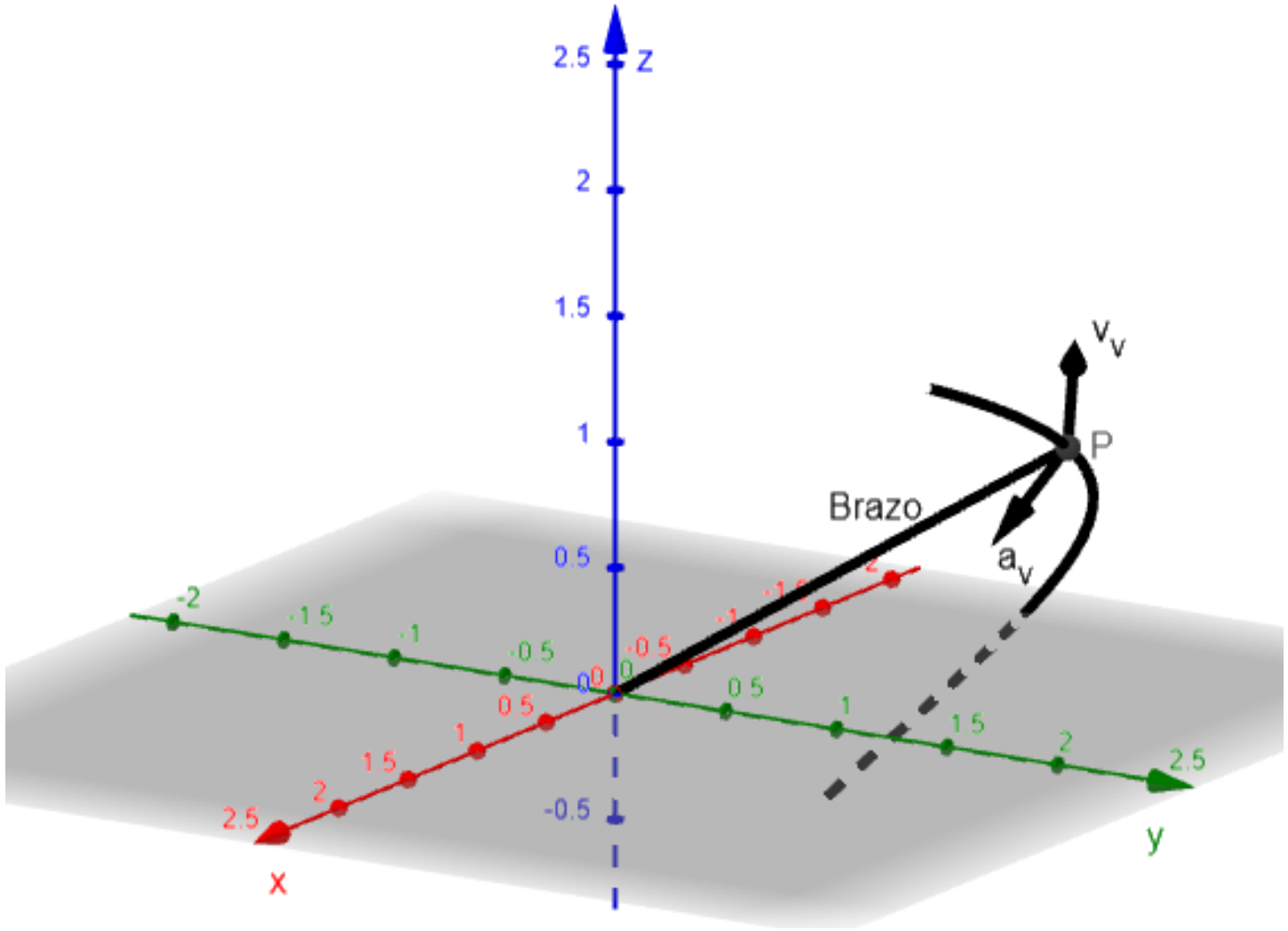
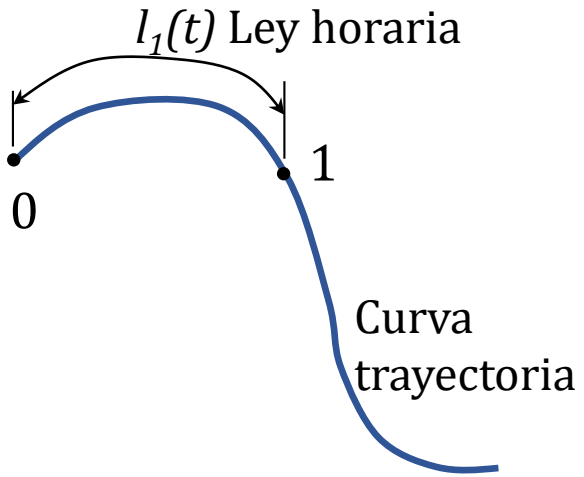
2_ SISTEMAS DE REFERENCIA



El "Por dónde“ y el "Cuándo"

Para describir el movimiento de un punto material es necesario conocer dos aspectos independientes:

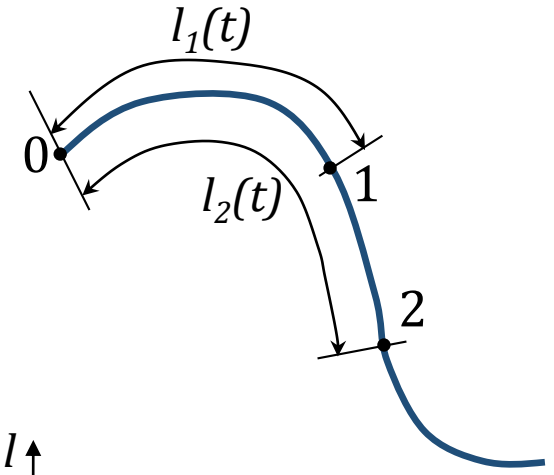
- **Condición geométrica (curva trayectoria):** responde a ¿Por dónde? Define la curva sobre la cual puede encontrarse el punto. Sobre esta curva puede definirse una coordenada de longitud de arco *l*, medida desde un origen elegido.
    - Ejemplos de condiciones geométricas: $x^2 + y^2 = 4$; $y = 3x^2$.
- **Condición temporal (ley horaria):** responde a ¿Cuándo? Establece qué posición sobre la trayectoria ocupa el punto en cada instante, mediante una relación: $l(t)$ (o $s(t)$).
    - Ejemplos de condiciones temporales: $l(t) = 3t^2 - 2t$; $l(t) = 4sen(5t - \pi/3)$.



El “Cómo”: evolución del movimiento

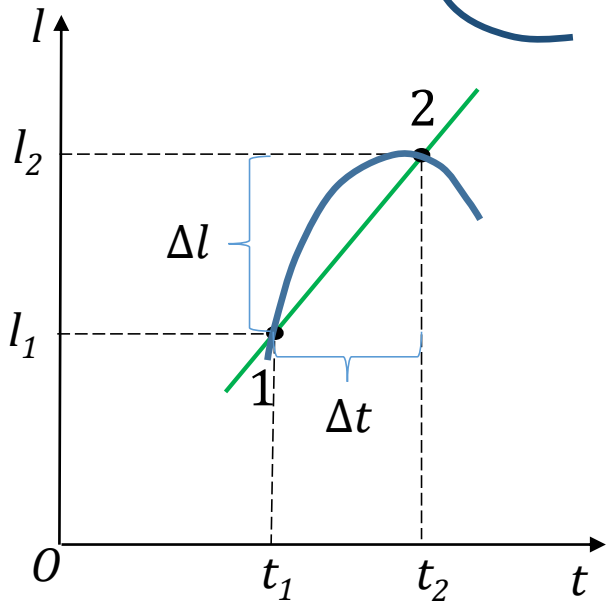
La distancia recorrida sobre la trayectoria se expresa mediante la variación de la longitud de arco:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = l(t + \Delta t) - l(t)$$



Para conocer cómo se recorre la trayectoria a medida que transcurre el tiempo, definimos la velocidad escalar media (v_m) así:

$$v_m = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$



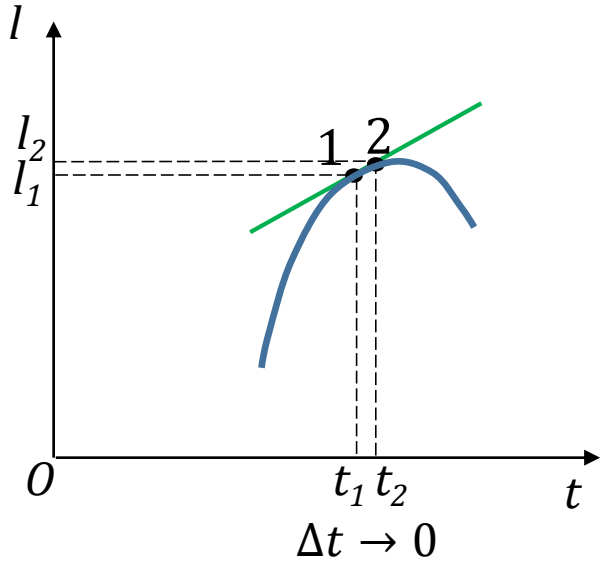
Según se observa en el gráfico, se tiene un tipo de movimiento genérico, para el cual la velocidad media es la pendiente de la recta secante entre los puntos 1 y 2.

Para tener información más precisa del cambio de desplazamiento en función del tiempo, hacemos Δt lo más pequeño posible.

Velocidad instantánea

Por lo tanto, al disminuir el intervalo de tiempo tendremos un instante de tiempo, y los puntos 1 y 2 estarán tan próximos, que casi están solapados; y la recta será tangente a la curva, cuya pendiente nos define la velocidad instantánea en dicho punto.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} \longrightarrow v(t) = \frac{dl}{dt}$$



Hasta acá describimos cómo se recorre la trayectoria en función del tiempo mediante ($l(t)$) y su variación (dl/dt). Sin embargo, esta descripción no establece una dirección en el espacio. Para describir completamente el movimiento necesitamos establecer un sistema de referencia.

El movimiento siempre se describe respecto de un sistema de referencia. Más adelante analizaremos la relación entre las descripciones realizadas desde distintos sistemas de referencia.

Ahora bien, una vez que el observador se sitúa en su marco de referencia, necesita la descripción de la posición del punto; y por eso necesitamos de los sistemas de coordenadas, los cuales se eligen arbitrariamente según la geometría de la trayectoria.

Sistemas de coordenadas cartesianas

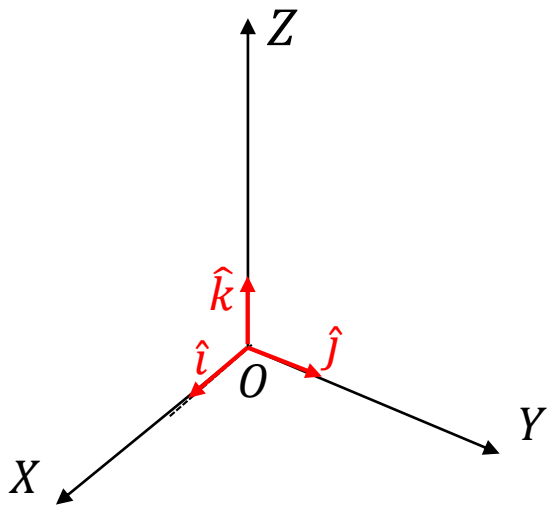
Comenzamos con un sistema de coordenadas cartesianas, cuya base permanece fija respecto del sistema de referencia. Esto simplifica el cálculo de las derivadas.

El espacio tridimensional se define mediante tres ejes fijos mutuamente perpendiculares (*X; Y; Z*) que se intersectan en un origen *O*.

Asociados a estos ejes, definimos una base de vectores unitarios (versores): $\{\hat{\imath}; \hat{\jmath}; \hat{k}\}$ o $(\hat{e}_x;\ \hat{e}_y; \hat{e}_z)$.

