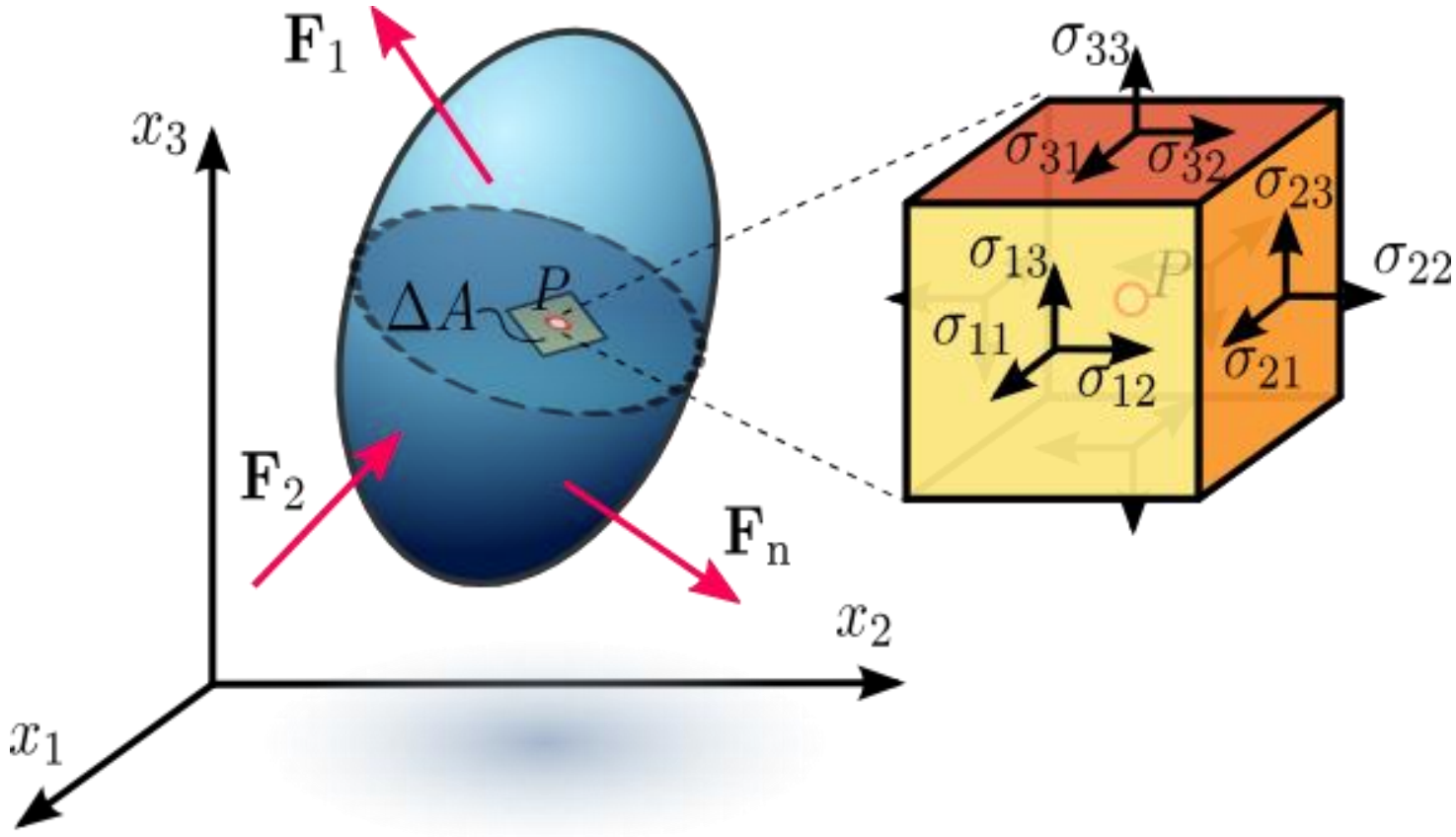
1.- Álgebra tensorial



Tensores

Magnitudes escalares y vectoriales

Una magnitud escalar queda completamente determinada por un valor, sin necesidad de asociarlo a una dirección del espacio.

Por ejemplo, un objeto de masa: m = 5kg. Si cambiamos la orientación del sistema de coordenadas: $m'=m$. Su valor no necesita componentes asociadas a los ejes.

Por lo tanto, al no requerir ninguna información asociada a una dirección del espacio para ser representada, se la considera un tensor de orden cero.

Es como decir que un número real pertenece al conjunto de números complejos.

Una magnitud vectorial, en cambio, posee módulo, dirección y sentido. Para representarla en una base necesitamos sus componentes, por ejemplo la velocidad $\bar{v}$:

$$\bar{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} \qquad \text{ó} \qquad [\bar{v}] = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Si cambiamos la base, $\bar{v}$ sigue siendo el mismo vector, pero cambian sus componentes.

Tensores

Magnitudes escalares y vectoriales

Cuando en Mecánica decimos que un vector tiene módulo, dirección, sentido y, en ciertos casos, punto de aplicación, conviene distinguir cuáles de estas características están relacionadas con su carácter direccional.

Un vector es una magnitud direccional. Al expresarlo en una base, esa direccionalidad se describe mediante sus componentes sobre las direcciones de dicha base y así, cada componente queda identificada por una única dirección.

Si dos vectores tienen la misma dirección pero sentidos opuestos, el sentido queda determinado por el signo de sus componentes y no introduce una nueva referencia direccional.

En cuanto al punto de aplicación, dos vectores con igual módulo, dirección y sentido pueden estar ubicados en distintos lugares de un sólido, pero eso no cambia su carácter direccional.

Para representar las componentes de un vector necesitamos un único índice, que indicaremos con p. Por eso un vector es un tensor de primer orden: v_p.

