Dinámica relativa del sólido. REACCIONES DINAMICAS

Introducción

Las causas del movimiento del sólido en el espacio, son las fuerzas exteriores y sus momentos. Estas cantidades se relacionan con las derivadas respecto del tiempo del momento lineal o cantidad de movimiento y el momento angular o momento cinético del sólido. La cantidad de movimiento puede expresarse en función de la masa total del sistema y la velocidad del centro de masa, en tanto que el momento angular depende del tensor de inercia del sólido.

Si el tensor de inercia está referido a ejes fijos, sus componentes no permanecen constantes al cambiar el sólido de posición, por lo que el trato de las ecuaciones que ligan la variación del momento angular con el momento de las fuerzas exteriores puede ser complicado. Esta dificultad puede eludirse introduciendo sistemas referenciales relativos, fijos al cuerpo en estudio. Luego, las derivadas de las magnitudes expresadas en este referencial móvil pueden obtenerse aplicando el operador de derivación para sistemas móviles en roto traslación.

En lo que sigue, trataremos el movimiento del sólido, con sus distintas variables dinámicas, referidos a sistemas de ejes en movimiento respecto de una terna fija.

Sólido referido a un sistema rototraslatorío

Supongamos un sólido referido a un sistema que se encuentra en un estado de roto traslación respecto de una terna fija. El sólido se encuentra fijo respecto del sistema móvil.

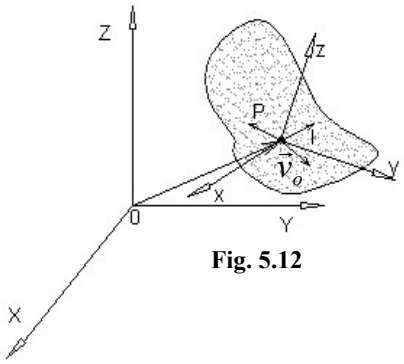


Fig. 5.12

Cantidad de Movimiento

Habíamos visto que la expresión de la cantidad de movimiento referida al sistema x, y, z, era:

$$\vec{P} = M \cdot \vec{v}_0 + M \cdot \vec{w} \times \vec{r}_G$$

Derivando respecto del sistema fijo, recordando que la derivación relativa de un vector se hacía mediante el siguiente operador.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_F = \left.\frac{d}{dt}\right|_m + (\vec{W} \times \ )$$

Para el vector cantidad de movimiento:

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_m + \left(\vec{W} \times \vec{P}/m\right) =$$

$$\dot{\vec{v}}_o * M + \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times M * \dot{\vec{r}}_G + \vec{W} \times \vec{v}_o * M + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$\dot{\vec{r}}_G = 0$, pues el sólido se encuentra fijo respecto de x, y, z. Sabemos que las fuerzas aplicadas respecto de un sistema fijo son:

$$\sum \vec{F}^{\,e} = \vec{F}^{\,e}\Big|_F = \frac{d\vec{P}}{dt}\Big|_F$$

Nos queda entonces:

$$\vec{F}^{\,e}\Big|_F = \vec{a}_o * M + \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{v}_o * M + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

Se verá que esta ecuación se simplifica en forma notable cuando el sólido rota alrededor de un eje fijo, y se toma el punto "O" sobre el mismo. En ese caso, será:

$$\frac{\boldsymbol{d\vec{P}}}{\boldsymbol{d}}\Big|_{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{M \cdot \vec{\alpha} \times \vec{r}_G + M \cdot \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}_G) = \vec{F}_{Ext.}}$$

$$\boldsymbol{por\ ser \quad \vec{a}_0 = 0\ y\ \cdot \vec{v}_0 = 0}$$

Momento Cinético

La expresión de momento cinético en el sistema en movimiento es:

$$\vec{L}\Big|_m = M \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_o + [I] \cdot [W]^T$$

Se considera que el tensor de inercia ha sido referido al sistema móvil solidario al sólido, y por lo tanto sus componentes permanecen constantes al cambiar el sólido de posición

