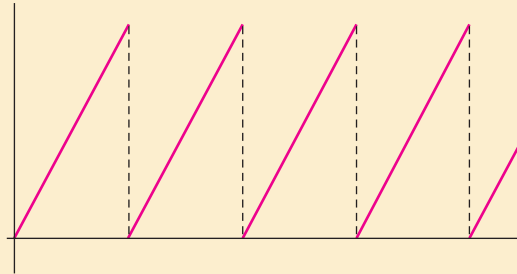


- 7.1 Definición de la transformada de Laplace
- 7.2 Transformadas inversas y transformadas de derivadas
 - 7.2.1 Transformadas inversas
 - 7.2.2 Transformadas de derivadas
- 7.3 Propiedades operacionales I
 - 7.3.1 Traslación en el eje s
 - 7.3.2 Traslación en el eje t
- 7.4 Propiedades operacionales II
 - 7.4.1 Derivadas de una transformada
 - 7.4.2 Transformadas de integrales
 - 7.4.3 Transformada de una función periódica
- 7.5 La función delta de Dirac
- 7.6 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

REPASO DEL CAPÍTULO 7



En los modelos matemáticos lineales para sistemas físicos tales como un sistema resorte/masa o un circuito eléctrico en serie, el miembro del lado derecho o entrada, de las ecuaciones diferenciales

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad \text{o} \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

es una función de conducción y representa ya sea una fuerza externa $f(t)$ o un voltaje aplicado $E(t)$. En la sección 5.1 consideramos problemas en los que las funciones f y E eran continuas. Sin embargo, las funciones de conducción discontinuas son comunes. Por ejemplo, el voltaje aplicado a un circuito podría ser continuo en tramos y periódico tal como la función “diente de sierra” que se muestra arriba. En este caso, resolver la ecuación diferencial del circuito es difícil usando las técnicas del capítulo 4. La transformada de Laplace que se estudia en este capítulo es una valiosa herramienta que simplifica la solución de problemas como éste.

7.1

DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

REPASO DE MATERIAL

- Integrales impropias con límites de integración infinitos.
- Descomposición en fracciones parciales.

INTRODUCCIÓN En cálculo elemental aprendió que la derivación y la integración son *transformadas*; esto significa, a grandes rasgos, que estas operaciones transforman una función en otra. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se transforma, a su vez, en una función lineal y en una familia de funciones polinomiales cúbicas con las operaciones de derivación e integración:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \quad \text{y} \quad \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Además, estas dos transformadas tienen la **propiedad de linealidad** tal que la transformada de una combinación lineal de funciones es una combinación lineal de las transformadas. Para α y β constantes

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$\text{y} \quad \int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

siempre que cada derivada e integral exista. En esta sección se examina un tipo especial de transformada integral llamada **transformada de Laplace**. Además de tener la propiedad de linealidad, la transformada de Laplace tiene muchas otras propiedades interesantes que la hacen muy útil para resolver problemas lineales con valores iniciales.

TRANSFORMADA INTEGRAL Si $f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces una integral definida de f respecto a una de las variables conduce a una función de la otra variable. Por ejemplo, si se conserva y constante, se ve que $\int_1^2 2xy^2 dx = 3y^2$. De igual modo, una integral definida como $\int_a^b K(s, t)f(t) dt$ transforma una función f de la variable t en una función F de la variable s . Tenemos en particular interés en una transformada integral, donde el intervalo de integración es el intervalo no acotado $[0, \infty)$. Si $f(t)$ se define para $t \geq 0$, entonces la integral impropia $\int_0^\infty K(s, t)f(t) dt$ se define como un límite:

$$\int_0^\infty K(s, t)f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s, t)f(t) dt. \quad (1)$$

Si existe el límite en (1), entonces se dice que la integral existe o es **convergente**; si no existe el límite, la integral no existe y es **divergente**. En general, el límite en (1) existirá sólo para ciertos valores de la variable s .

UNA DEFINICIÓN La función $K(s, t)$ en (1) se llama **kernel** o **núcleo** de la transformada. La elección de $K(s, t) = e^{-st}$ como el núcleo nos proporciona una transformada integral especialmente importante.

DEFINICIÓN 7.1.1 Transformada de Laplace

Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces se dice que la integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t) dt \quad (2)$$

es la **transformada de Laplace** de f , siempre que la integral converja.

Cuando la integral de la definición (2) converge, el resultado es una función de s . En el análisis general se usa una letra minúscula para denotar la función que se transforma y la letra mayúscula correspondiente para denotar su transformada de Laplace, por ejemplo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s), \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s).$$

EJEMPLO 1 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe $\mathcal{L}\{1\}$.

SOLUCIÓN De (2),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(1) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

siempre que $s > 0$. En otras palabras, cuando $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo y $e^{-sb} \rightarrow 0$ conforme $b \rightarrow \infty$. La integral diverge para $s < 0$. ■

El uso del signo de límite se vuelve un poco tedioso, por lo que se adopta la notación $\int_0^{\infty}$ como abreviatura para escribir $\lim_{b \rightarrow \infty} () \Big|_0^b$. Por ejemplo,

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(1) dt = \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

En el límite superior, se sobreentiende lo que significa $e^{-st} \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ para $s > 0$.