Tensores Objetos matemáticos y operaciones

En Mecánica trabajamos continuamente con distintos objetos matemáticos y realizamos operaciones entre ellos. Una operación es una regla que combina uno o más objetos para obtener un resultado. Por ejemplo, si sumamos dos vectores:

$$\bar{u} + \bar{v} = \bar{w}$$

Podemos distinguir:

$\underbrace{\bar{u};\ \bar{v};\ \bar{w}}$ $\underbrace{+}$

Objetos matemáticos: Vectores Operación

La suma recibe dos vectores y produce otro vector:

$$(\bar{u}; \bar{v}) \xrightarrow{+} \bar{w}$$

La cantidad de objetos que intervienen en una operación no determina su orden.

$\underbrace{\bar{u}}$ + $\underbrace{\bar{v}}$ = $\underbrace{\bar{w}}$

Orden 1 Orden 1 Orden 1

Tensores

Ejemplo de un tensor de primer orden

Un vector, por ejemplo una fuerza:

$$\bar{F} = \left(F_x; F_y; F_z\right) = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

es un tensor de orden 1. Los valores:

$$F_x; F_y; F_z$$

son escalares, porque cada uno solamente dice cuánto de la fuerza hay en esa dirección. Por ejemplo:

$$\bar{F} = (30; 50; 15\ )\text{N} = \left(30\hat{\imath} + 50\hat{\jmath} + 15\hat{k}\right)\text{N}$$

significa:

- 30 N asociados a la dirección *X*.
- 50 N asociados a la dirección *Y*.
- 15 N asociados a la dirección *Z*.

Esos tres números son escalares. La dirección aparece porque cada número está asociado a una dirección de la base.

Tensores Orden del tensor y número de componentes

Como dijimos hace instantes, la masa es un tensor de orden cero y, por lo tanto, tiene una sola componente, que es el propio valor de la masa:

$$T = m$$

Un tensor de orden 1 es un vector, así que tiene tantas componentes como dimensiones tenga el espacio, por ejemplo:

$$\text{1D:} \quad T_p = \bar{v}_p = [v_x] \qquad \text{2D:} \quad T_p = \bar{v}_p = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \qquad \text{3D:} \quad T_p = \bar{v}_i = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Así, en 3D:

Orden del Tensor	N° de componentes	Nombre tradicional
0	1	Escalar
1	3	Vector
2	9	Tensor de segundo orden
3	27	Tensor de tercer orden

Tensores

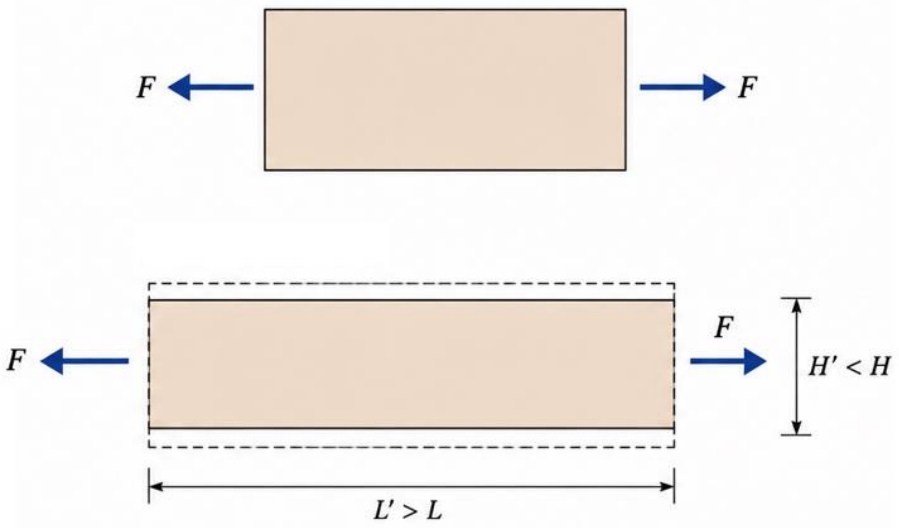
¿Qué significa segundo orden?

Existen magnitudes y operadores para los cuales una sola referencia direccional no es suficiente. Para identificar cada una de sus componentes es necesario utilizar dos índices: T_{pq}. Cada componente T_{pq} queda identificada mediante dos índices, asociados a direcciones de la base.

Un operador es una regla que actúa sobre un objeto matemático y produce otro objeto matemático como resultado.

Por ejemplo, si tomamos una placa plana y la traccionamos en dirección longitudinal, la deformación del material no necesariamente se manifiesta únicamente en esa dirección. También puede haber deformación en otra dirección.

Esto nos da una primera idea de por qué, para describir ciertos fenómenos físicos, una sola referencia direccional no alcanza.



Si analizamos la deformación de la placa en el plano X–Y, el estado de deformación se representa mediante un tensor de segundo orden:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

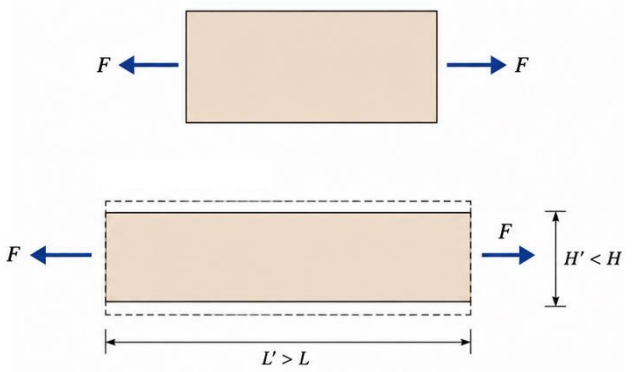
Tensores

Ejemplo de un tensor de segundo orden

Donde:
ε_{xx}: deformación en la propia dirección X (normal). En este caso, $\varepsilon_{xx} > 0$ (alargamiento). Indica cuánto cambia la longitud de un segmento que originalmente estaba orientado en X.
ε_{yy}: deformación en la propia dirección Y (normal). En este caso, $\varepsilon_{yy} < 0$ (acortamiento). Indica cuánto cambia la longitud de un segmento que originalmente estaba orientado en Y.
$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$: componentes de deformación asociadas a la distorsión angular (deformación de corte).

Para el caso sencillo que estamos planteando, se tracciona (estira) únicamente en dirección X y no hay deformación por corte. Entonces: $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$; y queda:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$



En este caso no hay términos cruzados: la deformación longitudinal permanece asociada a X y la transversal a Y.