Al ser ejes fijos en el espacio, la dirección y el módulo de estos versores no cambian en el tiempo. Por lo tanto, sus derivadas temporales son nulas:

$$\dot{\hat{\imath}} = \dot{\hat{e}}_x = 0 \qquad \dot{\hat{\jmath}} = \dot{\hat{e}}_y = 0 \qquad \dot{\hat{k}} = \dot{\hat{e}}_z = 0$$

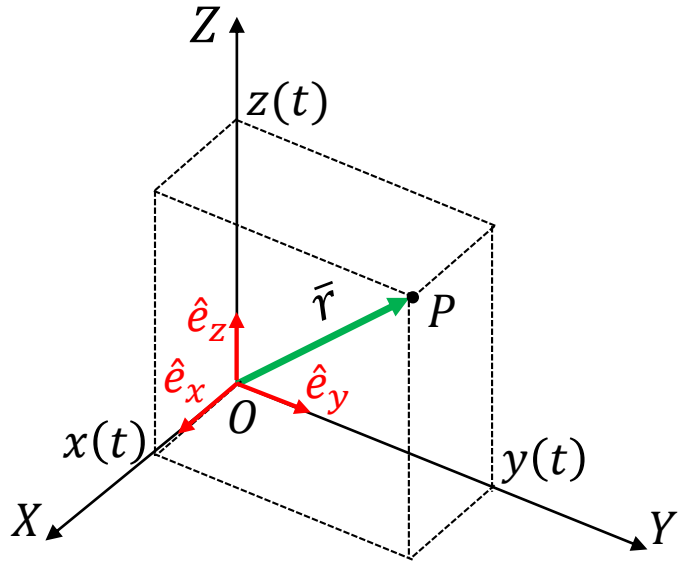


Sistemas de coordenadas cartesianas

La posición de un punto material P, respecto del sistema de referencia adoptado, se expresa mediante un vector $(\bar{r})$, cuyas componentes en la base cartesiana son:

$$\bar{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k} \qquad \text{ó} \qquad \bar{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z$$

Donde $(x; y; z)$ son las coordenadas cartesianas del punto P y, en este sistema, coinciden con las componentes del vector posición $\bar{r}$.



La velocidad instantánea es la derivada primera del vector posición respecto al tiempo.

Como la base cartesiana es fija, sus versores son constantes y la derivada se aplica directamente sobre las componentes del vector posición:

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Sistemas de coordenadas cartesianas

Utilizando la notación de Newton:

$$\bar{v}(t) = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k} \qquad \text{ó} \qquad \bar{v}(t) = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z$$

El módulo de la velocidad (rapidez), será:

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

La aceleración instantánea es la derivada primera del vector velocidad (o segunda del vector posición) respecto al tiempo:

$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \qquad \text{ó} \qquad \bar{a}(t) = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k} \qquad \text{ó} \qquad \bar{a}(t) = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \ddot{z}\hat{e}_z$$

Y el módulo de la aceleración es:

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

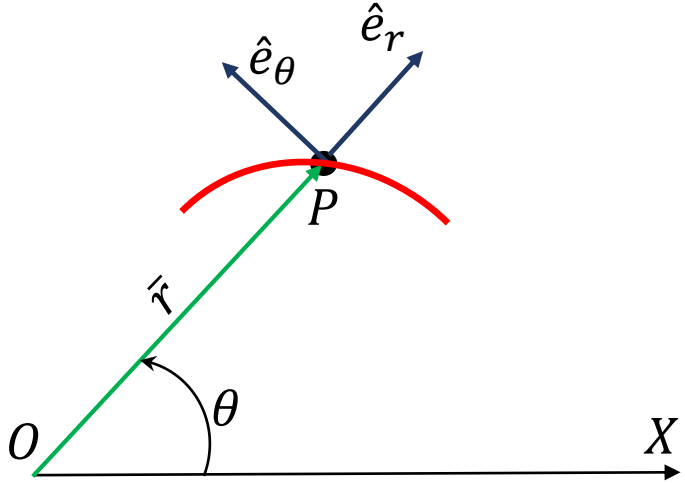
El sistema cartesiano simplifica la derivación porque sus versores son constantes, aunque no siempre resulta el más conveniente cuando la geometría del movimiento es curvilínea.

Sistemas de coordenadas polares

A diferencia de las coordenadas cartesianas, los sistemas de coordenadas que analizaremos a continuación poseen bases móviles, cuyos versores pueden cambiar de dirección con la posición del punto.

Cuando el movimiento se desarrolla en un plano y su geometría está relacionada con un centro fijo, puede resultar conveniente describir la posición mediante coordenadas polares; donde la posición de un punto P en el plano queda determinada por dos coordenadas $(r\,;\theta)$.

Estas coordenadas permiten localizar el punto, pero no representan necesariamente las componentes del vector posición.



- r: distancia radial (escalar) desde el origen fijo O hasta el punto $(r \geq 0)$.
- θ: ángulo formado por el radio vector con el eje de referencia fijo X.

Asociados a estas coordenadas, definimos la base de versores ortogonales:

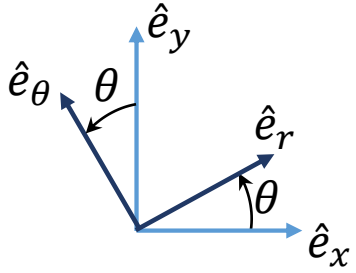
- $\hat{e}_r$ (versor radial): tiene la dirección de la recta que une el origen O con el punto P, y su sentido corresponde al aumento de la coordenada r.
- $\hat{e}_\theta$ (versor transversal): es perpendicular a $\hat{e}_r$ y su sentido corresponde al aumento de la coordenada θ (sentido antihorario).

Sistemas de coordenadas polares

Como la partícula se mueve, el ángulo θ varía en el tiempo, obligando a la base móvil a rotar. Para determinar cómo varían sus versores con el tiempo, los expresamos respecto de la base cartesiana fija $(\hat{e}_x; \hat{e}_y)$.

$$\hat{e}_r = cos\theta\ \hat{e}_x + sen\theta\ \hat{e}_y$$

$$\hat{e}_\theta = -sen\theta\ \hat{e}_x + cos\theta\ \hat{e}_y$$



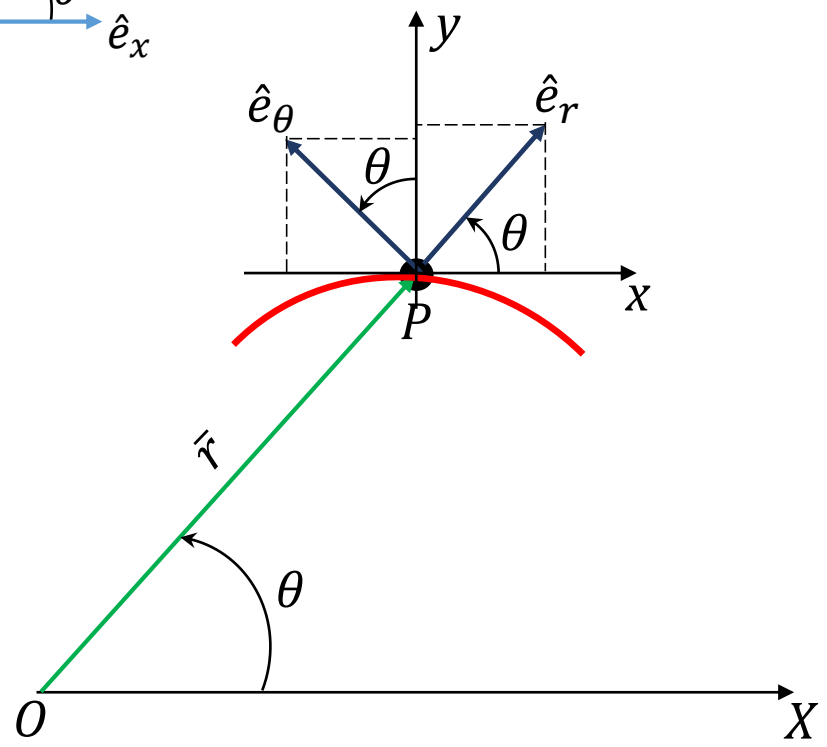
Derivando respecto al tiempo (t) mediante la regla de la cadena es:

$$\dot{\hat{e}}_r = \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \left(-sen\theta\ \dot{\theta}\right)\hat{e}_x + \left(cos\theta\ \dot{\theta}\right)\hat{e}_y$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\left(-sen\theta\ \hat{e}_x + cos\theta\ \hat{e}_y\right) = \boldsymbol{\dot{\theta}\ \hat{e}_\theta}$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \left(-cos\theta\ \dot{\theta}\right)\hat{e}_x + \left(-sen\theta\ \dot{\theta}\right)\hat{e}_y$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\left(cos\theta\ \hat{e}_x + sen\theta\ \hat{e}_y\right) = \boldsymbol{-\dot{\theta}\ \hat{e}_r}$$



Velocidad en coordenadas polares

Las entidades fundamentales de la base móvil son:

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\ \hat{e}_\theta \qquad \text{y} \qquad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\ \hat{e}_r$$

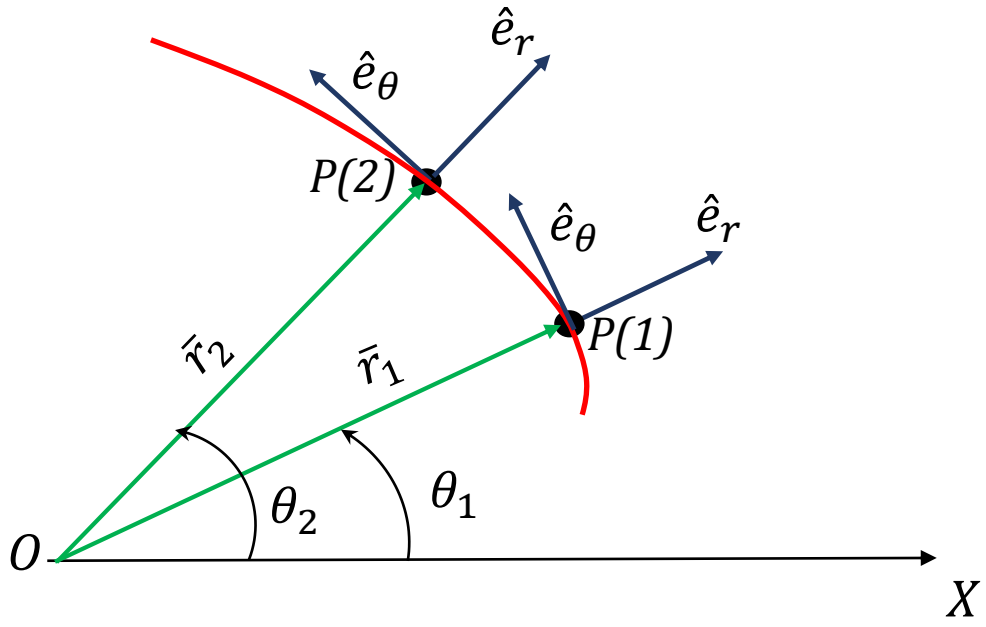
El vector posición de origen O, expresado en componentes de la base polar, queda:

$$\bar{r}(t) = r(t)\ \hat{e}_r + 0\ \hat{e}_\theta$$

La velocidad instantánea es la derivada primera del vector posición respecto al tiempo:

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\ \hat{e}_r + r\ \frac{d\hat{e}_r}{dt}$$

$$\bar{v}(t) = \dot{r}\ \hat{e}_r + r\ \dot{\theta}\ \hat{e}_\theta$$



Partícula *P(1)* representada en coordenadas polares en un instante de tiempo t_1 y *P(2)* un instante posterior de tiempo t_2.

- Velocidad radial ($\dot{r}$): representa la tasa geométrica de alejamiento o acercamiento del punto P respecto del origen O.
- Velocidad transversal ($r\ \dot{\theta}$): representa la rapidez con que el punto P se desplaza perpendicularmente a la dirección radial debido a la variación de θ.

