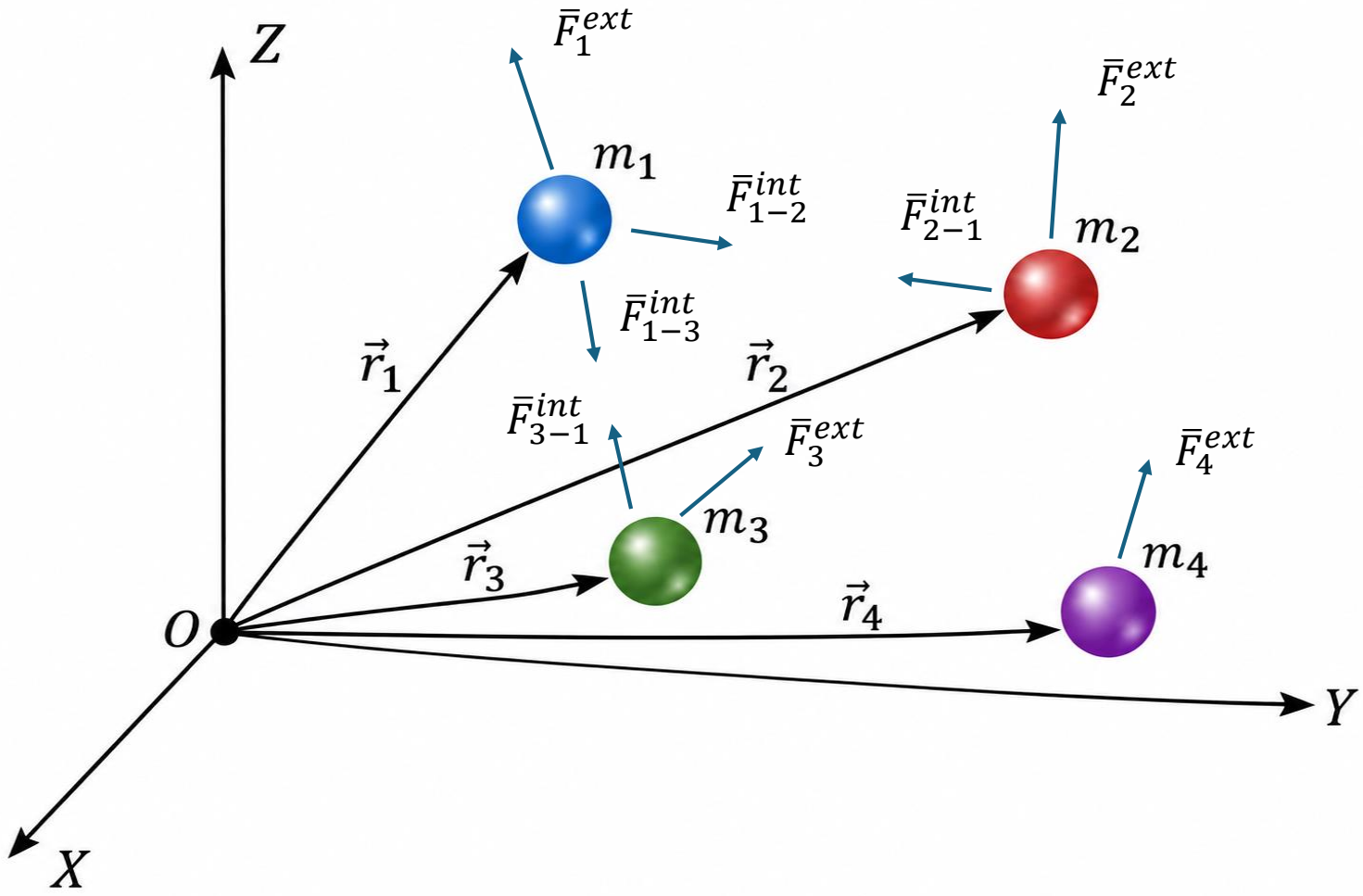
3_ Dinámica de un sistema de partículas



Introducción

La dinámica estudia las causas que producen el movimiento de una partícula y la relación existente entre dicho movimiento y las fuerzas que actúan sobre ella.

Para el estudio de la dinámica utilizaremos como punto de partida las Leyes de Newton.

Cada una de las leyes responde a un aspecto diferente del problema dinámico:

Primera ley.
¿Cómo se comporta una partícula cuando la fuerza resultante sobre ella es nula?

Segunda ley.
Una vez elegido un sistema inercial, ¿cómo determinan las fuerzas, el movimiento de una partícula?

Tercera ley.
¿Cómo se manifiestan las interacciones entre dos cuerpos?

Dinámica de la partícula

Primera ley de Newton

Primera ley de movimiento de Newton:
Una partícula sobre la que actúan fuerzas cuya resultante es nula, permanece en reposo o se mueve con velocidad constante en línea recta.

La descripción del movimiento depende del sistema de referencia elegido.

Los sistemas en los que se cumple la primera ley de Newton se denominan sistemas de referencia inerciales.

Un sistema de referencia inercial es aquel respecto del cual una partícula aislada permanece en reposo o continúa moviéndose con velocidad constante en línea recta.

Si dos sistemas inerciales se desplazan con velocidad constante uno respecto del otro, ambos describirán correctamente el movimiento, aunque puedan medir velocidades diferentes.

Dinámica de la partícula — Segunda ley de Newton

Segunda ley de movimiento de Newton.

Cuando la fuerza resultante sobre una partícula es distinta de cero, su estado de movimiento se modifica. Newton estableció que la aceleración de una partícula es directamente proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre ella y tiene su misma dirección y sentido:

$$\sum \bar{F} = m.\bar{a}$$

Otra manera de enunciar la segunda ley establece que la fuerza resultante es igual a la rapidez de variación temporal de la cantidad de movimiento (momento lineal) de la partícula. Recordando que: $\bar{p} = m.\bar{v}$, es:

$$\sum \bar{F} = \frac{d}{dt}(m.\bar{v})$$

Aplicando la regla de derivación del producto y considerando partículas de masa constante (dm/dt=0), el segundo término se anula y se recupera la expresión presentada anteriormente:

$$\sum \bar{F} = m.\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}.\frac{dm}{dt} \longrightarrow \sum \bar{F} = m.\bar{a}$$

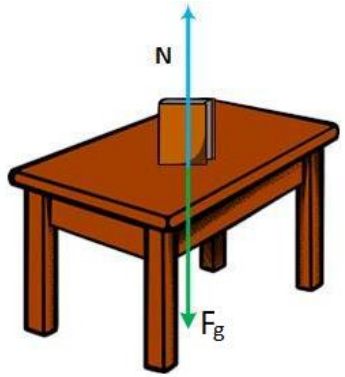
Dinámica de la partícula

Tercera ley de Newton

Tercera ley de movimiento de Newton:
La experiencia muestra que una fuerza no aparece de manera aislada, sino como consecuencia de la interacción entre dos cuerpos.

Newton estableció que cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste ejerce simultáneamente sobre el primero una fuerza de igual magnitud y dirección, pero de sentido opuesto.

Esta relación constituye la tercera ley de Newton y se expresa mediante la ecuación:



$$\vec{F}_{A-B} = -\vec{F}_{B-A}$$

Esta relación no constituye una ecuación de movimiento. No se utiliza para determinar una incógnita, sino para establecer el vínculo existente entre las fuerzas que dos cuerpos ejercen mutuamente.

Como cada una de estas fuerzas actúa sobre un cuerpo distinto, cada una aparece en la ecuación de movimiento del cuerpo sobre el cual está aplicada.

Dinámica de la partícula

Ecuación de movimiento

Conocidas las fuerzas que actúan sobre una partícula, el problema dinámico consiste en determinar su movimiento.

Cuando en general se conocen:

- las fuerzas que actúan sobre la partícula;
- la posición inicial;
- la velocidad inicial.

El objetivo es describir el movimiento de la partícula, determinando, cuando sea posible, su posición y velocidad en función del tiempo.

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \qquad ; \qquad \bar{v} = \bar{v}(t)$$

A partir de la segunda ley de Newton:

$$\sum \bar{F} = m\,\bar{a} = m\,\ddot{\bar{r}}$$

Dinámica de la partícula

Ecuación de movimiento

En una dimensión, la ecuación de movimiento puede escribirse:

$$\sum F_x = m\,\ddot{x}$$

La fuerza resultante puede depender de distintas variables:

$$F(t; x; \dot{x}) = m\,\ddot{x}$$

Según la naturaleza del problema pueden presentarse, entre otros, los casos:

$$F = F(t) \quad ; \quad F = F(x) \quad ; \quad F = F(\dot{x})$$

Cada dependencia conduce a una forma particular de resolver la ecuación de movimiento.

Dinámica de la partícula Dependencia funcional de la fuerza

Estudiaremos cómo resolver la segunda ley de Newton según la dependencia funcional de la fuerza, obteniendo relaciones que permitan determinar el movimiento de la partícula.

Fuerza en función del tiempo.

En este tipo de problemas la fuerza resultante varía con el tiempo, pero no depende de la posición ni de la velocidad de la partícula. La ecuación diferencial del movimiento adopta la forma:

$$F(t) = m\,\ddot{x} = m\,\frac{dv}{dt}$$

Esta ecuación puede integrarse respecto del tiempo para determinar la velocidad y, posteriormente, la posición de la partícula. Integrando ambos miembros entre el instante inicial t_0 y un instante cualquiera t es:

$$\int_{t_0}^{t} F(t)\,dt = m\int_{v_0}^{v} dv$$

Integrando el miembro derecho queda:

$$\int_{t_0}^{t} F(t)\,dt = m\,(v - v_0)$$

Dinámica de la partícula Impulso y la cantidad de movimiento

Comencemos analizando el miembro derecho de la ecuación obtenida para una dimensión:

$$m.(v - v_0) = m.v - m.v_0$$

Como el producto de la masa por la velocidad recibe el nombre de cantidad de movimiento o momento lineal: $p = m.v$, entonces:

$$m.v - m.v_0 = p - p_0 = \Delta p$$

Ahora analicemos el miembro izquierdo:

$$\int_{t_0}^{t} F(t)\, dt$$

La integral de la fuerza respecto del tiempo recibe el nombre de impulso de la fuerza y se representa por:

$$J = \int_{t_0}^{t} F(t)\, dt$$

En consecuencia, se obtiene el teorema del impulso y la cantidad de movimiento:

$$J = \Delta p$$

Dinámica de la partícula — Determinación de la posición

Conocida $F(t)$; mediante el teorema del impulso y la cantidad de movimiento, obtenemos la velocidad de la partícula en función del tiempo:

$$\int_{t_0}^{t} F(t)dt = m\,[v(t) - v_0] \longrightarrow v(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t)\,dt$$

Luego, como: $v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx = v\,dt$

Integrando entre t_0 y un instante cualquiera t, es:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

De donde resulta:

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

Y finalmente, la posición queda dada por:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

Ejemplo 1 - Fuerza dependiente del tiempo

Una partícula de masa m=2 kg se mueve sobre una trayectoria rectilínea. A partir del instante t_0=0 actúa sobre ella una fuerza $F(t)$=4 t N. Si inicialmente la partícula se encuentra en la posición inicial x_0=0 m; con una velocidad inicial v_0=2 m/s; determinar:

a) La velocidad en función del tiempo.
b) La posición en función del tiempo.
c) La velocidad y la posición al cabo de 4 segundos.

Resolución:

a) Como la fuerza depende únicamente del tiempo, aplicamos la expresión obtenida en la teoría:

$$m\,(v - v_0) = \int_{t_0}^{t} F(t)\,dt$$

En este caso: $F(t)$=4 t N;

$$2\,(v - 2) = \int_{t_0}^{t} 4\,t\,dt$$

Ejemplo 1 - Fuerza dependiente del tiempo

Integrando, nos queda:

$$2\,(v-2) = 2\,t^2$$

Despejando es:

$$v(t) = 2 + t^2 \qquad [m/s]$$

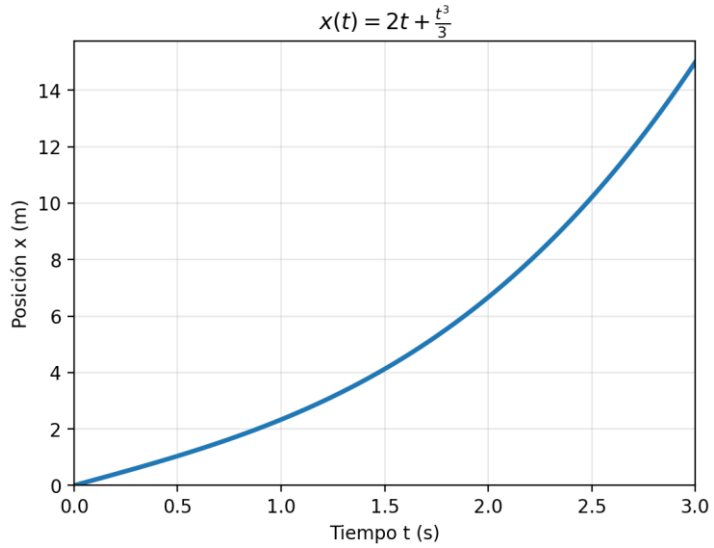
b) Para determinar la posición utilizamos:

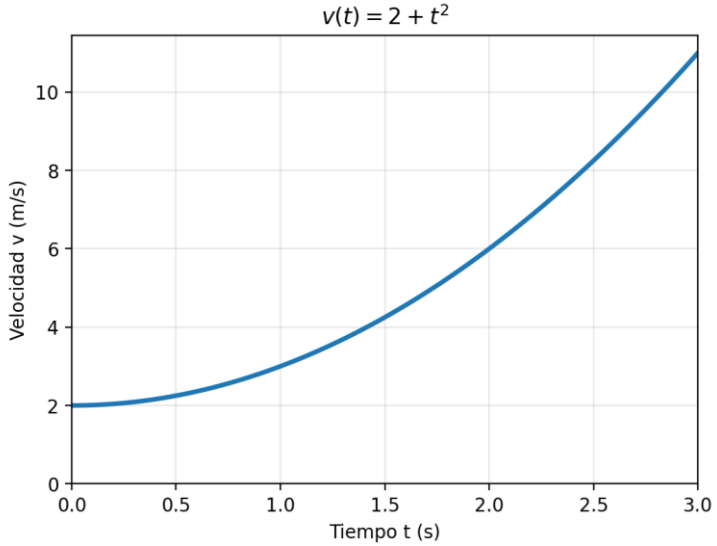
$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,(t)\,dt$$

Sustituyendo la expresión obtenida para la velocidad e integrando; para $x_0 = 0$ es:

$$x - x_0 = \int_{0}^{t} (2 + t^2)\,dt$$

$$x(t) = 2\,t + \frac{t^3}{3} \qquad [\mathrm{m}]$$





Ejemplo 1 - Fuerza dependiente del tiempo

c) Para $t = 4$ s :

$$v(t) = 2 + t^2$$

$$v(4) = 2 + 4^2$$

$$v(4) = 18 \ [m/s]$$

$$x(t) = 2\,t + \frac{t^3}{3}$$

$$x(4) = 2\,4 + \frac{4^3}{3}$$

$$x(4) = 29{,}33 \ \ [\mathrm{m}]$$

Fuerza en función de la posición.