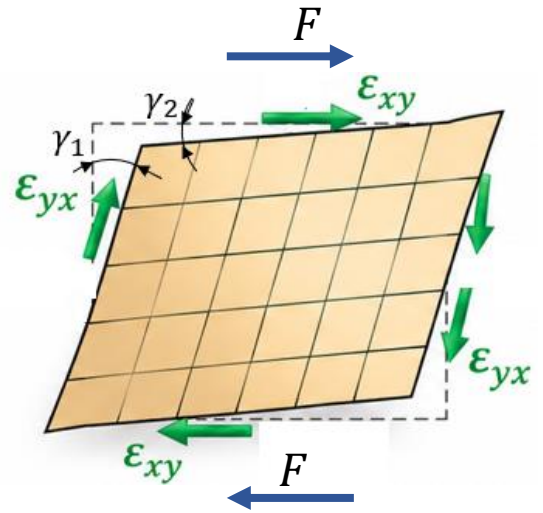
Aunque en este caso no haya términos cruzados, el estado de deformación se representa mediante un tensor de segundo orden, ya que cada una de sus componentes requiere dos referencias direccionales para ser identificada.

Tensores

Ejemplo de un tensor de segundo orden

En un caso de corte puro, un elemento inicialmente rectangular se distorsiona por la acción de fuerzas tangenciales, como se indica en la figura. En este caso no hay deformaciones normales, sino únicamente distorsión angular: γ_{xy}.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & 0 \end{bmatrix}$$



$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$: son las dos componentes simétricas del tensor asociadas a la misma distorsión angular γ_{xy} del plano X–Y.

Son las dos posiciones simétricas que ocupa esa información en el tensor de pequeñas deformaciones.

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 \longrightarrow \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

Como no hay alargamiento normal ni acortamiento normal: $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$.

Una capa del material se desplaza tangencialmente respecto de otra. El desplazamiento ocurre en X, pero cambia según la posición en Y, produciendo la distorsión angular.

Tensores

¿Tres dimensiones significa tensor de tercer orden?

NO!. Incorporar el eje Z aumenta la dimensión del espacio, pero no el orden del tensor. En un tensor de segundo orden, cada componente se identifica mediante dos referencias direccionales: T_{pq} .

Por ejemplo, en deformaciones: ε_{xy}, involucra las direcciones X e Y. En tres dimensiones simplemente aparecen también las combinaciones con Z:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Ese tensor sigue siendo de segundo orden porque cada componente continúa teniendo dos índices.

Si además queremos describir cómo varía una componente de segundo orden al movernos en una tercera dirección, necesitamos un tercer índice; por ejemplo: $\varepsilon_{xy,z}$. Este término indica cómo varía la deformación ε_{xy} al desplazarnos en Z.

El conjunto de estas variaciones espaciales constituye el gradiente del tensor de deformaciones, que es un tensor de tercer orden.

Tensores Cambio de base como transformación lineal

Otro ejemplo conocido es el cambio de base mediante una rotación del sistema de coordenadas. El vector no cambia; cambian sus componentes al expresarlo en la nueva base. Para determinar cada componente del vector en la nueva base necesitamos conocer cómo contribuyen a ella las componentes del vector en la base original:

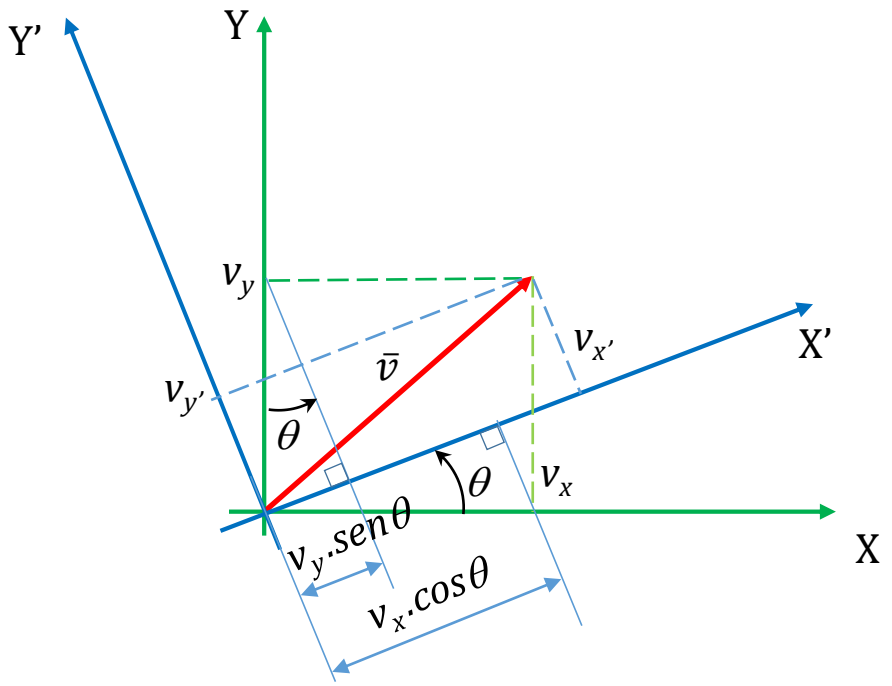
$$v_{x'} = v_x.cos\theta + v_y.sen\theta \quad ; \quad v_{y'} = -v_x.sen\theta + v_y.cos\theta$$

$$v_{x'} = R_{xx}v_x + R_{xy}v_y \quad ; \quad v_{y'} = R_{yx}v_x + R_{yy}v_y$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

En este caso, el operador lineal queda representado, en la base elegida, mediante una matriz cuyas componentes poseen dos índices.



Tensores ¿Por qué es una transformación lineal?

