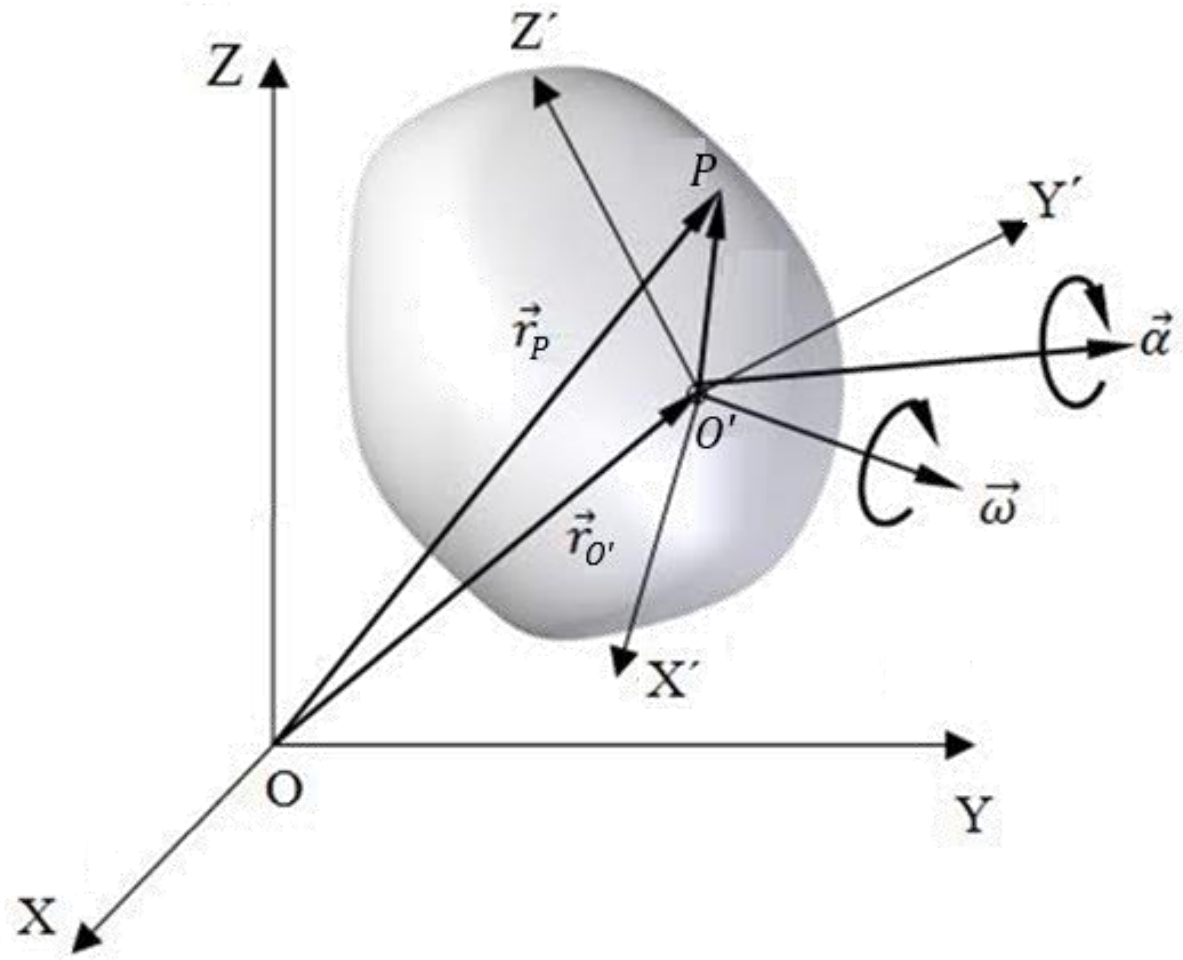
Anexo: Sistemas de referencias



Sistemas de coordenadas intrínsecas

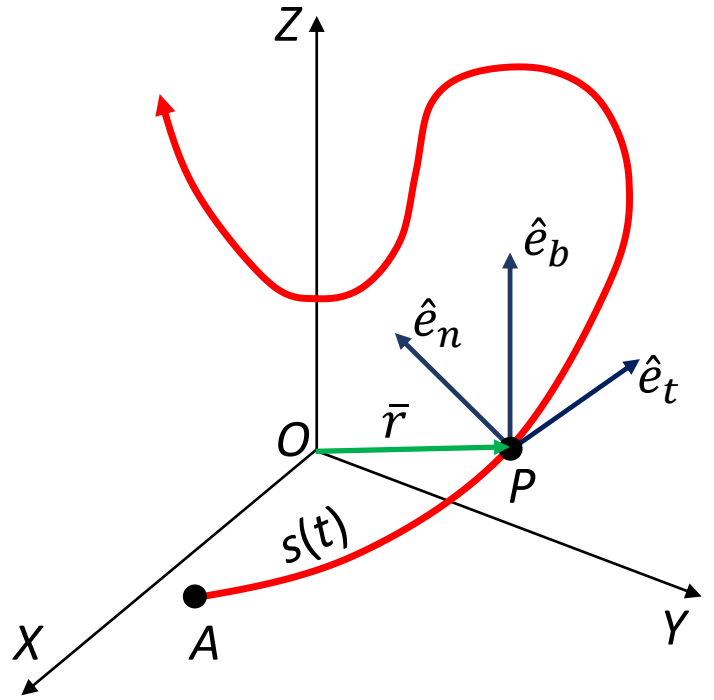
A diferencia de los sistemas de coordenadas globales (como el cartesiano, el cilíndrico o el esférico) que están fijos a un sistema de referencia inercial, el sistema de coordenadas intrínsecas se mueve junto con la partícula.

La descripción del movimiento se realiza pura y exclusivamente en función de las propiedades geométricas de la trayectoria y de la longitud de arco recorrida, sin necesidad de referenciar un origen externo permanente.

Definimos una *Base Móvil* a partir de una partícula *P* que se mueve a lo largo de una curva, cuya posición está dada por el vector $\bar{r}(t)$.

La distancia recorrida sobre la curva desde un punto de origen arbitrario (*A*) se denomina abscisa curvilínea y se denota como $s(t)$.