Cuando la fuerza resultante depende únicamente de la posición:

$$F(x) = m\,\ddot{x}$$

Como la fuerza está expresada en función de la posición, resulta conveniente eliminar el tiempo como variable independiente. Para ello utilizamos:

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

y como

$$v = \frac{dx}{dt}$$

resulta:

$$\ddot{x} = v\frac{dv}{dx}$$

Por lo tanto:

$$F(x)\,dx = m\,v\,dv$$

Integrando ambos miembros entre las condiciones iniciales y un estado cualquiera, se obtiene:

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = m\int_{v_0}^{v} v\,dv \qquad \Rightarrow \qquad \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = \frac{1}{2}m\,(v^2 - v_0^2)$$

Recordando que la energía cinética de una partícula se define como:

$$K = \frac{1}{2}m\,v^2$$

y el trabajo realizado por la fuerza resultante:

$$W = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

Luego la ecuación queda:

$$W = K - K_0 = \Delta K$$

Teorema trabajo–energía cinética: el trabajo realizado por la fuerza resultante sobre una partícula es igual a la variación de su energía cinética.

Dinámica de la partícula Fuerzas conservativas y energía potencial

Hasta aquí vimos que, cuando la fuerza depende de la posición, el trabajo realizado entre dos posiciones viene dado por:

$$W = \int_{x_0}^{x} F(x)\, dx$$

Existe una clase importante de fuerzas para las cuales el trabajo realizado entre dos posiciones depende únicamente de las posiciones inicial y final del movimiento. Estas fuerzas reciben el nombre de fuerzas conservativas.

Ejemplos: fuerza gravitatoria, fuerza elástica de un resorte. En cambio, fuerzas como el rozamiento no son conservativas.

La energía potencial es una energía asociada a la posición de la partícula en un campo de fuerzas conservativas. Su variación se define como el opuesto del trabajo realizado por dicha fuerza:

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\, dx$$

Si una fuerza conservativa realiza trabajo positivo, la energía potencial disminuye; si realiza trabajo negativo, la energía potencial aumenta.

$$W_{cons} = -\Delta U$$

Dinámica de la partícula Conservación de la energía mecánica

Recordando los dos resultados obtenidos:

$$W = \Delta K$$

Además:

$$W = -\Delta U$$

Igualando ambas expresiones:

$$\Delta K = -\Delta U \qquad \Rightarrow \qquad \Delta K + \Delta U = 0$$

Por lo tanto:

$$\Delta(K + U) = 0$$

$$E_{mec} = K + U = constante$$

Cuando sobre una partícula actúan únicamente fuerzas conservativas, la energía mecánica del sistema permanece constante durante todo el movimiento. La energía puede transformarse entre cinética y potencial, pero su suma permanece invariable.

Ejemplo 2 - Fuerza dependiente de la posición

Una partícula de masa m=2 kg está sometida a la fuerza $F(x)$=8 x N. Si parte desde la posición inicial x_0=1 m, con velocidad inicial v_0=2 m/s; determinar: $v(x)$ y $v(t)$.

Resolución:
Aplicamos la ecuación de la segunda ley:

$$F = m\,a \quad \Rightarrow \quad 8\,x = 2\,a \Rightarrow \quad a = 4\,x$$

Como:

$$a = v\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad 8\,x = 2\,v\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad 4\,x = v\frac{dv}{dx}$$

Separando variables es:

$$v\,dv = 4\,x\,dx$$

Ejemplo 2 - Fuerza dependiente de la posición

Integrando:

$$\int_2^v v\,dv = 4\int_1^x x\,dx$$

Resulta:

$$\frac{1}{2}\,(v^2 - 4) = 2\,(x^2 - 1)$$

$$v(x) = 2\,x \quad \text{para} \quad x \geq 1$$

Para determinar la velocidad en función del tiempo partimos de:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Ejemplo 2 - Fuerza dependiente de la posición

Reemplazando:

$$\frac{dx}{dt} = 2\,x$$

Separando variables:

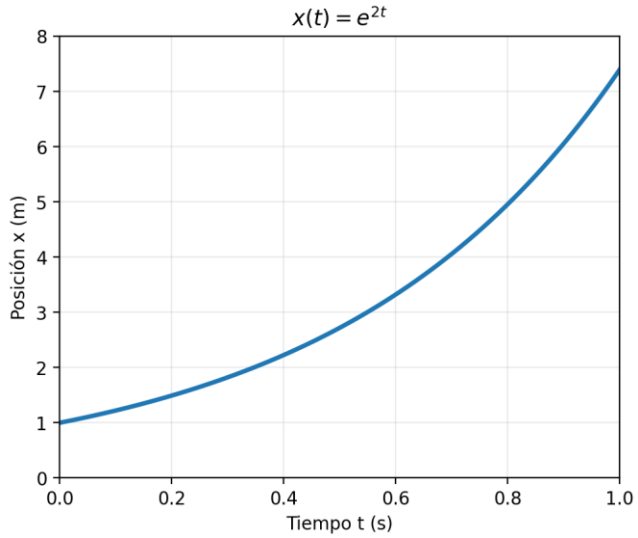
$$\frac{dx}{x} = 2\,dt$$

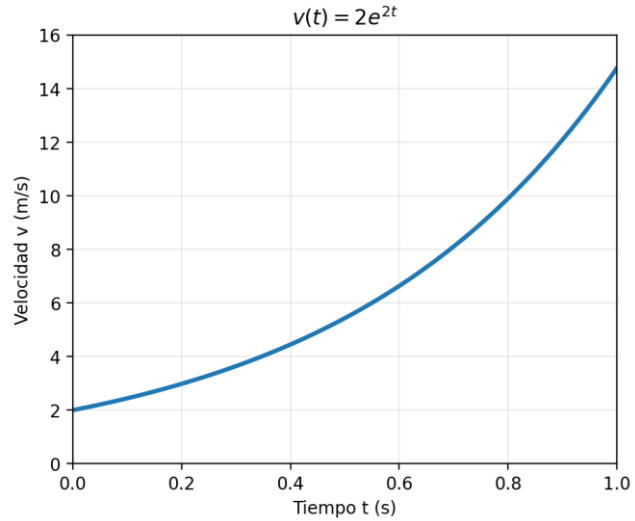
Integrando:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_0^t 2\,dt \longrightarrow lnx = 2\,t$$

Por lo tanto:

$$x(t) = e^{2\,t} \quad ; \quad v(t) = 2\,e^{2\,t}$$





Dinámica de la partícula Fuerza en función de la velocidad

Fuerza en función de la velocidad.

En algunos problemas la fuerza resultante depende únicamente de la velocidad de la partícula, como ocurre con ciertas fuerzas resistentes.

$$F(v) = m\frac{dv}{dt}$$

La ecuación puede resolverse separando las variables v y t.

$$F(v)dt = mdv \qquad \Rightarrow \qquad dt = m\frac{dv}{F(v)}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} \qquad \Rightarrow \qquad t - t_0 = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)}$$

La evaluación de esta integral dependerá de la forma funcional de $F(v)$ y se realizará en cada problema particular.

Ejemplo 3 - Fuerza dependiente de la velocidad

Una partícula de masa m=2 kg se mueve sobre una trayectoria rectilínea y está sometida a una fuerza resistiva proporcional a la velocidad $F(v)$=−4 v N. Si inicialmente cuando t_0=0, la velocidad inicial v_0=10 m/s; determinar:

a) La velocidad en función del tiempo.

b) La velocidad al cabo de 2 segundos.

Resolución:

a) Como la fuerza depende únicamente de la velocidad:

$$F(v) = m\frac{dv}{dt}$$

Sustituyendo y reordenando es:

$$-4\,v = 2\,\frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{v} = -2\,dt$$

Ejemplo 3 - Fuerza dependiente de la velocidad

Integrando entre el estado inicial y un instante cualquiera:

$$\int_{10}^{v} \frac{dv}{v} = -2 \int_{0}^{t} dt$$

Resulta:

$$ln\left(\frac{v}{10}\right) = -2\ t$$

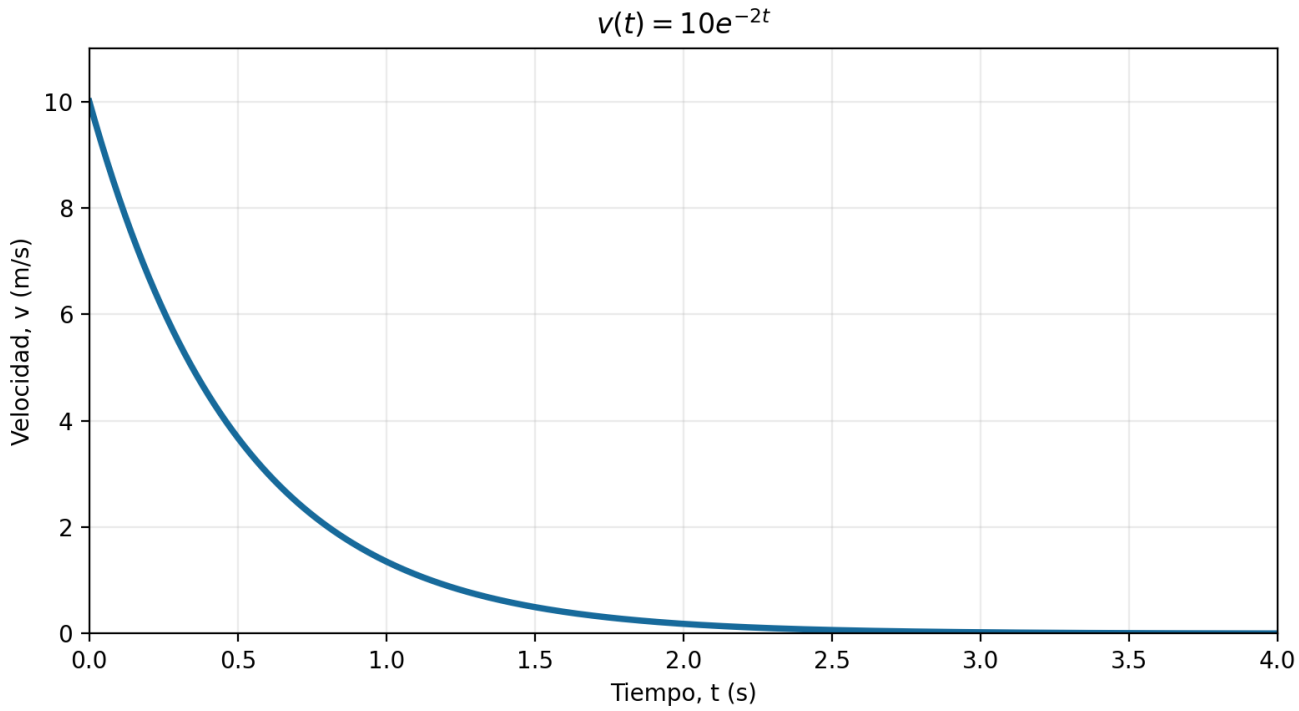
Finalmente, queda:

$$v(t) = 10\ e^{-2\ t}$$

b) Para $t = 2$ s :

$$v(2) = 10\ e^{-2\ (2)}$$

$$v(2) = 0{,}183 \quad \text{m/s}$$



Dinámica de la partícula Partícula en el plano y en el espacio

Hasta ahora estudiamos la dinámica de una partícula cuyo movimiento se desarrollaba sobre una trayectoria rectilínea. En movimientos planos o espaciales, la posición, velocidad, aceleración y fuerza deben tratarse como magnitudes vectoriales.

Los conceptos desarrollados para el movimiento unidimensional continúan siendo válidos. La segunda ley de Newton se expresa:

$$\sum \bar{F} = m\,\ddot{\bar{r}}$$

En componentes cartesianas:

$$\sum F_x = m\,\ddot{x} \quad ; \sum F_y = m\,\ddot{y} \quad ; \sum F_z = m\,\ddot{z}$$

Por lo tanto, el movimiento puede estudiarse mediante las ecuaciones correspondientes a cada dirección.