Una transformación es lineal cuando respeta la suma de vectores y la multiplicación por un escalar. Sean los vectores: $\bar{u}$ y $\bar{v}$:

$$T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \qquad \text{y} \qquad T(\lambda\bar{v}) = \lambda T(\bar{v})$$

Ahora demostremos la propiedad de la suma; para ello primero sumamos los vectores:

$$\bar{u}+\bar{v} = (u_x + v_x)\hat{\imath} + \left(u_y + v_y\right)\hat{\jmath}$$

Aplicando la transformación T a esa suma. Para la componente en x':

$$T(\bar{u}+\bar{v})_{x'} = (u_x + v_x)cos\theta + \left(u_y + v_y\right)sen\theta$$

Distribuyendo y agrupando, es:

$$T(\bar{u}+\bar{v})_{x'} = u_x cos\theta + u_y sen\theta + v_x cos\theta + v_y sen\theta$$

Pero:

$$T(\bar{u})_{x'} = u_x cos\theta + u_y sen\theta \qquad \text{y} \qquad T(\bar{v})_{x'} = v_x cos\theta + v_y sen\theta$$

Tensores ¿Por qué es una transformación lineal?

Entonces, se demuestra que:

$$T(\bar{u}+\bar{v})_{x'} = T(\bar{u})_{x'} + T(\bar{v})_{x'}$$

Lo mismo para *y'*:

$$T(\bar{u}+\bar{v})_{y'} = T(\bar{u})_{y'} + T(\bar{v})_{y'}$$

Ahora demostramos la segunda propiedad, y para ello partimos del vector:

$$\bar{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$$

Lo multiplicamos por el escalar λ :

$$\lambda\bar{v} = \lambda v_x\hat{\imath} + \lambda v_y\hat{\jmath}$$

Aplicando la transformación T; para la componente en *x'* es:

$$T(\lambda\bar{v})_{x'} = (\lambda v_x)cos\theta + \left(\lambda v_y\right)sen\theta$$

Tensores ¿Por qué es una transformación lineal?

Sacamos factor común λ :

$$T(\lambda\bar{v})_{x'} = \lambda\left(v_x cos\theta + v_y sen\theta\right)$$

Pero:

$$T(\bar{v})_{x'} = v_x cos\theta + v_y sen\theta$$

Entonces:

$$T(\lambda\bar{v})_{x'} = \lambda T(\bar{v})_{x'}$$

Lo mismo para *y'*:

$$T(\bar{v})_{y'} = -v_y sen\theta + v_x cos\theta$$

Entonces:

$$T(\lambda\bar{v})_{y'} = \lambda T(\bar{v})_{y'}$$

Tensores

Transformación lineal sobre un vector

Todo vector puede escribirse como combinación lineal de los vectores de una base:

$$\bar{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$$

Si T es una transformación lineal:

$$T(\bar{v}) = T\left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}\right)$$

Aplicando ahora la propiedad de la suma, queda:

$$T(\bar{v}) = T(v_x\hat{\imath}) + T\left(v_y\hat{\jmath}\right)$$

Luego, como v_x y v_y son escalares, aplicando la propiedad del producto por un escalar:

$$T(\bar{v}) = v_xT(\hat{\imath}) + v_yT(\hat{\jmath})$$

La transformación actúa sobre cada dirección de la base y el resultado se combina utilizando las componentes v_x y v_y del vector.

Tensores

Ejemplo: transformación lineal de un vector

Sea una transformación lineal T, representada en la base elegida por:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y sea el vector: $\bar{v} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.

Aplicando propiedades de linealidad al vector dado, es:

$$T(\hat{\imath}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad T(\hat{\jmath}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = T(\bar{v}) = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Y la comprobación final es:

$$\bar{b} = T(\bar{v}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \bar{b} = 8\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}.$$

Tensores

Notación en componentes del operador lineal

Como vimos, un tensor de segundo orden puede actuar como un operador lineal sobre un vector, produciendo como resultado otro vector. Veamos ahora cómo se expresa esta operación en componentes:

$$[\bar{b}] = [T][\bar{v}]$$

O bien:

$$b_p = T_{pq} v_q$$

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$b_x = T_{xx} v_x + T_{xy} v_y$$

$$b_y = T_{yx} v_x + T_{yy} v_y$$

El segundo índice del tensor (q) identifica la componente del vector de entrada $\bar{v}$ sobre la que actúa el tensor, mientras que el primer índice (p)identifica la componente correspondiente del vector resultante $\bar{b}$.

Tensores

$$[\bar{v}]_{XY} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad [T]_{XY} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

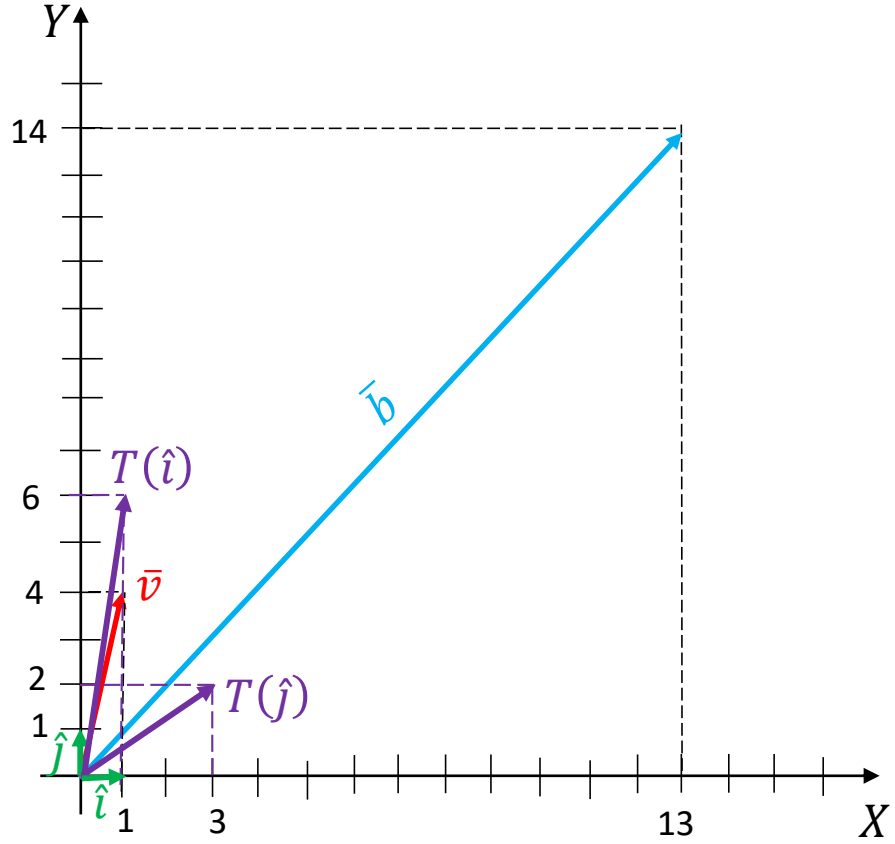
$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 3.4 \\ 6.1 + 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

- Eje X (ancho total b_x = 13):
- $T_{xx}.v_x = 1.1$: Es el primer tramo horizontal sobre el eje X, de 0 a 1. Representa el ancho original v_x = 1 conservado por el factor T_{xx}=1.