Asociada al punto *P*, se define una base móvil tridimensional conocida como *triedro de Frenet – Serret* o *base intrínseca.*



Sistemas de coordenadas intrínsecas

El triedro intrínseco (o de Frenet-Serret) es una base ortonormal dextrógira que se define matemáticamente a partir de las derivadas del vector posición respecto a la longitud de arco *s*.

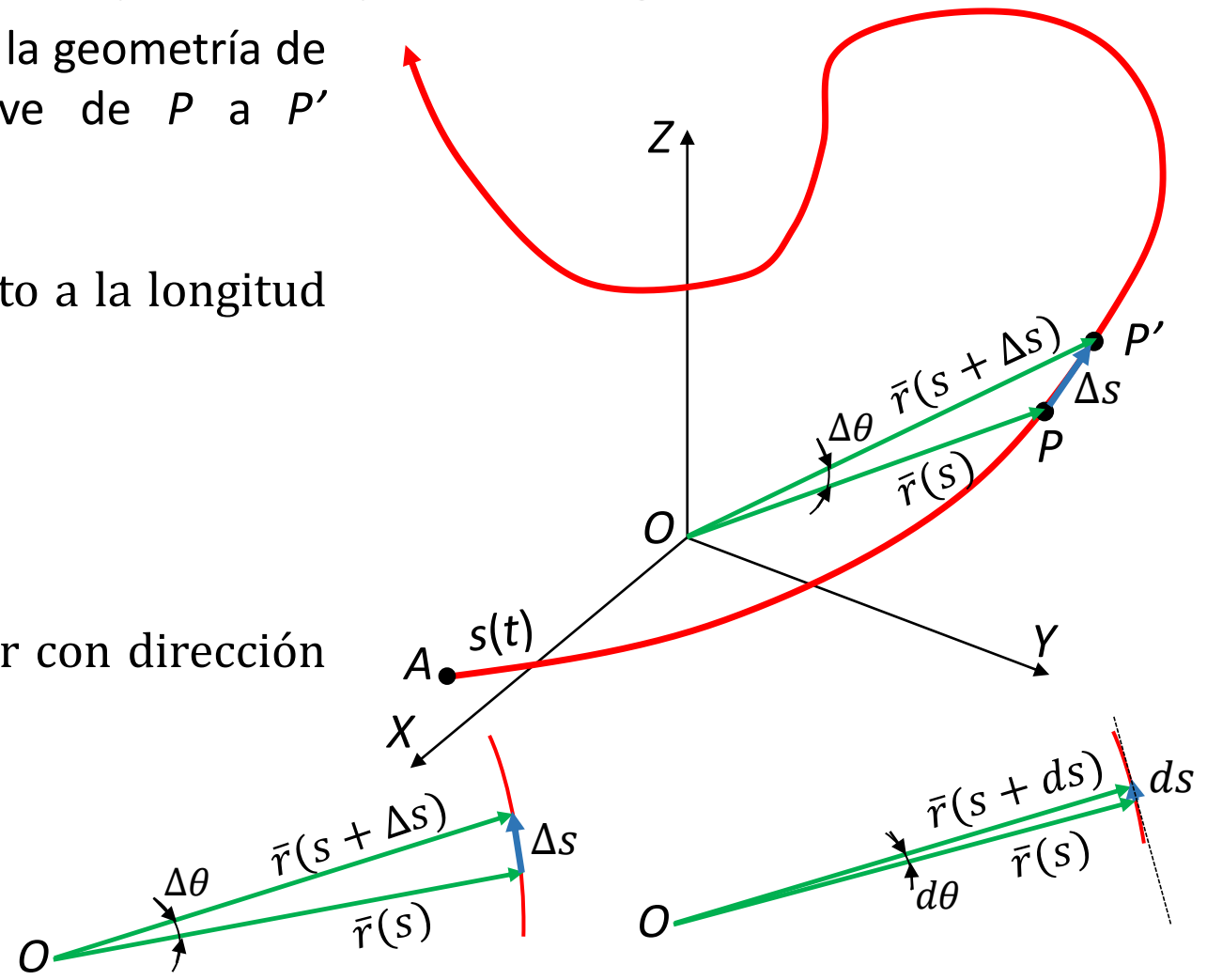
En la figura se muestra el cambio que ocurre en la geometría de la trayectoria, cuando la partícula se mueve de *P* a *P'* describiendo un arco Δs.

El cociente incremental de la posición respecto a la longitud de la trayectoria recorrida es:

$$\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} = \frac{\bar{r}(s+\Delta s) - \bar{r}(s)}{\Delta s}$$

Y el límite nos justifica la aparición del versor con dirección tangencial a la curva trayectoria:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\bar{r}(s+\Delta s) - \bar{r}(s)}{\Delta s} = \frac{d\bar{r}}{ds}$$