Derivando respecto del sistema fijo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}\Big|_F = \frac{d\vec{L}}{dt}\Big|_m + \left(\vec{W} \times \vec{L}/m\right) =$$

$$M * \dot{\vec{r}}_G \times \vec{v}_o + M * \vec{r}_G \times \vec{a}_o + [I] \cdot \left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W} \times M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T$$

Teniendo presente la relación entre la derivada del momento angular y el momento de las fuerzas externas:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}\Big|_F = M^{\,e}\Big|_F$$

Nos queda:

$$M^{\,e}\Big|_F = M * \dot{\vec{r}}_G \times \vec{v}_o + M * \vec{r}_G \times \vec{a}_o + [I] \cdot \left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W} \times M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T$$

Rotación de un Sólido con eje fijo

En este caso el sólido mantiene su eje de rotación fijo en el espacio. Entonces:

$\vec{v}_o = 0$

$\vec{a}_o = 0$

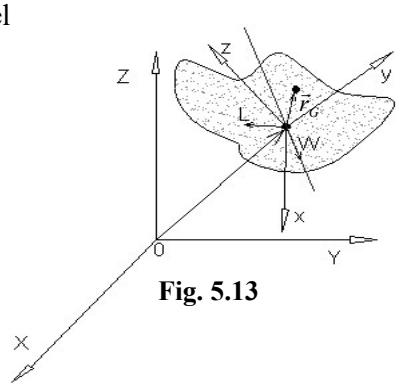


Fig. 5.13

Tendremos en este caso:

$$\vec{F}^e\Big|_F = \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$$M^e\Big|_F = [I] \cdot \left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T$$

Reacciones dinámicas de un sólido en rotación

Supongamos tener un sólido rotando sobre un eje fijo en el espacio. Este eje lo consideramos vinculado al sistema fijo a través de cojinetes. Como ejemplo, puede considerarse el rotor de una turbina hidráulica o el impulsor de una bomba de agua. Se trata de sólidos montados sobre un eje, el cual es sustentado por cojinetes que permiten la rotación.

El sólido en su rotación puede generar fuerzas inerciales que presionan sobre los vínculos. Estas presiones dinámicas (debidas al movimiento) no existen si el sólido se encuentra estático, en cuyo caso solo habrá reacciones debidas al peso u otras fuerzas estáticas.

Las presiones dinámicas aparecen cuando el sólido se encuentra en rotación, y así como las cargas estáticas originan reacciones en los soportes, estas cargas dinámicas harán aparecer reacciones, que se denominan reacciones dinámicas. La magnitud de estas reacciones estará directamente ligadas a la cantidad de masa del sólido, a la forma en que la masa está distribuida y a las condiciones cinemáticas del movimiento.

Las condiciones dinámicas de este sólido establecen:

$$\vec{F}^e\Big|_F = \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$$M^e\Big|_F = [I] \cdot \left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T$$

En ambas ecuaciones aparece un término que depende de la aceleración angular, su existencia se comprende con facilidad, puesto que, para acelerar una masa, es necesaria una fuerza o un momento. Estos términos se anulan en el caso de que el sólido rote a velocidad constante. El otro término involucrado, depende solamente de la velocidad de rotación, de la cantidad de masa y la forma en que está distribuida, resumidas en el vector posición del centro de masas y el tensor de inercia.

Las acciones exteriores están formadas por acciones activas y acciones reactivas, es decir:

$$\vec{F}^e = \vec{F}_a^e + \vec{F}_R^e$$

$$\vec{M}^e = \vec{M}_a^e + \vec{M}_R^e$$

El equilibrio del sólido es:

$$\vec{F}^e = \vec{F}_a^e + \vec{F}_R^e = \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$$\vec{M}^e = \vec{M}_a^e + \vec{M}_R^e = [I]\cdot\left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W}\times[I]\cdot\left[\vec{W}\right]^T$$

Que nos provee las ecuaciones para obtener el valor de las reacciones del sólido. Por ejemplo, si:

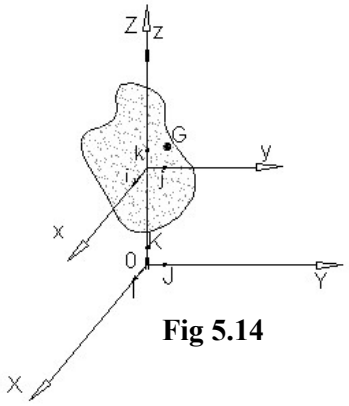


Fig 5.14

$$\vec{W}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_z \end{pmatrix} = cte$$

$$\left|\vec{W}^e\right| = cte$$

$$\vec{M}^e = \vec{W}\times[I]\cdot\left[\vec{W}\right]^T = \vec{W}\times\begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ W_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{W}\times\begin{pmatrix} I_{xz}\cdot W_z & I_{yz}\cdot W_z & I_{zz}\cdot W_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}^e = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & W_z \\ I_{xz}\cdot W_z & I_{yz}\cdot W_z & I_{zz}\cdot W_z \end{vmatrix} = -I_{yz}\cdot W_z^2\cdot\vec{i} + I_{xz}\cdot W_z^2\cdot\vec{j}$$

Planteamos:

$$\vec{M}_a^e + \vec{M}_R^e = -I_{yz}\cdot W_z^2\cdot\vec{i} + I_{xz}\cdot W_z^2\cdot\vec{j}$$

Debemos tener en cuenta que los vectores de la izquierda de la igualdad están en el sistema fijo, mientras que los de la derecha están en el sistema en movimiento, lo cual involucra una transformación de coordenadas.

Para nuestro ejemplo, de acuerdo a los sistemas adoptados $\vec{i}\quad\vec{j}\quad\vec{k}\equiv\vec{I}\quad\vec{J}\quad\vec{K}$

Luego la transformación es una identidad. Esta ecuación vectorial implica:

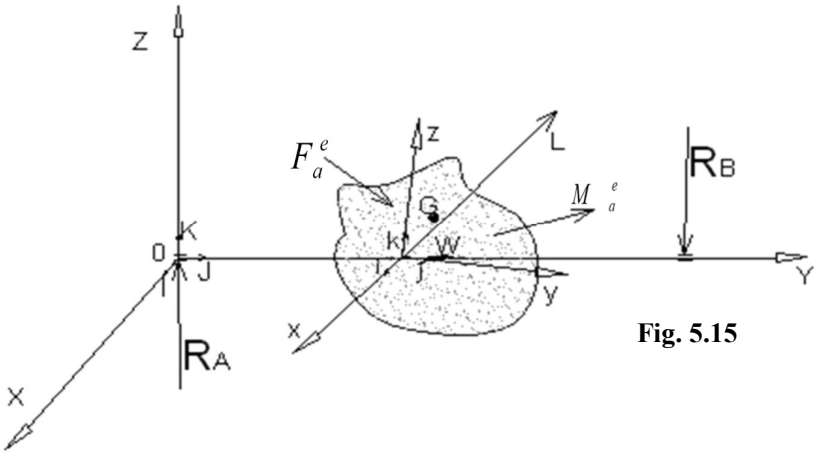


Fig. 5.15

$$\vec{M}_{ax}^e + \vec{M}_{Rx}^e = -I_{yz}\cdot W_z^2$$
$$\vec{M}_{ay}^e + \vec{M}_{Ry}^e = I_{xz}\cdot W_z^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Las otras ecuaciones nos proveen: $\vec{F}^{\,e} = \vec{W}\times\vec{W}\times M * \vec{r}_G$

Si las coordenadas del centro de masa son: $\vec{r}_G = x_G \quad y_G \quad x_G$

$$\vec{W} \times M * \vec{r}_G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & W_z \\ x_G & y_G & z_G \end{vmatrix} = -y_G \cdot W_z \cdot \vec{i} + x_G \cdot W_z \cdot \vec{j}$$

$$\vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & W_z \\ -y_G \cdot W & x_G \cdot W_z & 0 \end{vmatrix} = x_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{i} - y_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{j}$$

Nos queda: $\vec{F}^e = x_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{i} - y_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{j}$

Que nos da las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ax}^{\,e} + \vec{F}_{Rx}^{\,e} &= x_G \cdot W_z^2 \\ \vec{F}_{ay}^{\,e} + \vec{F}_{Ry}^{\,e} &= y_G \cdot W_z^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Que resuelven junto con **(1)** el estado de equilibrio.