- $T_{xy}.v_y = 3.4 = 12$: La componente v_y =4 contribuye con 12 unidades a la componente b_x del vector resultante. El coeficiente T_{xy} =3 establece cuánto aporta la componente en Y del vector original a la componente en X del vector resultante.

Ejemplo: acción de un tensor de segundo orden sobre un vector



$$T(\hat{\imath}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

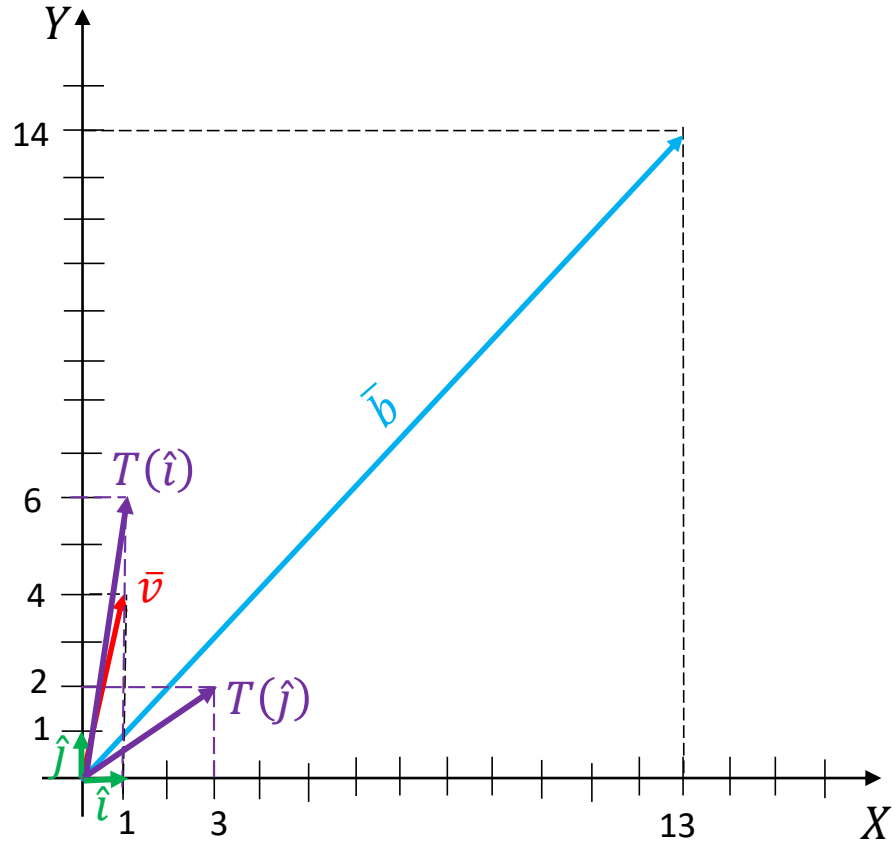
$$T(\hat{\jmath}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tensores

- Eje Y (altura total b_y = 14):
- $T_{yx}.v_x$ = 6 1 = 6: Es el primer tramo vertical, de 0 a 6. El coeficiente $T_{yx} = 6$ establece cuánto aporta la componente en X del vector original a la componente en Y del vector resultante.

- $T_{yy}.v_y$ = 2 4 = 8: Es el segundo tramo vertical, de 6 a 14. Representa la altura original $v_y = 4$ escalada al doble por $T_{yy} = 2$.

Ejemplo: acción de un tensor de segundo orden sobre un vector



$$T(\hat{\imath}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$T(\hat{\jmath}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tensores

Dos formas de utilizar un tensor de segundo orden

Un tensor de segundo orden puede relacionar componentes vectoriales en situaciones conceptualmente diferentes.

- Con la base fija, el tensor transforma un vector en otro y proporciona las componentes del nuevo vector. El sistema $X–Y$ permanece fijo y el tensor T transforma un vector $\bar{v}$ en otro vector $\bar{b}$:

$$\bar{b} = T(\bar{v}) \qquad [\bar{v}]_{XY} \xrightarrow{T} [\bar{b}]_{XY}$$

El vector resultante puede tener distinto módulo, dirección y sentido que el vector original.

- En un cambio de base, el vector no cambia; el tensor proporciona las nuevas componentes necesarias para representar ese mismo vector en la nueva base. El vector $\bar{v}$ permanece invariable; cambia la base utilizada para representarlo:

$$[\bar{v}]_{XY} \xrightarrow{R} [\bar{v}]_{X'Y'}$$

El vector conserva módulo, dirección y sentido; cambian únicamente sus componentes.

Tensores

Operaciones con tensores de segundo orden

Al igual que con escalares y vectores, con los tensores de segundo orden pueden realizarse distintas operaciones. La operación realizada determina el tipo y el orden del resultado.

Suma y resta.

Para sumar o restar dos tensores de segundo orden, ambos deben estar expresados en la misma base. La operación se realiza entre componentes que tienen los mismos índices:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \longrightarrow C_{pq} = A_{pq} + B_{pq}$$

Por ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [A] + [B] = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+2 \\ 3+4 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

El resultado también es de segundo orden: 2° + 2° = 2°.

Se suman componentes que representan la misma relación entre direcciones. Por ejemplo, A_{xy} se suma con B_{xy}, no con B_{yx}.

