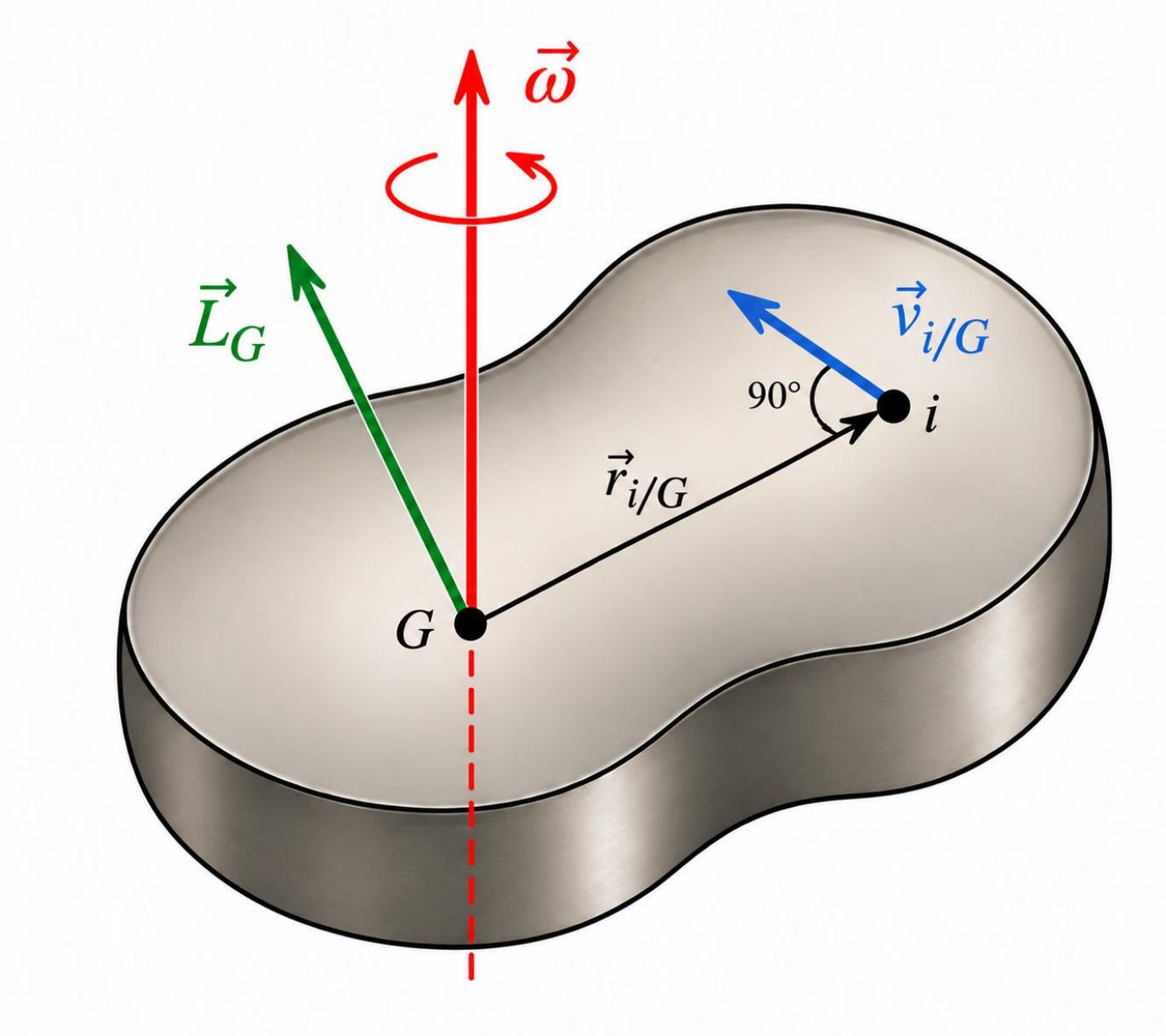
4_ DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO



Del sistema de partículas al sólido

En la dinámica de un sistema de partículas se estudió el movimiento de un conjunto de partículas sometidas a fuerzas externas e internas.

Un sólido rígido constituye un caso particular de sistema de partículas, en el cual las distancias entre cualquier par de ellas permanecen constantes durante el movimiento (condición de rigidez).

En un sólido rígido, el movimiento de sus partículas no es independiente, debido a la condición de rigidez. Su movimiento general puede combinar traslación y rotación.

Los teoremas fundamentales de la dinámica de un sistema de partículas también son válidos para un sólido rígido:

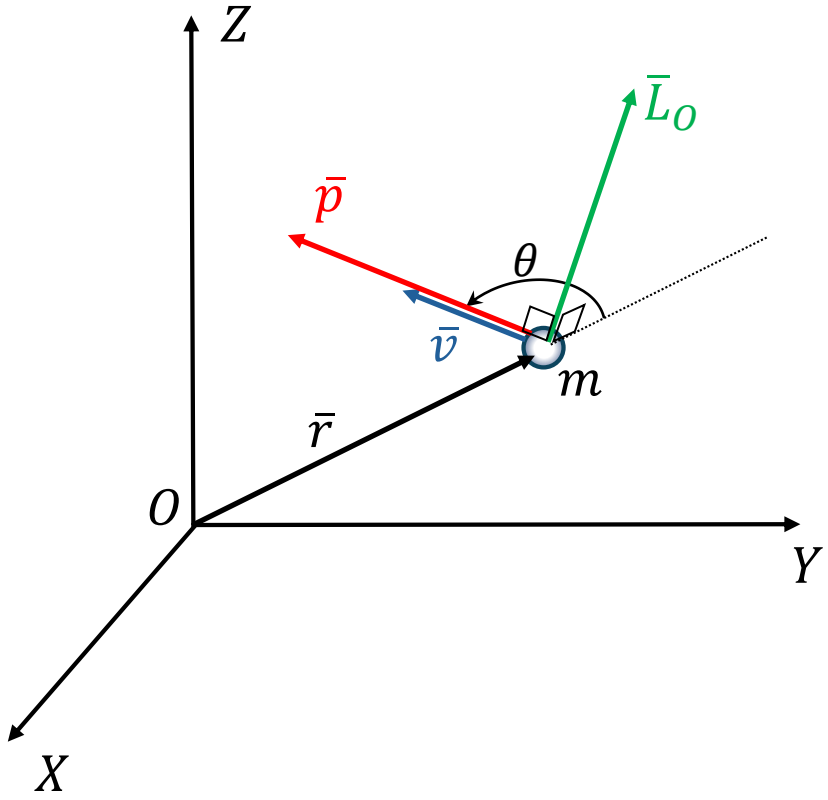
$$\sum \bar{F}^{ext} = M\bar{a}_G \qquad ; \qquad \sum \bar{M}_O^{ext} = \frac{d\bar{L}_O}{dt}$$

La primera ecuación relaciona las fuerzas exteriores con la aceleración del centro de masa; la segunda relaciona los momentos exteriores con la variación del momento cinético.

Significado físico del momento cinético

El momento cinético de una partícula es una magnitud física vectorial que relaciona su momento lineal con su posición respecto de un punto de referencia.

$$\bar{L}_O = \bar{r} \times m\,\bar{v} \qquad \text{ó} \qquad L_O = r\,m\,v\,sen\theta$$



Por lo tanto, el momento cinético:

- Para una posición y dirección del movimiento dadas, aumenta con la masa y la rapidez de la partícula.
- Depende de la distancia al punto *O* y de la dirección de su movimiento.
- Su dirección es perpendicular al plano definido por $\bar{r}$ y $\bar{v}$.

El momento cinético no depende solamente de cómo se mueve la partícula, sino también de su posición respecto del punto considerado.

Momento cinético de un sólido rígido

Para un sistema de partículas, el momento cinético respecto de un punto O se obtiene sumando vectorialmente los momentos cinéticos de todas las partículas

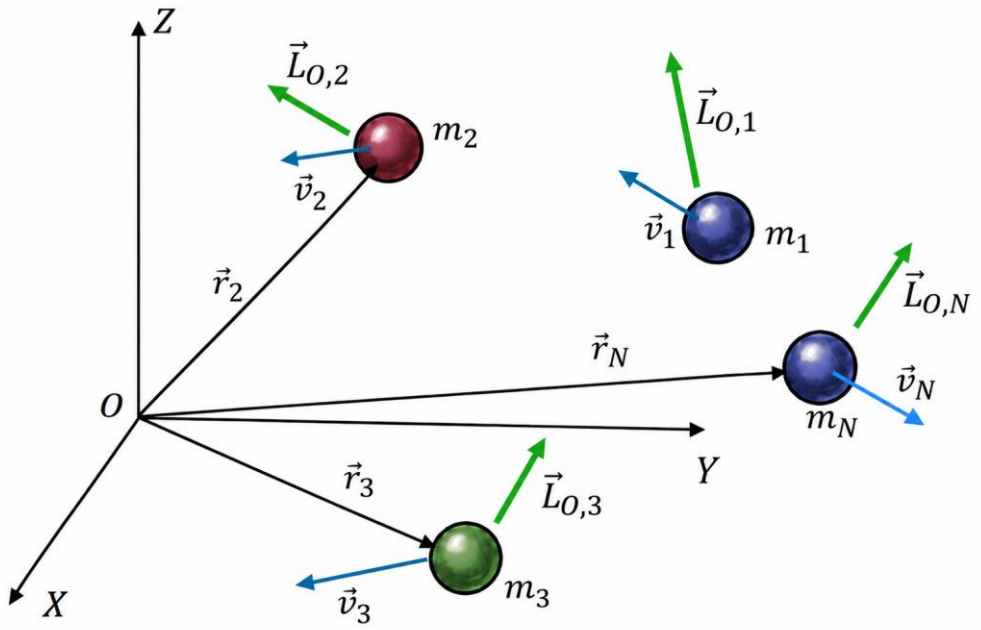
$$\bar{\mathbf{L}}_O = \sum_{i=1}^{N} (\bar{r}_i \times m_i . \bar{v}_i)$$