Dinámica de la partícula

Momento de una fuerza

Además de su efecto traslacional, una fuerza puede producir una tendencia a la rotación respecto de un punto O.

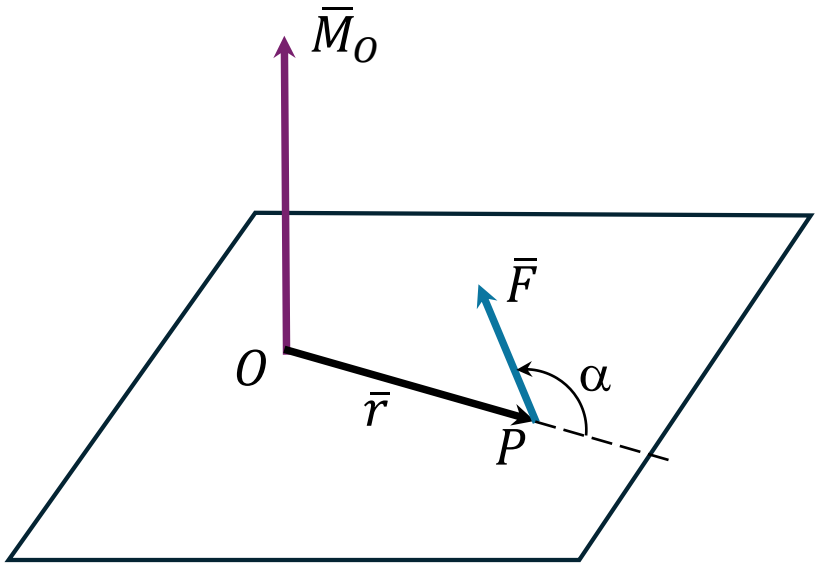
El momento de una fuerza $\bar{F}$ respecto del punto O se define como:

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F}$$

Donde $\bar{r}$ es el vector posición desde O hasta el punto de aplicación de la fuerza.

$$|\bar{M}_O| = |\bar{r}|\,|\bar{F}|\,sen\alpha$$

La dirección y el sentido de $\bar{M}_O$ se determinan mediante la regla de la mano derecha.



Dinámica de la partícula

Ejemplo 4 - Momento de una fuerza

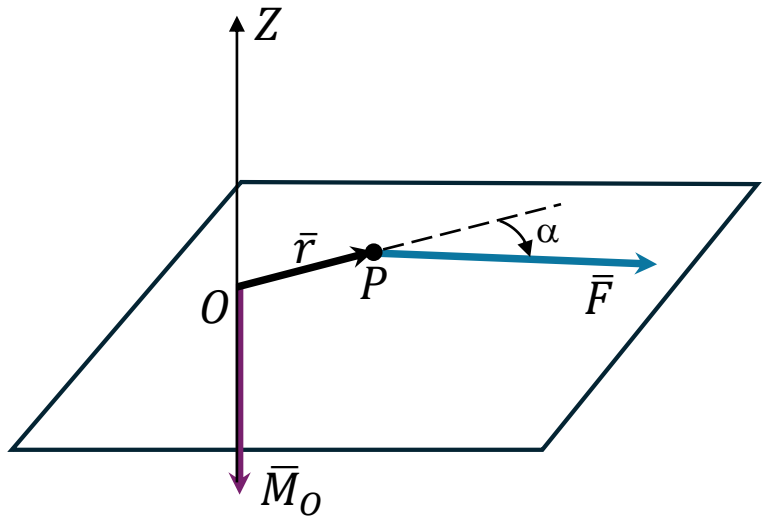
Una partícula se encuentra ubicada en el punto $P=(3\,;2\,;0)$ m y sobre ella actúa una fuerza $\bar{F}=(100\,;50\,;0)$ N. Determinar:

a) El vector posición respecto del origen.

b) El momento de la fuerza respecto del origen O.

c) El módulo del momento.

d) Indicar gráficamente el sentido del momento utilizando la regla de la mano derecha.



a) El vector posición respecto del origen.

$$\bar{r} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

b) El momento de la fuerza respecto del origen O.

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 100 & 50 & 0 \end{vmatrix}$$

Dinámica de la partícula

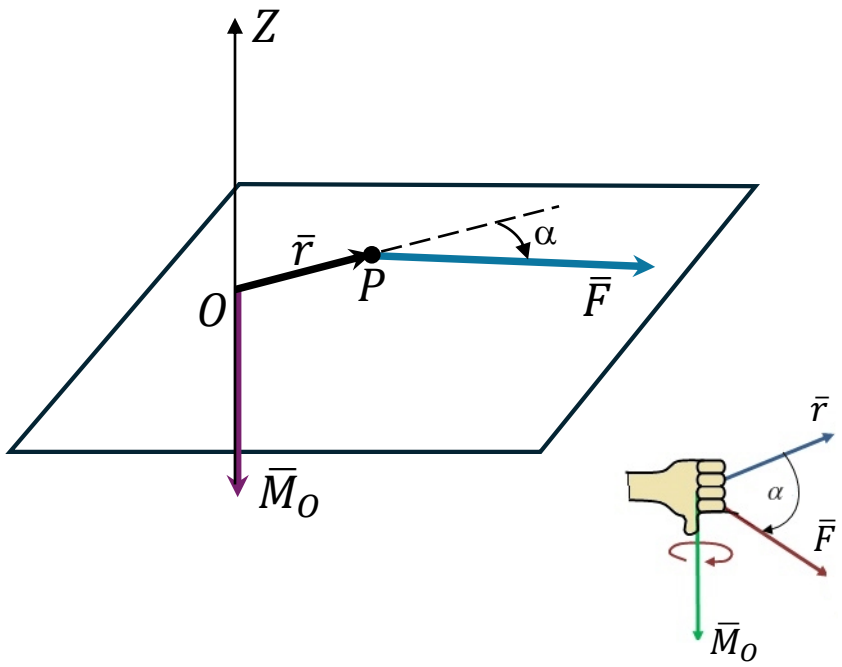
Ejemplo 4 - Momento de una fuerza

Como ambos vectores pertenecen al plano *X-Y*,

$$M_x = M_y = 0$$

$$M_z = 3.(50) - 2.(100) = -50$$

$$\bar{M}_O = -50\hat{k}\ \text{N.m}$$



c) El módulo del momento es:

$$|\bar{M}_O| = 50\ \text{N.m}$$

d) La interpretación según la regla de la mano derecha es, que el signo negativo indica que el momento apunta según el eje $-\hat{k}$. La fuerza tiende a producir un giro horario respecto del origen.

Dinámica de la partícula

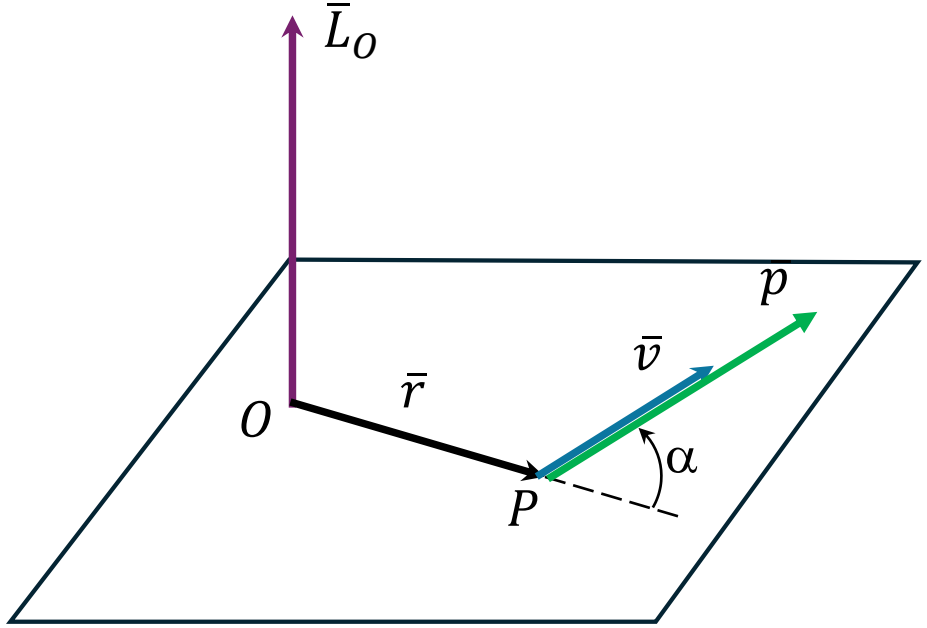
Momento cinético

La cantidad de movimiento: $\bar{p} = m\,\bar{v}$, caracteriza el movimiento de traslación de una partícula. El momento cinético (momento angular) caracteriza el movimiento de una partícula respecto de un punto, considerando tanto su cantidad de movimiento como su posición respecto de dicho punto.

Para describir el movimiento de la partícula respecto de un punto fijo O, definimos su momento cinético como:

$$\bar{L}_O = \bar{r} \times \bar{p} \longrightarrow \bar{L}_O = \bar{r} \times m\,\bar{v}$$

Su dirección y sentido se determinan mediante la regla de la mano derecha.



Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p})$$

Aplicando la regla del producto vectorial:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{p} + \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Dinámica de la partícula

Momento cinético

Recordando que :

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Resulta:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{v} \times (m.\bar{v}) + \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Como el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo: $\bar{v} \times \bar{v} = 0$.

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Recordando la segunda ley de Newton en su forma general:

$$\sum \bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión obtenida anteriormente:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{r} \times \sum \bar{F}$$

Como el producto vectorial verifica la propiedad distributiva respecto de la suma de vectores, resulta:

$$\bar{r} \times \sum \bar{F} = \sum (\bar{r} \times \bar{F}) = \sum \bar{M}_O$$

Por lo tanto:

$$\sum \bar{M}_O = \frac{d\bar{L}_O}{dt}$$

La ecuación obtenida constituye el teorema del momento cinético para una partícula. Establece que la resultante de los momentos de las fuerzas es igual a la rapidez de variación del momento cinético.

Dinámica de la partícula Ejemplo 5 - Momento cinético

Una partícula de masa m=2 kg se encuentra en P=(2 ; 1 ; 0) m y posee una velocidad $\bar{v}$ =(3 ; 4 ; 0) m/s. En ese mismo instante actúa sobre la partícula una fuerza resultante $\bar{F}$ =(2 ; 6 ; 0) N. Determinar:

a) La cantidad de movimiento.
b) El momento cinético respecto del origen.
c) Determinar la rapidez de variación del momento cinético.

a) La cantidad de movimiento $\bar{p} = m.\bar{v}$ es:

$$\bar{p} = 2.\left(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 0\hat{k}\right) = 6\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

b) El momento cinético para $\bar{r} = 2\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ es:

$$\bar{L}_O = \bar{r} \times \bar{p} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 10\hat{k} \ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

Ejemplo 5 - Momento cinético

c) El teorema del momento cinético establece que:

$$\sum \bar{M}_O = \frac{d\bar{L}_O}{dt}$$

Calculamos el momento de la fuerza:

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 10\hat{k}\ \text{N.m}$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = 10\hat{k}\ \text{N.m}$$

Así como la fuerza resultante produce una variación de la cantidad de movimiento lineal, el momento de la fuerza produce una variación del momento cinético.

Dinámica de la partícula — Movimiento con vínculos

En numerosos problemas, una partícula se encuentra obligada a moverse siguiendo una trayectoria determinada. Esta restricción recibe el nombre de vínculo.

El vínculo restringe el movimiento e introduce una o más fuerzas de reacción que obligan a la partícula a cumplir la trayectoria impuesta.

La presencia del vínculo no modifica la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = m\,\ddot{x} \quad ; \quad \sum F_y = m\,\ddot{y} \quad ; \quad \sum F_z = m\,\ddot{z}$$

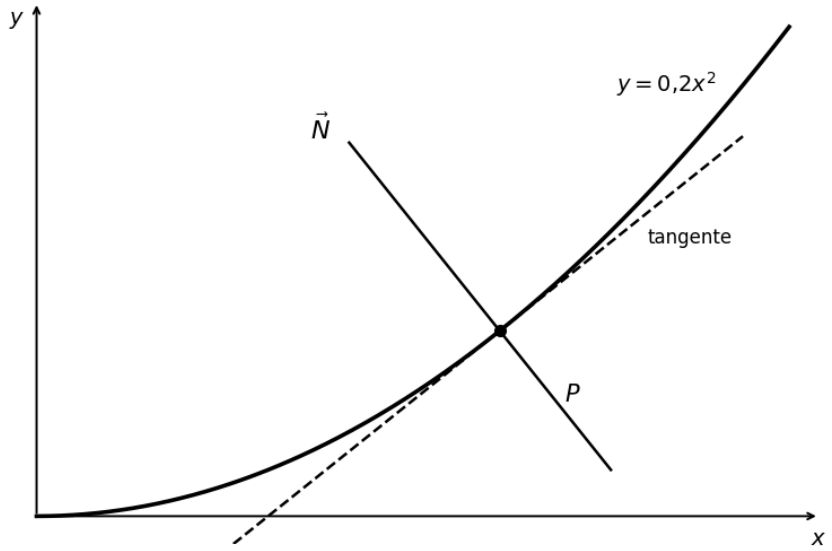
La reacción del vínculo es, en general, una incógnita del problema. En un vínculo liso, la fuerza de reacción es normal a la trayectoria o superficie de contacto.

Estas ecuaciones, junto con las condiciones impuestas por el vínculo, permiten determinar el movimiento de la partícula y las correspondientes reacciones.