Tensores

Operaciones con tensores de segundo orden

Producto por un escalar.

Al multiplicar un tensor de segundo orden por un escalar λ, cada componente del tensor queda multiplicada por ese mismo valor:

$$\mathbf{B} = \lambda\,\mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad B_{pq} = \lambda\,A_{pq}$$

Por ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda = 2$$

$$[B] = 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

El resultado continúa siendo un tensor de segundo orden: 0° . 2° = 2°.

El escalar modifica el valor de todas las componentes, pero no introduce una nueva referencia direccional; por eso no modifica el orden del tensor.

Tensores

Operaciones con tensores de segundo orden

Producto matricial entre tensores.

A diferencia de la suma, al hablar de producto entre tensores es necesario especificar qué tipo de producto se realiza, ya que distintas operaciones pueden producir resultados de distinto orden.

Por ejemplo, para dos tensores de segundo orden **A** y **B**, podemos realizar:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B} \longrightarrow C_{pq} = A_{pr}\,B_{rq}$$

El índice r aparece repetido: se realiza una suma sobre todas las direcciones posibles de r . En dos dimensiones:

$$C_{pq} = A_{px}\,B_{xq} + A_{py}\,B_{yq}$$

Por ejemplo, para C_{xy} :

$$C_{xy} = A_{xx}\,B_{xy} + A_{xy}\,B_{yy}$$

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{yx} & A_{xx}B_{xy} + A_{xy}B_{yy} \\ A_{yx}B_{xx} + A_{yy}B_{yx} & A_{yx}B_{xy} + A_{yy}B_{yy} \end{bmatrix}$$

El resultado vuelve a necesitar solamente los índices p; q : 2° . 2° = 2°.

El índice r se contrae al realizar la suma, mientras que p y q permanecen libres. Por lo tanto, el resultado es nuevamente un tensor de segundo orden.

Tensores

Contracción de índices

Ya vimos que un tensor de segundo orden puede actuar sobre un vector y producir otro vector:

$$\bar{b} = \mathbf{T} \cdot \bar{v}$$

En dos dimensiones:

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$b_x = T_{xx} v_x + T_{xy} v_y$$

$$b_y = T_{yx} v_x + T_{yy} v_y$$

En la misma operación puede escribirse en forma compacta como:

$$b_p = T_{pq} v_q$$

Para obtener cada componente b_p, se suman los aportes correspondientes a las distintas direcciones q. Por eso q desaparece del resultado, mientras que p permanece e identifica la dirección de la componente de salida.

$$\underbrace{T_{pq} v_q}_{\text{Se contrae } q} \quad \rightarrow \quad b_p$$

A esta suma sobre el índice q se la denomina contracción de índices.

Tensores

Ejemplo de contracción de un tensor con un vector

Sea:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad [\bar{v}] = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Realizamos:

$$[\bar{b}] = [T][\bar{v}] \qquad \rightarrow \qquad [\bar{b}] = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5) + 1(2) \\ 3(5) + 4(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \end{bmatrix}$$

En notación indicial es: $b_p = T_{pq} v_q$, por lo tanto, si tomamos b_x es:

$$b_x = T_{xq} v_q = T_{xx} v_x + T_{xy} v_y \longrightarrow b_x = \underbrace{2(5)}_{\text{Aporte por parte de } v_x} + \underbrace{1(2)}_{\text{Aporte por parte de } v_y} = 12$$

Sumamos ambos aportes, quedando incorporadas en b_x las contribuciones provenientes de v_x y v_y. Lo mismo para b_y es:

$$b_y = T_{yq} v_q = T_{yx} v_x + T_{yy} v_y \longrightarrow b_y = 3(5) + 4(2) = 23$$

Entonces la contracción es el nombre que recibe esa suma de los aportes provenientes de todas las componentes de entrada.

Tensores

Operaciones con tensores de segundo orden

Producto tensorial entre vectores.

El producto tensorial entre dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ se indica:

$$\mathbf{T} = \bar{a} \otimes \bar{b}$$

A diferencia del producto escalar o vectorial, el resultado no es un escalar ni un vector: es un tensor de segundo orden.

Sus componentes se obtienen tomando cada componente de $\bar{a}$ con cada componente de $\bar{b}$:

$$T_{pq} = a_p \, b_q$$

En dos dimensiones:

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} ; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{a} \otimes \bar{b} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y \\ a_y b_x & a_y b_y \end{bmatrix}$$

Donde aparece el segundo orden; a_p posee un índice p asociado a una dirección de la base; b_q posee un índice q asociado a otra dirección pero de la misma base. El producto conserva ambos índices.

Tensores

Ejemplo de un tensor de segundo orden

Un ejemplo simple:

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} ; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a} \otimes \bar{b} = \begin{bmatrix} 2.(3) & 2.(4) & 2.(2) \\ 1.(3) & 1.(4) & 1.(2) \\ 3.(3) & 3.(4) & 3.(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 9 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Cada componente del resultado se obtiene combinando una componente de $\bar{a}$ con una componente de $\bar{b}$. Por ejemplo, $T_{xy} = a_x \, b_y = 2.(4) = 8$.

Cada componente queda así asociada a dos direcciones de la base: una proveniente de $\bar{a}$ y otra de $\bar{b}$. Por eso el resultado es un tensor de segundo orden.

Orden 1 ⊗ Orden 1 = Orden 2

Tensores

Transposición de un tensor

Transponer un tensor de segundo orden consiste en intercambiar sus dos índices:

$$[T^T]_{pq} = T_{qp}$$

Por ejemplo:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$[T^T] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$T_{xy} = 3 \quad \rightarrow \quad [T^T]_{yx} = 3$$

$$T_{yx} = 5 \quad \rightarrow \quad [T^T]_{xy} = 5$$

La transposición no modifica el orden del tensor; intercambia sus dos referencias direccionales.