Sistemas de coordenadas intrínsecas

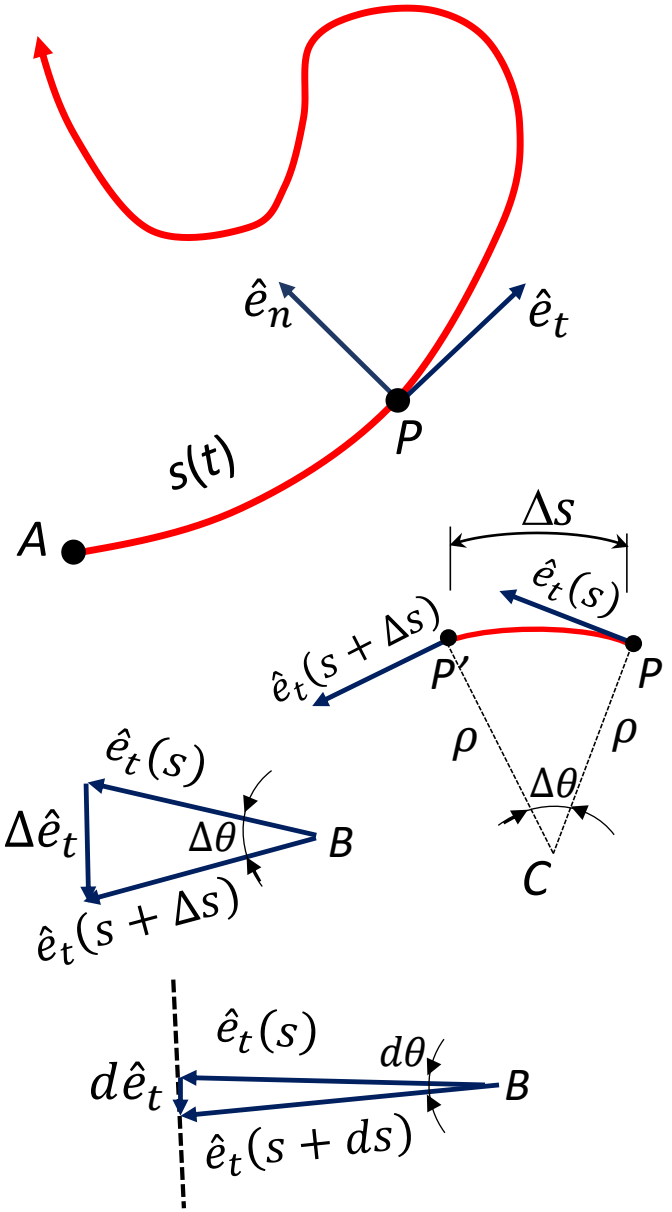
- $\hat{e}_t$: Versor tangencial: Es el vector unitario tangente a la trayectoria en la dirección y en el sentido del movimiento; es decir, es la derivada del vector posición respecto a la longitud de la trayectoria.

$$\hat{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Así como el versor tangencial nos indica el cambio de posición respecto a la longitud de la trayectoria, ahora analizaremos el cambio de dirección del versor tangente respecto a la longitud de la trayectoria.

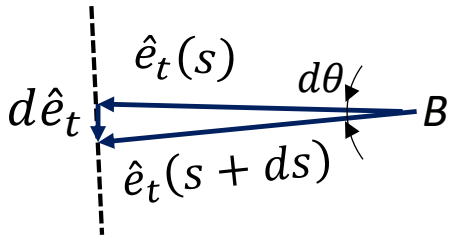
Si tomamos la partícula en el punto *P* con su versor $\hat{e}_t(s)$ y; tras recorrer un pequeño arco Δs, de radio ρ y centro C, consideramos el nuevo versor $\hat{e}_t(s + \Delta s)$.

El triángulo isósceles formado tiene dos lados iguales a la unidad (versor $\hat{e}_t$). Si aplicamos límite cuando $\Delta s \to 0$, implica que también el ángulo $\Delta\theta \to 0$; por lo tanto los ángulos de la base del triángulo tienden a 90°.



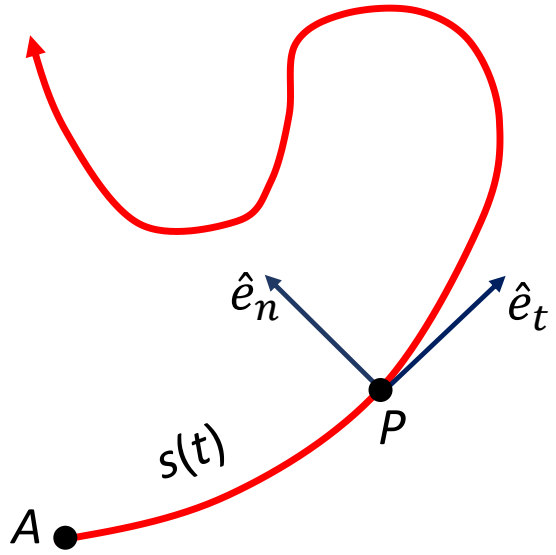
Sistemas de coordenadas intrínsecas

Esto demuestra geométricamente que, en el límite, el vector $\Delta\hat{e}_t$ se vuelve perpendicular al versor tangencial $\hat{e}_t$. A esta dirección perpendicular, que en la trayectoria física apunta hacia el centro de curvatura *C*, la definimos como la dirección del versor normal $\hat{e}_n$.



Para ángulos muy pequeños (cuando $\Delta\theta \to 0$), la longitud del segmento recto $\Delta\hat{e}_t$ se aproxima a la longitud del arco circular trazado por la punta del versor que pivota. Como el radio de ese arco es 1 y de acuerdo a la definición de arco de circunferencia, es:

$$|\Delta\hat{e}_t| \cong \Delta\theta . 1$$

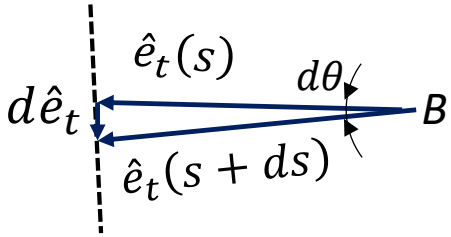


Ahora aplicamos límite al cociente incremental de la variación del versor tangencial respecto a la longitud de arco, donde obtenemos el vector cuya dirección es perpendicular (normal) a la dirección del versor tangencial.

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\hat{e}_t}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\hat{e}_t(s+\Delta s) - \hat{e}_t(s)}{\Delta s} = \frac{d\hat{e}_t}{ds}$$

Sistemas de coordenadas intrínsecas

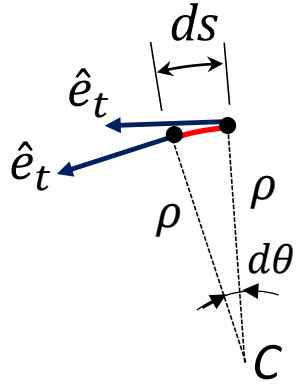
Todo vector se puede escribir como el producto de su módulo (un escalar positivo) por su dirección y sentido (un versor), por lo que el cambio infinitesimal del versor tangencial tiene como módulo al ángulo barrido y como dirección al versor normal.