Vemos en las ecuaciones **(1)** y **(2)** que para que sea $\vec{F}^e = 0$ y $\vec{M}^e = 0$, deben ser

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$
$$x_G = y_G = z_G = 0$$

Para que se cumplan estas condiciones, el eje de rotación debe coincidir con un eje principal de inercia y debe contener al centro de masas del sólido.

Los momentos centrífugos no nulos y el desplazamiento del centro de masa, dan origen a reacciones dinámicas. Se puede concluir que estas magnitudes "miden" el grado de desbalanceo que posee el sólido.

Equilibrio dinámico

Dado un sólido en desequilibrio dinámico, se busca equilibrarlo de tal manera de eliminar las reacciones dinámicas, que en general dan origen a la aparición de vibración en el sistema. Por ejemplo, las ruedas de un automóvil deben "balancearse" luego de un cierto uso, puesto que el desgaste asimétrico da origen a reacciones dinámicas. El balanceo se realiza agregando masas como en el caso de las ruedas, si según el sistema lo permita, también se puede removerse o quitar masa. El objetivo de este agregado o remoción de masas, es llevar al eje de rotación a ser nuevamente un eje principal de inercia conteniendo el centro de masas.

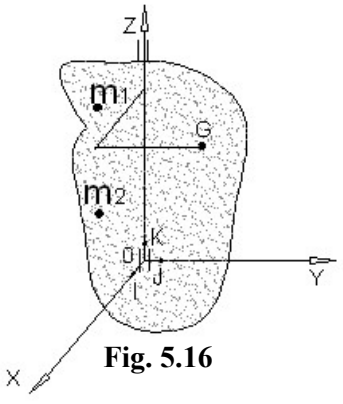


Fig. 5.16

A continuación, se plantea el problema del balanceo o equilibrio dinámico de un sólido en rotación. Dado el sólido con:

$$I_{xz} \neq 0$$
$$I_{yz} \neq 0$$
$$X_G, Y_G, Z_G \neq 0$$

Se buscará anular los productos de inercia que tienen un subíndice coincidente con el eje de rotación, y las componentes de vector posición del centro de masas de subíndice distintos del eje de rotación.

Se ubican las masas m_1 y m_2 de tal manera que:

$$I'_{yz} = I_{yz} + m_1 \cdot Y_1 \cdot Z_1 + m_2 \cdot Y_2 \cdot Z_2 = 0$$
$$I'_{xz} = I_{xz} + m_1 \cdot X_1 \cdot Z_1 + m_2 \cdot X_2 \cdot Z_2 = 0$$
$$Y'_G = M \cdot Y_G + m_1 \cdot Y_1 + m_2 \cdot Y_2 = 0$$
$$X'_G = M \cdot X_G + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 = 0$$

Tenemos ocho incógnitas (m_1, m_2, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2), y solo son cuatro las ecuaciones. Esto se soluciona fijando cuatro y despejando las otras. En general se fija posiciones a veces limitadas por la geometría y del sólido a "balancear". Por ejemplo, en las ruedas del automóvil, los contrapesos pueden ubicarse únicamente en la periferia de la llanta.

Movimiento de un sólido con un punto fijo
Ecuación de Euler

Vamos a considerar ahora el movimiento de un sólido que mantiene un punto fijo; es decir un movimiento polar.

Supondremos un sistema fijo y un sólido vinculado a dicho sistema a través de un punto, y otro móvil y solidario con el sólido y en las direcciones principales de inercia.

El sólido se encuentra vinculado en su centro de gravedad:

$\vec{W} = \vec{W}_{(t)}$ o sea que la velocidad angular varía en modulo y dirección.