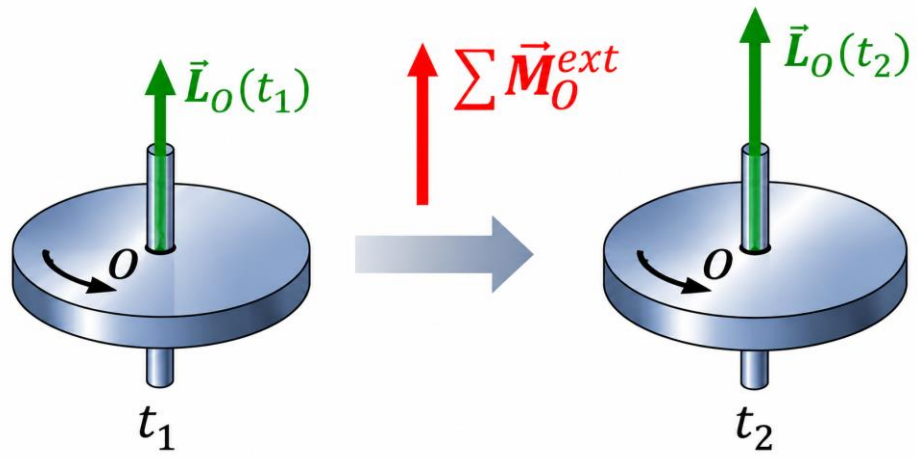
La variación temporal del momento cinético de un sistema de partículas está determinada por el momento resultante de las fuerzas externas

$$\sum \bar{\mathbf{M}}_O^{ext} = \frac{d\bar{\mathbf{L}}_O}{dt}$$

Para aplicar este teorema al sólido rígido, necesitamos relacionar su momento cinético con el movimiento del sólido y la distribución de su masa:

$$\bar{\mathbf{L}}_O = f(\bar{\omega})$$



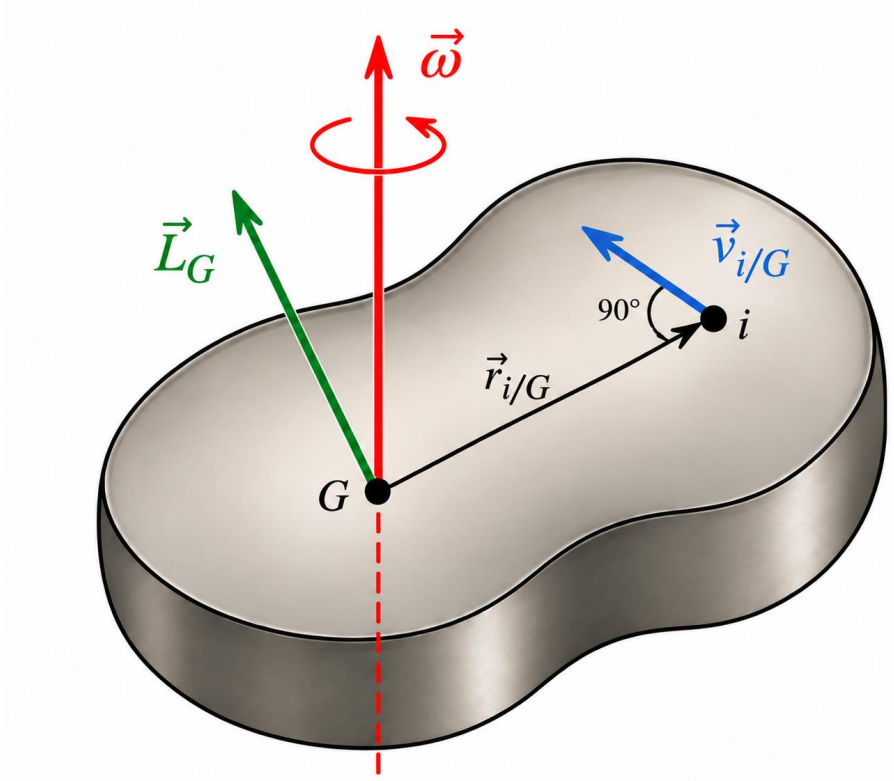


Momento cinético respecto del centro de masa

Consideremos un sólido rígido de forma arbitraria, constituido por partículas cuyas posiciones relativas permanecen constantes.

Para estudiar su movimiento de rotación, analizaremos el momento cinético respecto de su centro de masa *G*.

$$\bar{L}_G = \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{r}_{i/G} \times m_i . \bar{v}_{i/G} \right)$$



Para un sólido rígido, la velocidad de la partícula *i* respecto de *G* es:

$$\bar{v}_{i/G} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{i/G}$$

Sustituyendo, es:

$$\boxed{\bar{L}_G = \sum_{i=1}^{N} \bar{r}_{i/G} \times m_i . \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{i/G} \right)}$$

Desarrollo del momento cinético respecto de G

Desarrollando el doble producto vectorial:

$$\bar{r}_{i/G} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{i/G}\right) = \bar{\omega}\left(\bar{r}_{i/G} \cdot \bar{r}_{i/G}\right) - \bar{r}_{i/G}\left(\bar{r}_{i/G} \cdot \bar{\omega}\right)$$

Como:

$$\bar{r}_{i/G} \cdot \bar{r}_{i/G} = r_{i/G}^2$$

Luego:

$$\bar{r}_{i/G} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{i/G}\right) = r_{i/G}^2\, \bar{\omega} - \bar{r}_{i/G}\left(\bar{r}_{i/G} \cdot \bar{\omega}\right)$$

Expresamos los vectores en una base cartesiana:

$$\bar{r}_{i/G} = x_i \hat{\imath} + y_i \hat{\jmath} + z_i \hat{k}$$

$$\bar{\omega} = \omega_x \hat{\imath} + \omega_y \hat{\jmath} + \omega_z \hat{k}$$

Desarrollo del momento cinético respecto de G

Por lo tanto:

$$r_{i/G}^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

El primer término es

$$r_{i/G}^2\,\bar{\omega} = \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)\left(\omega_x\hat{\imath} + \omega_y\hat{\jmath} + \omega_z\hat{k}\right)$$

El segundo término es:

$$\bar{r}_{i/G}\cdot\bar{\omega} = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z$$

$$\bar{r}_{i/G}\left(\bar{r}_{i/G}\cdot\bar{\omega}\right) = \left(x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}\right)\left(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z\right)$$

Desarrollo del momento cinético respecto de G

Restando los términos obtenidos:

$$r_{i/G}^2 . \bar{\omega} - \bar{r}_{i/G}(\bar{r}_{i/G} \cdot \bar{\omega})$$

Desarrollamos la diferencia. Para la componente en la dirección $\hat{\imath}$ es:

$$(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_x - (x_i^2\omega_x + x_i y_i \omega_y + x_i z_i \omega_z)$$

$$x_i^2\omega_x + y_i^2\omega_x + z_i^2\omega_x - x_i^2\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z$$

Agrupando los términos según cada dirección:

$$\hat{\imath}: (y_i^2 + z_i^2)\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z$$

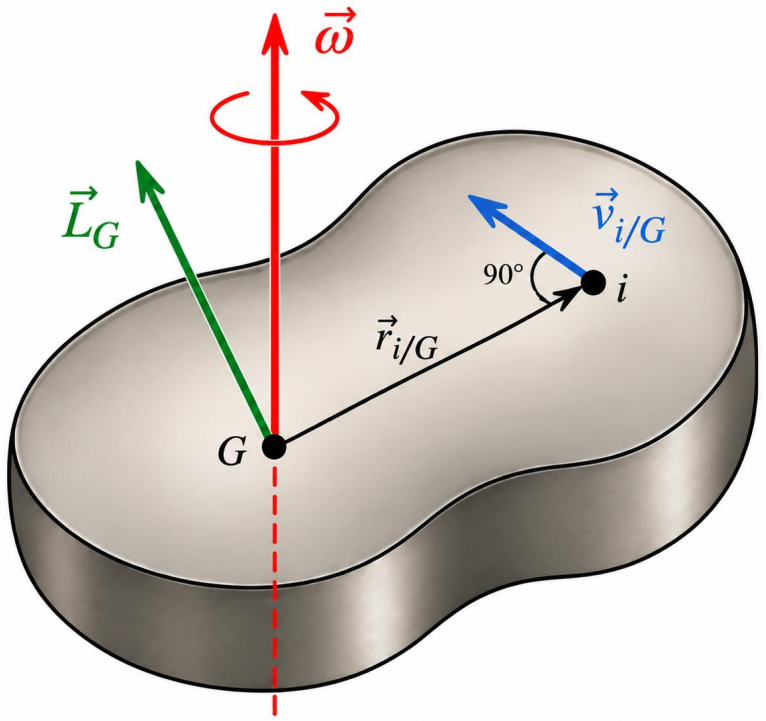
$$\hat{\jmath}: -x_i y_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2)\omega_y - y_i z_i \omega_z$$

$$\hat{k}: -x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2)\omega_z$$

Momento cinético respecto del centro de masa

Volviendo a la expresión del momento cinético del sólido:

$$\bar{L}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i . \left[r_{i/G}^2 . \bar{\omega} - \bar{r}_{i/G} . \left(\bar{r}_{i/G} \cdot \bar{\omega} \right) \right]$$



Ahora sustituimos el resultado que acabamos de obtener. Para la componente x, por ejemplo:

$$L_{G,x} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(y_i^2 + z_i^2 \right) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \right]$$

$$L_{G,x} = \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right) \right] \omega_x - \left[\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i \right] \omega_y - \left[\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i \right] \omega_z$$

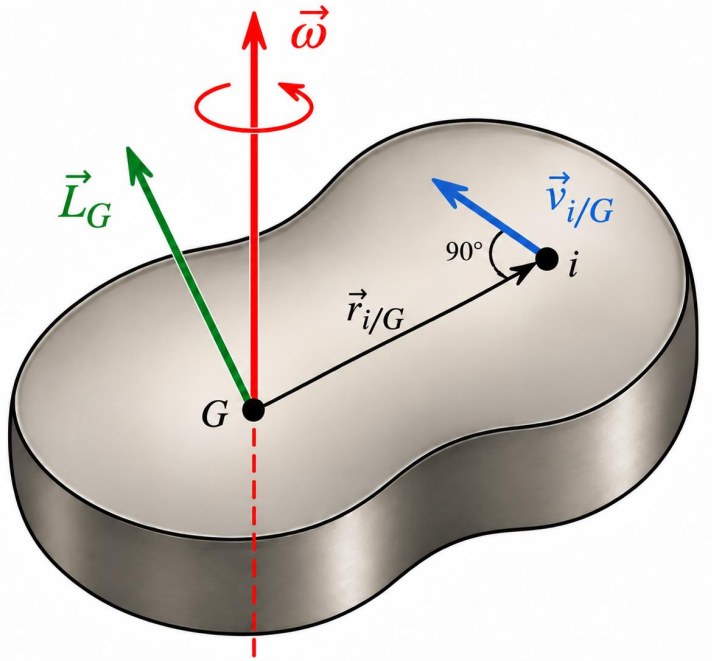
Cada componente del momento cinético $L_{G,x}$ puede depender de las tres componentes de la velocidad angular.

Momento cinético respecto del centro de masa

Del mismo modo con las otras dos componentes:

$$L_{G,y} = -\left[\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i\right]\omega_x + \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right)\right]\omega_y - \left[\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i\right]\omega_z$$

$$L_{G,z} = -\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i z_i\right]\omega_x - \left[\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i\right]\omega_y + \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)\right]\omega_z$$



Los coeficientes que multiplican a $\omega_x\,;\omega_y;\omega_z$ dependen exclusivamente de la distribución de masa del sólido respecto de G.

La relación entre las componentes de $\bar{L}_G$ y las de $\bar{\omega}$ es lineal y puede representarse mediante un tensor de segundo orden, denominado tensor de inercia.

Significado físico del tensor de inercia

El momento cinético del sólido respecto de su centro de masa depende de la velocidad angular y de la distribución de su masa.

Al tomar como referencia el centro de masa G, podemos separar el movimiento de traslación del de rotación. De esta manera, el momento cinético respecto de G depende únicamente de la rotación del sólido y de su distribución de masa.