$$d\hat{e}_t = d\theta . \hat{e}_n$$

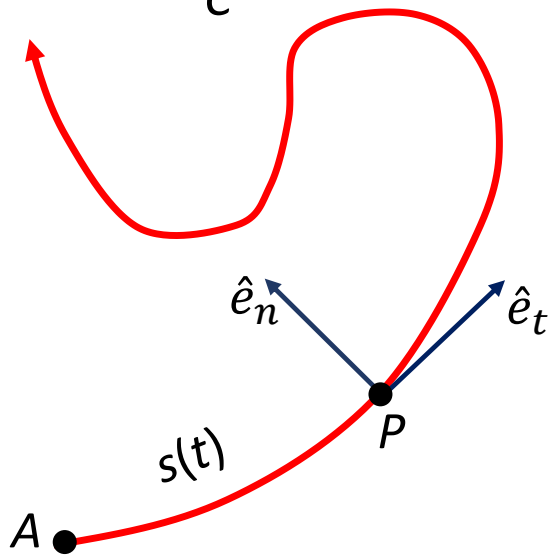
Sustituyendo en el cociente definido por límite, es:

$$\frac{d\hat{e}_t}{ds} = \frac{d\theta}{ds} . \hat{e}_n$$



Ahora si consideramos que el diferencial de arco *ds* pertenece a una curva de radio ρ, podemos relacionar estas magnitudes mediante la definición de arco de circunferencia como:

$$ds = \rho . d\theta$$



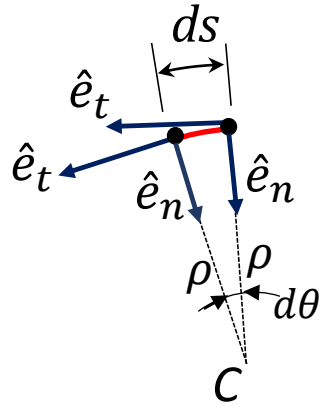
Sistemas de coordenadas intrínsecas

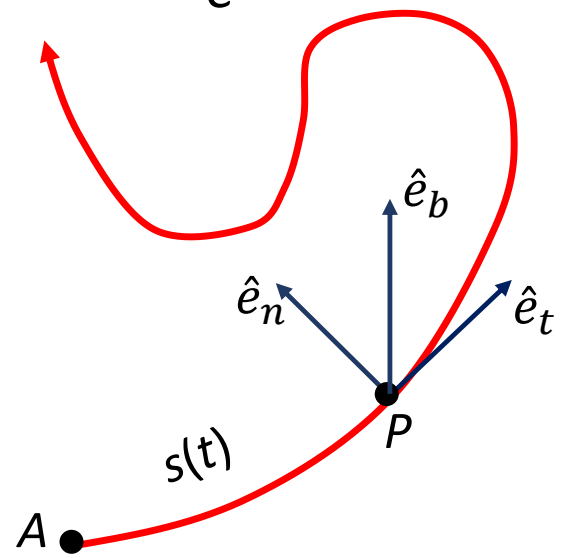
Despejando la variación del ángulo respecto a la longitud recorrida, es:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad \text{ó} \quad d\theta = \kappa . ds \qquad (\kappa\text{: curvatura, [1/m]})$$

Finalmente, sustituyendo esta equivalencia geométrica en la derivada vectorial, llegamos a la fórmula fundamental que describe cómo varía el versor tangencial en el espacio:

$$\frac{d\hat{e}_t}{ds} = \frac{1}{\rho} . \hat{e}_n$$





- $\hat{e}_n$: Versor normal: A medida que la partícula avanza, el versor tangencial cambia de dirección; y la tasa de cambio de $\hat{e}_t$ respecto de *s*, nos da un vector perpendicular (normal) a la dirección del versor tangencial y apunta siempre hacia el centro de curvatura (*C*).

- $\hat{e}_b$: Versor binormal: es perpendicular al plano formado por los versores tangente y normal, llamado *plano osculador*.

$$\hat{e}_b = \hat{e}_t \times \hat{e}_n$$

Sistemas de coordenadas intrínsecas

Determinación de la velocidad.

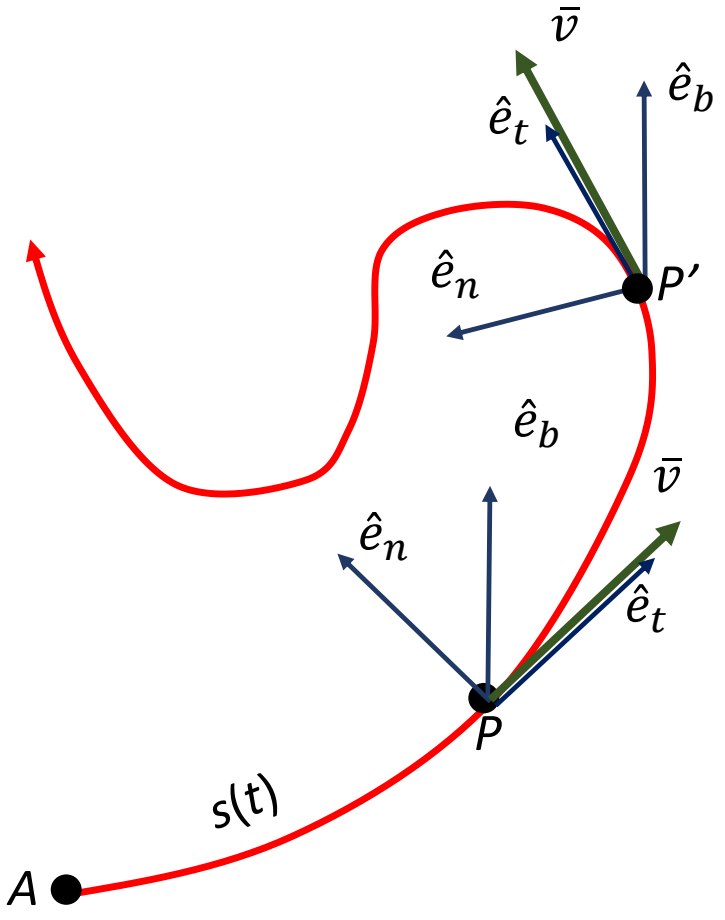
La velocidad es la derivada temporal del vector posición $\bar{r}(t)$. Si aplicamos la regla de la cadena incorporando a la longitud de arco *s*(*t*), es:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}.\frac{ds}{dt}$$

Como: $\hat{e}_t = \frac{d\bar{r}}{ds}$; y además: $v(t)\frac{ds}{dt}$; que es la rapidez (escalar). El vector velocidad será:

$$\bar{v} = v(t).\hat{e}_t$$

En este sistema, la velocidad tiene una única componente y siempre es tangente a la trayectoria.