Dinámica de la partícula Ejemplo 6 - Movimiento con vínculos

Una partícula de masa m=2 kg se mueve sin rozamiento sobre una guía fija cuya ecuación es: $y = 0{,}2\,x^2$. En el instante considerado se encuentra en x=2 m y su componente de velocidad horizontal es: $\dot{x} = 3$ m/s. Sobre la partícula actúan su peso y la reacción de la guía. Determinar:

a) las componentes de la velocidad;
b) la relación entre las componentes de la aceleración;
c) la reacción ejercida por la guía.
d) las componentes de la aceleración;



a) Para determinar las componentes de la velocidad, partimos de la ecuación del vínculo: $y = 0{,}2\,x^2$

Como la partícula debe permanecer sobre la guía, sus componentes de posición están relacionadas por la ecuación del vínculo.

Derivando respecto del tiempo, y como y no depende directamente del tiempo, sino que depende de x, y a su vez x depende del tiempo, es:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \longrightarrow \dot{y} = 0{,}4\,x\dot{x} \longrightarrow \bar{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} \longrightarrow \bar{v} = (3\hat{\imath} + 2{,}4\hat{\jmath})\text{m/s}$$

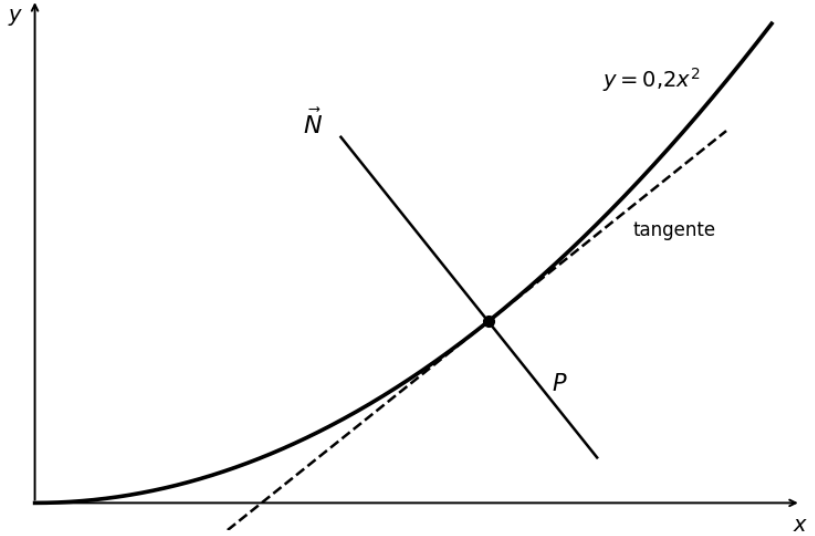
Dinámica de la partícula Ejemplo 6 - Movimiento con vínculos

b) Derivando nuevamente la ecuación del vínculo:

$$\ddot{y} = 0{,}4\,\dot{x}^2 + 0{,}4\,x\,\ddot{x}$$

$$\ddot{y} = 3{,}6 + 0{,}8\,\ddot{x}$$

Esta es la relación entre las componentes de la aceleración impuesta por el vínculo.



c) La geometría de la guía determina la dirección de la tangente y, perpendicular a ella, la dirección normal. Para determinar esta última, calculamos primero la pendiente de la tangente a la trayectoria:

$$\frac{dy}{dx} = tg\theta = 0{,}4\,x = 0{,}4\,(2) = 0{,}8$$

Como no existe rozamiento, la única fuerza de contacto ejercida por la guía es la reacción normal *N*.

Aplicando la segunda ley de Newton:

En x:

$$\sum F_x = m\,\ddot{x}$$

$$-N\,sen\theta = m\,\ddot{x}$$

En y:

$$\sum F_y = m\,\ddot{y}$$

$$N\,cos\theta - m\,g = m\,\ddot{y}$$

d) Utilizando la relación entre las componentes de la aceleración obtenida anteriormente, resolvemos el sistema de ecuaciones y determinamos: N, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$.

Dinámica de la partícula — Principio de D'Alembert

El principio de D'Alembert permite reformular la segunda ley de Newton como una ecuación de equilibrio, trasladando el término inercial al primer miembro de la ecuación.

Esta reformulación permite resolver muchos problemas dinámicos utilizando procedimientos análogos a los empleados en Estática.

Para ello se introduce una fuerza adicional denominada fuerza inercial de D'Alembert ($\bar{F}_D$), definida por:

$$\bar{F}_D = -m\bar{a}$$

Esta fuerza no representa una interacción física, sino un recurso matemático que permite reformular las ecuaciones dinámicas.

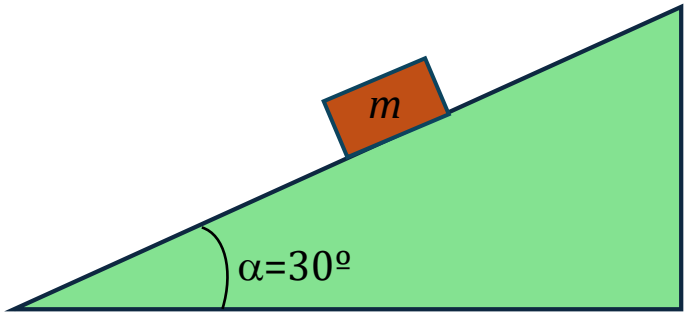
Según el principio de D'Alembert, el término inercial $m.\bar{a}$ se traslada al primer miembro de la ecuación y se representa mediante la fuerza inercial de D'Alembert.

$$\sum \bar{F} + \bar{F}_D = 0$$

Dinámica de la partícula Ejemplo 7- Principio de D'Alembert

Un bloque de masa m=20 kg desliza hacia abajo por un plano inclinado 30º respecto de la horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético es μ=0,20. Utilizando el principio de D'Alembert, determinar:

a) La aceleración del bloque.
b) La fuerza de inercia.



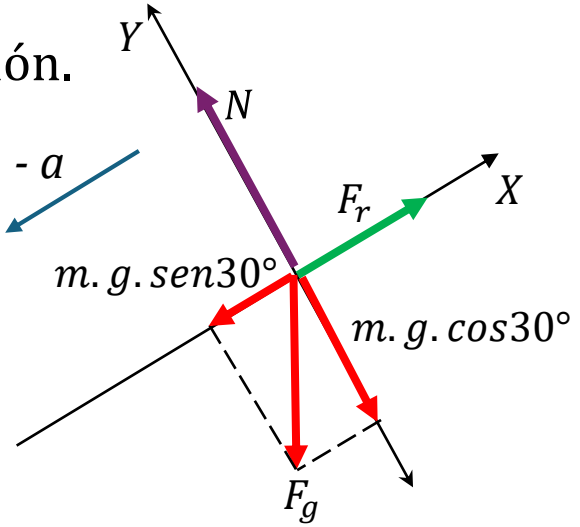
a) Sabemos que actúan:

Fuerza de atracción gravitatoria (Peso): F_g=$m.g$.

Reacción normal: N .

Fuerza de rozamiento: F_r=$\mu.N$.

Fuerza de inercia: $\bar{F}_D = -m\bar{a} = ma\hat{e}_x$; en sentido opuesto a la aceleración.



Calculamos la fuerza de reacción normal:

$$N - m.g.cos30º = 0$$

$$N = 20.9{,}81cos30º = 169{,}9\ \text{N}$$

Dinámica de la partícula Ejemplo 7- Principio de D'Alembert

Como:

$$F_r = \mu N$$

$$F_r = 0{,}20(169{,}9) = 33{,}98 \text{ N}$$

Aplicando el principio de D'Alembert sobre la dirección paralela al plano:

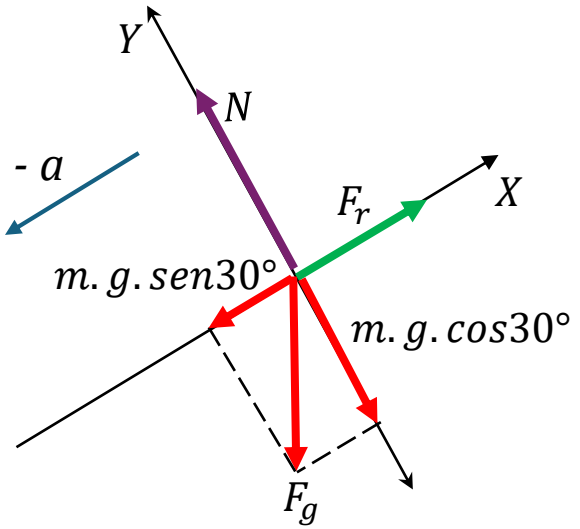
$$\sum F_x + F_D = 0$$

$$-m\ g\ sen30º + F_r + F_D = 0$$

$$-20.9{,}81 sen30º + 33{,}98 + 20a = 0$$

$$20a = 64{,}12$$

$$a = 3{,}21 \text{ m/s}^2$$



b) Para determinar la fuerza inercial de D'Alembert, es:

$$F_D = m\ a = 20\ (3{,}21) = 64{,}2 \text{ N}$$

Dinámica de la partícula Sistema de referencia no inercial

Consideremos tres cuerpos que caen libremente con la misma aceleración $\bar{g}$. Respecto a un sistema inercial *X*-*Y*, dichos cuerpos caen con aceleración:

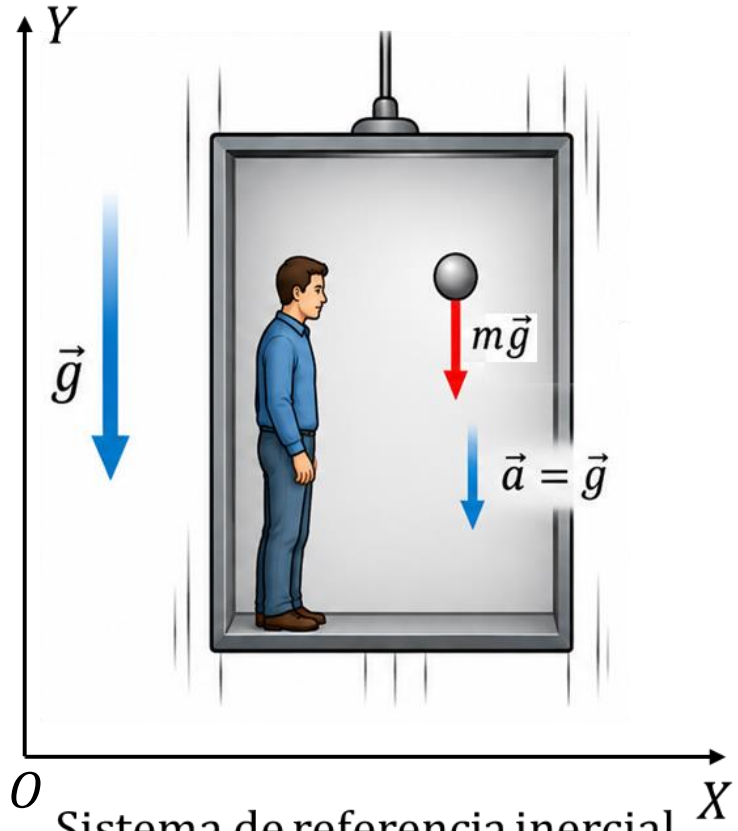
$$\bar{a} = \bar{g}$$

Si tomamos un sistema de referencia *X'*-*Y'* ligado a uno de ellos, respecto a dicho sistema, la aceleración del cuerpo respecto del observador es nula:

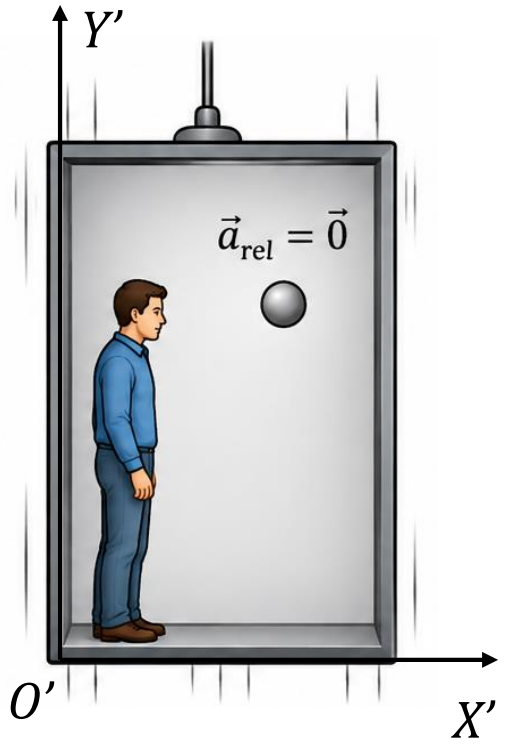
$$\bar{a}_{rel} = 0$$

Este es un sistema no inercial, en el cual no puede aplicarse la segunda ley de Newton.

El peso sigue actuando, pero su efecto no se manifiesta en el movimiento relativo, ya que el observador y el cuerpo caen con la misma aceleración.



Sistema de referencia inercial



Sistema de referencia no inercial

La segunda ley de Newton se formula respecto de un sistema de referencia inercial:

$$\sum \bar{F} = m\bar{a}$$

Si el sistema de referencia elegido es no inercial, la segunda ley no puede aplicarse directamente utilizando solamente las fuerzas reales. Para formular la dinámica desde ese sistema deben incorporarse las fuerzas de inercia asociadas a su movimiento (fuerzas ficticias).