La distribución de masa del sólido influye en la dirección del momento cinético. Por ello, en general, $\bar{L}_G$ y $\bar{\omega}$ no son paralelos, aunque existen casos particulares en los que ambas direcciones coinciden.

La influencia de la distribución espacial de la masa sobre la relación entre $\bar{\omega}$ y $\bar{L}_G$ queda representada mediante el tensor de inercia $\mathbf{I}_G$.

$$\underbrace{\bar{L}_G}_{\text{Momento cinético}} = \underbrace{\overrightarrow{distribución\ de\ masa}}_{\text{Tensor de inercia: } \mathbf{I}_G} \underbrace{\bar{\omega}}_{\text{Velocidad angular}}$$

Representación matricial del tensor de inercia

Consideremos una base cartesiana $(\hat{\imath}; \hat{\jmath}; \hat{k})$. En esta base, los vectores velocidad angular y momento cinético se representan mediante sus componentes:

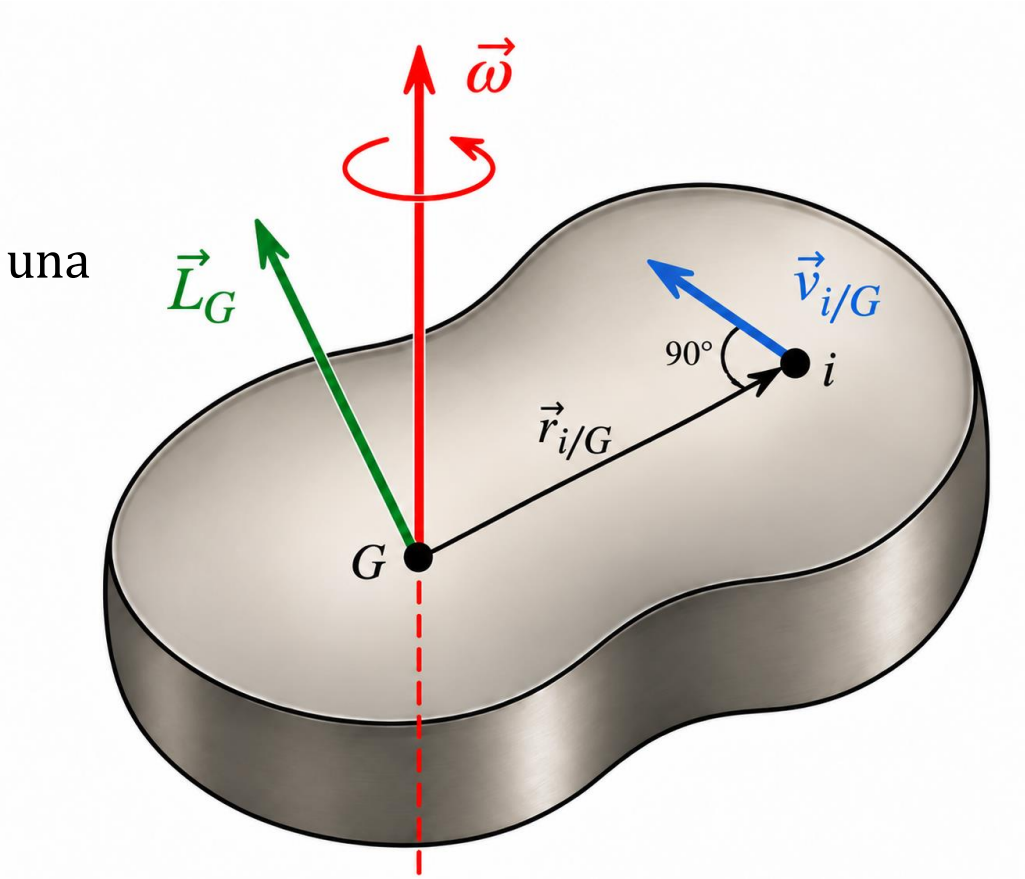
$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad ; \qquad \bar{L}_G = \begin{bmatrix} L_{G,x} \\ L_{G,y} \\ L_{G,z} \end{bmatrix}$$

La transformación lineal $\mathbf{I}_G$ se representa mediante una matriz de 3×3.

$$\mathbf{I}_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} L_{G,x} \\ L_{G,y} \\ L_{G,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$



Interpretación de los elementos del tensor de inercia

Desarrollando el producto matricial, cada componente del momento cinético resulta:

$$L_{G,x} = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$
$$L_{G,y} = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$
$$L_{G,z} = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Estas expresiones muestran que para identificar cada elemento I_{ij} son necesarios dos índices: uno asociado a la componente del momento cinético y otro a la componente de la velocidad angular.

Por lo tanto, en I_{ij}, el primer índice identifica la componente de L_G y el segundo índice indica la componente de ω asociada.

Como ejemplo:

$$I_{xy}\omega_y \qquad \Rightarrow \qquad \omega_y \text{ contribuye a } L_{G,x}$$

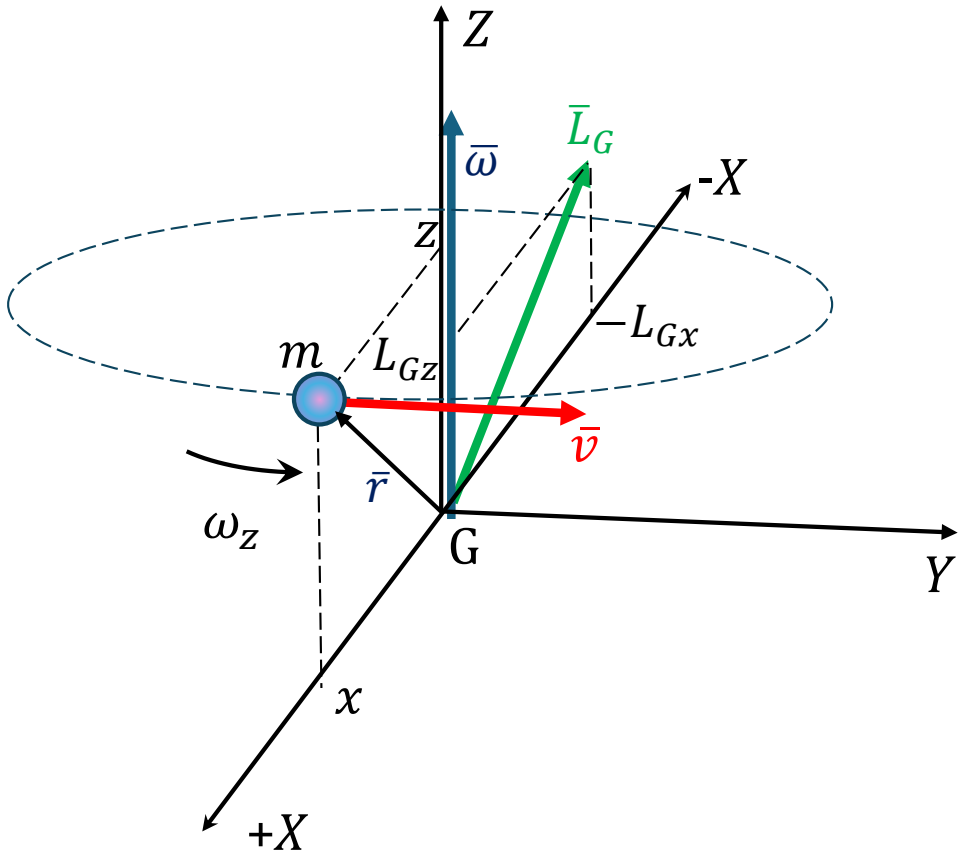
Significado físico de los elementos del tensor de inercia

Sea una partícula de masa m rotando alrededor del eje z con velocidad angular: $\bar{\omega}$, su momento cinético es:

$$\bar{L}_G = \bar{r} \times m.\bar{v} \qquad ; \qquad \bar{v} = v_y\hat{j} = \omega_z.x\hat{j}$$

$$\bar{L}_G = m\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & 0 & z \\ 0 & v_y & 0 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & 0 & z \\ 0 & \omega_z.x & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{L}_G = (-m.x.z)\omega_z\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + (m.x^2)\omega_z\hat{k}$$



$(-m.x.z) = I_{xz}$: producto de inercia que relaciona la componente ω_z con la componente L_{Gx} del momento cinético.

$(m.x^2) = I_{zz}$: momento de inercia respecto del eje Z, que relaciona ω_z con L_{Gz}.

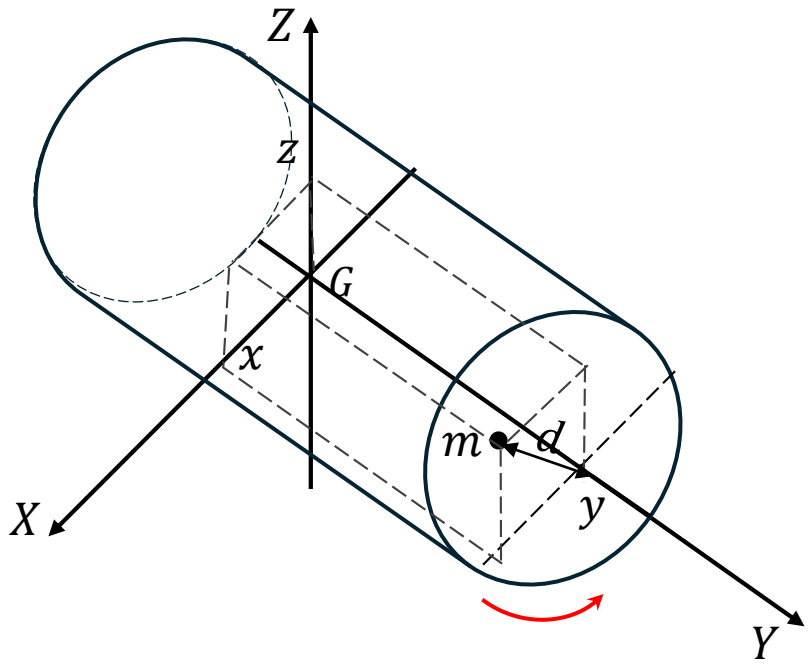
Ambas cantidades se refieren a componentes del momento cinético respecto a la dirección de la velocidad angular. El signo negativo significa que la distribución de masa influye en que la componente del momento cinético es negativa.

Significado físico de los elementos del tensor de inercia

Consideremos un sólido, como un cilindro, formado por partículas de masa m_i. Los elementos de la diagonal: I_{xx} ; I_{yy} ; I_{zz} , son los momentos de inercia respecto de los ejes *X, Y y Z* que pasan por el centro de masa *G*. Por ejemplo:

$$I_{xx} = \sum_i m_i \,.\, (y_i^2 + z_i^2) \quad ; \quad I_{yy} = \sum_i m_i \,.\, (x_i^2 + z_i^2);$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i \,.\, (x_i^2 + y_i^2).$$



Consideremos, como ejemplo, un cilindro que gira alrededor del eje *Y*.

Para I_{yy}, la contribución de una partícula depende de su masa (m) y de su distancia (d) al eje *Y*. Cuanto mayor sea la distancia de la partícula al eje *Y*, mayor será su contribución a I_{yy} ; porque: $d^2 = x^2 + z^2$.