Sistemas de coordenadas intrínsecas

Determinación de la aceleración.

La aceleración es la derivada temporal de la velocidad. Tanto la rapidez como el versor $\hat{e}_t$ dependen del tiempo.

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}(v.\hat{e}_t) = \frac{dv}{dt}.\hat{e}_t + v.\frac{d\hat{e}_t}{dt}$$

Para el término: $\frac{d\hat{e}_t}{dt}$, usamos la regla de la cadena respecto a *s*

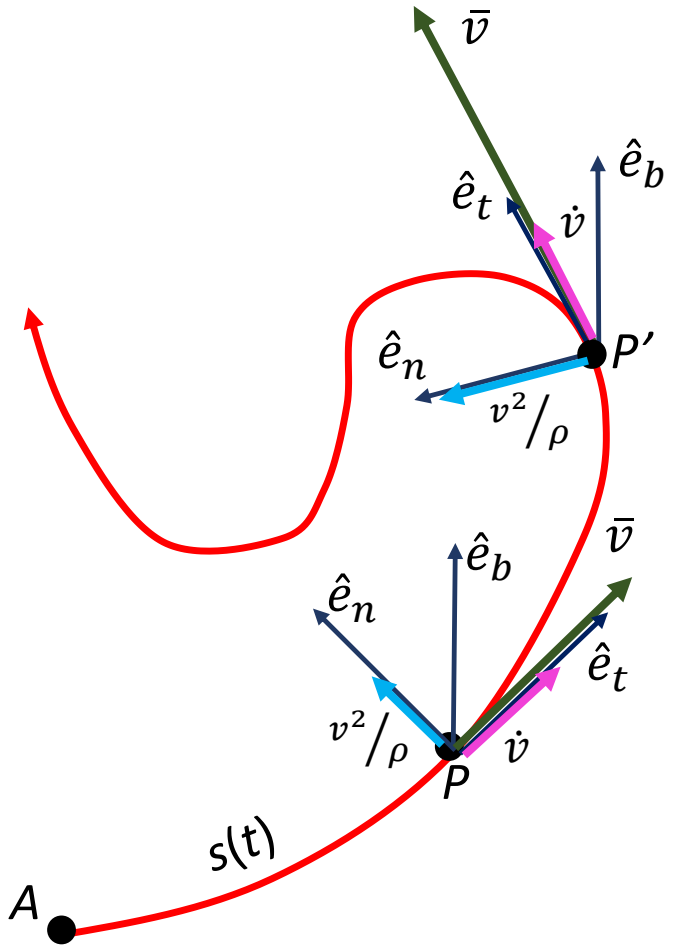
$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\hat{e}_t}{ds}.\frac{ds}{dt}$$

Como: $\frac{d\hat{e}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}.\hat{e}_n$; y además: $v(t)\frac{ds}{dt}$; que es la rapidez (escalar).

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \left(\frac{1}{\rho}.\hat{e}_n\right).v = \frac{v}{\rho}.\hat{e}_n$$

Sustituyendo en la ecuación original es:

$$\bar{a} = \dot{v}.\hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho}.\hat{e}_n$$



Sistemas de coordenadas intrínsecas

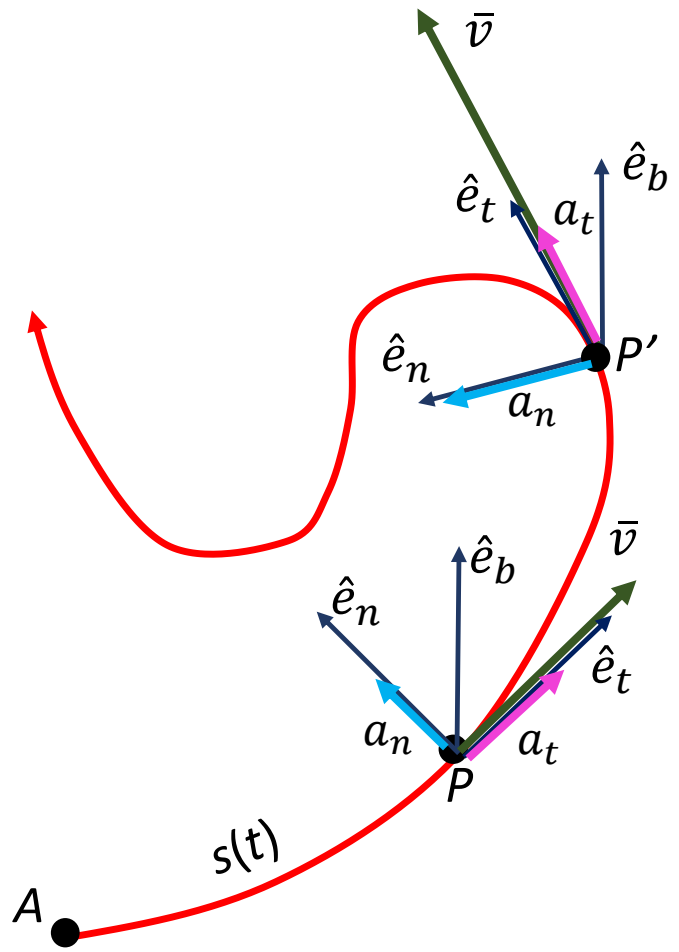
La interpretación física de la aceleración será:

$$\bar{a} = a_t.\hat{e}_t + a_n.\hat{e}_n$$

Donde:

- Aceleración tangencial ($a_t = \dot{v}$): Es la componente que indica el cambio de velocidad a lo largo de la trayectoria; si el movimiento es uniforme es nula ($a_t = 0$).
- Aceleración Normal o Centrípeta ($a_n = \frac{v^2}{\rho}$): Es la componente que indica el cambio de dirección de la velocidad tangencial; su dirección y sentido apuntan hacia el centro de curvatura (*C*). Si la trayectoria es una recta $\rho = \infty$, por lo que $a_n = 0$.

  Cuanto menor es el radio de curvatura, mayor es la componente normal de la aceleración para una misma rapidez.