Si el movimiento se describe desde un sistema de referencia no inercial, utilizamos la relación de aceleraciones obtenida en cinemática relativa:

$$\bar{a} = \bar{a}_{O'} + \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel} + \bar{a}_{rel}$$

Sustituyendo en la segunda ley:

$$\sum \bar{F} = m(\bar{a}_{O'} + \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel} + \bar{a}_{rel})$$

Reordenando la ecuación anterior:

$$\sum \bar{F} - m[\bar{a}_{O'} + \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}] = m.\bar{a}_{rel}$$

Los términos asociados al movimiento del sistema de referencia pueden expresarse como fuerzas de inercia:

$$\bar{F}_i = -m[\bar{a}_{O'} + \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}]$$

Por lo tanto, la ecuación de la dinámica relativa resulta:

$$\boxed{\sum \bar{F} + \bar{F}_i = m\bar{a}_{rel}}$$

De esto tenemos:

$\bar{F}_{tras} = -m\bar{a}_{O'}$: Fuerza de traslación.

$\bar{F}_{Euler} = -m\bar{\alpha} \times \bar{r}$: Fuerza de Euler.

$\bar{F}_{cf} = -m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$: Fuerza centrífuga.

$\bar{F}_C = -2m\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}$: Fuerza de Coriolis.

$\bar{a}_{rel}$: es la aceleración de la partícula medida por un observador ligado al sistema de referencia no inercial.

Dinámica de la partícula

Comparación de F_D con F_i

Tanto el principio de D'Alembert como la dinámica relativa trasladan al primer miembro términos del tipo $(m.\bar{a})$, e interpretan formalmente esos términos como fuerzas de inercia. Sin embargo, la aceleración considerada en cada caso es diferente.

- En D'Alembert se traslada toda la aceleración. Donde la aceleración es la aceleración absoluta de la partícula; sin importar el tipo de movimiento que sea. En D'Alembert se traslada toda la aceleración absoluta de la partícula..

$$\sum \bar{F} + \bar{F}_D = 0$$

- En dinámica relativa sólo se trasladan al primer miembro los términos asociados al movimiento del sistema de referencia. La aceleración relativa de la partícula permanece en el segundo miembro de la ecuación.

$$\sum \bar{F} + \bar{F}_i = m\bar{a}_{rel}$$

Donde:

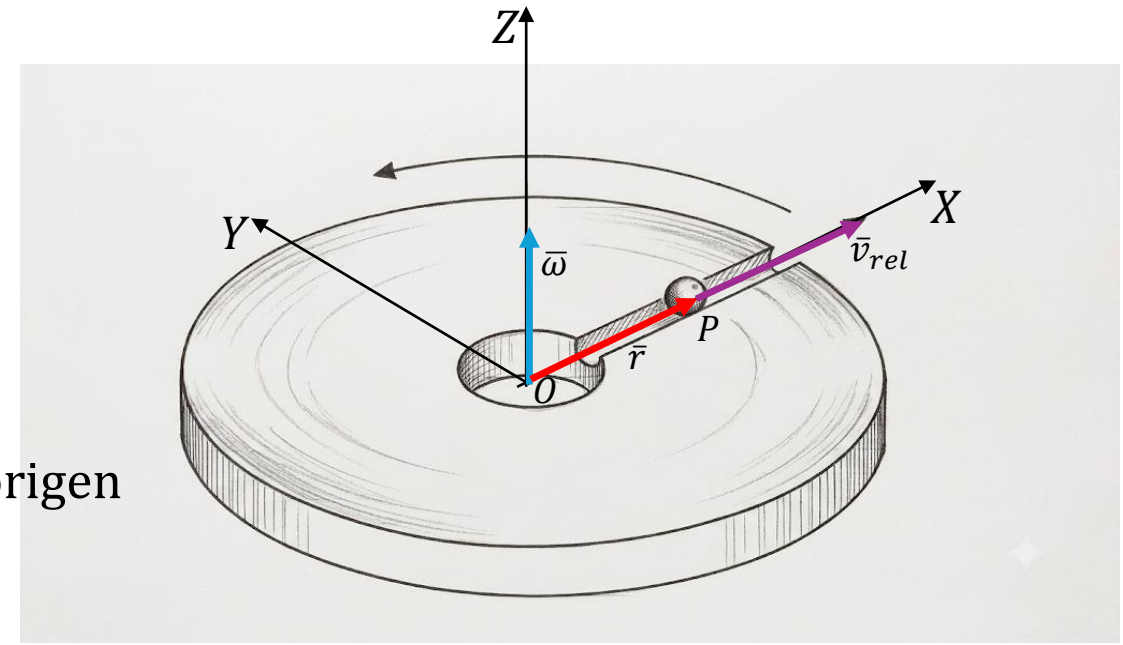
$$\bar{F}_D = -m\bar{a} = \bar{F}_i - m\bar{a}_{rel}$$

Dinámica de la partícula Ejemplo 8 - Dinámica relativa

Una partícula de masa m=2 kg se desliza sin rozamiento por una ranura radial practicada en un disco horizontal que gira con velocidad angular constante ω=4 rad/s. En el instante considerado la partícula se encuentra a una distancia r =0,50 m del centro del disco y posee una velocidad relativa radial v_{rel}=3 m/s. Determinar:

a) La reacción que ejerce la ranura sobre la partícula.

b) La aceleración relativa de la partícula.



a) Aplicando la ecuación desarrollada en la teoría,

$$\sum \bar{F} + \bar{F}_i = m\bar{a}_{rel}$$

Como el disco gira a velocidad angular constante y el origen no tiene aceleración, es:

$$\bar{\alpha} = 0 \qquad \text{y} \qquad \bar{a}_{O'} = 0$$

La fuerza de inercia queda:

$$\bar{F}_i = -m[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}]$$

Dinámica de la partícula

Ejemplo 8 - Dinámica relativa

La fuerza centrífuga es:

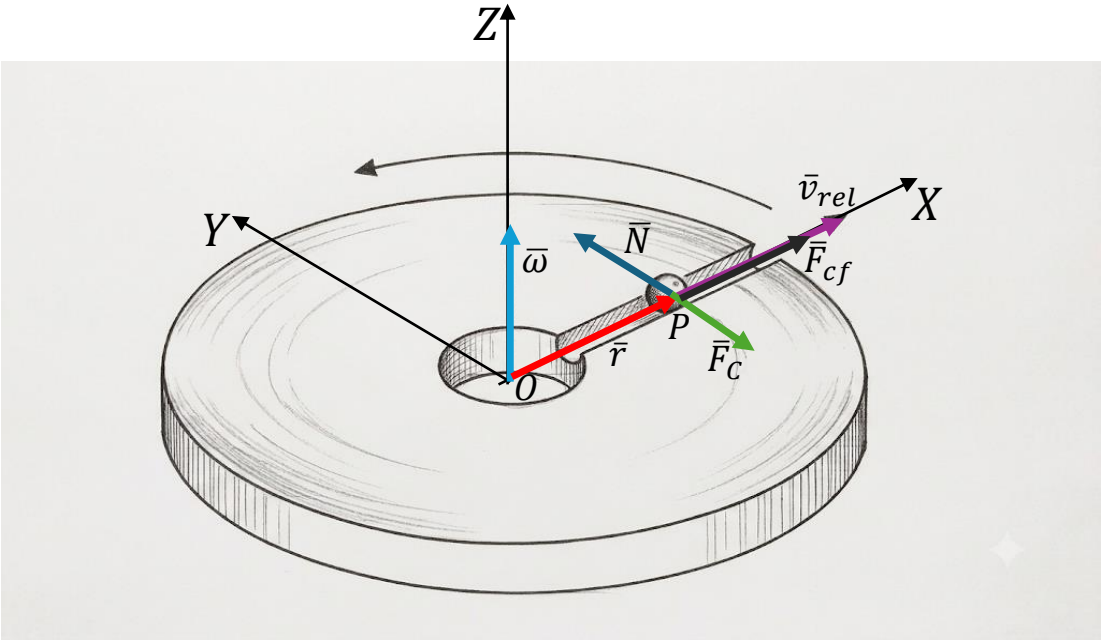
$$\bar{F}_{cf} = -m\left(\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})\right)$$

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{\jmath}$$

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8\hat{\imath}$$

$$\bar{F}_{cf} = -2(-8\hat{\imath})$$

$$\bar{F}_{cf} = 16\hat{\imath}\ \text{N}$$



En el punto P:

- Reacción de la ranura: $\bar{N}$.
- Fuerza centrífuga: $\bar{F}_{cf}$.
- Fuerza de Coriolis: $\bar{F}_C$.

Dinámica de la partícula

Ejemplo 8 - Dinámica relativa

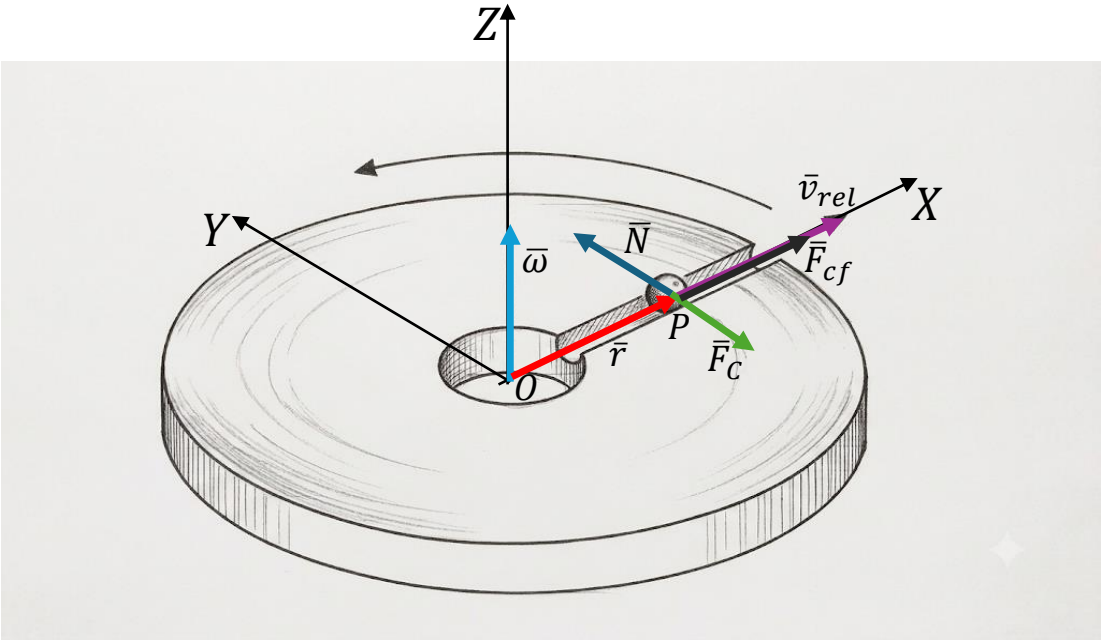
La fuerza de Coriolis es:

$$\bar{F}_C = -m(2.\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel})$$

$$2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel} = 2\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 24\hat{\jmath}$$

$$\bar{F}_C = -2(24\hat{\jmath})$$

$$\bar{F}_C = -48\hat{\jmath}\ \text{N}$$



Como no hay rozamiento, las fuerzas reales son únicamente la reacción de la ranura $\bar{N}$ y la fuerza de atracción gravitatoria (peso) $m.\bar{g}$.

Pero el movimiento ocurre en un disco horizontal, por lo que el peso y la reacción vertical del disco se anulan entre sí.

En el plano horizontal, la única fuerza real es la reacción lateral de la ranura $\bar{N}$.

Ejemplo 8 - Dinámica relativa

Entonces, de la ecuación de dinámica relativa, queda:

$$\sum \bar{F} + \bar{F}_i = m\bar{a}_{rel}$$

$$\bar{N} + (\bar{F}_{cf} + \bar{F}_C) = m\bar{a}_{rel}$$

Como:

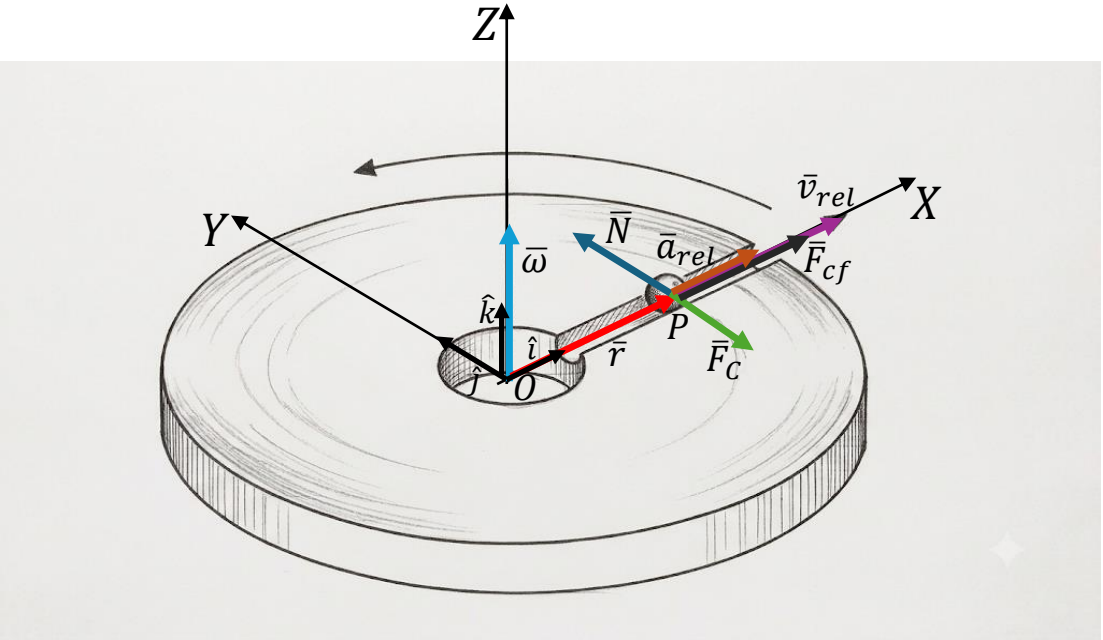
$$\bar{F}_i = \bar{F}_{cf} + \bar{F}_C = (16\hat{\imath} - 48\hat{\jmath})\ \text{N}$$