Si desplazáramos esa partícula paralelamente al eje *Y*, manteniendo constantes *x* y *z*, su distancia *d* al eje *Y* no cambiaría y, por lo tanto, tampoco cambiaría su contribución a I_{yy}.

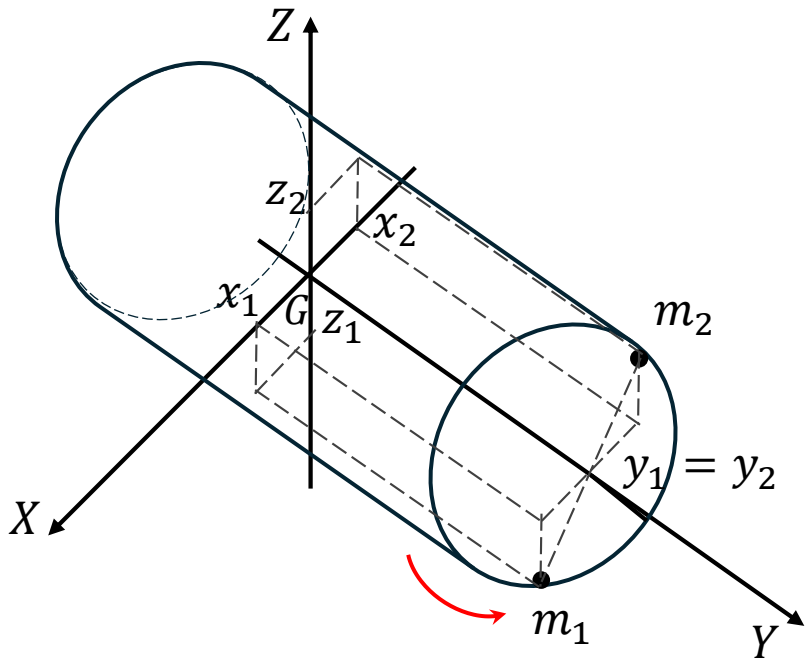
Significado físico de los elementos de los productos de inercia

Los elementos fuera de la diagonal del tensor de inercia: I_{xy} ; I_{xz} ; I_{yz}, están asociados a los productos de inercia, que dependen de la distribución de masa respecto de dos coordenadas simultáneamente.

A diferencia de los momentos de inercia, un producto de inercia no está asociado solamente a la distancia de la masa respecto de un eje.

En el caso del cilindro, cuyo eje longitudinal coincide con el eje Y, para estudiar la distribución de masa en una sección perpendicular a dicho eje utilizamos las coordenadas x_i y z_i. El producto de inercia correspondiente es:

$$I_{xz} = -\sum_i m_i . x_i z_i$$



Para las partículas m_1 y m_2 indicadas en la figura, al estar ubicadas en posiciones diametralmente opuestas, las coordenadas de ambas partículas tienen igual módulo y signo contrario :

$$x_1 = -x_2 \qquad ; \qquad z_2 = -z_1$$

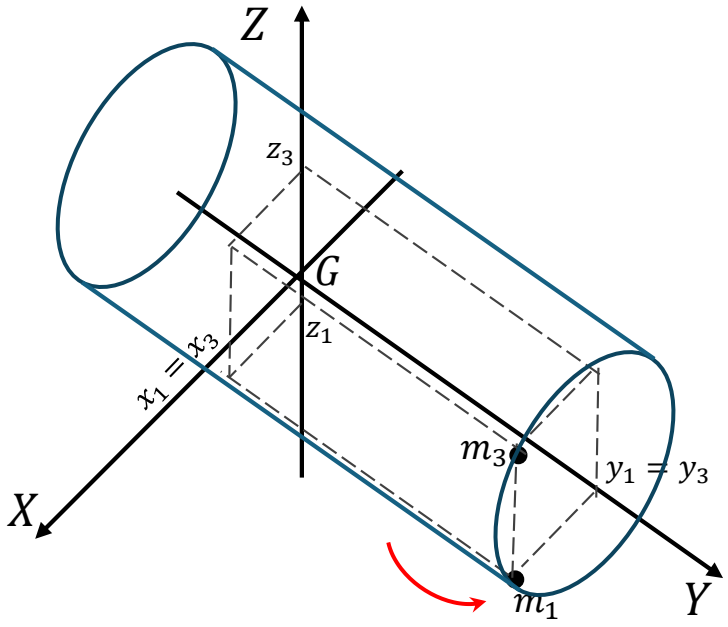
Significado físico de los elementos de los productos de inercia

Por lo tanto:

$$x_1 z_1 = x_2 z_2$$

Al sumar los aportes de ambas partículas a I_{xz}, estos se refuerzan en lugar de compensarse.

Los productos de inercia asociados al eje de rotación pueden desviar el momento cinético respecto de la velocidad angular. Para evitarlo, sus contribuciones deben anularse mediante una distribución adecuada de las masas.



$$x_3 = x_1 \;\; ; \;\; z_3 = -z_1 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 z_3 = -x_1 z_1$$

y sus contribuciones a I_{xz} se compensan.

$$-m_1 x_1 z_1 - m_3 (-x_1 z_1) = 0 \qquad (m_1 = m_3)$$

Al agregar una masa simétrica, aumentan los momentos de inercia del sólido, pero las contribuciones al producto de inercia I_{xz} tienen signos opuestos y se anulan

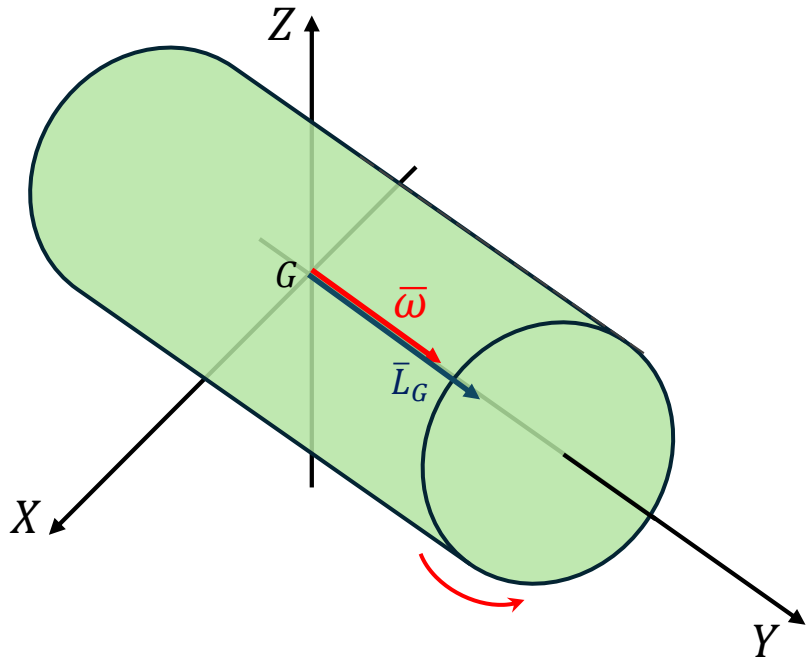
Momento cinético y tensor de inercia

Al considerar toda la distribución de masa del cilindro homogéneo, las contribuciones a los productos de inercia se compensan por simetría. Por lo tanto:

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$$

Por otra parte, el tensor de inercia es simétrico: sus elementos ubicados a ambos lados de la diagonal principal son iguales:

$$I_{xz} = -\sum_i m_i . x_i z_i \quad ; \quad I_{zx} = -\sum_i m_i . z_i x_i$$



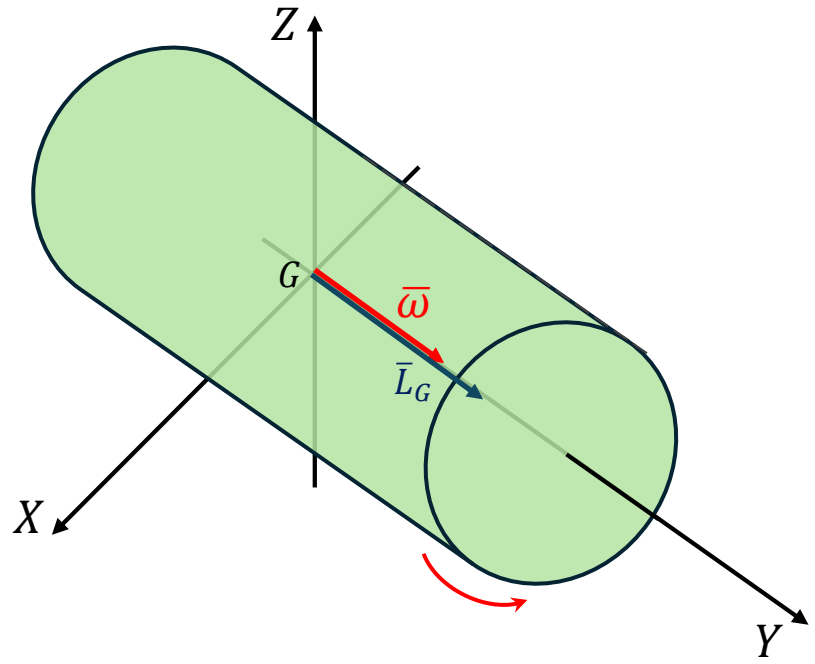
Como la multiplicación de escalares es conmutativa, ambos productos son iguales, entonces: $I_{xz} = I_{zx}$, y así para los demás productos de inercia.

Momento cinético y tensor de inercia

Volviendo a la relación entre el momento cinético y la velocidad angular:

$$[\bar{L}_G] = [\mathbf{I}_G][\bar{\omega}]$$

Consideremos nuevamente el cilindro homogéneo cuyo eje longitudinal coincide con Y, y supongamos que gira únicamente alrededor de dicho eje: $\bar{\omega} = \omega_y \hat{\jmath}$.



Por lo tanto: $\omega_x = 0$; $\omega_y \neq 0$; $\omega_z = 0$. Entonces:

$$\bar{L}_G = \begin{bmatrix} L_{G,x} \\ L_{G,y} \\ L_{G,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

y al realizar el producto:

$$\left.\begin{aligned} L_{G,x} &= 0 \\ L_{G,y} &= I_{yy}\omega_y \\ L_{G,z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \bar{L}_G = I_{yy}\omega_y \hat{\jmath}$$

El eje Y es un eje principal de inercia, ya que una rotación alrededor de él produce un momento cinético dirigido según ese mismo eje.

Del sistema de partículas al sólido continuo

Hasta aquí representamos la distribución de masa del sólido mediante un conjunto de partículas de masas m_i, lo que permitió interpretar físicamente los momentos de inercia y productos de inercia.