Aceleración en coordenadas polares

Derivamos el vector velocidad respecto del tiempo. Como los versores de la base polar varían con el tiempo, aplicamos la regla del producto:

$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\ \hat{e}_r) + \frac{d}{dt}\left(r\ \dot{\theta}\ \hat{e}_\theta\right)$$

$$\bar{a}(t) = \left(\ddot{r}\ \hat{e}_r + \dot{r}\ \dot{\hat{e}}_r\right) + \left(\dot{r}\ \dot{\theta}\ \hat{e}_\theta + r\ \ddot{\theta}\ \hat{e}_\theta + r\ \dot{\theta}\ \dot{\hat{e}}_\theta\right)$$

Reemplazando las derivadas de los versores por sus equivalencias analíticas:

$$\bar{a}(t) = \left(\ddot{r}\ \hat{e}_r + \dot{r}\ \dot{\theta}\ \hat{e}_\theta\right) + \left(\dot{r}\ \dot{\theta}\ \hat{e}_\theta + r\ \ddot{\theta}\ \hat{e}_\theta - r\ \dot{\theta}^2\ \hat{e}_r\right)$$

Agrupando los términos según las componentes de la base móvil, la aceleración es:

$$\bar{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\ \dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ \ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\ \dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$$

Aceleración en coordenadas polares

El significado físico de cada uno de los términos es:

$\ddot{r}$: variación de la velocidad radial.
$-r\ \dot{\theta}^2$: término centrípeto, dirigido hacia *O*, asociado al cambio de dirección de la base polar.
$r\ \ddot{\theta}$: variación de la velocidad transversal debida a la aceleración angular.
$2\ \dot{r}\ \dot{\theta}$: contribución transversal asociada simultáneamente al movimiento radial y a la rotación de la base polar.

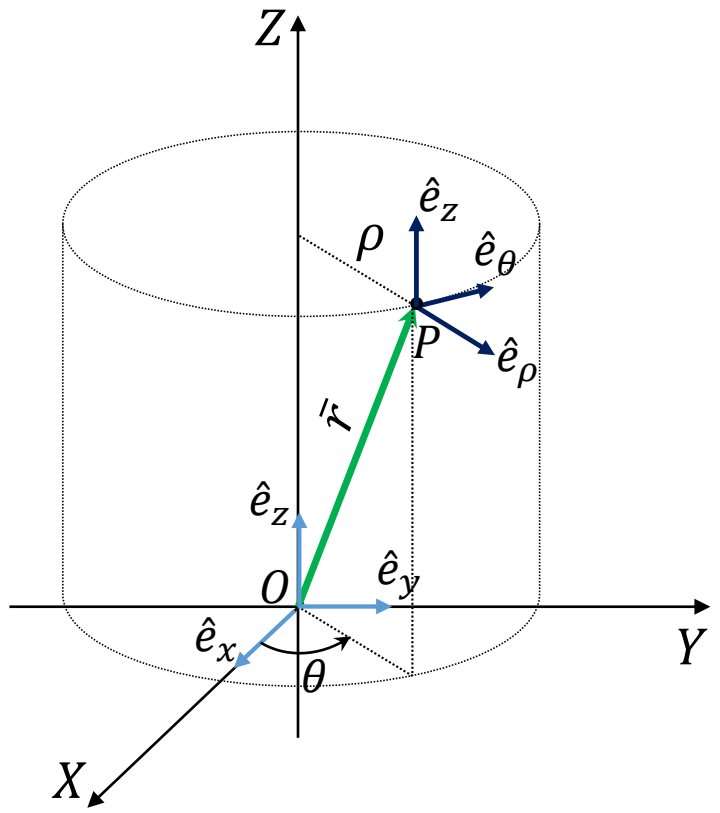
Para entender más a fondo este último término, podemos decir que cuando existe velocidad radial, el vector velocidad radial cambia de dirección debido a la rotación de la base polar, produciendo una variación de velocidad en la dirección transversal.

Al mismo tiempo, la variación del radio modifica el módulo de la velocidad transversal. Ambas contribuciones se suman y dan lugar al término: $2\ \dot{r}\ \dot{\theta}$.

Sistemas de coordenadas cilíndricas

Para localizar un punto P en el espacio utilizando coordenadas cilíndricas, se proyecta dicho punto sobre un plano de referencia (habitualmente el plano cartesiano X-Y) y la posición queda determinada por tres coordenadas:

- ρ : distancia desde el eje Z hasta P.
- θ: el ángulo de giro de esa proyección, medido en sentido antihorario desde el eje fijo X.
- z: la altura real (coordenada lineal) desde el plano X-Y hasta el punto P.



Asociados a este espacio, la base local se compone de tres versores mutuamente perpendiculares:

- $\hat{e}_\rho$: versor radial móvil en un plano paralelo al plano X-Y.
- $\hat{e}_\theta$: versor transversal móvil en un plano paralelo al plano X-Y.
- $\hat{e}_z$: versor axial, paralelo al eje Z; su dirección permanece constante.

Velocidad en coordenadas cilíndricas

En cuanto al comportamiento cinemático de la base, se procede de manera idéntica a las coordenadas polares. Las derivadas temporales de la base móvil son:

$$\dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\theta}.\hat{e}_\theta \quad ; \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}.\hat{e}_\rho \quad ; \quad \dot{\hat{e}}_z = 0$$

El vector posición se expresa mediante una componente radial en el plano *X*-*Y* y una componente axial:

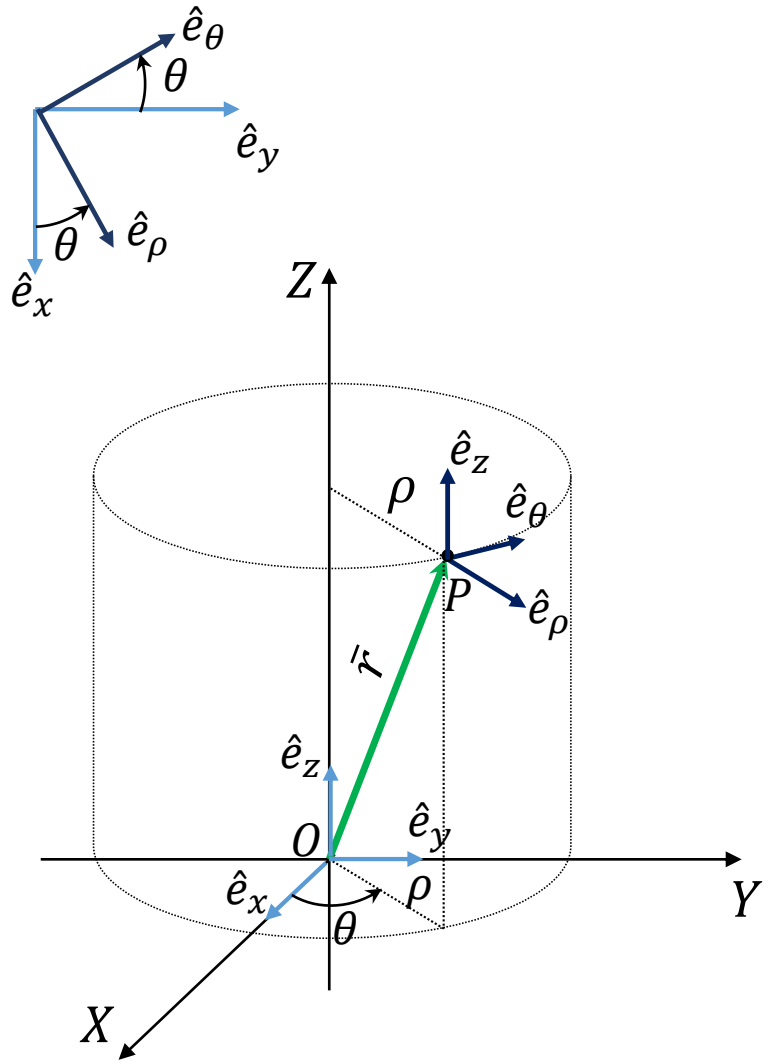
$$\bar{r}(t) = \rho(t).\hat{e}_\rho + z(t).\hat{e}_z$$

Derivamos el vector posición respecto al tiempo aplicando las reglas del producto. Como la derivada del versor $\hat{e}_z$ es cero, el último término se deriva de forma directa:

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\dot{\rho}.\hat{e}_\rho + \rho.\dot{\hat{e}}_\rho\right) + \left(\dot{z}.\hat{e}_z + z.\dot{\hat{e}}_z\right)$$

Sustituyendo $\dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\theta}.\hat{e}_\theta$ y $\dot{\hat{e}}_z = 0$ es:

$$\bar{v} = \dot{\rho}.\hat{e}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\hat{e}_\theta + \dot{z}.\hat{e}_z$$



Aceleración en coordenadas cilíndricas

- Componente radial ($\dot{\rho}$): rapidez con que aumenta o disminuye la distancia al eje Z.
- Componente transversal ($\rho.\dot{\theta}$): debida a la variación de la coordenada angular θ.
- Componente axial ($\dot{z}$): velocidad de ascenso o descenso vertical.

Derivando nuevamente el vector velocidad, el bloque plano nos devuelve exactamente las mismas componentes de la aceleración polar, sumando simplemente la aceleración lineal directa sobre el eje vertical:

$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}.\hat{e}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\hat{e}_\theta\right) + \frac{d}{dt}(\dot{z}.\hat{e}_z)$$

$$\bar{a}(t) = \left(\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2\right).\hat{e}_\rho + \left(\rho.\ddot{\theta} + 2.\dot{\rho}.\dot{\theta}\right).\hat{e}_\theta + \ddot{z}.\hat{e}_z$$

En el plano *X-Y*, la aceleración conserva la misma forma obtenida en coordenadas polares, incorporándose en la dirección axial el término ($\ddot{z}.\hat{e}_z$).

Sistemas de coordenadas cilíndricas

Ejemplo 1:
Un seguidor se desplaza sobre una superficie cilíndrica de radio ρ = 0,5 m. Su movimiento está definido por:

- $\theta = 2.t$ (giro azimutal constante, en rad/s).
- $z = 0{,}1.t^2$ (ascenso vertical, en m).

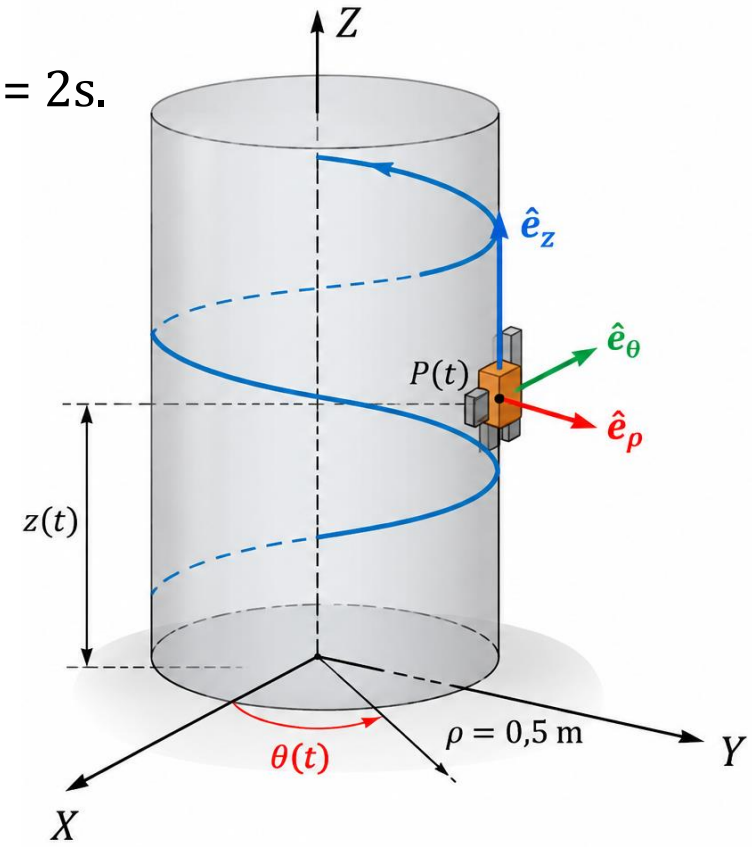
Se pide determinar el vector velocidad y aceleración en el instante : t = 2s.