Tensores

Tensores simétricos

Un tensor de segundo orden es simétrico cuando al transponerlo permanece invariable:

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$$

Significa que al cambiar sus índices:

$$T_{pq} = T_{qp}$$

En dos dimensiones, si el tensor es simétrico, se cumple que:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{xy} & T_{yy} \end{bmatrix}$$

Por ejemplo:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad [T^T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Este tipo de tensor es el que vimos hace instantes como tensor de deformaciones, donde: $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$.

Tensores

Tensores antisimétricos

Un tensor de segundo orden es antisimétrico cuando al transponerlo se obtiene el mismo tensor pero con signo contrario:

$$\mathbf{T}^T = -\mathbf{T}$$

Por lo tanto:

$$T_{pq} = -T_{qp}$$

En dos dimensiones es:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix}$$

Para los términos cruzados es:

$$T_{xy} = -T_{yx}$$

Para las componentes de la diagonal, al intercambiar los índices obtenemos la misma componente. Por la condición de antisimetría:

$$T_{xx} = -T_{xx} \quad \Longrightarrow \quad T_{xx} = 0 \qquad\qquad T_{yy} = -T_{yy} \quad \Longrightarrow \quad T_{yy} = 0$$

Tensores antisimétricos

Por eso un tensor antisimétrico en dos dimensiones tiene la forma:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \; [T^T] = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -[T]$$

En un tensor antisimétrico, al intercambiar las dos referencias direccionales, cada componente conserva su módulo pero cambia de signo.

Tensores

Descomposición de un tensor de segundo orden

Cualquier tensor de segundo orden $\mathbf{T}$ puede separarse en dos partes:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathrm{s}} + \mathbf{T}_{\mathrm{as}}$$

La parte simétrica se obtiene:

$$\mathbf{T}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^{T})$$

Y cumple:

$$\mathbf{T}_{\mathrm{s}}^{T} = \mathbf{T}_{\mathrm{s}}$$

La parte antisimétrica:

$$\mathbf{T}_{\mathrm{as}} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^{T})$$

Y cumple:

$$\mathbf{T}_{\mathrm{as}}^{T} = -\mathbf{T}_{\mathrm{as}}$$

Tensores

Descomposición de un tensor de segundo orden

Por ejemplo:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad [T^T] = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Parte simétrica:

$$[T_s] = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Parte antisimétrica:

$$[T_{as}] = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y se comprueba:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La parte simétrica contiene aquello que permanece igual al intercambiar los índices; la parte antisimétrica contiene aquello que cambia de signo.

Tensores

Cambio de base de un tensor de segundo orden

Un tensor **T**, al igual que un vector, no cambia por elegir otra base. Lo que cambia es su representación matricial:

$$[T]_{XY} \quad \longrightarrow \quad [T]_{X'Y'}$$

Como un tensor de segundo orden tiene dos referencias direccionales, la matriz de cambio de base debe actuar sobre ambas.

$$[T]' = [R][T][R]^T$$

Donde: $[R]$ es la matriz de rotación que relaciona ambas bases y $[R]^T$ es su transpuesta. Es decir:

$$\underbrace{[R]}_{\text{Cambia una referencia}} \quad [T] \quad \underbrace{[R]^T}_{\text{Cambia la otra referencia}}$$

Tensores

Cambio de base de un tensor de segundo orden

Ejemplo: sea el tensor, expresado en la base X–Y:

$$[T]_{XY} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Queremos expresar el mismo tensor en una base X'–Y' girada: $\theta = 30°$. La matriz de cambio de base que venimos utilizando es:

$$[R] = \begin{bmatrix} cos30° & sen30° \\ -sen30° & cos30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix} \quad ; \quad [R]^T = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix}$$

$$[R][T] = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}098 & 1{,}866 \\ -0{,}634 & 1{,}232 \end{bmatrix}$$

$$[T]' = [R][T][R]^T = \begin{bmatrix} 3{,}098 & 1{,}866 \\ -0{,}634 & 1{,}232 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix}$$

$$[T]' = \begin{bmatrix} 3{,}616 & 0{,}067 \\ 0{,}067 & 1{,}384 \end{bmatrix}$$

Tensores

Invariantes de un tensor de segundo orden

Al cambiar de base cambian las componentes del tensor, pero existen ciertas cantidades calculadas a partir de ellas que permanecen iguales. A estas cantidades las llamamos invariantes.

En el cambio de base considerado, $[R]$ representa una rotación entre bases ortonormales. Por ello, sus filas y columnas, consideradas como vectores, son unitarias y perpendiculares entre sí. Una matriz con esta propiedad se denomina matriz ortogonal y cumple: $[R]^T = [R]^{-1}$.

Por ejemplo sea la matriz de rotación:

$$[R] = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Sus columnas son estos dos vectores, los cuales tienen módulo 1 y por lo tanto son versores:

$$\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} cos\theta \\ -sen\theta \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{c}_2 = \begin{bmatrix} sen\theta \\ cos\theta \end{bmatrix}$$

Invariantes de un tensor de segundo orden

Ahora hacemos el producto escalar entre ellos:

$$\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 = -cos\theta\ sen\theta + sen\theta\ \cos\theta = 0$$

Por lo tanto, las columnas son unitarias y perpendiculares entre sí. Con las filas ocurre lo mismo, confirmando que $[R]$ es una matriz ortogonal y, por lo tanto: $[R]^T = [R]^{-1}$.

La ley de cambio de base que vimos anteriormente puede escribirse entonces como:

$$[T]' = [R][T][R]^{-1}$$

Por esta razón, $[T]$ y $[T]'$ son matrices semejantes y conservan cantidades como la traza y el determinante. Ambas matrices representan el mismo operador tensorial visto desde bases distintas.