En un sólido real, la masa se encuentra distribuida continuamente. Considerando elementos diferenciales de masa *dm*, las sumatorias anteriores pasan al límite y se expresan mediante integrales:

$$\sum_i m_i \,.\, (y_i^2 + z_i^2) \;\rightarrow\; \int_m (y^2 + z^2)\, dm \qquad -\sum_i m_i . x_i y_i \;\rightarrow\; -\int_m x\, y\, dm$$

$$\sum_i m_i \,.\, (x_i^2 + z_i^2) \;\rightarrow\; \int_m (x^2 + z^2) dm \qquad -\sum_i m_i . x_i z_i \;\rightarrow\; -\int_m x\, z\, dm$$

$$\sum_i m_i \,.\, (x_i^2 + y_i^2) \;\rightarrow\; \int_m (x^2 + y^2) dm \qquad -\sum_i m_i . y_i z_i \;\rightarrow\; -\int_m y\, z\, dm$$

Por lo tanto, los elementos de $[\mathbf{I}_G]$ se obtienen a partir de la geometría y de la distribución de masa del sólido.

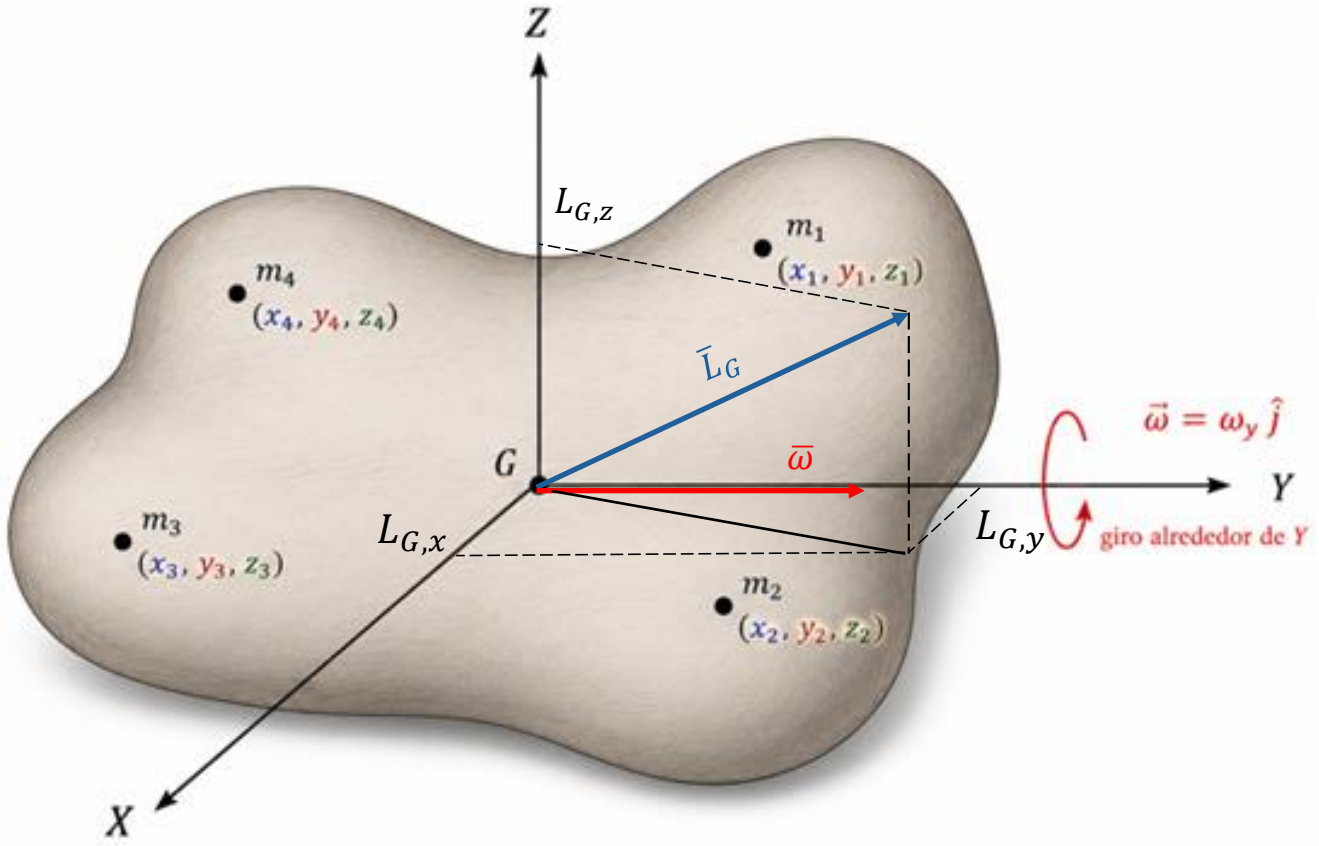
Ejes principales de inercia

Recién vimos un caso particular donde la dirección de $\bar{\omega}$ coincide con la dirección del momento cinético $\bar{L}_G$.

Cuando esto ocurre, esta dirección se denomina dirección principal de inercia, y el eje que pasa por G con esa dirección se denomina eje principal de inercia.

En general, para un sólido cualquiera y, como muestra la figura, $\bar{L}_G$ no tiene por qué ser paralelo a $\bar{\omega}$:

$$[\bar{L}_G] = [\mathbf{I}_G][\bar{\omega}]$$



Ejes principales de inercia

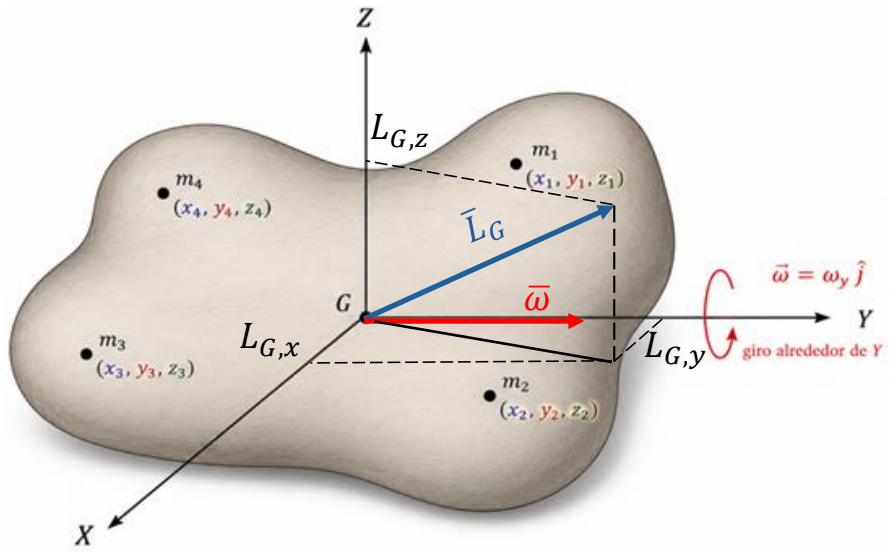
Si nos referimos a una dirección cualquiera, por ejemplo el giro alrededor del eje Y en la figura, es:

$$\bar{\omega}_y = \omega_y \hat{j}$$

El momento cinético correspondiente es:

$$[\bar{L}_G] = [\mathbf{I}_G][\bar{\omega}_y] \quad ; \qquad \bar{L}_G \nparallel \bar{\omega}_y$$

Este no es un eje principal.

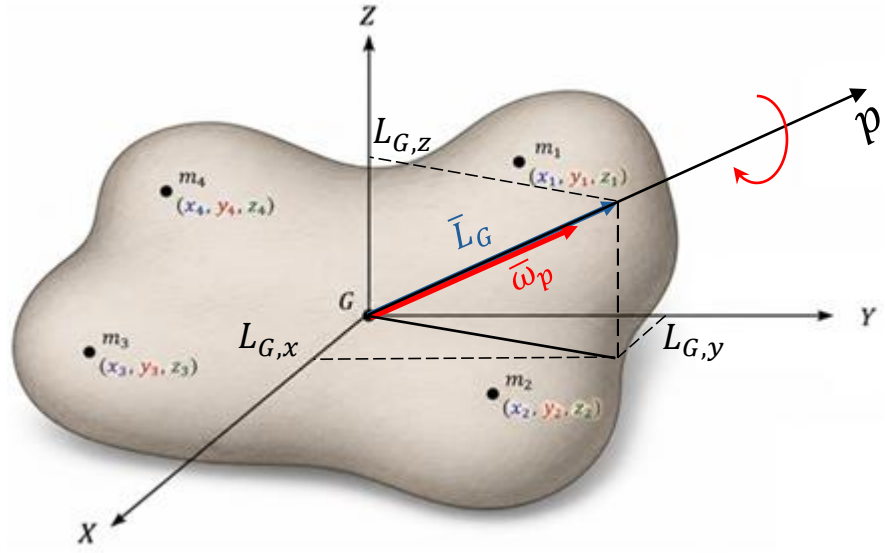


Ahora buscamos otra dirección, por ahora la llamamos $\bar{\omega}_p$, donde p significa principal. Una dirección tal que: $\bar{\omega}_p \parallel \bar{L}_G$.

$$[\bar{L}_G] = [\mathbf{I}_G][\bar{\omega}_p]$$

Como en esta dirección particular $\bar{L}_G$ y $\bar{\omega}_p$ son paralelos, existe un escalar λ que permite relacionar ambos vectores:

$$[\bar{L}_G] = \lambda[\bar{\omega}_p]$$



Ejes principales de inercia

Entonces, reemplazando lo anterior:

$$[\mathbf{I}_G]\left[\overline{\omega}_p\right] = \lambda\left[\overline{\omega}_p\right]$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{p,x} \\ \omega_{p,y} \\ \omega_{p,z} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \omega_{p,x} \\ \omega_{p,y} \\ \omega_{p,z} \end{bmatrix}$$

Buscamos simultáneamente la dirección de $\overline{\omega}_p$ y el valor del escalar λ para los cuales se cumple esta igualdad. Luego pasamos el segundo miembro al primero, pero con el agregado de la matriz identidad [1] para poder operar:

$$[\mathbf{I}_G]\left[\overline{\omega}_p\right] - \lambda[1]\left[\overline{\omega}_p\right] = [0] \qquad \text{Donde:} \quad [1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y finalmente:

$$([\mathbf{I}_G] - \lambda[1])\left[\overline{\omega}_p\right] = [0]$$

Ejes principales de inercia

Desarrollando queda:

$$\begin{bmatrix} I_{xx}-\lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-\lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{p,x} \\ \omega_{p,y} \\ \omega_{p,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es un lineal sistema homogéneo, por lo que siempre admite la solución trivial $[\bar{\omega}_p] = [0]$. Como buscamos una dirección principal, necesitamos una solución no trivial: $[\bar{\omega}_p] \neq [0]$.

Para que el sistema homogéneo tenga una solución distinta de cero, el determinante de la matriz: $([\mathbf{I}_G] - \lambda[1])$ debe ser nulo.