La aceleración relativa es radial,

$$\bar{a}_{rel} = a_{rel}\hat{\imath}$$

Luego:

$$m\bar{a}_{rel} = 2a_{rel}\hat{\imath}$$



Ejemplo 8 - Dinámica relativa

Igualando componentes en la dirección radial:

$$16 = 2a_{rel}$$

$$\bar{a}_{rel} = (8\hat{\imath} + 0\hat{\jmath})\ \mathrm{m/s^2}$$

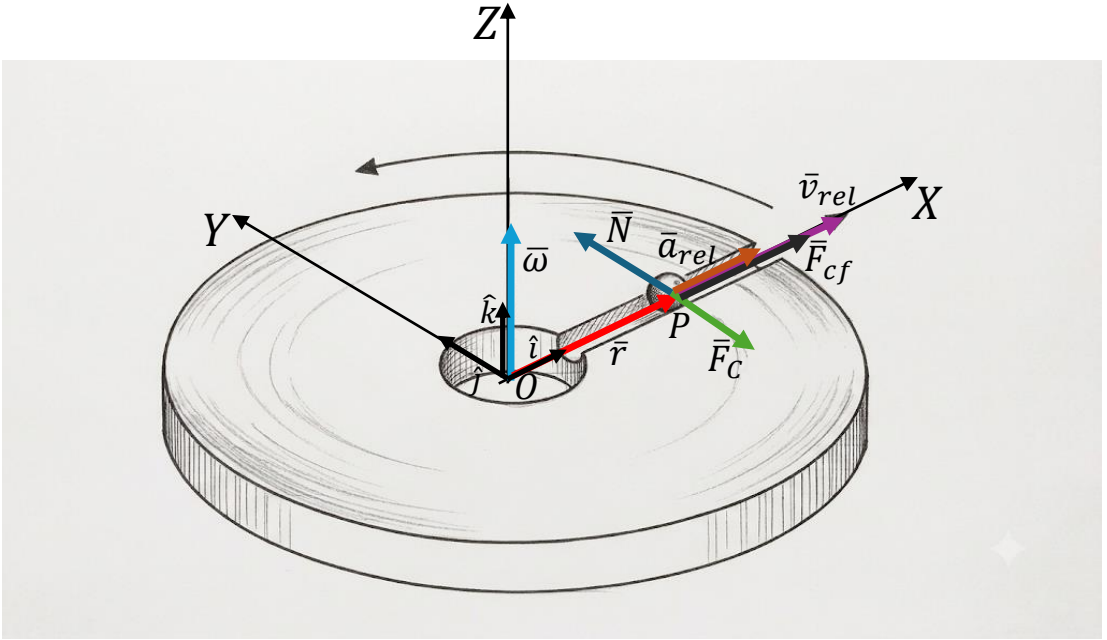
Las componentes de la fuerza normal son:

$$\bar{N} + (\bar{F}_{cf} + \bar{F}_C) = m\bar{a}_{rel}$$

$$\bar{N} + (16\hat{\imath} - 48\hat{\jmath}) = 2(8\hat{\imath} + 0\hat{\jmath})$$

$$\bar{N} = (16\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}) - (16\hat{\imath} - 48\hat{\jmath})$$

$$\bar{N} = (0\hat{\imath} + 48\hat{\jmath})\ \mathrm{N}$$



Dinámica de un sistema de partículas

Momento lineal

Hasta ahora estudiamos la dinámica de una partícula. Extendemos ahora esos conceptos a un sistema formado por *N* partículas.

Para cada partícula:

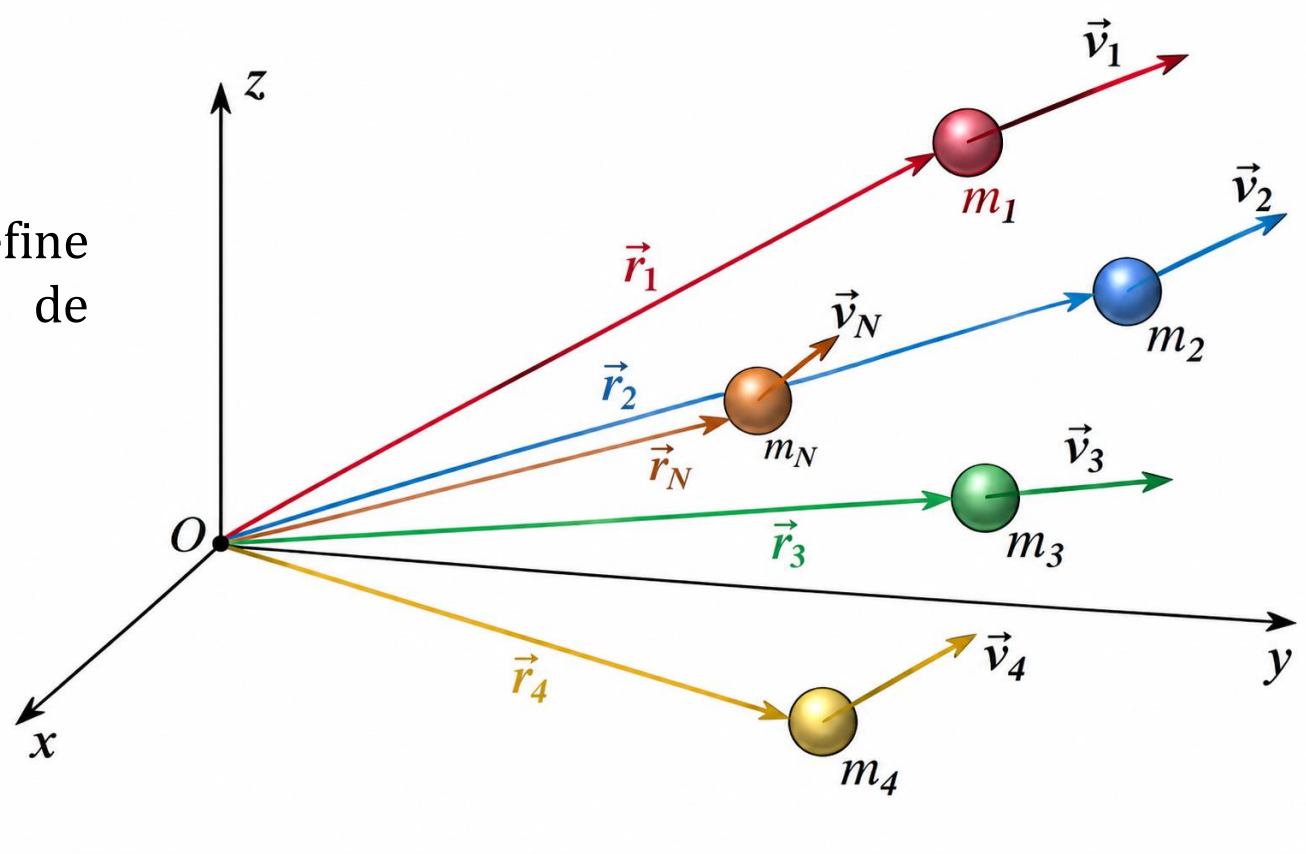
$$\bar{p}_i = m_i \bar{v}_i$$

El momento lineal total del sistema se define como la suma vectorial de las cantidades de movimiento de todas sus partículas:

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{v}_i$$

Recordando la definición del centro de masa:

$$\bar{r}_G = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum m_i \bar{r}_i$$



Dinámica de un sistema de partículas

Expresión según el centro de masa

Con:

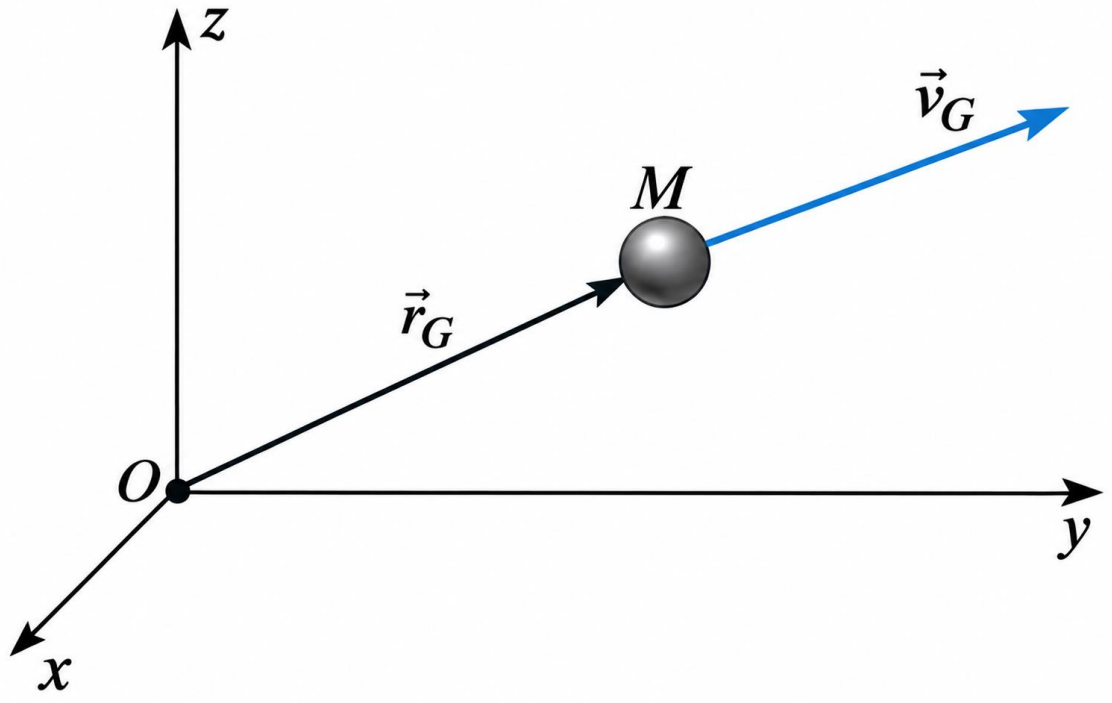
$$\mathrm{M} = \sum m_i$$

Derivando $\bar{r}_G$ respecto al tiempo, es:

$$\bar{v}_G = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum m_i \, \bar{v}_i$$

Multiplicando por la masa total:

$$\bar{P} = M \bar{v}_G$$



La cantidad de movimiento lineal de un sistema es igual a la que tendría una partícula de masa igual a la masa total del sistema, concentrada en el centro de masa y moviéndose con la velocidad del centro de masa.

En consecuencia, el movimiento traslacional del sistema queda completamente caracterizado por el movimiento de su centro de masa.

Dinámica de un sistema de partículas

Ejemplo 9

Un sistema está formado por tres partículas A, B y C, cuyas masas y velocidades, respecto de un sistema de referencia inercial O_{xy}, son:

$$m_A = 2kg; \qquad \bar{v}_A = (3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})\ m/s$$
$$m_B = 3kg; \qquad \bar{v}_B = (-1\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})\ m/s$$
$$m_C = 5kg; \qquad \bar{v}_C = (2\hat{\imath} - 1\hat{\jmath})\ m/s$$

Determinar:

a) El momento lineal de cada partícula.
b) La cantidad de movimiento total del sistema.
c) La velocidad del centro de masa.
d) Verificar que $\bar{P} = M\bar{v}_G$.

a) Cantidad de movimiento de cada partícula. Para cada partícula:

$$\bar{p}_i = m_i\bar{v}_i$$

Dinámica de un sistema de partículas

Ejemplo 9

Entonces,

$$\bar{p}_A = 2(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) \qquad \bar{p}_B = 3(-1\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) \qquad \bar{p}_C = 5(2\hat{\imath} - 1\hat{\jmath})$$

$$\bar{p}_A = (6\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})\ \text{kg m/s} \qquad \bar{p}_B = (-3\hat{\imath} + 12\hat{\jmath})\ \text{kg m/s} \qquad \bar{p}_C = (10\hat{\imath} - 5\hat{\jmath})\ \text{kg m/s}$$

b) Cantidad de movimiento total:

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^{N} \bar{p}_i$$

$$\bar{P} = (6\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) + (-3\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}) + (10\hat{\imath} - 5\hat{\jmath})$$

$$\bar{P} = (13\hat{\imath} + 11\hat{\jmath})\ \text{kg m/s}$$

$$|\bar{P}| = \sqrt{13^2 + 11^2} = 17{,}03\ \text{kg m/s}$$

Dinámica de un sistema de partículas

Ejemplo 9

c) Velocidad del centro de masa. La masa total del sistema es:

$$M = \sum m_i = m_A + m_B + m_C = 2 + 3 + 5$$

$$M = 10 \text{ kg}$$

De la expresión desarrollada en teoría:

$$\bar{P} = M.\bar{v}_G \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{v}_G = \frac{1}{M}\bar{P}$$

$$\bar{v}_G = (1{,}3\hat{\imath} + 1{,}1\hat{\jmath}) \text{ m/s}$$

d) Verificación:

$$M\bar{v}_G = 10(1{,}3\hat{\imath} + 1{,}1\hat{\jmath}) = (13\hat{\imath} + 11\hat{\jmath}) \text{ kg m/s}$$

Dinámica de un sistema de partículas

Segunda ley de Newton

Sobre cada partícula del sistema actúan fuerzas externas y fuerzas internas de interacción con las demás partículas.