Sistemas de coordenadas intrínsecas

Ejemplo 3:
Un vehículo que se desplaza por una pista curva plana, tiene una rapidez que aumenta según la ley $v(t)=2.t$ (en m/s). La trayectoria tiene una geometría tal que su radio de curvatura varía con la posición según la expresión $\rho(s)=50+0{,}5.s$ (en metros), donde s es la distancia recorrida a lo largo de la curva. Para el instante $t=5$ segundos; determinar:

a) La longitud de arco recorrida.
b) El radio de curvatura ρ en ese instante.
c) El vector aceleración total expresado en el triedro de Frenet-Serret.

a) Para hallar la longitud de arco sabemos que la rapidez es $v(t)\frac{ds}{dt}$; por lo tanto:

$$\frac{ds}{dt} = v = 2.t \quad \Rightarrow \quad \int_0^s ds = \int_0^5 2.t.dt$$

$$s(5) = [t^2]_0^5 = 25 \text{ m}$$

Sistemas de coordenadas intrínsecas

b) Para el cálculo del radio de curvatura ρ, evaluamos la expresión dada en el punto *s* = 25m.

$$\rho(s) = 50 + 0{,}5.\, s$$

$$\rho(25) = 50 + 0{,}5.\,(25) = 50 + 12{,}5$$

$$\rho(25) = 62{,}5\mathrm{m}$$

c) Para el cálculo de la aceleración total en el tiempo dado (5 segundos), su vector es:

$$\bar{a} = \dot{v}.\,\hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho}.\,\hat{e}_n$$

Donde:

La rapidez es:

$$v(t) = 2.\,t \;=\; 2.5 \;=\; 10\ \mathrm{m}/s$$

Sistemas de coordenadas intrínsecas

Aceleración tangencial (a_t):

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2.t) = 2\text{m}/s^2$$

Aceleración normal (a_n):

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{10^2}{62{,}5} = \frac{100}{62{,}5} = 1{,}6\ \text{m}/s^2$$

Aceleración total ($\bar{a}$):

$$\bar{a} = 2.\hat{e}_t + 1{,}6.\hat{e}_n \quad [\text{m}/s^2]$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 1{,}6^2} = 2{,}56\ m/s^2$$

Relaciones entre sistemas

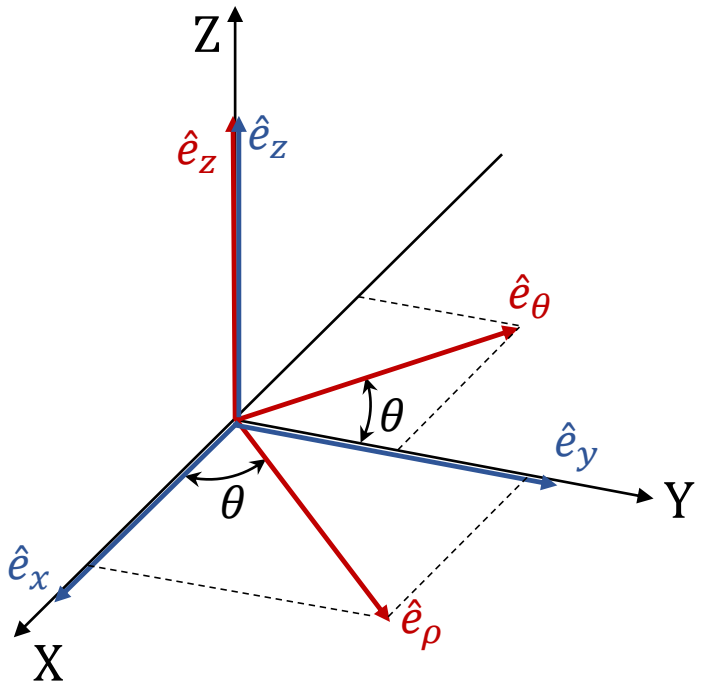
Como se desarrolló en Álgebra Tensorial, en este capítulo utilizaremos el tensor de transformación únicamente para realizar cambios de base entre los distintos sistemas de coordenadas.

- Base Cartesiana: $\{\hat{e}_x; \hat{e}_y; \hat{e}_z\}$.
- Base Cilíndrica: $\{\hat{e}_\rho; \hat{e}_\theta; \hat{e}_z\}$.
- Base Esférica: $\{\hat{e}_r; \hat{e}_\theta; \hat{e}_\varphi\}$.
- Base Intrínseca: $\{\hat{e}_t; \hat{e}_n; \hat{e}_b\}$.

❖ Cambio de base de Cartesianas a Cilíndricas.

Descomposición:

- $\hat{e}_\rho = cos\theta.\hat{e}_x + sen\theta.\hat{e}_y$
- $\hat{e}_\theta = -sen\theta.\hat{e}_x + cos\theta.\hat{e}_y$
- $\hat{e}_z = \hat{e}_z$



La transformación es una rotación alrededor del eje *z* mediante el ángulo acimutal θ; y la matriz de cambio de base es:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix}$$

- **Cambio de base de Cilíndricas a Cartesianas.**

Forma Matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_z \end{pmatrix}$$

Cinemática del punto

Relaciones entre sistemas

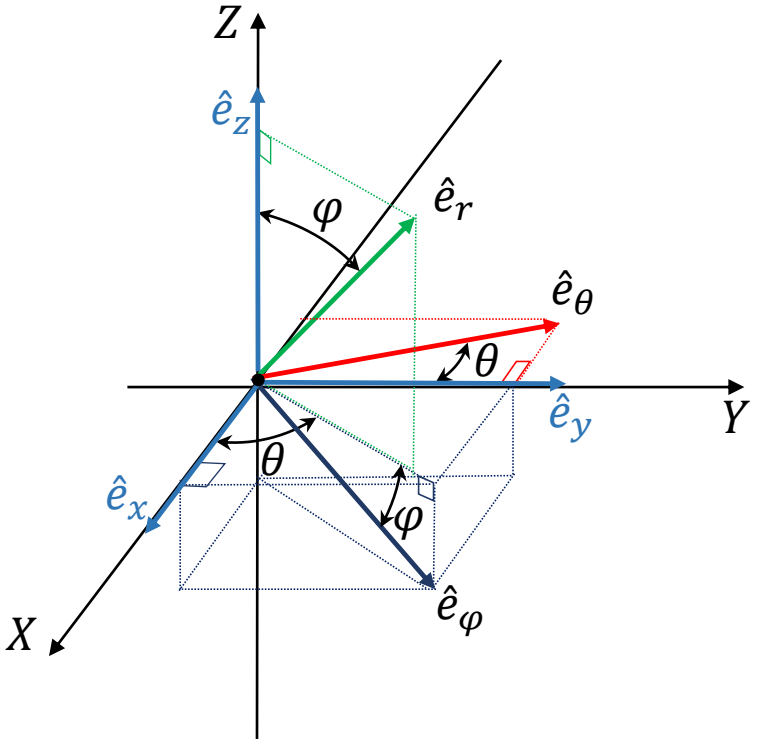
❖ Cambio de base de Esféricas a Cartesianas.