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-\lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-\lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Al desarrollar el determinante obtenemos una ecuación de tercer grado en λ. La simetría del tensor de inercia garantiza la existencia de tres direcciones principales mutuamente ortogonales, independientemente de la geometría del sólido.

$$\lambda_1 = I_{11} \quad ; \quad \lambda_2 = I_{22} \quad ; \quad \lambda_3 = I_{33}$$

Ejes principales de inercia

Como ejemplo tomemos el primer valor: $\lambda_1 = I_{11}$ y lo reemplazamos en la ecuación anterior:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} - I_{11} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I_{11} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{p1,x} \\ \omega_{p1,y} \\ \omega_{p1,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema obtenemos las relaciones entre las componentes, las cuales determinan la dirección:

$$\omega_{p1,x} \quad : \quad \omega_{p1,y} \quad : \quad \omega_{p1,z}$$

El eje principal solamente necesita una dirección; por lo tanto normalizamos el vector:

$$\hat{e}_1 = \frac{\overline{\omega}_{p1}}{\left|\overline{\omega}_{p1}\right|}$$

y obtenemos un versor que indica la dirección del primer eje principal. Así, repetimos el procedimiento para:

$$I_{22} \rightarrow \hat{e}_2$$
$$I_{33} \rightarrow \hat{e}_3$$

Ejes principales de inercia

Una vez encontrados los tres versores $\hat{e}_1; \hat{e}_2; \hat{e}_3$, tomamos esas direcciones como una nueva base.

Si los tres autovalores son distintos, sus direcciones principales son únicas y mutuamente ortogonales. Si dos coinciden, pueden elegirse dos direcciones ortogonales en el plano correspondiente. Si los tres coinciden, cualquier dirección es principal.

$$\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2 \quad ; \quad \hat{e}_2 \perp \hat{e}_3 \quad ; \quad \hat{e}_3 \perp \hat{e}_1$$

Consideremos una rotación alrededor del primer eje principal $\hat{e}_1$, es: $\bar{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1$.

Como: $\bar{L}_G \parallel \bar{\omega}$, resulta: $L_{G,2} = I_{21}\, \omega_1 = 0 \quad ; \quad L_{G,3} = I_{31}\, \omega_1 = 0 \quad ;$ $\boxed{\bar{L}_G = I_{11}\, \omega_1 \hat{e}_1}$

Como $\omega_1 \neq 0$, y por simetría del tensor: $I_{21} = I_{31} = I_{12} = I_{13} = 0$

Repitiendo el razonamiento para los otros dos ejes principales, resulta:

$$[\mathbf{I}_G]_p = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

No estamos definiendo un tensor nuevo: la matriz diagonal representa al mismo tensor de inercia $\mathbf{I}_G$, pero en la base formada por sus ejes principales.

Teorema de ejes paralelos o teorema de Steiner

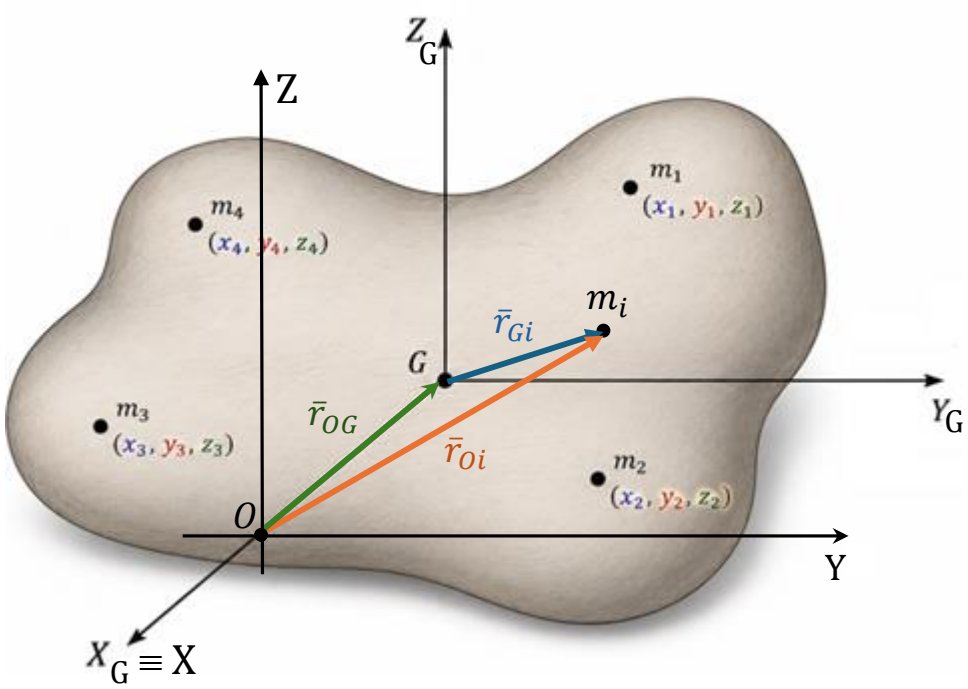
Hasta ahora hemos expresado el tensor de inercia respecto del centro de masa G. ¿Cómo cambia el momento de inercia cuando se calcula respecto de otro eje paralelo al anterior?

Para aplicar el teorema de Steiner a un momento de inercia respecto de un eje, los dos ejes que se relacionan deben ser paralelos.

Para una partícula cualquiera m_i del sólido de la figura, se obtiene:

$$\bar{r}_{Oi} = \bar{r}_{OG} + \bar{r}_{Gi}$$

El tensor de inercia respecto de O se obtiene considerando las coordenadas de cada partícula medidas desde O.



Expresamos los vectores de posición mediante sus componentes cartesianas. Para la partícula m_i respecto de G:

$$\bar{r}_{Gi} = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}$$

Teorema de ejes paralelos o teorema de Steiner

Para el desplazamiento de O a G, es:

$$\bar{r}_{OG} = a\hat{\imath}$$

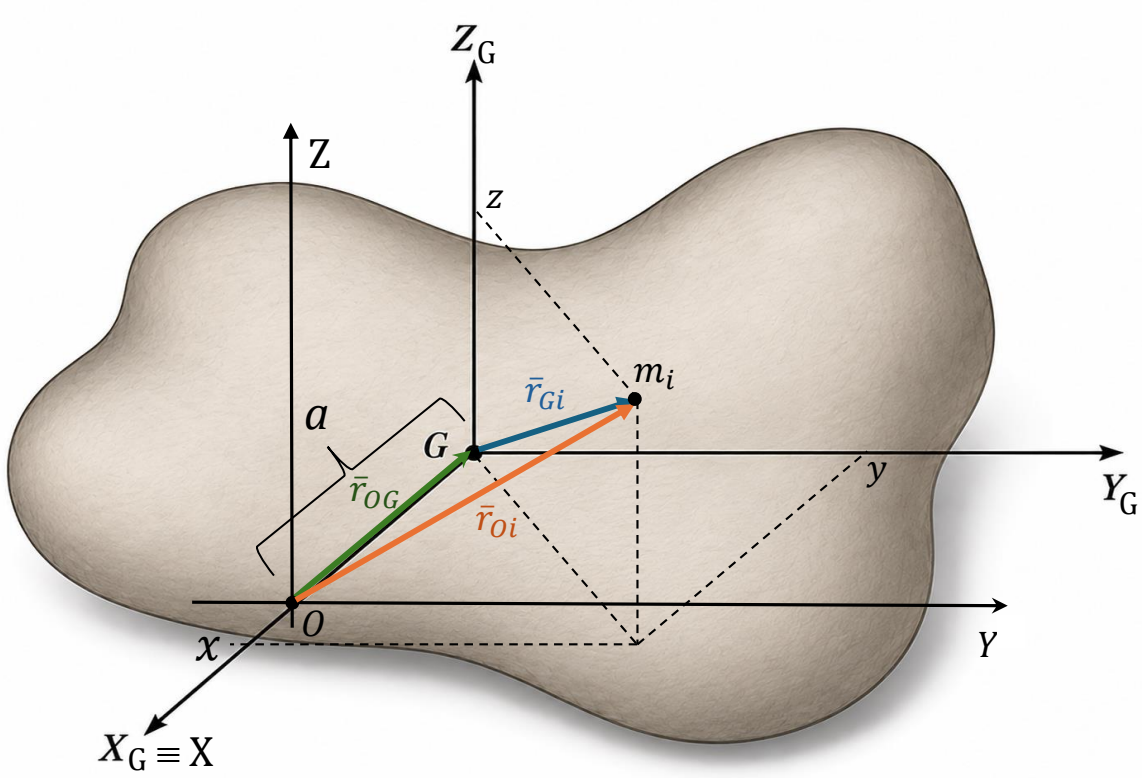
Las coordenadas de m_i respecto a O son:

$$x_{O,i} = x_{G,i} + a \quad ; y_{O,i} = y_{G,i} \quad ; z_{O,i} = z_{G,i}$$

Entonces:

$$\bar{r}_{Oi} = (x_{G,i} + a)\hat{\imath} + (y_{G,i})\hat{\jmath} + (z_{G,i})\hat{k}$$

La partícula es la misma; lo único que estamos haciendo es cambiar el punto desde el cual medimos sus coordenadas.



Como Y pasa por O y es paralelo a Y_G, podemos comparar directamente:

$$I_{G,yy} = \int_m (x_{G,i}^2 + z_{G,i}^2)dm \qquad \text{con} \qquad I_{O,yy} = \int_m \left[(x_{G,i} + a)^2 + z_{G,i}{}^2\right] dm$$

Teorema de ejes paralelos o teorema de Steiner

Desarrollamos:

$$I_{O,yy} = \int_m \left[x_{G,i}^2 + 2ax_{G,i} + a^2 + z_{G,i}^2\right]dm$$

Reagrupando:

$$I_{O,yy} = \int_m \left(x_{G,i}^2 + z_{G,i}^2\right)dm + 2a\int_m x_{G,i}dm + a^2\int_m dm$$

$$I_{O,yy} = I_{G,yy} + 2a\int_m x_{G,i}dm + a^2\int_m dm$$

Como $x_{G,i}$ se mide desde el centro de masa G, la suma de los aportes positivos y negativos de $x_{G,i}dm$ es cero:

$$\int_m x_{G,i}dm = 0 \quad ; \quad \int_m dm = M$$

Como los ejes Y_G e Y son paralelos y están separados una distancia perpendicular $d = a$, resulta:

$$\boxed{I_{O,yy} = I_{G,yy} + Ma^2 = I_{G,yy} + Md^2}$$

Generalización del teorema de Steiner

Hasta ahora demostramos cómo trasladar un momento de inercia entre dos ejes paralelos. Para trasladar el tensor completo, debemos considerar también cómo se modifican los productos de inercia.