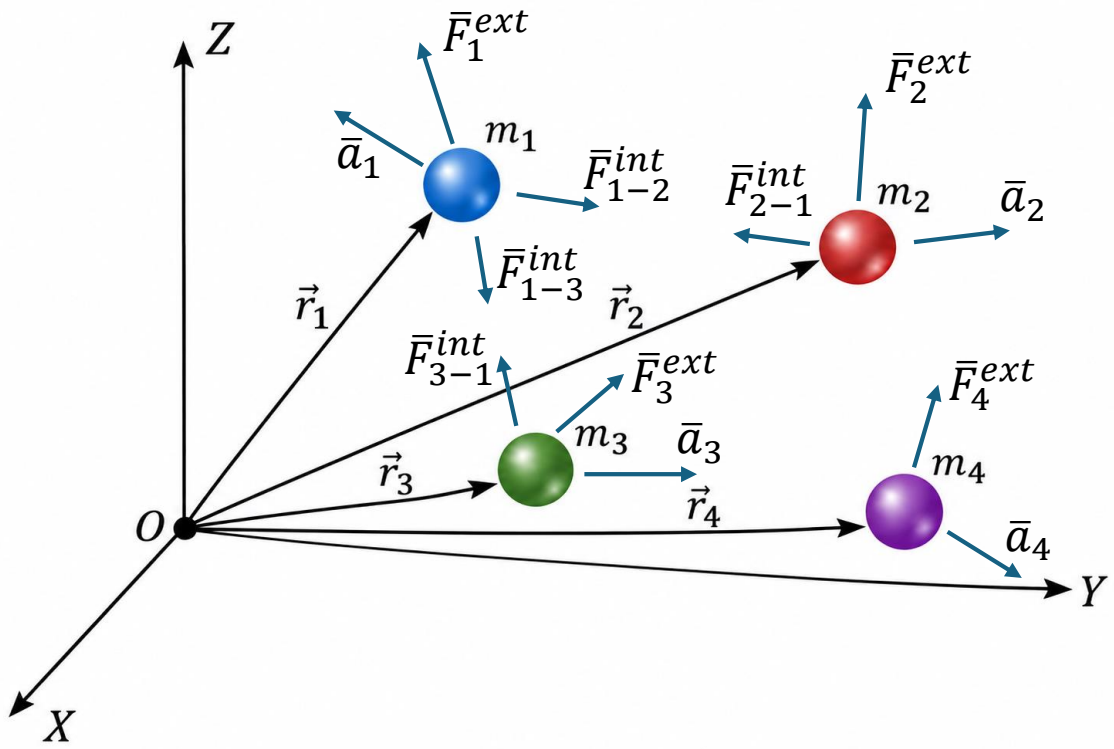
- Fuerzas externas, ejercidas por cuerpos ajenos al sistema.
- Fuerzas internas: fuerzas de interacción que las partículas del sistema ejercen mutuamente entre sí.

Para la partícula *i* :

$$\sum \bar{F}_i^{ext} + \sum \bar{F}_i^{int} = m_i \bar{a}_i$$

Aplicando la segunda ley de Newton a cada una d
partículas y sumando miembro a miembro,

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\sum \bar{F}_i^{ext} + \sum \bar{F}_i^{int} \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{a}_i$$



Dinámica de un sistema de partículas

Segunda ley de Newton

Resulta:

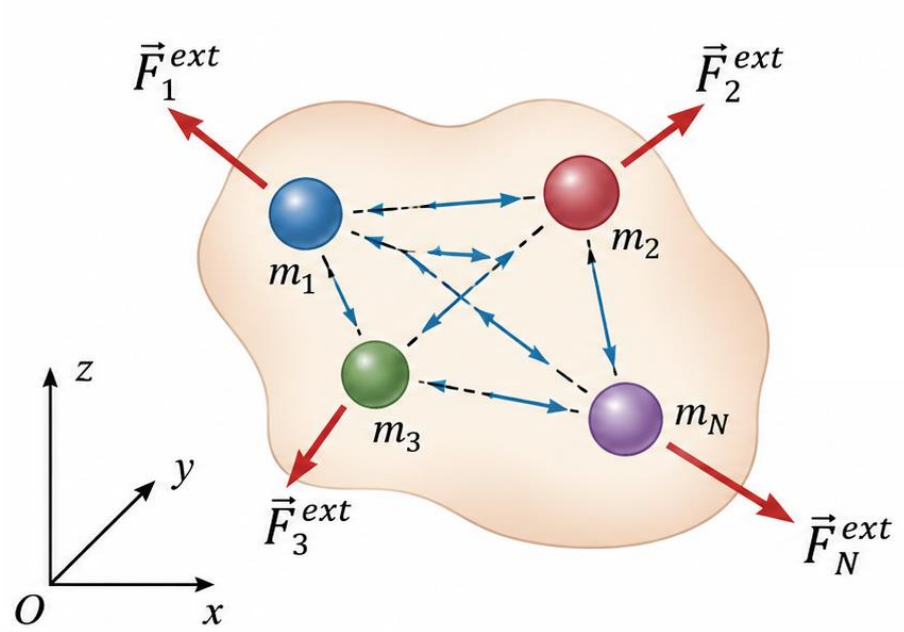
$$\sum \bar{F}^{ext} + \sum \bar{F}^{int} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \bar{v}_i\right)$$

Las fuerzas internas de interacción aparecen en pares acción-reacción (tercera ley de Newton):

$$\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}$$

Por lo tanto:

$$\sum \bar{F}^{int} = \bar{0}$$



Las fuerzas internas se anulan al considerar el sistema completo, aunque actúan individualmente sobre cada partícula.

$$\sum \bar{F}^{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt}$$

Dinámica de un sistema de partículas

Segunda ley de Newton

La cantidad de movimiento total del sistema puede expresarse en función del movimiento de su centro de masa:

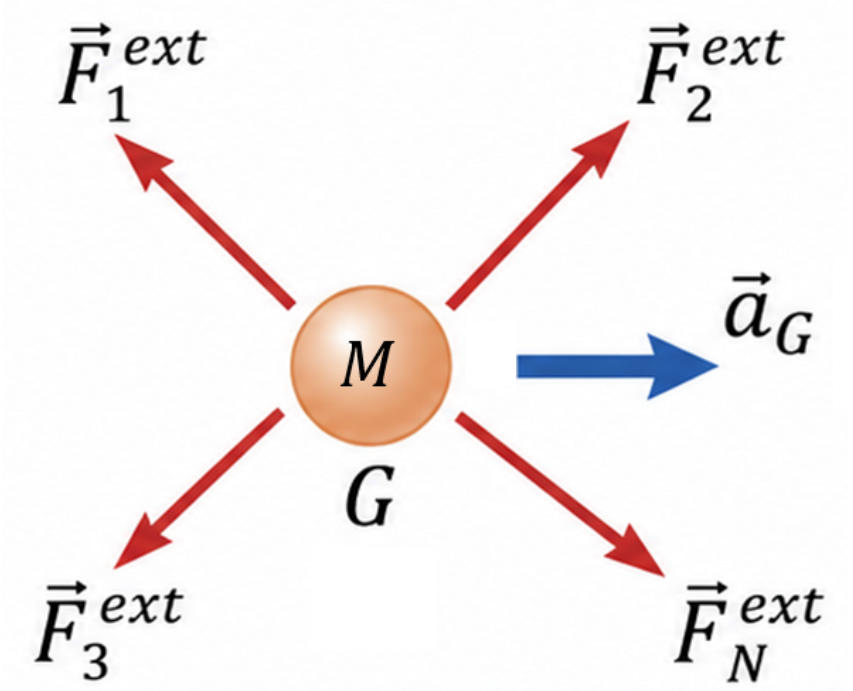
$$\bar{P} = M\bar{v}_G$$

Por lo tanto, si la masa total del sistema permanece constante:

$$\sum \bar{F}^{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt} = M\frac{d\bar{v}_G}{dt}$$

Por lo tanto:

$$\sum \bar{F}^{ext} = M\bar{a}_G$$



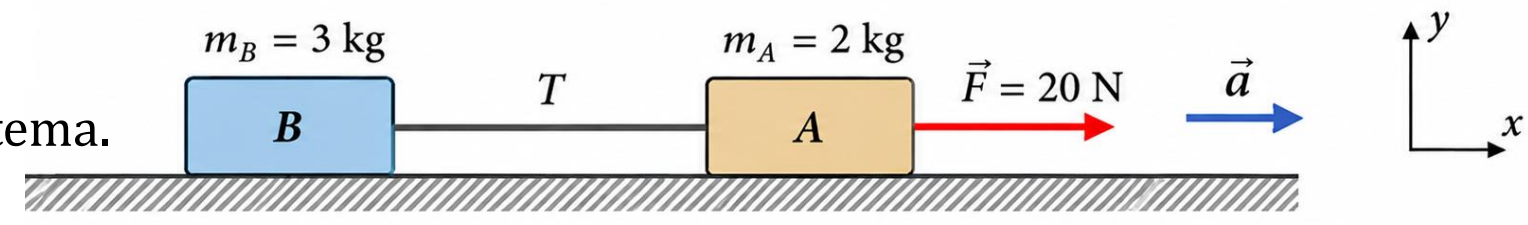
Desde el punto de vista de la traslación, el sistema se comporta como una partícula de masa M, ubicada en su centro de masa G.

Dinámica de un sistema de partículas

Ejemplo 10

Dos bloques A y B de masas m_A=2 kg y m_B=3 kg; se encuentran sobre una superficie horizontal lisa y están unidos mediante una cuerda ideal. Sobre el bloque A actúa una fuerza $\bar{F}$ =20 N.
Determinar:

a) La aceleración del sistema.
b) La tensión T de la cuerda.
c) Verificar considerando todo el sistema.
d) Aceleración del centro de masa.



a) La aceleración del sistema.

La superficie es lisa y analizamos solo fuerzas horizontales.

Bloque A:

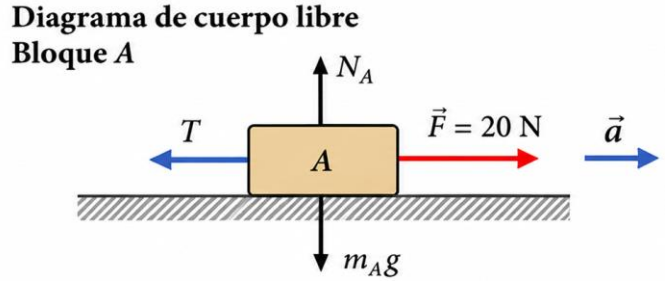
$$F - T = m_A a \quad \Longrightarrow \quad 20 - T = 2a$$

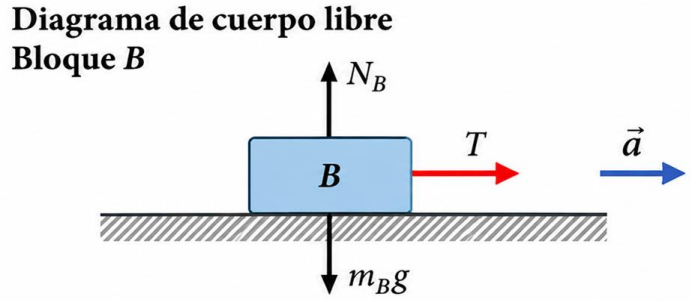
Bloque B:

$$T = m_B a \quad \Longrightarrow \quad T = 3a$$

Sustituyendo:

$$20 - 3a = 2a$$





Dinámica de un sistema de partículas

Ejemplo 10

b) La tensión de la cuerda se halla reemplazando la aceleración en una de las ecuaciones anteriores.

c) Análisis del sistema completo.

La fuerza que A ejerce sobre B y la que B ejerce sobre A forman el par acción – reacción.

$$\bar{T}_{AB} = -\bar{T}_{BA}$$

Por lo tanto:

$$\sum \bar{F}_i^{int} = \bar{0}$$

Y para el sistema completo queda solamente la fuerza externa: $\sum \bar{F}^{ext} = M\bar{a}_G$

Como: $M=m_A+m_B=5$ kg; entonces: $20 = 5a_G$

d) Aceleración del centro de masa.