Descomposición:

- $\hat{e}_r = sen\varphi.cos\theta.\hat{e}_x + sen\varphi.sen\theta.\hat{e}_y + cos\varphi.\hat{e}_z$
- $\hat{e}_\theta = -sen\theta.\hat{e}_x + cos\theta.\hat{e}_y + 0.\hat{e}_z$
- $\hat{e}_\varphi = cos\varphi.cos\theta.\hat{e}_x + cos\varphi.sen\theta.\hat{e}_y - sen\varphi.\hat{e}_z$

Forma Matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\varphi.cos\theta & sen\varphi.sen\theta & cos\varphi \\ -sen\theta & cos\theta & 0 \\ cos\varphi.cos\theta & cos\varphi.sen\theta & -sen\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix}$$



❖ Cambio de base de Cartesianas a Esféricas.

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\varphi.cos\theta & -sen\theta & cos\varphi.cos\theta \\ sen\varphi.sen\theta & cos\theta & cos\varphi.sen\theta \\ cos\varphi & 0 & -sen\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

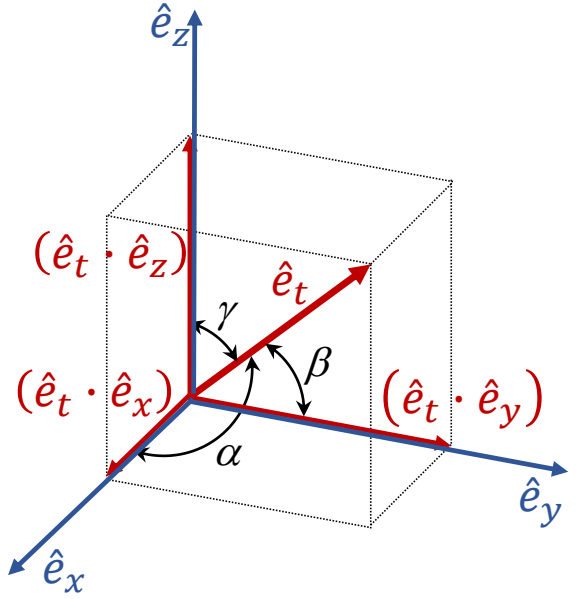
Relaciones entre sistemas

❖ **Cambio de base de Cartesianas a Intrínsecas.**

Para ver donde queda cada versor en el espacio, hacemos el producto escalar entre los versores de ambas bases. La figura representa la descomposición de uno ($\hat{e}_t$) de los tres versores, para no complicar el entendimiento.

Descomposición:

- $\hat{e}_t = (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_x)\hat{e}_x + (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_y)\hat{e}_y + (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_z)\hat{e}_z$
- $\hat{e}_n = (\hat{e}_n \cdot \hat{e}_x)\hat{e}_x + (\hat{e}_n \cdot \hat{e}_y)\hat{e}_y + (\hat{e}_n \cdot \hat{e}_z)\hat{e}_z$
- $\hat{e}_b = (\hat{e}_b \cdot \hat{e}_x)\hat{e}_x + (\hat{e}_b \cdot \hat{e}_y)\hat{e}_y + (\hat{e}_b \cdot \hat{e}_z)\hat{e}_z$



Forma Matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_t \\ \hat{e}_n \\ \hat{e}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_t \cdot \hat{e}_x & \hat{e}_t \cdot \hat{e}_y & \hat{e}_t \cdot \hat{e}_z \\ \hat{e}_n \cdot \hat{e}_x & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_y & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_z \\ \hat{e}_b \cdot \hat{e}_x & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_y & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix}$$

$$(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_x)\hat{e}_x = (|\hat{e}_t| . |\hat{e}_x| . cos\alpha)\hat{e}_x$$

$$(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_y)\hat{e}_y = (|\hat{e}_t| . |\hat{e}_y| . cos\beta)\hat{e}_y$$

$$(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_z)\hat{e}_z = (|\hat{e}_t| . |\hat{e}_z| . cos\gamma)\hat{e}_z$$

Relaciones entre sistemas

❖ **Cambio de base de Intrínsecas a Cartesianas.**

Para ver donde queda cada versor en el espacio, hacemos el producto escalar entre los versores de ambas bases.

Forma Matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_t \cdot \hat{e}_x & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_x & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_x \\ \hat{e}_t \cdot \hat{e}_y & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_y & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_y \\ \hat{e}_t \cdot \hat{e}_z & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_z & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_t \\ \hat{e}_n \\ \hat{e}_b \end{pmatrix}$$

❖ **Cambio de base de Cilíndricas a Intrínsecas.**

Del mismo modo, se proyecta sobre la base cilíndrica.

Descomposición:

- $\hat{e}_t = (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_\rho)\hat{e}_\rho + (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_\theta)\hat{e}_\theta + (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_z)\hat{e}_z$
- $\hat{e}_n = (\hat{e}_n \cdot \hat{e}_\rho)\hat{e}_\rho + (\hat{e}_n \cdot \hat{e}_\theta)\hat{e}_\theta + (\hat{e}_n \cdot \hat{e}_z)\hat{e}_z$
- $\hat{e}_b = (\hat{e}_b \cdot \hat{e}_\rho)\hat{e}_\rho + (\hat{e}_b \cdot \hat{e}_\theta)\hat{e}_\theta + (\hat{e}_b \cdot \hat{e}_z)\hat{e}_z$

Forma Matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_t \\ \hat{e}_n \\ \hat{e}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_t \cdot \hat{e}_\rho & \hat{e}_t \cdot \hat{e}_\theta & \hat{e}_t \cdot \hat{e}_z \\ \hat{e}_n \cdot \hat{e}_\rho & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_\theta & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_z \\ \hat{e}_b \cdot \hat{e}_\rho & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_\theta & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_z \end{pmatrix}$$

- Cambio de base de Intrínsecas a Cilíndricas.