Utilizamos los mismos sistemas de referencia de las diapositivas anteriores, con orígenes en *O* y *G*. El vector desplazamiento entre ambos orígenes es:

$$\bar{d} = \overrightarrow{OG} = d_x\hat{\imath} + d_y\hat{\jmath} + d_z\hat{k}$$

Las coordenadas de una partícula cualquiera cumplen:

$$x_{O,i} = x_{G,i} + d_x \quad ; y_{O,i} = y_{G,i} + d_y \quad ; z_{O,i} = z_{G,i}$$

Consideremos el elemento $I_{O,xy}$ del tensor de inercia:

$$I_{O,xy} = -\int_m x_{O,i} y_{O,i} dm$$

Sustituyendo:

$$I_{O,xy} = -\int_m (x_{G,i} + d_x)(y_{G,i} + d_y) dm$$

Generalización del teorema de Steiner

Desarrollando:

$$I_{O,xy} = -\int_m x_{G,i} y_{G,i} dm - d_y \int_m x_{G,i} dm - d_x \int_m y_{G,i} dm - d_x d_y \int_m dm$$

Como las coordenadas están medidas desde el centro de masa G:

$$\int_m x_{G,i} dm = \int_m y_{G,i} dm$$

Y como:

$$\int_m dm = M$$

Resulta:

$$I_{O,xy} = I_{G,xy} - M\ d_x\ d_y$$

Generalización del teorema de Steiner

De manera análoga se obtienen las restantes componentes del tensor. Por lo tanto, el teorema de Steiner generalizado queda:

$$[I_O] = [I_G] + M\begin{bmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & d_x^2 + d_z^2 & -d_y d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & d_x^2 + d_y^2 \end{bmatrix}$$

Donde $d_x; d_y; d_z$ son las componentes del vector $\overrightarrow{OG}$. Esta expresión también puede escribirse en forma tensorial:

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_G + M\left[(\bar{d} \cdot \bar{d})\mathbf{1} - \bar{d} \otimes \bar{d}\right]$$

O bien:

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_G + \mathbf{I}_{st}$$

El término $\mathbf{I}_{st}$ es un tensor de segundo orden, denominado *tensor de corrección de Steiner* o tensor de traslado de inercia. Representa el tensor de inercia de una masa puntual *M*, concentrada en *G*, respecto de *O*.

Teorema del momento cinético

Para un sistema de partículas, la resultante de las fuerzas exteriores determina la variación de su cantidad de movimiento:

$$\sum \bar{F}^{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt}$$

De manera análoga, el momento resultante de las fuerzas exteriores respecto de G determina la variación del momento cinético respecto de G:

$$\sum \bar{M}_G^{ext} = \left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{in}$$

El subíndice *in* indica que la derivada debe calcularse respecto de un sistema de referencia inercial.

Si existe un momento exterior resultante respecto de G, el momento cinético del sólido cambia con el tiempo. Ese cambio puede corresponder a un cambio en el módulo, en la dirección, o en ambos.

$$\sum \bar{M}_G^{ext} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{in} \neq 0$$

Teorema del momento cinético

Un caso importante es:

$$\sum \bar{M}_G^{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{in} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{L}_G = constante$$

Que es la conservación del momento cinético.

De la ecuación vista:

$$\sum \bar{M}_G^{ext} = \left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{in}$$

Además sabemos que: $\bar{L}_G = [\mathbf{I}_G]\bar{\omega}$.

Normalmente conviene expresar $\bar{L}_G$ en una base solidaria al cuerpo, porque allí el tensor de inercia permanece constante.

Pero esa base está rotando, entonces supongamos una base solidaria al sólido: $(\hat{e}_1; \hat{e}_2; \hat{e}_3)$, que gira con velocidad angular: $\bar{\omega}$; expresamos el momento cinético como:

$$\bar{L}_G = L_1\hat{e}_1 + L_2\hat{e}_2 + L_3\hat{e}_3$$

Teorema del momento cinético

Derivamos respecto del tiempo desde el sistema inercial:

$$\left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{in} = \dot{L}_1\hat{e}_1 + \dot{L}_2\hat{e}_2 + \dot{L}_3\hat{e}_3 + L_1\frac{d\hat{e}_1}{dt} + L_2\frac{d\hat{e}_2}{dt} + L_3\frac{d\hat{e}_3}{dt}$$

Donde L_1, L_2, L_3 son las componentes de $\bar{L}_G$ en la base solidaria al cuerpo. Como los versores están ligados al sólido, rotan con él:

$$\left(\frac{d\hat{e}_i}{dt}\right)_{in} = \bar{\omega} \times \hat{e}_i$$

Entonces:

$$\left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{in} = \dot{L}_1\hat{e}_1 + \dot{L}_2\hat{e}_2 + \dot{L}_3\hat{e}_3 + \bar{\omega} \times (L_1\hat{e}_1 + L_2\hat{e}_2 + L_3\hat{e}_3)$$

Los tres primeros términos representan la variación de las componentes de $\bar{L}_G$ observada desde la base solidaria al cuerpo:

$$\left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{rot} + \bar{\omega} \times \bar{L}_G$$

Donde *rot* indica la derivada observada desde la base rotante solidaria al cuerpo.

Teorema del momento cinético

Si la base solidaria al cuerpo coincide con los ejes principales $(\hat{e}_1; \hat{e}_2; \hat{e}_3)$, entonces:

$$[\mathbf{I}_G]_p = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \bar{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$$

Por lo tanto:

$$\bar{L}_G = I_{11}\omega_1 \hat{e}_1 + I_{22}\omega_2 \hat{e}_2 + I_{33}\omega_3 \hat{e}_3$$

Como $I_{11}; I_{22}; I_{33}$ permanecen constantes en la base solidaria:

$$\left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{rot} = I_{11}\dot{\omega}_1 \hat{e}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 \hat{e}_2 + I_{33}\dot{\omega}_3 \hat{e}_3$$

Ahora falta calcular el otro término: $\bar{\omega} \times \bar{L}_G$.

$$(\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3) \times (I_{11}\omega_1 \hat{e}_1 + I_{22}\omega_2 \hat{e}_2 + I_{33}\omega_3 \hat{e}_3)$$

Teorema del momento cinético

Resolviendo el producto vectorial:

$$\bar{\omega} \times \bar{L}_G = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_{11}\omega_1 & I_{22}\omega_2 & I_{33}\omega_3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando:

$$\bar{\omega} \times \bar{L}_G = (I_{33} - I_{22})\omega_2\omega_3\hat{e}_1 + (I_{11} - I_{33})\omega_3\omega_1\hat{e}_2 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2\hat{e}_3$$

Este término aparece porque la base solidaria al cuerpo está rotando, por lo que la dirección de $\bar{L}_G$ puede cambiar respecto del sistema inercial.

Ecuaciones de Euler

Partimos nuevamente de:

$$\sum \bar{M}_G^{ext} = \left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{rot} + \bar{\omega} \times \bar{L}_G$$

y escribimos el momento exterior en componentes:

$$\sum \bar{M}_G^{ext} = M_1\hat{e}_1 + M_2\hat{e}_2 + M_3\hat{e}_3$$

Igualando componente a componente:

$$M_1 = I_{11}\dot{\omega}_1 + (I_{33} - I_{22})\omega_2\omega_3$$

$$M_2 = I_{22}\dot{\omega}_2 + (I_{11} - I_{33})\omega_3\omega_1$$

$$M_3 = I_{33}\dot{\omega}_3 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2$$

Estas son las ecuaciones de Euler para la rotación de un sólido rígido respecto de su centro de masa, expresadas en una base solidaria coincidente con los ejes principales de inercia.

Energía cinética del sólido rígido

Para una partícula m_i, la energía cinética es:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Un sólido puede considerarse formado por un conjunto de partículas cuya posición relativa permanece constante. Por lo tanto, su energía cinética total será la suma de las energías cinéticas de sus partículas:

$$\sum_i K_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, v_i^2$$

En cinemática del sólido vimos que para cualquier partícula m_i:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi}$$

Entonces:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, |\bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi}|^2$$

Energía cinética del sólido rígido

Desarrollamos el cuadrado:

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{v}_G^2 + \sum_i m_i \bar{v}_G \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi}) + \frac{1}{2}\sum_i m_i \, |\bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi}|^2$$

Ahora tratamos cada término por separado. El primer término representa la energía asociada a la traslación:

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{v}_G^2 = \frac{1}{2} v_G^2 \sum_i m_i = \frac{1}{2} M v_G^2$$

El segundo término, como $\bar{v}_G$ y $\bar{\omega}$ son comunes a todas las partículas:

$$\sum_i m_i \bar{v}_G \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi}) = \bar{v}_G \cdot \left[\bar{\omega} \times \left(\sum_i m_i \bar{r}_{Gi}\right)\right]$$

pero, por estar G en el centro de masa: $\sum_i m_i \bar{r}_{Gi} = 0$, entonces:

$$\sum_i m_i \bar{v}_G \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi}) = 0$$

Energía cinética del sólido rígido

El tercer término representa la energía asociada a la rotación del sólido respecto de G :

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi}\right) \cdot \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi}\right)$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\omega^2 r_{Gi}^2 - \left(\bar{\omega} \cdot \bar{r}_{Gi}\right)^2\right]$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \sum_i m_i \left[r_{Gi}^2 \bar{\omega} - \left(\bar{\omega} \cdot \bar{r}_{Gi}\right)\bar{r}_{Gi}\right]$$

La sumatoria vectorial corresponde a la aplicación del tensor de inercia sobre la velocidad angular:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot [\mathbf{I}_G]\bar{\omega}$$

Energía cinética del sólido rígido

La energía cinética del sólido es la suma de la energía asociada a la traslación de su centro de masa y la energía asociada a su rotación respecto de G. Entonces:

$$K = K_{tras} + K_{rot}$$

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega} \cdot [\mathbf{I}_G] \overline{\omega}$$

En una base principal es:

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} (I_{11} \omega_1^2 + I_{22} \omega_2^2 + I_{33} \omega_3^2)$$

Trabajo y potencia en el sólido rígido

Para una partícula ya conocemos que el trabajo elemental de una fuerza es:

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

y, dividiendo por *dt*:

$$\mathcal{P} = \bar{F} \cdot \bar{v}$$

Para un sólido rígido actúan, en general, varias fuerzas exteriores $\bar{F}_i$; aplicadas en distintos puntos P_i . Por lo tanto, la potencia total de las fuerzas exteriores es:

$$\mathcal{P}^{ext} = \sum_i \bar{F}_i^{ext} \cdot \bar{v}_i$$

Ahora usamos nuevamente la cinemática del sólido. La velocidad del punto de aplicación P_i es:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi}$$

Sustituyendo:

$$\mathcal{P}^{ext} = \sum_i \bar{F}_i^{ext} \cdot (\bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi})$$

Trabajo y potencia en el sólido rígido

Distribuyendo:

$$\mathcal{P}^{ext} = \sum_i \bar{F}_i^{ext} \cdot \bar{v}_G + \sum_i \bar{F}_i^{ext} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi})$$

Como $\bar{v}_G$ es común a todos los puntos:

$$\mathcal{P}^{ext} = \left(\sum_i \bar{F}_i^{ext} \right) \cdot \bar{v}_G + \sum_i \bar{F}_i^{ext} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi})$$

Ahora usamos la propiedad del producto mixto:

$$\bar{F}_i \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_{Gi}) = \bar{\omega} \cdot (\bar{r}_{Gi} \times \bar{F}_i)$$

Entonces:

$$\mathcal{P}^{ext} = \left(\sum_i \bar{F}_i^{ext} \right) \cdot \bar{v}_G + \bar{\omega} \cdot \sum_i \left(\bar{r}_{Gi} \times \bar{F}_i^{ext} \right)$$

Trabajo y potencia en el sólido rígido

Como:

$$\bar{R}^{ext} = \sum_i \bar{F}_i^{ext} \qquad \text{y} \qquad \bar{M}_G^{ext} = \sum_i \left(\bar{r}_{Gi} \times \bar{F}_i^{ext}\right)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{P}^{ext} = \bar{R}^{ext} \cdot \bar{v}_G + \bar{M}_G^{ext} \cdot \bar{\omega}$$

La potencia de las fuerzas exteriores sobre un sólido rígido puede separarse en una contribución asociada a la traslación de G y otra asociada a la rotación del sólido. Es decir:

- $(\bar{R}^{ext} \cdot \bar{v}_G)$: potencia de traslación.
- $(\bar{M}_G^{ext} \cdot \bar{\omega})$: potencia de rotación.