Datos:

- $\rho = 0{,}5\ m;\ \ \dot{\rho} = 0;\ \ \ddot{\rho} = 0.$
- $\theta = 2\ (2) = 4rad;\ \ \dot{\theta} = 2\ rad/s;\ \ \ddot{\theta} = 0.$
- $z = 0{,}1(2^2) = 0{,}4m;\ \ \dot{z} = 0{,}2(2) = 0{,}4m/s;\ \ \ddot{z} = 0{,}2m/s^2.$

Para el cálculo de la velocidad ($\bar{v}$), en coordenadas cilíndricas es:

$$\bar{v} = \dot{\rho}.\hat{e}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\hat{e}_\theta + \dot{z}.\hat{e}_z$$



Sistemas de coordenadas cilíndricas

- $v_\rho = 0.$
- $v_\theta = 0{,}5.2 = 1\ m/s.$
- $v_z = 0{,}4\ m/s.$

$$\bar{v} = 0.\hat{e}_\rho + 1.\hat{e}_\theta + 0{,}4.\hat{e}_z \quad (m/s)$$

Para el cálculo de la aceleración ($\bar{a}$), en coordenadas cilíndricas es:

$$\bar{a}(t) = \left(\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2\right).\hat{e}_\rho + \left(\rho.\ddot{\theta} + 2.\dot{\rho}.\dot{\theta}\right).\hat{e}_\theta + \ddot{z}.\hat{e}_z$$

- Componente radial (a_ρ): $\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2 = 0 - 0{,}5.(2^2) = -2\ m/s^2.$
- Componente acimutal (a_θ): $\rho.\ddot{\theta} + 2.\dot{\rho}.\dot{\theta} = 0{,}5.0 + 2.0.2 = 0\ m/s^2.$
- Componente vertical (a_z): $\ddot{z} = 0{,}2\ m/s^2.$

$$\bar{a}(t) = -2.\hat{e}_\rho + 0.\hat{e}_\theta + 0{,}2.\hat{e}_z \quad (m/s^2)$$



Sistemas de coordenadas esféricas

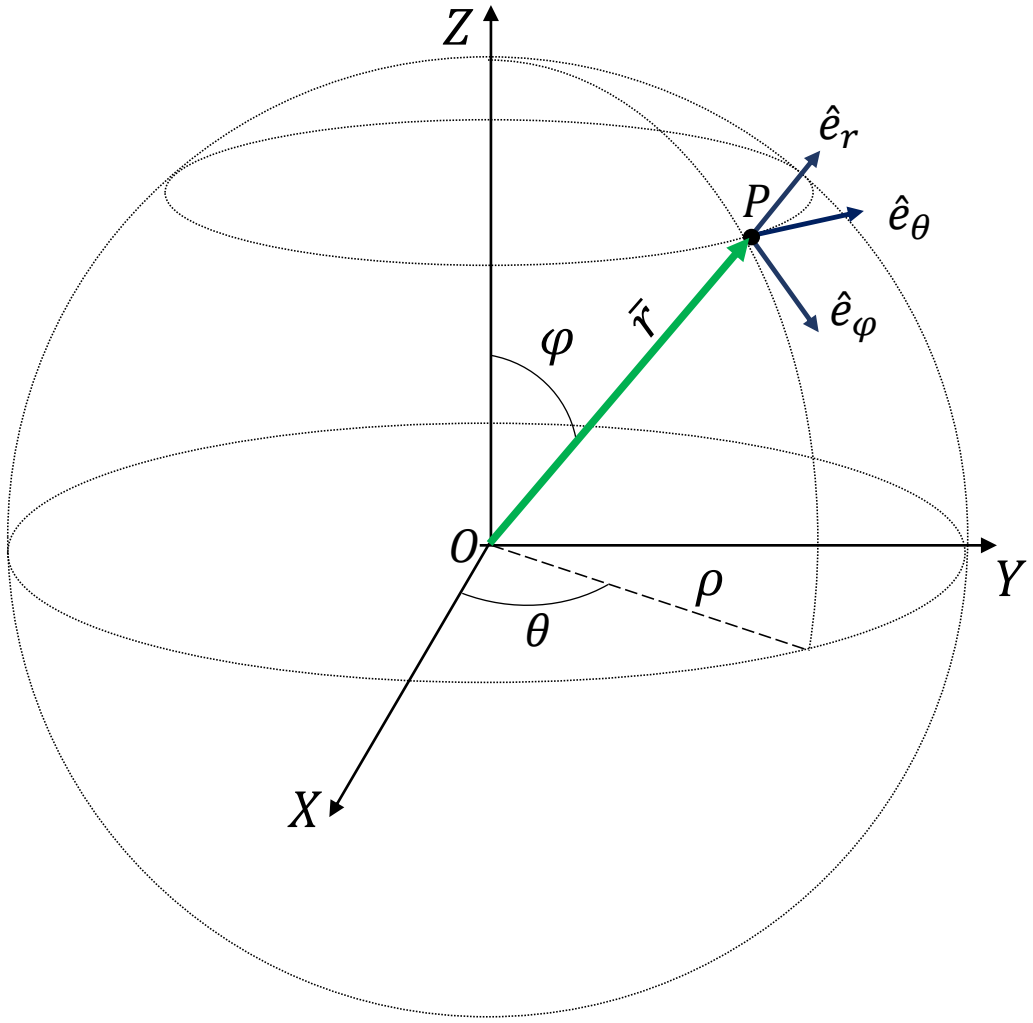
Este sistema tridimensional es ideal para analizar problemas con simetría respecto a un punto central (un origen fijo O), como el movimiento de satélites, péndulos esféricos, brazos robóticos articulados o problemas de balística.

Para definir las coordenadas de un punto P en el espacio ($\Re^3$), usamos tres variables independientes:

- r: La distancia radial directa (escalar) desde el origen fijo O hasta el punto P ($r \geq 0$).

- φ : El ángulo polar o cenital: mide la desviación respecto al eje vertical fijo Z ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

- θ : El ángulo acimutal: es el mismo ángulo de giro de polares/cilíndricas, medido en el plano X-Y desde el eje fijo X ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).



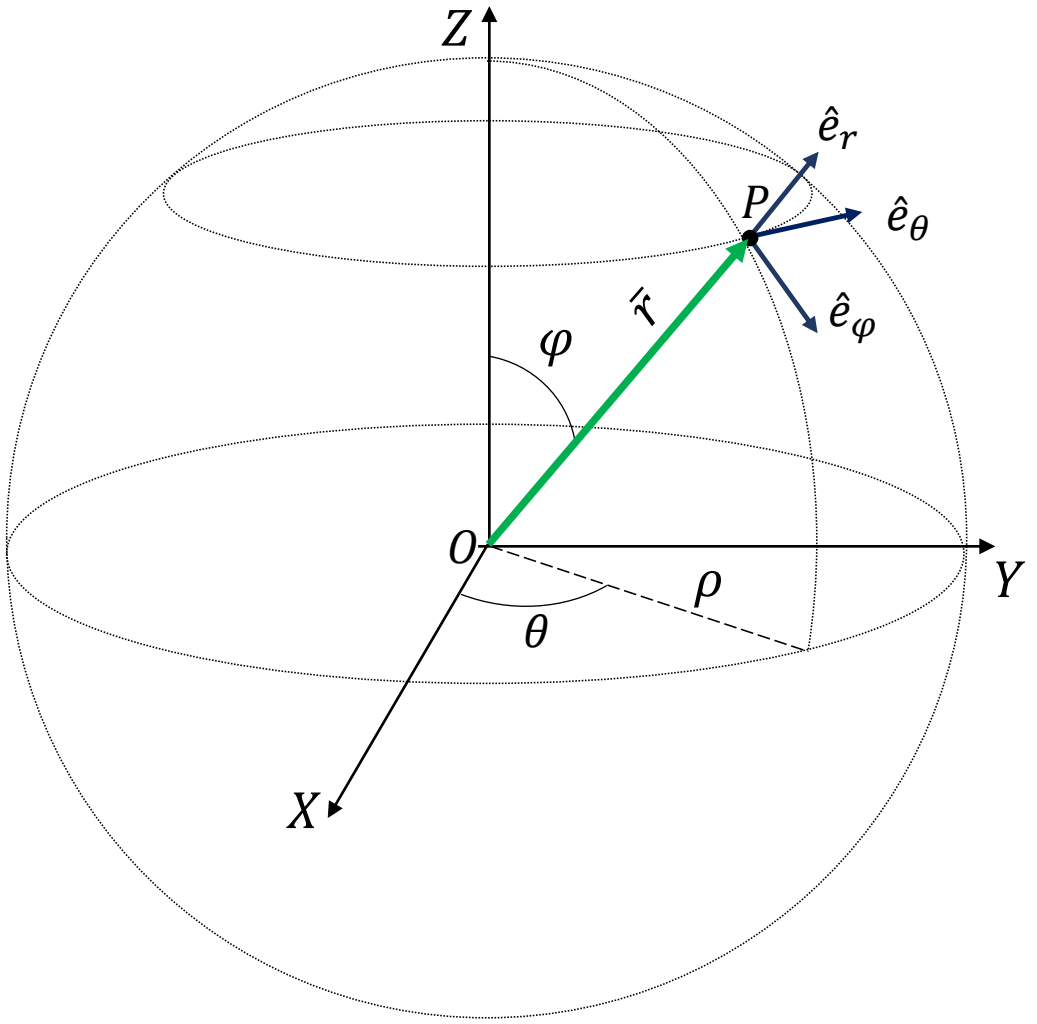
Sistemas de coordenadas esféricas

Asociados a estas tres coordenadas, definimos una base ortogonal de versores móviles. Acá los tres versores cambian de dirección en el tiempo, lo que significa que las tres derivadas temporales serán no nulas:

$\hat{e}_r$: versor radial: apunta en la dirección de la recta que une O con P (hacia afuera).

$\hat{e}_\theta$: versor acimutal: es horizontal, perpendicular al plano vertical anterior, y apunta en el sentido de rotación antihorario alrededor del eje Z (igual al de coordenadas polares).

$\hat{e}_\varphi$ versor polar o cenital: es perpendicular a $\hat{e}_r$, contenido en el plano vertical que pasa por Z y P, y apunta en la dirección en que aumenta el ángulo φ en sentido horario.



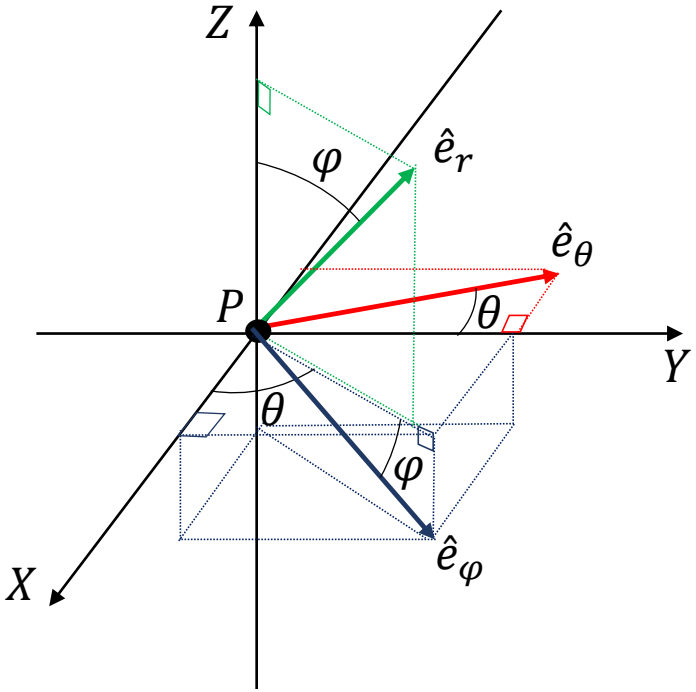
Sistemas de coordenadas esféricas

Las componentes de los versores en coordenadas cartesianas son:

$$\hat{e}_r = sen\varphi.cos\theta.\hat{e}_x + sen\varphi.sen\theta.\hat{e}_y + cos\varphi.\hat{e}_z$$

$$\hat{e}_\varphi = cos\varphi.cos\theta.\hat{e}_x + cos\varphi.sen\theta.\hat{e}_y - sen\varphi.\hat{e}_z$$

$$\hat{e}_\theta = -sen\theta.\hat{e}_x + cos\theta.\hat{e}_y$$



Para derivar respecto al tiempo, recordamos que los vectores cartesianos son fijos:

$$\dot{\hat{e}}_x = 0 \qquad \dot{\hat{e}}_y = 0 \qquad \dot{\hat{e}}_z = 0$$

La derivada del versor radial $\dot{\hat{e}}_r$, componente a componente es:

Componente en X: $$\frac{d}{dt}(sen\varphi.cos\theta) = \left(\dot{\varphi}.cos\varphi.cos\theta - \dot{\theta}.sen\varphi.sen\theta\right).\hat{e}_x$$

Componente en Y: $$\frac{d}{dt}(sen\varphi.sen\theta) = \left(\dot{\varphi}.cos\varphi.sen\theta + \dot{\theta}.sen\varphi.cos\theta\right).\hat{e}_y$$

Componente en Z: $$\frac{d}{dt}(cos\varphi\ ) = (-\dot{\varphi}.sen\varphi).\hat{e}_z$$

Sistemas de coordenadas esféricas

Agrupando términos que tienen $\dot{\varphi}$ y los que tienen $\dot{\theta}$, es:

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\varphi}.\underbrace{\left(cos\varphi.cos\theta.\hat{e}_x + cos\varphi.sen\theta.\hat{e}_y - sen\varphi.\hat{e}_z\right)}_{\hat{e}_\varphi} + \dot{\theta}.sen\varphi.\underbrace{\left(-sen\theta.\hat{e}_x + cos\theta.\hat{e}_y\right)}_{\hat{e}_\theta}$$

Y llegamos a:

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\varphi}.\hat{e}_\varphi + \dot{\theta}.sen\varphi.\hat{e}_\theta$$

La derivada del versor cenital $\dot{\hat{e}}_\varphi$, componente a componente es:

Componente en X: $$\frac{d}{dt}(cos\varphi.cos\theta) = \left(-\dot{\varphi}.sen\varphi.cos\theta - \dot{\theta}.cos\varphi.sen\theta\right).\hat{e}_x$$

Componente en Y: $$\frac{d}{dt}(cos\varphi.sen\theta) = \left(-\dot{\varphi}.sen\varphi.sen\theta + \dot{\theta}.cos\varphi.cos\theta\right).\hat{e}_y$$

Componente en Z: $$\frac{d}{dt}(-sen\varphi\ ) = (-\dot{\varphi}.cos\varphi).\hat{e}_z$$

Sistemas de coordenadas esféricas

Agrupando términos que tienen $-\dot{\varphi}$ y los que tienen $\dot{\theta}$, es:

$$\dot{\hat{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}.\underbrace{\left(sen\varphi.cos\theta.\hat{e}_x + sen\varphi.sen\theta.\hat{e}_y + cos\varphi.\hat{e}_z\right)}_{\hat{e}_r} + \dot{\theta}.cos\varphi.\underbrace{\left(-sen\theta.\hat{e}_x + cos\theta.\hat{e}_y\right)}_{\hat{e}_\theta}$$

Y llegamos a:

$$\dot{\hat{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}.\hat{e}_r + \dot{\theta}.cos\varphi.\hat{e}_\theta$$

La derivada del versor acimutal $\dot{\hat{e}}_\theta$, componente a componente es:

Componente en X: $$\frac{d}{dt}(-sen\theta) = \left(-\dot{\theta}.cos\theta\right).\hat{e}_x$$

Componente en Y: $$\frac{d}{dt}(cos\theta) = \left(-\dot{\theta}.sen\theta\right).\hat{e}_y$$

El versor azimutal no tiene componente en la dirección Z.

Sistemas de coordenadas esféricas

Agrupando términos que tienen $-\dot{\theta}$, es:

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}.\left(cos\theta.\hat{e}_x + sen\theta.\hat{e}_y\right)$$

De la ecuación de los versores: $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\varphi$; factorizando ambas expresiones, es:

$$\hat{e}_r = sen\varphi.\left(cos\theta.\hat{e}_x + sen\theta.\hat{e}_y\right) + cos\varphi.\hat{e}_z \quad ; \quad \hat{e}_\varphi = cos\varphi.\left(cos\theta.\hat{e}_x + sen\theta.\hat{e}_y\right) - sen\varphi.\hat{e}_z$$

Multiplicamos la primera ecuación por $sen\varphi$, la segunda ecuación por $cos\varphi$ y las sumamos:

$$\begin{aligned} sen\varphi.\hat{e}_r &= sen^2\varphi.\left(cos\theta.\hat{e}_x + sen\theta.\hat{e}_y\right) + sen\varphi.cos\varphi.\hat{e}_z \\ + \\ cos\varphi.\hat{e}_\varphi &= cos^2\varphi.\left(cos\theta.\hat{e}_x + sen\theta.\hat{e}_y\right) - sen\varphi.cos\varphi.\hat{e}_z \end{aligned}$$

$$sen\varphi.\hat{e}_r + cos\varphi.\hat{e}_\varphi = \left(cos\theta.\hat{e}_x + sen\theta.\hat{e}_y\right)$$

Entonces queda:

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}.sen\varphi.\hat{e}_r - \dot{\theta}.cos\varphi.\hat{e}_\varphi$$

Velocidad en coordenadas esféricas

Para determinar la velocidad, partimos del vector de posición $\bar{r} = r.\hat{e}_r$ y lo derivamos respecto al tiempo:

$$\bar{v} = \frac{d}{dt}(r.\hat{e}_r) = \dot{r}.\hat{e}_r + r.\dot{\hat{e}}_r$$

Sustituyendo el valor de la derivada de $\dot{\hat{e}}_r$ es:

$$\bar{v} = \dot{r}.\hat{e}_r + r.\left(\dot{\varphi}.\hat{e}_\varphi + \dot{\theta}.sen\varphi.\hat{e}_\theta\right)$$

$$\bar{v} = \dot{r}.\hat{e}_r + \left(r.\dot{\theta}.sen\varphi\right).\hat{e}_\theta + (r.\dot{\varphi}).\hat{e}_\varphi$$

Donde:

- $\dot{r}$: es la velocidad radial (v_r).
- $r.\dot{\theta}.sen\varphi$: es la velocidad acimutal (v_θ).
- $r.\dot{\varphi}$: es la velocidad polar o cenital (v_φ).

Aceleración en coordenadas esféricas

Para determinar la aceleración, derivamos la velocidad respecto al tiempo:

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}.\hat{e}_r + \left(r.\dot{\theta}.sen\varphi\right).\hat{e}_\theta + (r.\dot{\varphi}).\hat{e}_\varphi\right]$$

Al aplicar la derivada a cada término y sustituyendo $\dot{\hat{e}}_r; \dot{\hat{e}}_\theta; \dot{\hat{e}}_\varphi$ por sus correspondientes valores ya calculados, es:

- Componente radial ($\hat{e}_r$) de la aceleración (a_r):

$$a_r = \ddot{r} - r.\dot{\varphi}^2 - r.\dot{\theta}^2.sen^2\varphi$$

- Componente acimutal ($\hat{e}_\theta$) de la aceleración (a_θ):

$$a_\theta = r.\ddot{\theta}.sen\varphi + 2.\dot{r}.\dot{\theta}.sen\varphi + 2.r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.cos\varphi$$

- Componente polar o cenital ($\hat{e}_\varphi$) de la aceleración (a_φ):

$$a_\varphi = r.\ddot{\varphi} + 2.\dot{r}.\dot{\varphi} - r.\dot{\theta}^2.sen\varphi.cos\varphi$$

Sistemas de coordenadas esféricas

Ejemplo 2:
Un sensor está montado en el extremo de un brazo robótico que realiza un movimiento esférico. En un instante dado, la posición del sensor se define por:

- r = 2m (radio constante).
- $\theta = \pi/2$ rad (ángulo acimutal, variando a $\dot{\theta} = 0{,}5\ rad/s$ y $\ddot{\theta} = 0$).
- $\varphi = \pi/4$ rad (ángulo polar o de elevación, variando $\dot{\varphi} = 0{,}2\ rad/s$ y $\ddot{\varphi} = 0{,}1\ rad/s^2$).

Se pide determinar:

a) El vector velocidad $\bar{v}$.
b) El vector aceleración $\bar{a}$ en base: $\{\hat{e}_r; \hat{e}_\theta; \hat{e}_\varphi\}$

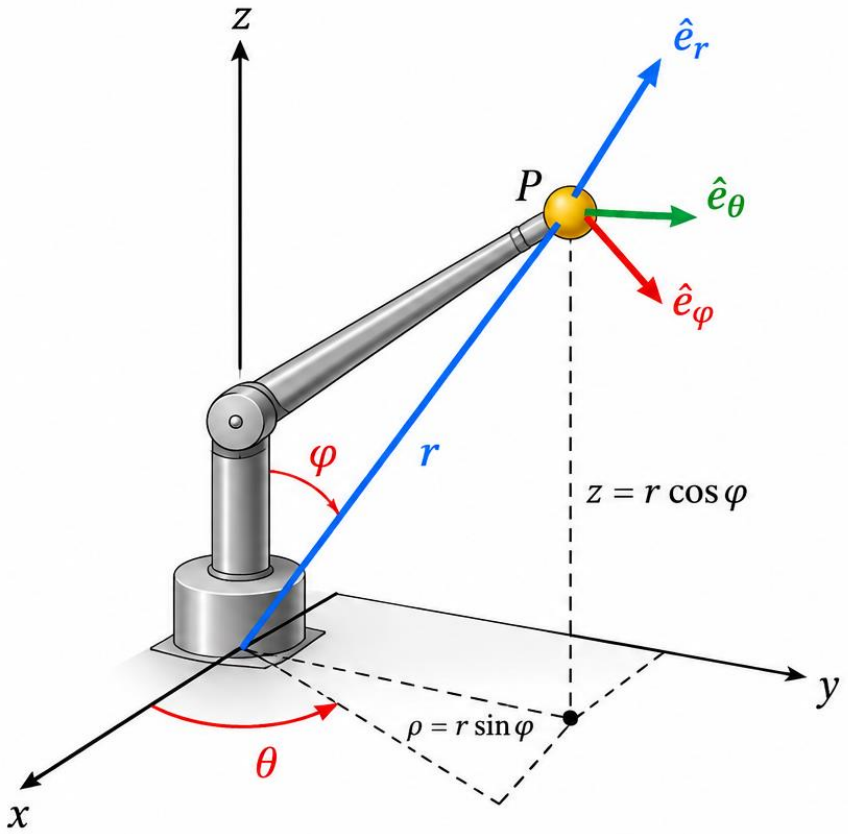
a) La velocidad en coordenadas esféricas es:

$$\bar{v} = \dot{r}.\hat{e}_r + \left(r.\dot{\theta}.sen\varphi\right).\hat{e}_\theta + (r.\dot{\varphi}).\hat{e}_\varphi$$

Sustituyendo los valores y teniendo en cuenta que $\dot{r} = 0$:

- Componente radial (v_r):

$$v_r = \dot{r}.\hat{e}_r = 0$$



Sistemas de coordenadas esféricas

- Componente acimutal (v_θ):

$$v_\theta = r.\dot{\theta}.sen\varphi$$

$$v_\theta = 2.0{,}5.sen\left(\pi/4\right) = 0{,}707 \text{ m}/s$$

- Componente cenital (v_φ):

$$v_\varphi = r.\dot{\varphi}$$

$$v_\varphi = 2.0{,}2 = 0{,}4 \text{ m}/s$$

$$\bar{v} = 0.\hat{e}_r + 0{,}707.\hat{e}_\theta + 0{,}4.\hat{e}_\varphi \text{ m}/s$$

b) Las componentes de la aceleración en coordenadas esféricas, son:

- Componente radial o centrípeta (a_r):

$$a_r = \ddot{r} - r.\dot{\varphi}^2 - r.\dot{\theta}^2.sen^2\varphi = -r.\dot{\varphi}^2 - r.\dot{\theta}^2.sen^2\varphi$$

Sistemas de coordenadas esféricas

$$a_r = -(2.0{,}2^2) - \left(2.0{,}5^2.sen^2\left({}^{\pi}/_{4}\right)\right) = -0{,}33\ {}^{\mathrm{m}}/_{s^2}$$