Forma Matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_t \cdot \hat{e}_\rho & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_\rho & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_t \cdot \hat{e}_\theta & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_\theta & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_t \cdot \hat{e}_z & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_z & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_t \\ \hat{e}_n \\ \hat{e}_b \end{pmatrix}$$

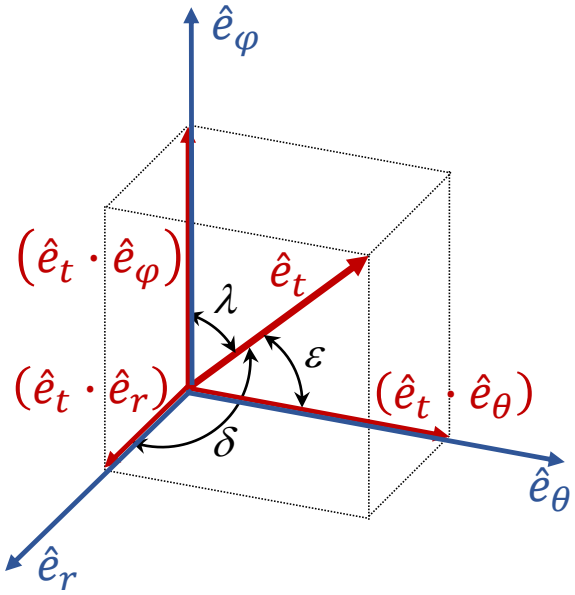
Cinemática del punto

Relaciones entre sistemas

❖ Cambio de base de Esféricas a Intrínsecas.

Descomposición:

- $\hat{e}_t = (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r + (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_\theta)\hat{e}_\theta + (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_\varphi)\hat{e}_\varphi$
- $\hat{e}_n = (\hat{e}_n \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r + (\hat{e}_n \cdot \hat{e}_\theta)\hat{e}_\theta + (\hat{e}_n \cdot \hat{e}_\varphi)\hat{e}_\varphi$
- $\hat{e}_b = (\hat{e}_b \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r + (\hat{e}_b \cdot \hat{e}_\theta)\hat{e}_\theta + (\hat{e}_b \cdot \hat{e}_\varphi)\hat{e}_\varphi$



Forma Matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_t \\ \hat{e}_n \\ \hat{e}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_t \cdot \hat{e}_r & \hat{e}_t \cdot \hat{e}_\theta & \hat{e}_t \cdot \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_n \cdot \hat{e}_r & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_\theta & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_b \cdot \hat{e}_r & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_\theta & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

$$(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r = (|\hat{e}_t| . |\hat{e}_r| . cos\delta)\hat{e}_r$$

$$(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_\theta)\hat{e}_\theta = (|\hat{e}_t| . |\hat{e}_\theta| . cos\varepsilon)\hat{e}_\theta$$

$$(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_\varphi)\hat{e}_\varphi = (|\hat{e}_t| . |\hat{e}_\varphi| . cos\lambda)\hat{e}_\varphi$$

Relaciones entre sistemas

❖ **Cambio de base de Intrínsecas a Esféricas.**

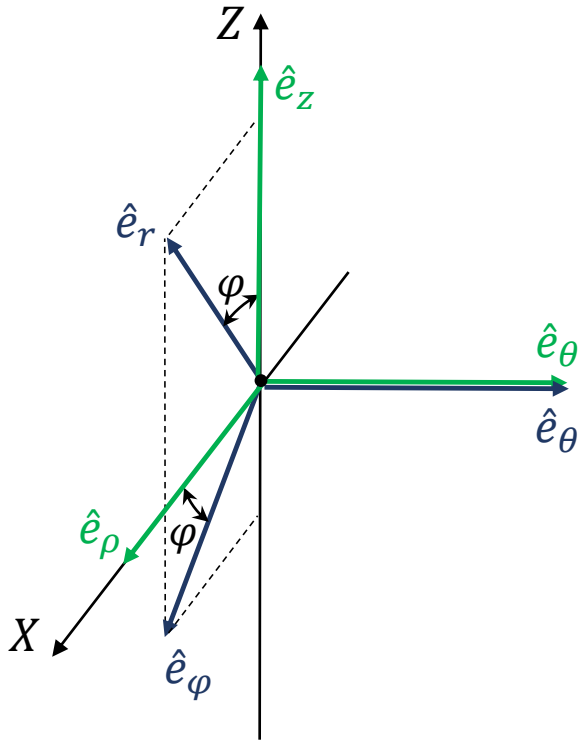
Forma Matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_t \cdot \hat{e}_r & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_r & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_r \\ \hat{e}_t \cdot \hat{e}_\theta & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_\theta & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_t \cdot \hat{e}_\varphi & \hat{e}_n \cdot \hat{e}_\varphi & \hat{e}_b \cdot \hat{e}_\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_t \\ \hat{e}_n \\ \hat{e}_b \end{pmatrix}$$

❖ **Cambio de base de Cilíndricas a Esféricas.**

Descomposición:

- $\hat{e}_r = sen\varphi . \hat{e}_\rho + 0 . \hat{e}_\theta + cos\varphi . \hat{e}_z$
- $\hat{e}_\theta = 0 . \hat{e}_\rho + 1 . \hat{e}_\theta + 0 . \hat{e}_z$
- $\hat{e}_\varphi = cos\varphi . \hat{e}_\rho + 0 . \hat{e}_\theta - sen\varphi . \hat{e}_z$



Relaciones entre sistemas

Forma Matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\varphi & 0 & cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ cos\varphi & 0 & -sen\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_z \end{pmatrix}$$

- Cambio de base de Esféricas a Cilíndricas.

Forma Matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\varphi & 0 & cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ cos\varphi & 0 & -sen\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{pmatrix}$$