La ecuación que regula el movimiento es:

$$\vec{M}^e = [I] \cdot \left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T$$

donde: $$[I] = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}$$

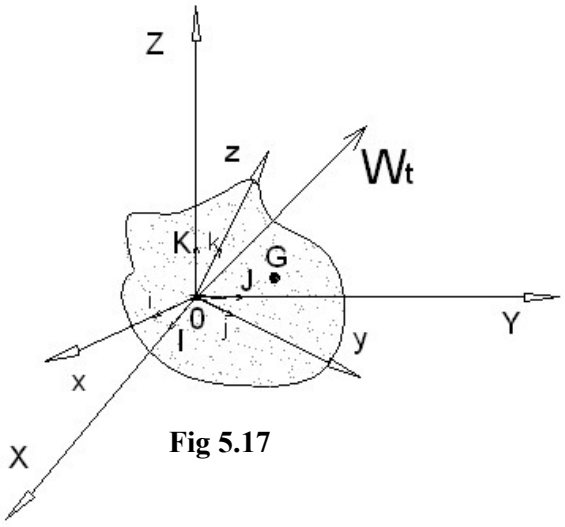


Fig 5.17

Haciendo las operaciones obtendremos:

$$\vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T = \left(I_3 \cdot W_z \cdot W_y - I_2 \cdot W_y \cdot W_z\right) \cdot \vec{i} +$$
$$\left(I_1 \cdot W_x \cdot W_z - I_3 \cdot W_z \cdot W_x\right) \cdot \vec{j} +$$
$$\left(I_2 \cdot W_y \cdot W_x - I_2 \cdot W_x \cdot W_y\right) + \vec{k}$$

$$\vec{M}^e = \left(\vec{M}^e_x, \vec{M}^e_y, \vec{M}^e_z\right)$$

$$\vec{M}^e \quad \begin{matrix} \vec{M}^e_x = I_1 \cdot \dot{W}_x + \left(I_3 - I_2\right) \cdot W_y \cdot W_z \\ \vec{M}^e_y = I_2 \cdot \dot{W}_y + \left(I_1 - I_3\right) \cdot W_x \cdot W_z \\ \vec{M}^e_z = I_3 \cdot \dot{W}_z + \left(I_2 - I_1\right) \cdot W_y \cdot W_x \end{matrix} \quad \textbf{\textit{Ecuaciones de Euler}}$$

Se encuentra expresado en los versores en movimiento, si queremos expresarlos en el sistema fijo debemos aplicar la transformación correspondiente.

Movimiento de un Sólido por Inercia

Analizaremos el movimiento del sólido que no está sometido a fuerzas y momentos. El sólido está vinculado a su centro de masa y lo mantiene fijo a través de un apoyo. La resultante del peso se equilibra con la reacción de apoyo.

$$\vec{F}_a^{\,e} + \vec{F}_R^{\,e} = 0$$

Establecemos un sistema referencial solidario con el sólido que coincide con los ejes principales de inercia.

$$[I] = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}$$

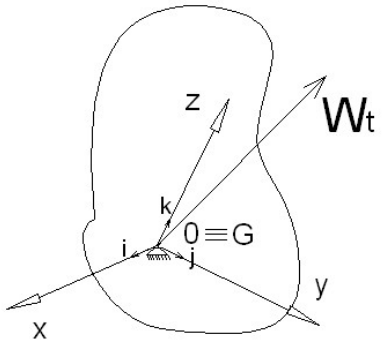


Fig. 5.18

Como no hay pares exteriores aplicados:

$$\vec{M}^{\,e} = 0 \qquad \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_F = 0 \qquad \vec{L} = cte$$

Vamos a suponer un sólido giroscópico, es decir un sólido donde:

$$I_1 = I_2 = I$$

Las Ecuaciones de Euler quedan:

$$0 = I \cdot \dot{W}_x + (I_3 - I) \cdot W_y \cdot W_z$$
$$0 = I \cdot \dot{W}_y - (I_3 - I) \cdot W_x \cdot W_z$$
$$0 = I_3 \cdot \dot{W}_z$$