También podemos obtenerla directamente de: $\bar{a}_G = \frac{1}{M}(m_A\bar{a}_A + m_B\bar{a}_B)$

Dinámica de un sistema de partículas

Momento cinético

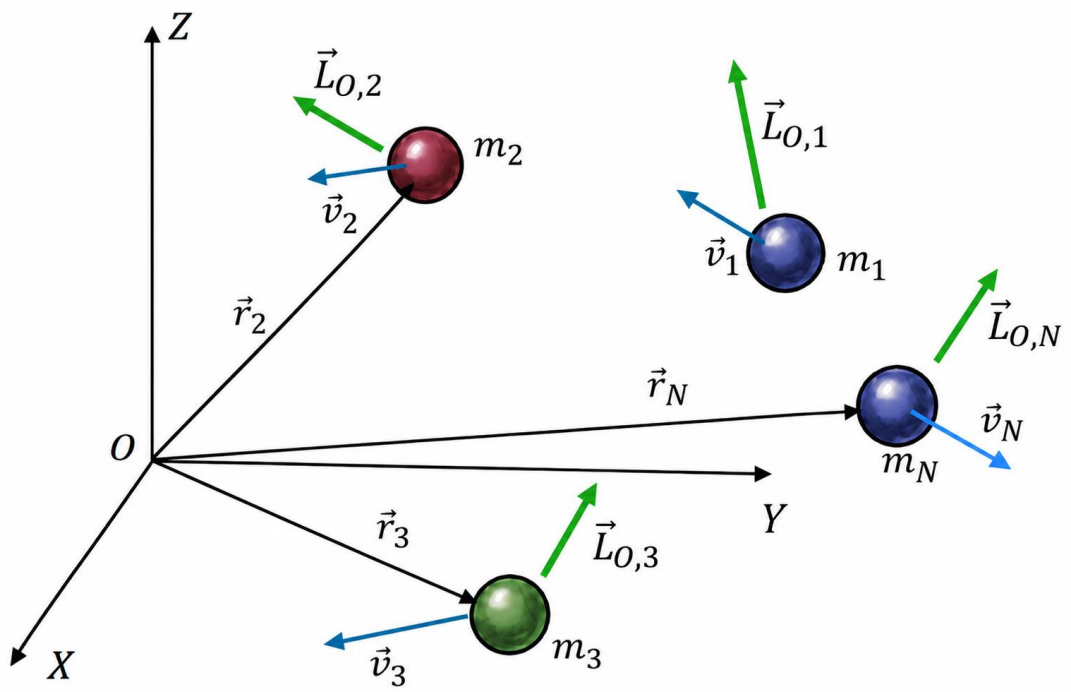
El momento cinético de un sistema de partículas respecto del punto fijo *O* se define como la suma vectorial de los momentos cinéticos de todas sus partículas:

$$\bar{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \bar{L}_{O,i}$$

Reemplazando la definición de momento cinético de cada partícula,

$$\bar{L}_O = \sum_{i=1}^{N} (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i)$$

El momento cinético total depende de la posición y del momento lineal de cada una de las partículas respecto de *O*.



Dinámica de un sistema de partículas

Momento cinético

Para cada partícula, de acuerdo con el teorema del momento cinético:

$$\frac{d\bar{L}_{O,i}}{dt} = \bar{r}_i \times \left(\sum \bar{F}_i^{ext} + \sum \bar{F}_i^{int} \right)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones correspondientes a las N partículas del sistema,

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{r}_i \times \sum \bar{F}_i^{ext} \right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{r}_i \times \sum \bar{F}_i^{int} \right)$$

Si $\bar{F}_i^{ext}$ y $\bar{F}_i^{int}$ representan las resultantes sobre la partícula i; entonces para el sistema de partículas, la variación temporal del momento cinético del sistema resulta:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{N} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{int}$$

Dinámica de un sistema de partículas

Teorema del momento cinético

Retomando la ecuación obtenida para el sistema,

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum \bar{M}_O^{ext} + \sum \bar{M}_O^{int}$$

El momento respecto del punto fijo O del sistema de fuerzas de interacción entre ambas partículas es: $\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}$, entonces:

$$\bar{M}_O^{ij} = \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_j \times \bar{F}_{ji} \longrightarrow \bar{M}_O^{ij} = \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} - \bar{r}_j \times \bar{F}_{ij} \longrightarrow \bar{M}_O^{ij} = \left(\bar{r}_i - \bar{r}_j\right) \times \bar{F}_{ij}$$

Como el vector $\left(\bar{r}_i - \bar{r}_j\right)$ tiene la misma dirección que la recta de acción de $\bar{F}_{ij}$, resulta: $\bar{M}_O^{ij} = \bar{0}$; lo mismo ocurre para cada par de partículas, entonces:

$$\sum \bar{M}_O^{int} = \bar{0}$$

Por lo tanto, la variación temporal del momento cinético de un sistema respecto de un punto fijo O es igual al momento resultante de las fuerzas externas calculado respecto del mismo punto.

$$\sum \bar{M}_O^{ext} = \frac{d\bar{L}_O}{dt}$$

Dinámica de un sistema de partículas

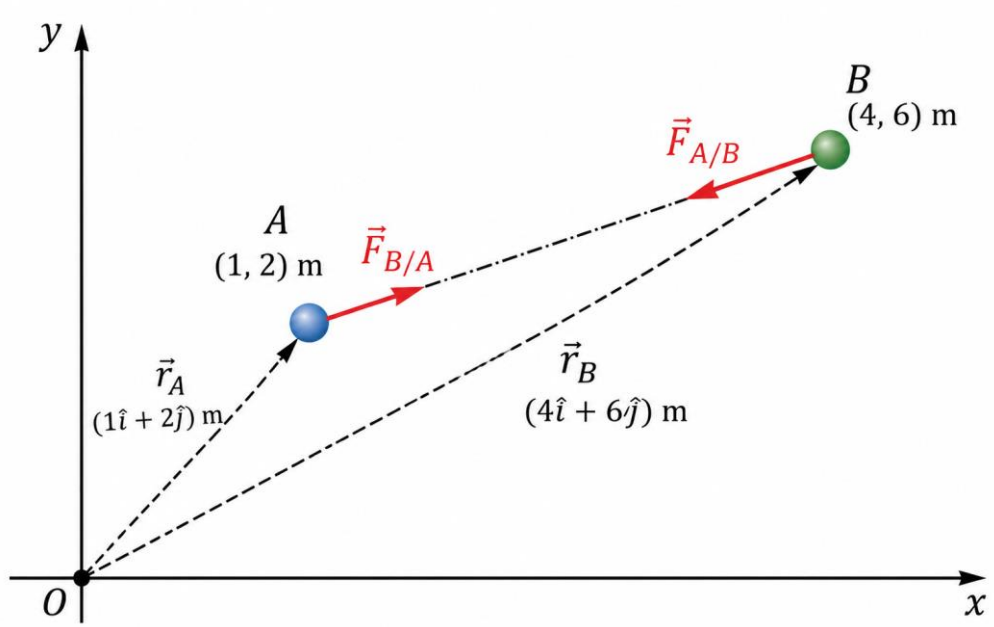
Ejemplo 11

Dos partículas A y B pertenecen a un mismo sistema y se encuentran, respecto del punto fijo O, en las posiciones:

$$\bar{r}_A = (1\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})\ \text{m}; \qquad \bar{r}_B = (4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath})\ \text{m};$$

La partícula B ejerce sobre A una fuerza interna de módulo: $F_{B/A}$=25 N, dirigida según la recta de acción que une ambas partículas. Determinar:

a) El vector fuerza $\bar{F}_{B/A}$.
b) La fuerza $\bar{F}_{A/B}$.
c) El momento de cada fuerza respecto de O.
d) Verificar que el momento total de las fuerzas internas es nulo.



a) La fuerza que ejerce B sobre A.

Antes necesitamos conocer la dirección de la fuerza interna. El enunciado solamente nos da el módulo de la fuerza y dice que actúa según la recta que une las partículas A y B.

$$\bar{r}_{B/A} = \bar{r}_B - \bar{r}_A \qquad \bar{r}_{B/A} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})\ \text{m}$$

Su módulo es:

$$\left|\bar{r}_{B/A}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Por lo tanto, el versor en la dirección de *A* hacia *B*:

$$\hat{e}_{B/A} = \frac{3}{5}\hat{\imath} + \frac{4}{5}\hat{\jmath}$$

Y entonces podemos expresar el vector fuerza:

$$\bar{F}_{B/A} = F_{B/A}\hat{e}_{B/A}$$

$$\bar{F}_{B/A} = 25\left(\frac{3}{5}\hat{\imath} + \frac{4}{5}\hat{\jmath}\right) \text{ N}$$

$$\bar{F}_{B/A} = (15\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}) \text{ N}$$

b) La fuerza, por ley de acción y reacción $\bar{F}_{B/A} = -\bar{F}_{A/B}$, es:

$$\bar{F}_{A/B} = -(15\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}) \text{ N}$$

Dinámica de un sistema de partículas

Ejemplo 11

c) El momento de cada fuerza respecto de O es:

Para la fuerza aplicada sobre A:

$$\bar{M}_{O,A} = \bar{r}_A \times \bar{F}_{B/A}$$

$$\bar{M}_{O,A} = (1\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) \times (15\hat{\imath} + 20\hat{\jmath})$$

$$\bar{M}_{O,A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 15 & 20 & 0 \end{vmatrix} = (20 - 30)\hat{k} = -10\hat{k} \ \text{N m}$$

Para la fuerza aplicada sobre B:

$$\bar{M}_{O,B} = \bar{r}_B \times \bar{F}_{A/B}$$

$$\bar{M}_{O,B} = (4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}) \times (-15\hat{\imath} - 20\hat{\jmath})$$

$$\bar{M}_{O,B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & 6 & 0 \\ -15 & -20 & 0 \end{vmatrix} = (-80 + 90)\hat{k} = 10\hat{k} \ \text{N m}$$

Dinámica de un sistema de partículas

Ejemplo 11

d) Momento total de las fuerzas internas.

Sumando ambos momentos:

$$\bar{M}_O^{int} = \bar{M}_{O,A} + \bar{M}_{O,B}$$

$$\bar{M}_O^{int} = -10\hat{k} + 10\hat{k}$$

$$\bar{M}_O^{int} = \bar{0}$$

Y esto verifica numéricamente el resultado demostrado en la teoría:

$$\sum \bar{M}_O^{int} = \bar{0}$$

Dinámica de un sistema de partículas

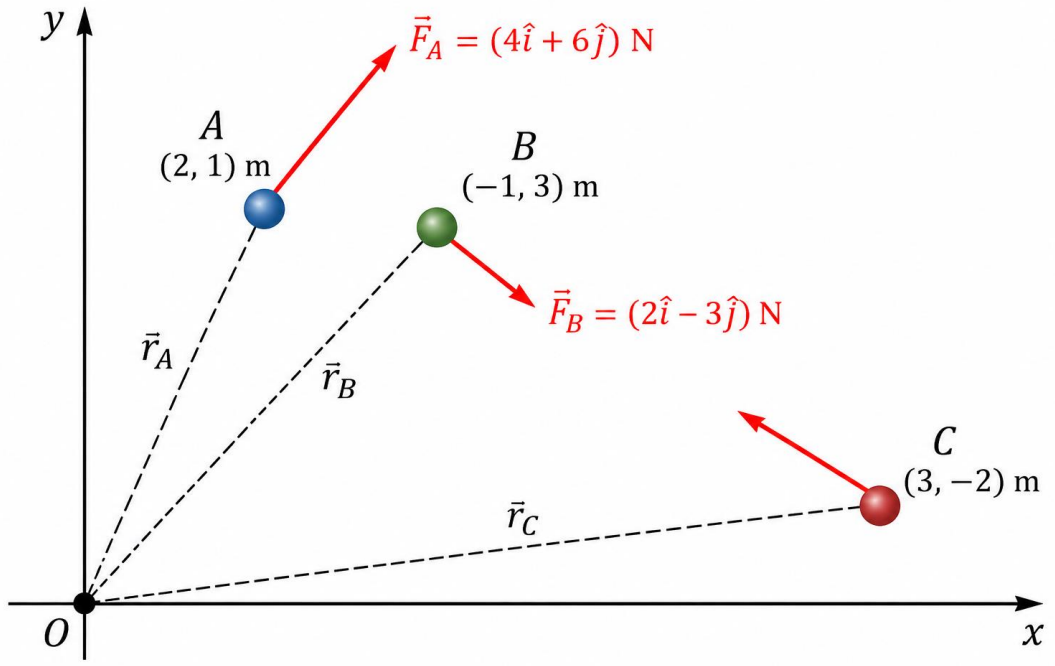
Ejemplo 12

Un sistema está formado por tres partículas A, B y C. En un determinado instante, sus posiciones respecto de un punto fijo O son:

$$\bar{r}_A = (2\hat{\imath} + 1\hat{\jmath})\ \text{m}; \quad \bar{F}_A = (4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath})\ \text{N}$$
$$\bar{r}_B = (-1\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})\ \text{m}; \quad \bar{F}_B = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})\ \text{N}$$
$$\bar{r}_C = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})\ \text{m}; \quad \bar{F}_C = (-5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})\ \text{N}$$

Determinar:

a) El momento de cada fuerza externa respecto de O.
b) El momento resultante de las fuerzas externas respecto de O.
c) La variación temporal del momento cinético del sistema respecto de O.



a) Momento de las fuerzas externas.
Para cada partícula:

$$\bar{M}_{O,i}^{ext} = \bar{r}_i \times \bar{F}_i$$

Dinámica de un sistema de partículas

Ejemplo 12

$$\bar{M}_{O,A}^{ext} = \bar{r}_A \times \bar{F}_A = (2\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}) \times (4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}) \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (12 - 4)\hat{k} = 8\hat{k} \text{ N m}$$

$$\bar{M}_{O,B}^{ext} = \bar{r}_B \times \bar{F}_B = (-1\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \times (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}) \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (3 - 6)\hat{k} = -3\hat{k} \text{ N m}$$

$$\bar{M}_{O,C}^{ext} = \bar{r}_C \times \bar{F}_C = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}) \times (-5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (6 - 10)\hat{k} = -4\hat{k} \text{ N m}$$

b) Momento resultante de las fuerzas externas.
Sumamos los momentos:

$$\sum \bar{M}_O^{ext} = \bar{M}_{O,A}^{ext} + \bar{M}_{O,B}^{ext} + \bar{M}_{O,C}^{ext}$$

Dinámica de un sistema de partículas

Ejemplo 12

$$\sum \bar{M}_O^{ext} = \left(8\hat{k} - 3\hat{k} - 4\hat{k}\right) \text{ N m}$$

$$\sum \bar{M}_O^{ext} = 1\hat{k} \text{ N m}$$

c) Variación temporal del momento cinético.
Aplicamos ahora el teorema desarrollado en el apunte:

$$\sum \bar{M}_O^{ext} = \frac{d\bar{L}_O}{dt}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = 1\hat{k} \text{ N m}$$