- Componente acimutal o transversal (a_θ):

$$a_\theta = r.\ddot{\theta}.sen\varphi + 2.\dot{r}.\dot{\theta}.sen\varphi + 2.r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.cos\varphi$$

$$a_\theta = \left(2.0{,}2.0{,}5.cos\left({}^{\pi}/_{4}\right)\right) = 0{,}141\ {}^{\mathrm{m}}/_{s^2}$$

- Componente cenital o elevación: es a aceleración angular (a_φ):

$$a_\varphi = r.\ddot{\varphi} + 2.\dot{r}.\dot{\varphi} - r.\dot{\theta}^2.sen\varphi.cos\varphi$$

$$a_\varphi = (2.0{,}1) - \left(2.0{,}5^2.sen\left({}^{\pi}/_{4}\right).cos\left({}^{\pi}/_{4}\right)\right) = -0{,}05\ {}^{\mathrm{m}}/_{s^2}$$

Finalmente, el vector aceleración en componentes de base esférica es:

$$\bar{a} = -0{,}33.\hat{e}_r + 0{,}141.\hat{e}_\theta - 0{,}05.\hat{e}_\varphi\ \ {}^{\mathrm{m}}/_{s^2}$$

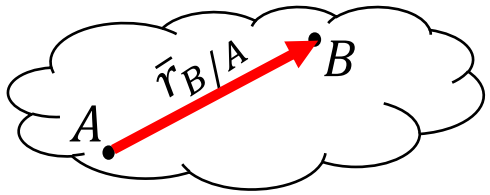
Del espacio vectorial al espacio afín

Al estudiar los sistemas de coordenadas, la partícula se modeló como un punto material. Fue suficiente describir su posición respecto de un sistema de referencia y representar su movimiento mediante magnitudes vectoriales como la velocidad y la aceleración.

Cuando analizamos el movimiento de un cuerpo rígido, en cambio, ya no basta con describir únicamente vectores. Es necesario representar las posiciones que ocupan los distintos puntos del cuerpo, ya que es necesario describir simultáneamente la posición del cuerpo y la de todos sus puntos.

Las posiciones constituyen un conjunto de puntos, mientras que las diferencias entre posiciones se representan mediante vectores.

Esta distinción conduce naturalmente al concepto de espacio afín, que proporciona el marco geométrico adecuado para describir la posición de los cuerpos rígidos. En este marco sólo tienen sentido determinadas operaciones entre puntos y vectores, las cuales se estudiarán a continuación.



Espacio Afín

Un espacio vectorial está formado por vectores. Los puntos, que representan posiciones, no pertenecen al espacio vectorial.

Un espacio afín incorpora esos puntos como objetos geométricos y los asocia a un espacio vectorial. Los vectores permiten relacionar las posiciones de los puntos.

- Un punto representa una posición del espacio.
- Un vector puede representar el desplazamiento entre los puntos o una magnitud vectorial (velocidad, aceleración, fuerza, etc.).

Si A y B son dos puntos, $\bar{r}_{B/A}$, representa el desplazamiento desde A hasta B; es decir:

$$\bar{r}_{B/A} = B - A$$

En el espacio afín sí tiene sentido sumar un punto con un vector: $B = A + \bar{r}_{B/A}$. En un espacio afín:

- La diferencia entre dos puntos es un vector.
- Un punto puede trasladarse mediante un vector para obtener otro punto.
- La suma de dos puntos, $A + B$, no tiene significado geométrico.

Transformaciones lineales y afines

Hasta ahora se estudiaron transformaciones lineales, que permiten relacionar las componentes de vectores expresadas en distintas bases y describir transformaciones que mantienen fijo el origen.

Una transformación lineal tiene la forma:

$$\bar{x}' = \mathbf{A}.\,\bar{x}$$

y posee una característica fundamental: El origen permanece fijo.

Por esta razón, las transformaciones lineales permiten describir, entre otras operaciones, rotaciones y cambios de base, manteniendo fijo el origen.

Por lo tanto, para describir el movimiento completo de un cuerpo rígido es necesario incorporar una traslación. Esto conduce al concepto de transformación afín, cuya forma es:

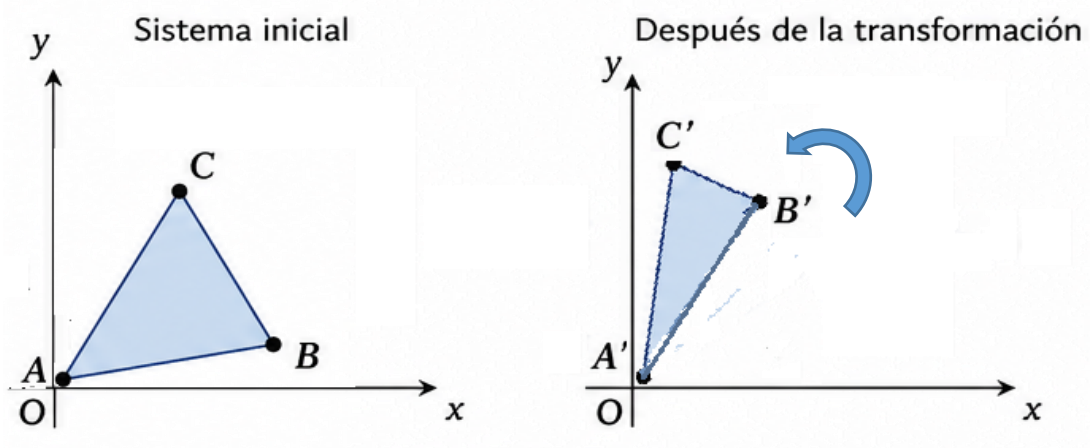
$$\bar{x}' = \mathbf{R}.\,\bar{x} + \bar{d}$$

Donde:

- **R**: representa una rotación (transformación lineal),
- $\bar{d}$: representa una traslación.

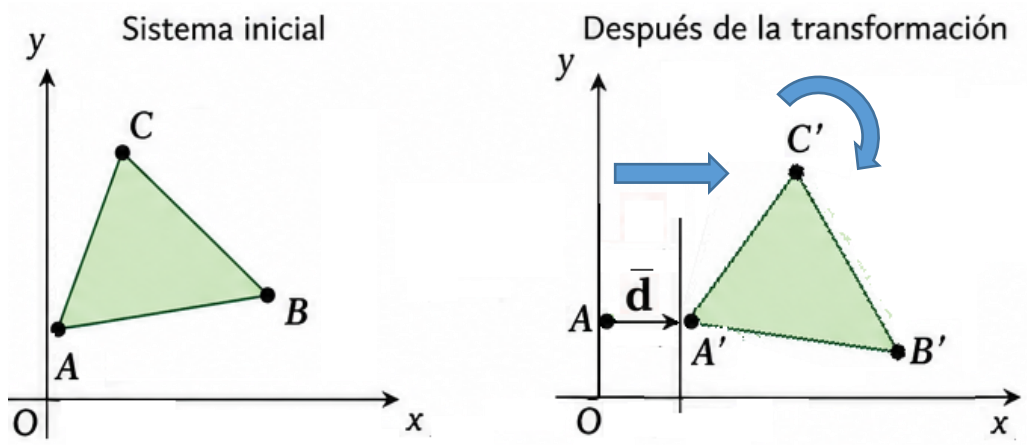
Transformaciones lineales y afines

En general, una transformación afín se obtiene al combinar una transformación lineal con una traslación.



En la transformación lineal el origen permanece fijo. Las transformaciones lineales representan rotaciones y otras aplicaciones lineales, pero no incluyen traslaciones.

$$\bar{x}' = \mathbf{A}.\bar{x}$$



La transformación afín combina una transformación lineal con una traslación. En el caso de un cuerpo rígido, la transformación afín combina una rotación con una traslación, modificando su posición y su orientación respecto del sistema de referencia.

$$\bar{x}' = \bar{d} + \mathbf{R}.\bar{x}$$

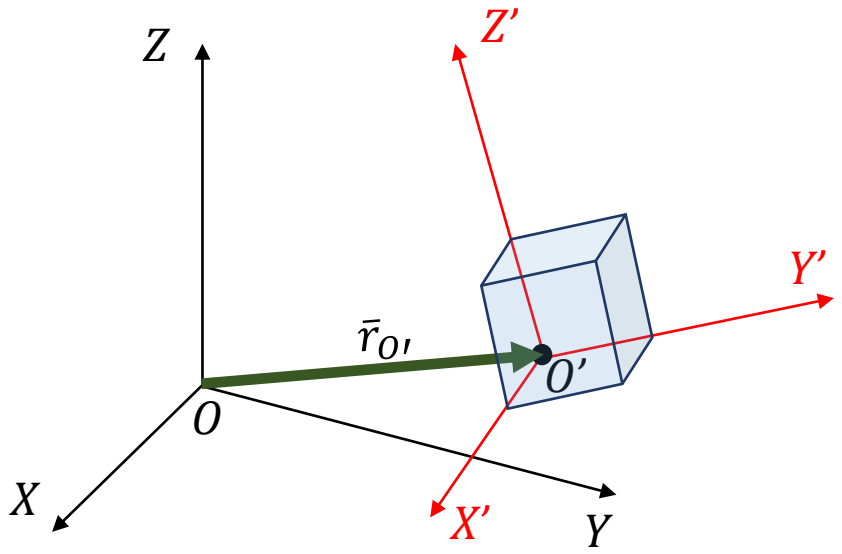
Cuerpo rígido

Un cuerpo rígido puede modelarse como un conjunto continuo de puntos materiales. En principio, para determinar su configuración, es decir, su posición y orientación en el espacio en un instante determinado, sería necesario conocer la posición de cada uno de sus puntos.

En un cuerpo rígido las distancias entre todos sus puntos permanecen constantes durante el movimiento.

Esta condición reduce el número de parámetros independientes (grados de libertad) a seis en el espacio tridimensional:

- Tres traslaciones, correspondientes al desplazamiento del cuerpo según los ejes *X*, *Y*, *Z*.
- Tres rotaciones, que determinan la orientación del cuerpo en el espacio.



Cuerpo rígido

Por lo tanto, la configuración de un cuerpo rígido queda completamente determinada por la posición $\bar{r}_O$, del origen O' de un sistema de coordenadas solidario al cuerpo y por la orientación de dicho sistema.

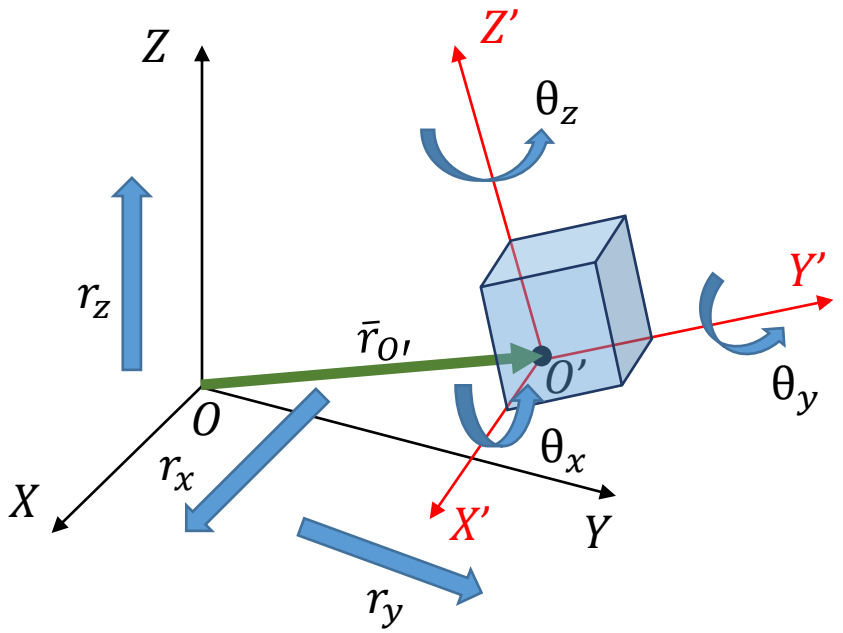
Matemáticamente, el cambio de una configuración a otra puede representarse mediante una transformación afín, compuesta por una traslación y una rotación.