Teorema del trabajo y la energía cinética

Por definición de potencia es:

$$\mathcal{P}^{ext} = \frac{dW^{ext}}{dt}$$

Por teorema de trabajo y energía cinética:

$$dW^{ext} = dK$$

Integrando entre dos posiciones 1 y 2:

$$W_{1\to 2}^{ext} = K_2 - K_1$$

Incorporando la energía cinética del sólido:

$$W_{1\to 2}^{ext} = \left[\frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot[\mathbf{I}_G]\overline{\omega}\right]_2 - \left[\frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot[\mathbf{I}_G]\overline{\omega}\right]_1$$

Fuerzas conservativas

Si parte de las fuerzas exteriores son conservativas, su trabajo puede expresarse mediante la variación de energía potencial:

$$W_{1\to2}^{cons} = -(U_2 - U_1)$$

Separando el trabajo de las fuerzas conservativas y no conservativas:

$$W_{1\to2}^{no-cons} + W_{1\to2}^{cons} = K_2 - K_1$$

Por lo tanto:

$$W_{1\to2}^{no-cons} = (K_2 - K_1) + (U_2 - U_1)$$

O bien:

$$W_{1\to2}^{no-cons} = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1)$$

Si las fuerzas no conservativas no realizan trabajo:

$$(K_1 + U_1) = (K_2 + U_2)$$

Reacciones dinámicas

Las fuerzas y momentos ejercidos por los apoyos y vínculos sobre un sólido rígido se denominan reacciones.

Cuando el sólido está acelerado, estas reacciones deben satisfacer las ecuaciones dinámicas:

$$\sum \bar{F}^{ext} = M\,\bar{a}_G$$

$$\sum \bar{M}_G^{ext} = \left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{in}$$

A diferencia de un problema estático, las reacciones dependen también del movimiento del sólido.

Las reacciones dinámicas se determinan considerando las aceleraciones del centro de masa y la variación del momento cinético del sólido. Por lo tanto, deben plantearse simultáneamente las ecuaciones de fuerzas y de momentos.

Reacciones dinámicas de un rotor

Consideremos un rotor cuyo centro de masa G se encuentra a una distancia e del eje fijo de rotación.

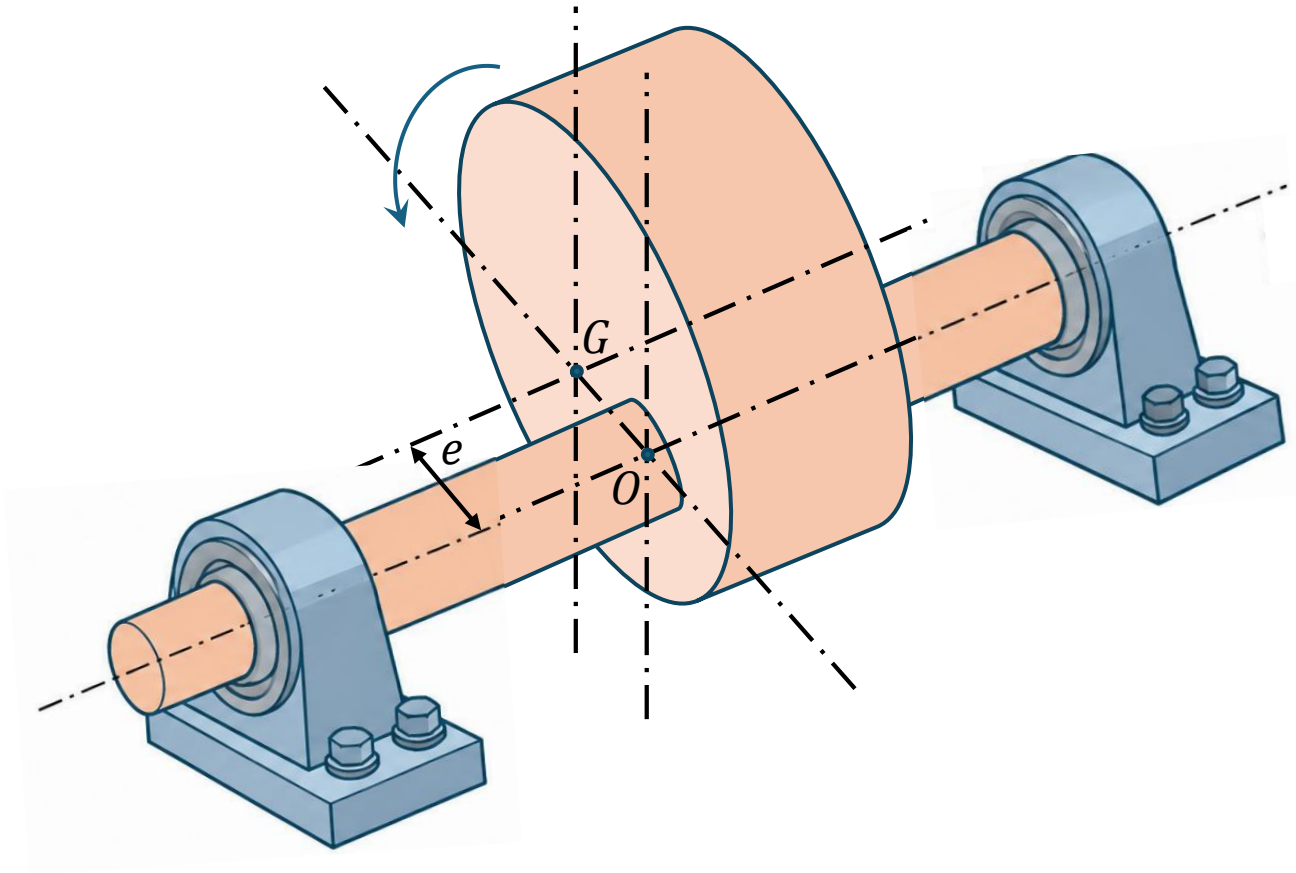
Si gira con velocidad angular constante ω:

$$a_G = \omega^2 \, e$$

Por lo tanto, la resultante de las fuerzas exteriores debe tener una componente radial:

$$\sum F_r = M \, \omega^2 \, e$$

Los apoyos deben proporcionar las reacciones necesarias para mantener ese movimiento.



Reacciones y momentos dinámicos

Cuando un sólido gira alrededor de un eje que no es principal de inercia, en general:

$$\bar{L}_G \nparallel \bar{\omega}$$

Si el eje de rotación permanece fijo y la rapidez angular es constante, el vector $\bar{L}_G$ puede cambiar de dirección respecto del sistema inercial.

$$\sum \bar{M}_G^{ext} = \left(\frac{d\bar{L}_G}{dt}\right)_{in} \neq 0$$

Los vínculos pueden tener que ejercer momentos dinámicos, además de fuerzas, para mantener el movimiento impuesto.

$$\sum \bar{M}_G^{ext} = \mathbf{I}_G \cdot \bar{\alpha} + \bar{\omega} \times (\mathbf{I}_G \cdot \bar{\omega})$$

Para una rotación alrededor de un eje fijo, con velocidad angular constante, $\bar{\alpha}$ =0. Por lo tanto:

$$\sum \bar{M}_G^{ext} = \bar{\omega} \times \bar{L}_G$$

Ejemplo Reacciones y momentos dinámicos

Un rotor de masa M=20 kg y radio R=0,20 m gira alrededor de un eje horizontal fijo, con velocidad angular constante ω =30 rad/s. Su centro de masa G está desplazado e=5 mm respecto del eje de rotación.

El rotor está ubicado a igual distancia de dos apoyos A y B. La longitud entre apoyos es de 0,60 m. Se considera que su distribución de masa es simétrica respecto de un plano perpendicular al eje de rotación, que contiene al centro de masa G y está situado a igual distancia de ambos apoyos. Despreciando el peso del eje, determinar las reacciones dinámicas en los apoyos A y B.

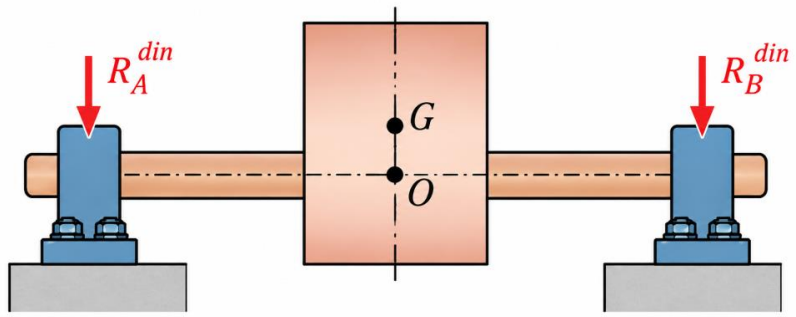
a) Aceleración del centro de masa: como el centro de masa describe una circunferencia de radio e:

$$a_G = \omega^2 \, e = \ (30)^2 \ 0{,}005$$

$$a_G = 4{,}5 \ \ \mathrm{m/s^2}$$

b) Determinación de la fuerza dinámica. Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección radial:

$$\sum F_r = M \, a_G = M \, \omega^2 \, e$$

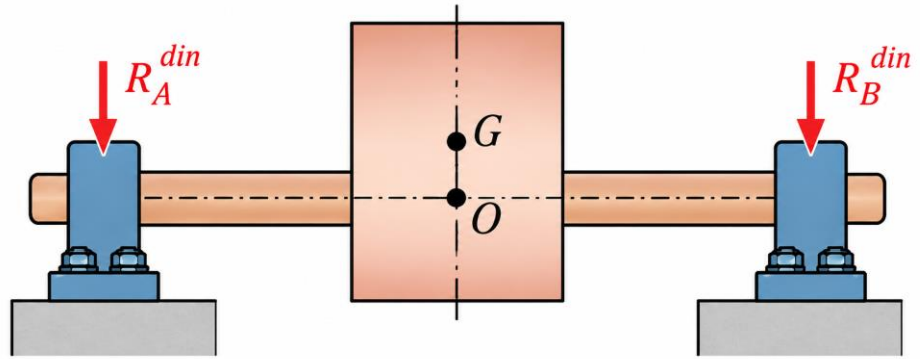


Ejemplo Reacciones y momentos dinámicos

Reemplazando:

$$\sum F_r = 20\ (30)^2\ (0{,}005)$$

$$\sum F_r = 90\ \text{N}$$



Esta es la resultante radial necesaria para mantener el movimiento circular del centro de masa.

c) Determinación de las reacciones dinámicas.

Por la simetría del rotor y su posición entre los apoyos, las componentes radiales de las reacciones son iguales:

$$R_A^{din} = R_B^{din}$$

Entonces:

$$R_A^{din} + R_B^{din} = 90\ \text{N}$$

$$R_A^{din} = R_B^{din} = 45\ \text{N}$$