1. Traza

Es la suma de los elementos de la diagonal:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tr}[T] &= T_{xx} + T_{yy} \\ \mathrm{tr}[T]' &= T_{x'x'} + T_{y'y'} \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{tr}[T] = \mathrm{tr}[T]'$$

Tensores

Invariantes de un tensor de segundo orden

Del ejemplo anterior:

$$[T]_{XY} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad \mathrm{tr}[T] = 3 + 2 = 5$$

Después del cambio de base:

$$[T]' = \begin{bmatrix} 3{,}616 & 0{,}067 \\ 0{,}067 & 1{,}384 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad \mathrm{tr}[T]' = 3{,}616 + 1{,}384 = 5$$

2**. Determinante**

También permanece invariable:

$$\det[T] = \det[T]'$$

Entonces, del ejemplo:

$$\det[T] = 3\,(2) - 1(1) = 5 \qquad \text{y} \qquad \det[T]' = 3{,}616(1{,}384) - 0{,}067(0{,}067) = 5$$

Tensores

Diagonalización de un tensor

En una base *X*-*Y*, un tensor de segundo orden puede escribirse como:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix}$$

$$b_x = T_{xx} v_x + T_{xy} v_y$$

$$b_y = T_{yx} v_x + T_{yy} v_y$$

Sus términos T_{xy} y T_{yx}, representan relaciones cruzadas entre las direcciones *x* e *y*.

Por lo tanto, cada componente de salida puede depender de componentes de entrada en ambas direcciones.

Resulta útil encontrar una nueva orientación de los ejes *X'*-*Y'* en la cual desaparezcan esos términos cruzados. Encontrar una base en la cual el tensor adopte esta forma se denomina diagonalizar el tensor.

$$[T]' = \begin{bmatrix} T_{x'x'} & 0 \\ 0 & T_{y'y'} \end{bmatrix} \quad ; \quad T_{x'y'} = T_{y'x'} = 0$$

$$b_{x'} = T_{x'x'} v_{x'}$$

$$b_{y'} = T_{y'y'} v_{y'}$$

La pregunta es entonces: ¿cómo encontramos esas direcciones x' e y'?

Tensores

Direcciones propias del tensor

En general, al aplicar un tensor a un vector $\bar{v}$, el vector resultante $\bar{b}$ puede tener una dirección diferente de $\bar{v}$.

$$\bar{b} = \mathbf{T}\bar{v}$$

Para encontrar las direcciones que utilizaremos como nuevos ejes para diagonalizar el tensor, buscamos vectores cuya dirección no sea modificada por **T**:

$$\mathbf{T}\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} = \lambda_i \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$$

El resultado permanece paralelo a $\bar{v}_i$; solamente cambia su módulo y eventualmente su sentido si λ_i<0.

A los vectores que tienen esas direcciones se los denomina autovectores, y a cada factor λ_i asociado, autovalor.

Para encontrar esas direcciones propias, planteamos en forma general:

$$\mathbf{T}\bar{v} = \lambda\bar{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{T}\bar{v} - \lambda\mathbf{I}\bar{v} = 0$$

Sacando factor común $\bar{v}$:

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\bar{v} = 0$$

Buscamos un autovector no nulo, $\bar{v} \neq 0$, ya que el vector nulo no define una dirección. Si $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$ tuviera inversa, podríamos multiplicar ambos miembros por ella:

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\bar{v} = 0$$

$$\mathbf{I}\bar{v} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{v} = 0$$

Entonces para que exista un autovector no nulo, $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$ no debe tener inversa. Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero.

Por lo tanto, para que $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$ no tenga inversa debe cumplirse:

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Autovalores y autovectores

Ahora, desarrollando el determinante es:

$$\begin{vmatrix} T_{xx} - \lambda & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Los autovalores permiten encontrar aquellas direcciones de entrada para las cuales el tensor transforma el vector sin cambiar su dirección.

$$(T_{xx} - \lambda)(T_{yy} - \lambda) - T_{xy}T_{yx} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1; \lambda_2$$

Esta es la ecuación característica del tensor. Sus soluciones son los autovalores: λ_1 y λ_2.

Cada autovalor λ indica el factor por el cual el tensor modifica a un vector que se encuentra en su correspondiente dirección propia.

Si el tensor $[T]$ es real y simétrico, las direcciones propias asociadas a autovalores distintos son necesariamente perpendiculares. Si no es simétrico, esa perpendicularidad no está garantizada.

Si un autovalor es repetido, no significa necesariamente que haya una sola dirección propia; pueden elegirse direcciones propias perpendiculares asociadas a ese mismo autovalor.

Tensores

Ejemplo de autovalores y autovectores

Sea el siguiente tensor:

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Buscamos aquellas direcciones para las cuales: $\mathbf{T}\bar{v} = \lambda\bar{v}$.

1.- Cálculo de los autovalores.

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \quad ; \quad \lambda_2 = 2$$

Ejemplo de autovalores y autovectores

2.- Autovectores correspondientes al autovalor $\lambda_1 = 4$; lo reemplazamos en: $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\bar{v} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ambas ecuaciones conducen a la misma relación:

$$-v_x + v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y = v_x$$

Por lo tanto, la dirección propia es: $\bar{v}_1 \parallel (1;1)$. Es decir, una dirección a 45º.

3.- Autovectores correspondientes al autovalor $\lambda_2 = 2$; lo reemplazamos en: $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\bar{v} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_x + v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y = -v_x$$

Por lo tanto, la dirección propia es: $\bar{v}_2 \parallel (1;-1)$. Es decir, una dirección a –45º.

Tensores

Ejemplo de autovalores y autovectores

Hemos encontrado dos direcciones propias perpendiculares: : $\bar{v}_1 \parallel (1;1)$; $\bar{v}_2 \parallel (1;-1)$.

A cada dirección propia le corresponde uno de los autovalores obtenidos anteriormente. Por ejemplo, para la primera dirección propia elegimos el autovector:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

el tensor produce:

$$\mathbf{T}\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Análogamente, para la segunda dirección propia:

$$\mathbf{T}\bar{v}_2 = \lambda_2 \bar{v}_2$$

Tomamos ahora las direcciones propias encontradas como los nuevos ejes X' e Y'. Al normalizar los autovectores, estos se convierten en los versores de la nueva base.

$$\hat{v}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \hat{v}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de autovalores y autovectores

Con estos versores construimos la matriz de cambio de base:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Aplicamos ahora la ley de cambio de base al tensor original:

$$[T]' = [R][T][R]^{-1}$$

$$[T]' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{T}$$

$$[T]' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El mismo tensor queda diagonal al expresarlo en la base formada por sus direcciones propias.