Posición:

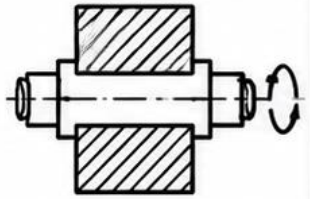
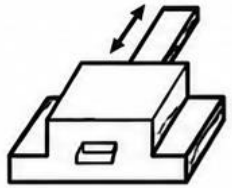
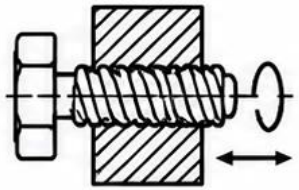
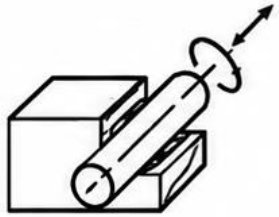
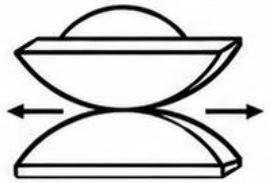
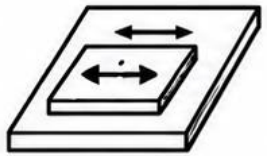
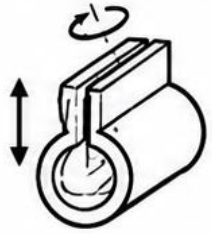
- r_x: componente del vector posición $\bar{r}_O$, debida a la traslación según X.
- r_y: componente del vector posición $\bar{r}_O$, debida a la traslación según Y.
- r_z: componente del vector posición $\bar{r}_O$, debida a la traslación según Z.

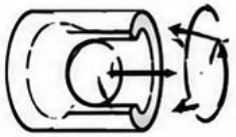
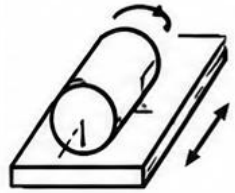
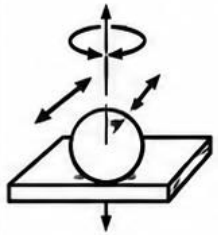
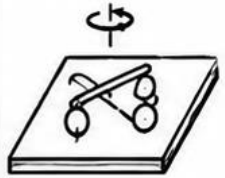
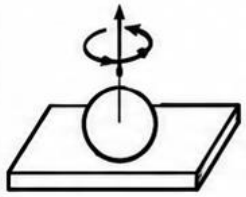
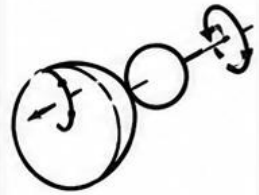
Orientación:

- θ_x : rotación alrededor del eje X.
- θ_y : rotación alrededor del eje Y.
- θ_z : rotación alrededor del eje Z.



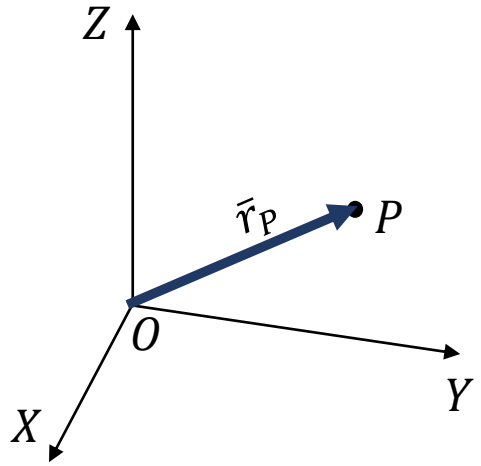
Cuerpo rígido

Grado de libertad	Esquemas, nombres y símbolos de pares cinemáticos		
I	 Par de revolución *R*	 Par prismático *P*	 Par helicoidal *H*
II	 Par cilíndrico *C*	 Par esférico ranurado	 Par de leva *L*
III	 Par esférico *E*	 Par plano *Pl*	 Par cilíndrico ranurado

Grado de libertad	Esquemas, nombres y símbolos de pares cinemáticos			
IV	 Par esfera cilindro *Ec*	 Par plano cilindro *Pc*	 Contacto bipuntual	 Contacto bipuntual
V	 Par esfera plano *Ep*	 Par esfera *Ee*		

Configuración de un cuerpo rígido

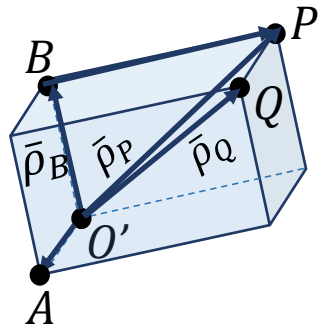
En cinemática de la partícula hay un único punto material P y, una vez definido el origen de un sistema de coordenadas fijo O, tendremos: $\bar{r}_P = \overline{OP}$.



En el cuerpo rígido aparecen muchos puntos: O' (origen del sistema móvil solidario al cuerpo), P, Q, A, B; todos pertenecen al mismo sólido y entre ellos existen relaciones geométricas permanentes: $\overline{O'P}; \overline{O'Q}; \overline{BP}$ …, ya no alcanza con describir el movimiento mediante el vector posición de un único punto.

Es necesario distinguir entre puntos y vectores; los puntos representan posiciones y poseen identidad propia, mientras que los vectores representan desplazamientos entre puntos. En el espacio afín, un punto puede trasladarse mediante un vector para obtener otro punto; por lo tanto, para dos puntos del sólido rígido podemos escribir:

$$P = O' + \bar{\rho}_P$$



Donde:

- O': punto perteneciente al sólido rígido.
- P: otro punto que también pertenece al sólido rígido.

Configuración de un cuerpo rígido

Para describir matemáticamente la configuración del cuerpo rígido se consideran dos sistemas de referencia: un sistema fijo O, X, Y, Z y un sistema móvil O', X', Y', Z', solidario al cuerpo.

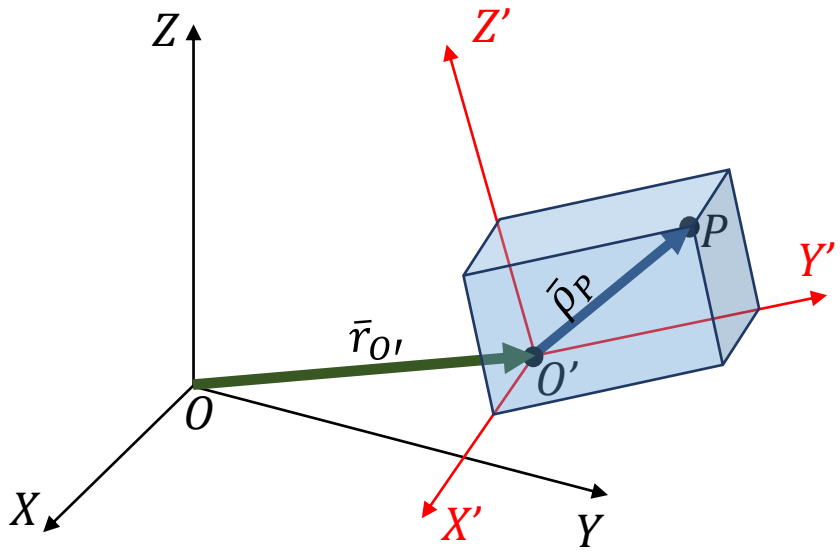
El vector $\bar{\rho}_P$, que relaciona O' con P, está expresado en el sistema móvil. Para determinar la posición de P respecto del sistema fijo, debemos expresarlo en la base fija mediante la matriz de rotación **R**.

$$\bar{r}_P = \bar{r}_{O'} + \mathbf{R}.\bar{\rho}_P$$

$$\boxed{\bar{r}_P = \bar{r}_{O'} + \bar{r}_{P/O'}}$$

Donde:

- $\bar{r}_{O'}$: vector posición del origen O' del sistema móvil; determina la traslación del cuerpo.
- $\bar{\rho}_P$: vector constante que une el origen O' con el punto P en el sistema móvil.
- **R**: matriz de rotación que permite expresar en la base fija las componentes de un vector expresado en la base móvil.



Esta expresión constituye la *ecuación de configuración del cuerpo rígido*, pues permite determinar la posición de cualquiera de sus puntos a partir de la posición del origen O', dada por $\bar{r}_{O'}$, y de la orientación del sistema móvil, dada por **R**.

Propiedad de la matriz de rotación

Como la rotación conserva longitudes y ángulos, **R** es una matriz ortogonal.

Por lo tanto, recordemos que una matriz ortogonal cumple con la siguiente propiedad:

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

En la siguiente sección se derivará la identidad anterior para obtener una expresión para la derivada temporal de la matriz de rotación e introducir el concepto de velocidad angular.

Como ejemplo, para una rotación alrededor del eje *Z*, la matriz de rotación es:

$$\mathbf{R_z}(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación: Verificar que: $\mathbf{R_z}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R_z} = \mathbf{I}$

Velocidad de un punto del cuerpo rígido

Durante el movimiento, la posición del origen O' y la orientación del sistema móvil cambian con el tiempo, mientras que el vector $\bar{\rho}_P$ permanece constante en el sistema móvil. Por lo tanto, la ecuación de configuración pasa a depender explícitamente del tiempo así:

$$\bar{r}_P(t) = \bar{r}_{O'}(t) + \mathbf{R}(t).\bar{\rho}_P$$

Derivando dicha ecuación respecto del tiempo, obtenemos la velocidad de un punto del cuerpo rígido:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_P) = \frac{d}{dt}(\bar{r}_{O'}) + \frac{d}{dt}(\mathbf{R}.\bar{\rho}_P)$$

Utilizando la notación de Newton:

$$\dot{\bar{r}}_P = \dot{\bar{r}}_{O'} + \frac{d}{dt}(\mathbf{R}.\bar{\rho}_P)$$

Donde:

- $\dot{\bar{r}}_P$: es la velocidad del punto P, medida en el sistema fijo.
- $\dot{\bar{r}}_{O'}$: es la velocidad del origen del sistema móvil, medida en el sistema fijo.

La dificultad radica en evaluar la derivada del segundo término, ya que la matriz de rotación depende del tiempo.

Derivada de la matriz de rotación

Como el punto *P* permanece fijo al cuerpo rígido, sus coordenadas en el sistema solidario son constantes; por lo tanto la derivada de las coordenadas en el sistema móvil respecto del tiempo en la base móvil es nula, es decir: $\dot{\bar{\rho}}_P = 0$.

$$\dot{\bar{r}}_P = \dot{\bar{r}}_{O'} + \frac{d}{dt}(\mathbf{R}.\bar{\rho}_P) = \dot{\bar{r}}_{O'} + \dot{\mathbf{R}}.\bar{\rho}_P + \mathbf{R}.\dot{\bar{\rho}}_P$$

$$\dot{\bar{r}}_P = \dot{\bar{r}}_{O'} + \dot{\mathbf{R}}.\bar{\rho}_P$$

La matriz $\mathbf{R}$ representa la orientación del sistema móvil y, por lo tanto, depende del tiempo. Como además representa una rotación, es una matriz ortogonal y satisface: $\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$. Derivando esta identidad respecto al tiempo resulta:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R}\right) = \frac{d}{dt}(\mathbf{I})$$

Como la matriz identidad es constante:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

Matriz antisimétrica asociada a la rotación

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R}\right) = 0$$

Aplicando la regla de derivación de un producto:

$$\dot{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}} = 0$$

Utilizando la propiedad de la traspuesta de un producto, para el primer término es:

$$\left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}}\right)^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}}\right)^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R}$$

Sustituyendo en la igualdad anterior es :

$$\left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}}\right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}}\right)^{T} = -\left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}}\right)$$

Como la matriz $\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}}$ es antisimétrica y aparecerá de forma recurrente en las ecuaciones de la cinemática del cuerpo rígido, resulta conveniente definir la matriz: $\boldsymbol{\Omega} = \left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}}\right)$. Entonces queda:

$$\boldsymbol{\Omega}^{T} = -\boldsymbol{\Omega}$$

Evaluación del término de rotación

De la igualdad anterior: $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}}$; premultiplicando ambos miembros por $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}}$$

Como $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$, se obtiene:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

Esta expresión permite reemplazar la derivada de la matriz de rotación por la matriz antisimétrica.
Retomando la expresión de la velocidad del punto *P*:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}.\bar{\rho}_P) = \dot{\mathbf{R}}.\bar{\rho}_P$$

Reemplazando es:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}.\bar{\rho}_P) = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}.\bar{\rho}_P$$

Finalmente resulta:

$$\dot{\bar{r}}_P = \dot{\bar{r}}_{O'} + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}.\bar{\rho}_P$$

Interpretación del término de rotación

La deducción anterior muestra que la matriz $\boldsymbol{\Omega}$ está asociada al efecto de la rotación sobre la velocidad de los puntos del cuerpo rígido. Corresponde ahora interpretar el significado físico del producto $\boldsymbol{\Omega}.\bar{\rho}_P$.