De la tercera se deduce que:

$$I_3 \cdot \dot{W}_z = 0 \quad \dot{W}_z = 0 \qquad W_z = cte$$

O sea que la rotación sobre el eje "**z**" se realiza en ausencia de momento exterior y bajo condición $\vec{L} = cte$ con $W_z = cte$

Las otras dos ecuaciones dan:

$$0 = \dot{W}_x + \frac{(I_3 - I)}{I} \cdot W_y \cdot W_z$$
$$0 = \dot{W}_y - \frac{(I_3 - I)}{I} \cdot W_x \cdot W_z$$

Se puede poner: $\begin{vmatrix} \dot{W}_x + k \cdot W_y = 0 \\ \dot{W}_y - k \cdot W_x = 0 \end{vmatrix}$ **(1)** Donde: $k = \frac{(I_3 - I)}{I} \cdot W_z$

Derivando la primera: $\ddot{W}_x + k \cdot \dot{W}_y = 0$

Introduciendo en la segunda: $\ddot{W}_x + k^2 \cdot \dot{W}_x = 0$

Cuya solución es: $W_x = A \cdot \cos(k \cdot t))$

Luego derivando y llevando a **(1)**: $W_y = A \cdot sen(P \cdot t)$

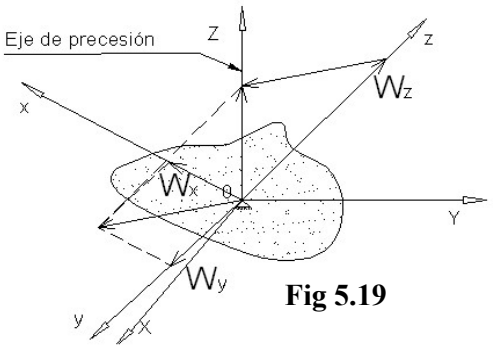


Fig 5.19

El vector velocidad angular: $\vec{W} = W_x \cdot \vec{i} + W_y \cdot \vec{j} + W_z \cdot \vec{k}$

Llamando: $A^2 = \left(W_x^2 + W_y^2\right)$

Por tanto, el módulo de $\vec{W}$ es: $\vec{W}^2 = \vec{W}_z^2 + A^2$

El vector velocidad angular $\vec{W}$ efectúa un movimiento de precesión alrededor del eje "**z**" con pulsación: $k = \dfrac{(I_3 - I)}{I} \cdot W_z$

Para el caso particular en que la condición principal es tal que $\vec{L}$ tiene la dirección del eje de rotación. $I_3 \cdot W_z = \vec{L}$ $W_x = W_y = 0$ $A = 0$; no hay precesión, el sólido mantiene la dirección del eje "**z**" constante.

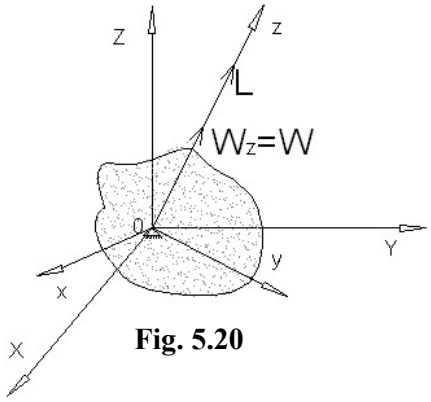


Fig. 5.20

$$\vec{M}_0^e = [I_o] \cdot [\vec{\alpha}]^T + \vec{W} \times [I_o] \cdot [\vec{W}]^T$$
$$\sum \vec{F}^e = M \cdot \vec{a}_{cm} \qquad \vec{a}_{cm} = W^2 \cdot \vec{r}_{cm} + \alpha \cdot \vec{r}_{cm}$$

El tensor de inercia respecto a un sistema de ejes cuyo origen se encuentra en un punto que no coincide con el centro de masas, se puede calcular con la expresión tensorial

$$[I_o] = [I_G] + M \cdot \left[[r_{0G}]^2 \cdot [I_D] + r_{0G} \otimes r_{0G} \right]$$