La matriz $\boldsymbol{\Omega}$ surge al derivar la matriz de rotación respecto del tiempo. Como la matriz $\mathbf{R}$ describe la orientación del sistema móvil, la matriz $\boldsymbol{\Omega}$ describe la rapidez con que dicha orientación cambia con el tiempo.

Por esta razón, $\boldsymbol{\Omega}$ se denomina matriz de velocidad angular.

Puede interpretarse el significado de las matrices: $\mathbf{R}$, $\dot{\mathbf{R}}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ de la siguiente manera:

- La matriz $\mathbf{R}$ describe la orientación del sistema móvil.
- La matriz $\dot{\mathbf{R}}$ describe la velocidad de cambio de esa orientación.
- La matriz $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}}$ es una matriz antisimétrica que representa la velocidad angular expresada en la base móvil.

Equivalencia entre una matriz antisimétrica y un vector

De la deducción anterior se obtuvo:

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{R}}\right)$$

La matriz $\boldsymbol{\Omega}$ es antisimétrica. En tres dimensiones, toda matriz antisimétrica puede asociarse de manera única con un vector. Para cualquier vector $\bar{a}$ expresado en la base móvil:

$$\boldsymbol{\Omega}.\,\bar{a} = \bar{\omega}_{O'} \times \bar{a}$$

El vector $\bar{\omega}_{O'}$ asociado a $\boldsymbol{\Omega}$ se denomina vector velocidad angular del sistema móvil. Entonces, partiendo de:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}.\,\bar{\rho}_P$$

Llegamos a:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \mathbf{R}.\left(\bar{\omega}_{O'} \times \bar{\rho}_P\right)$$

Velocidad de un punto cualquiera del cuerpo

Como ahora todas las magnitudes quedan expresadas en el sistema fijo, en lo sucesivo $\bar{\omega}$ denotará la velocidad angular expresada en dicho sistema.

$$\bar{\omega} = \mathbf{R}.\,\bar{\omega}_{O'}$$

Además, de la ecuación de configuración:

$$\mathbf{R}.\,\bar{\rho}_P = \bar{r}_P - \bar{r}_{O'} = \bar{r}_{P/O'}$$

y utilizando la propiedad del producto vectorial:

$$\mathbf{R}.\,(\bar{\omega}_{O'} \times \bar{\rho}_P) = (\mathbf{R}.\,\bar{\omega}_{O'}) \times (\mathbf{R}.\,\bar{\rho}_P) = \bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}$$

Y aparece la siguiente ecuación:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}$$

Esta expresión muestra que la velocidad de cualquier punto del cuerpo rígido puede interpretarse como la suma de dos contribuciones:

- La velocidad de traslación del punto de referencia O' respecto a O.
- La velocidad debida a la rotación del cuerpo respecto del punto de referencia O'.

Aceleración de un punto cualquiera del cuerpo

Una vez obtenida la expresión de la velocidad de cualquier punto del cuerpo rígido, el siguiente paso consiste en determinar su aceleración. Para ello, derivamos respecto del tiempo la ecuación de velocidades:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}$$

Aplicando la derivada, la aceleración de un punto *P* del rígido es:

$$\bar{a}_P = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}\right)$$

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{O'} + \frac{d}{dt}\left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}\right)$$

Aplicando la regla de derivación del producto vectorial:

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}\right) = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_{P/O'} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_{P/O'}$$

Aceleración de un punto cualquiera del cuerpo

Aplicando la regla de derivación del producto vectorial:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_{P/O'} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_{P/O'}$$

Como P y O' pertenecen al mismo cuerpo rígido, el vector $\bar{r}_{P/O'}$ cambia únicamente debido a la rotación del cuerpo:

$$\dot{\bar{r}}_{P/O'} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, resulta:

$$\boxed{\bar{a}_P = \bar{a}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_{P/O'} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}\right)}$$

La aceleración queda formada por tres contribuciones:

- $\bar{a}_{O'}$: Aceleración de traslación del punto de referencia O'.
- $\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_{P/O'}$: Término asociado a la variación temporal de la velocidad angular.
- $\bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}\right)$: Término asociado al cambio de dirección de la velocidad debido a la rotación del cuerpo.

Movimiento relativo de un punto respecto del cuerpo rígido

De la ecuación de configuración del sólido rígido, se tiene:

$$\bar{r}_P = \bar{r}_{O'} + \mathbf{R}.\,\bar{\rho}_P$$

En el desarrollo anterior se supuso que el punto P permanecía fijo al cuerpo rígido. Matemáticamente, esto implicaba que sus coordenadas en el sistema solidario al cuerpo eran constantes.

A continuación se analizará el caso más general, en el cual el punto posee movimiento relativo respecto del cuerpo; por lo tanto las coordenadas del punto en el sistema solidario al cuerpo dejan de ser constantes: $\bar{\rho}_P \neq 0$. En consecuencia, al derivar la ecuación de configuración aparece un nuevo término:

$$\dot{\bar{r}}_P = \dot{\bar{r}}_{O'} + \frac{d}{dt}(\mathbf{R}.\,\bar{\rho}_P) = \dot{\bar{r}}_{O'} + \dot{\mathbf{R}}.\,\bar{\rho}_P + \mathbf{R}.\,\dot{\bar{\rho}}_P$$

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \mathbf{R}.\,(\boldsymbol{\Omega}.\,\bar{\rho}_P + \dot{\bar{\rho}}_P\ )$$

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \mathbf{R}.\,(\bar{\omega}_{O'} \times \bar{\rho}_P + \dot{\bar{\rho}}_P\ )$$

Movimiento relativo de un punto respecto del cuerpo rígido

El término: $\mathbf{R}.\dot{\bar{\rho}}_P$, representa la velocidad relativa del punto respecto del cuerpo rígido, expresada en el sistema fijo.

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'} + \mathbf{R}.\dot{\bar{\rho}}_P$$

Donde:

$$\bar{v}_{rel} = \mathbf{R}.\dot{\bar{\rho}}_P$$

Por lo tanto, la velocidad absoluta de un punto con movimiento relativo respecto del cuerpo rígido puede expresarse como:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'} + \bar{v}_{rel}$$

La velocidad absoluta del punto resulta de la suma de tres contribuciones:

- La velocidad de traslación del punto de referencia O'.
- La velocidad debida a la rotación del cuerpo rígido.
- La velocidad relativa del punto respecto del cuerpo rígido.

Aceleración de un punto con movimiento relativo

De la ecuación de velocidad recién vista:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'} + \bar{v}_{rel}$$

Derivamos la velocidad respecto al tiempo y obtenemos:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{O'} + \frac{d}{dt}\left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'} + \bar{v}_{rel}\right)$$

$$\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}.\dot{\bar{\rho}}_P\right)$$

Aplicando la regla del producto es:

$$\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt} = \dot{\mathbf{R}}.\dot{\bar{\rho}}_P + \mathbf{R}.\ddot{\bar{\rho}}_P$$

$$\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt} = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}.\dot{\bar{\rho}}_P + \mathbf{R}.\ddot{\bar{\rho}}_P$$

Aceleración de un punto con movimiento relativo

$$\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt} = \bar{\omega} \times (\mathbf{R}.\dot{\bar{\rho}}_P) + \mathbf{R}.\ddot{\bar{\rho}}_P$$

Pero como: $\mathbf{R}.\dot{\bar{\rho}}_P = \bar{v}_{rel}$, entonces:

$$\frac{d\bar{v}_{rel}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{v}_{rel} + \bar{a}_{rel}$$

De acuerdo con la ecuación de aceleración:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{O'} + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{P/O'} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}) + \bar{\omega} \times \bar{v}_{rel} + \frac{d\bar{v}_{rel}}{dt}$$

Reemplazando, queda:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{O'} + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{P/O'} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}) + \bar{\omega} \times \bar{v}_{rel} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{rel} + \bar{a}_{rel}$$

Obsérvese que aparecen dos contribuciones idénticas del término $(\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel})$. Una proviene de la derivada del término asociado a la rotación del cuerpo y la otra de la derivada de la velocidad relativa. La suma de ambas contribuciones origina el término conocido como aceleración de Coriolis.

Interpretación de los términos de la aceleración

Finalmente:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{O'} + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{P/O'} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}\right) + 2.\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel} + \bar{a}_{rel}$$

Donde:

- $\bar{a}_{O'}$: Aceleración de traslación del punto de referencia O'.
- $\bar{\alpha} \times \bar{r}_{P/O'}$: Aceleración asociada a la variación temporal de la velocidad angular.
- $\bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'}\right)$: Aceleración asociada al cambio de dirección de la velocidad debido a la rotación del cuerpo.
- $2.\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}$: Aceleración de Coriolis ($\bar{a}_C$), originada por la combinación del movimiento de rotación del cuerpo y del movimiento relativo del punto.
- $\bar{a}_{rel}$: Aceleración relativa del punto respecto del cuerpo rígido.

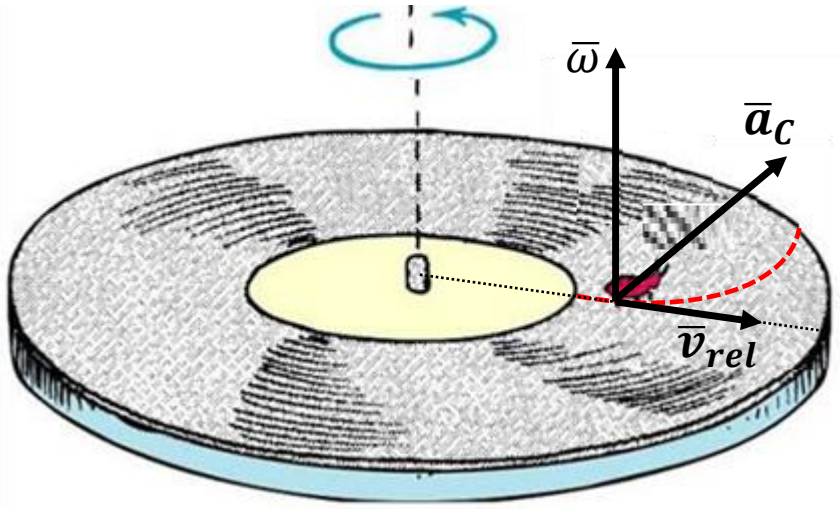
Interpretación de los términos de la aceleración

La aceleración absoluta de un punto con movimiento relativo resulta de la suma de cinco contribuciones: la aceleración de traslación del punto de referencia, los efectos de la rotación del cuerpo, la aceleración de Coriolis y la aceleración relativa del punto respecto del cuerpo rígido.

La aceleración de Coriolis aparece únicamente cuando el cuerpo posee velocidad angular y, simultáneamente, el punto presenta velocidad relativa respecto de él.

Ejemplo: Un disco gira con velocidad angular constante alrededor de su eje vertical. Un insecto camina radialmente desde el centro hacia el borde con velocidad constante respecto del disco.

Aunque el insecto intenta desplazarse en línea recta, al analizar su movimiento respecto al sistema en rotación (solidario al disco: no inercial), su trayectoria aparece desviada como consecuencia de la aceleración de Coriolis."



Un observador inercial ve que para mantener esa trayectoria radial se requiere una aceleración tangencial adicional originada por la rotación del sistema

Ejercicio 2 del trabajo práctico