EJEMPLO 2 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe $\mathcal{L}\{t\}$.

SOLUCIÓN De la definición 7.1.1 se tiene $\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt$. Al integrar por partes y usando $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-st} = 0$, $s > 0$, junto con el resultado del ejemplo 1, se obtiene

$$\mathcal{L}\{t\} = \left. \frac{-t e^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s^2}.$$

EJEMPLO 3 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe $\mathcal{L}\{e^{-3t}\}$.

SOLUCIÓN De la definición 7.1.1 se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-3t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-3t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+3)t} dt \\ &= \left. \frac{-e^{-(s+3)t}}{s+3} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s+3}, \quad s > -3. \end{aligned}$$

El resultado se deduce del hecho de que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+3)t} = 0$ para $s+3 > 0$ o $s > -3$. ■

EJEMPLO 4 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe $\mathcal{L}\{\sin 2t\}$.

SOLUCIÓN De la definición 7.1.1 e integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\sin 2t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sin 2t \, dt = \left. \frac{-e^{-st} \sin 2t}{s} \right|_0^{\infty} + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t \, dt \\
 &= \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t \, dt, \quad s > 0 \\
 &\stackrel{\substack{\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \cos 2t = 0, s > 0 \\ \downarrow}}}{=} \frac{2}{s} \left[\left. \frac{-e^{-st} \cos 2t}{s} \right|_0^{\infty} - \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin 2t \, dt \right] \quad \text{Transformada de Laplace de } \sin 2t \\
 &= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2} \mathcal{L}\{\sin 2t\}.
 \end{aligned}$$

En este punto se tiene una ecuación con $\mathcal{L}\{\sin 2t\}$ en ambos lados de la igualdad. Si se despeja esa cantidad el resultado es

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}, \quad s > 0. \quad \blacksquare$$

ES UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL Para una combinación lineal de funciones podemos escribir

$$\int_0^{\infty} e^{-st} [\alpha f(t) + \beta g(t)] \, dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) \, dt$$

siempre que ambas integrales converjan para $s > c$. Por lo que se tiene que

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s). \quad (3)$$

Como resultado de la propiedad dada en (3), se dice que $\mathcal{L}$ es una **transformación lineal**. Por ejemplo, de los ejemplos 1 y 2

$$\mathcal{L}\{1 + 5t\} = \mathcal{L}\{1\} + 5\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2},$$

y de los ejemplos 3 y 4

$$\mathcal{L}\{4e^{-3t} - 10 \sin 2t\} = 4\mathcal{L}\{e^{-3t}\} - 10\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{4}{s+3} - \frac{20}{s^2+4}.$$

Se establece la generalización de algunos ejemplos anteriores por medio del siguiente teorema. A partir de este momento se deja de expresar cualquier restricción en s ; se sobreentiende que s está lo suficientemente restringida para garantizar la convergencia de la adecuada transformada de Laplace.

TEOREMA 7.1.1 Transformada de algunas funciones básicas

$$\text{a) } \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\text{b) } \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{c) } \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\text{d) } \mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

$$\text{e) } \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

$$\text{f) } \mathcal{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2}$$

$$\text{g) } \mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2 - k^2}$$

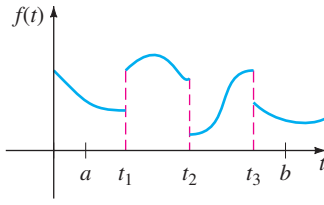


FIGURA 7.1.1 Función continua por tramos.

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE $\mathcal{L}\{f(t)\}$ La integral que define la transformada de Laplace no tiene que converger. Por ejemplo, no existe $\mathcal{L}\{1/t\}$ ni $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$. Las condiciones suficientes que garantizan la existencia de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ son que f sea continua por tramos en $[0, \infty)$ y que f sea de orden exponencial para $t > T$. Recuerde que la función es **continua por tramos** en $[0, \infty)$ si, en cualquier intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$, hay un número finito de puntos $t_k, k = 1, 2, \dots, n$ ($t_{k-1} < t_k$) en los que f tiene discontinuidades finitas y es continua en cada intervalo abierto (t_{k-1}, t_k) . Vea la figura 7.1.1. El concepto de **orden exponencial** se define de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 7.1.2 Orden exponencial

Se dice que f es de **orden exponencial c** si existen constantes $c, M > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para toda $t > T$.

Si f es una función *creciente*, entonces la condición $|f(t)| \leq Me^{ct}, t > T$, simplemente establece que la gráfica de f en el intervalo (T, ∞) no crece más rápido que la gráfica de la función exponencial Me^{ct} , donde c es una constante positiva. Vea la figura 7.1.2. Las funciones $f(t) = t, f(t) = e^{-t}$ y $f(t) = 2 \cos t$ son de orden exponencial $c = 1$ para $t > 0$ puesto que se tiene, respectivamente,

$$|t| \leq e^t, \quad |e^{-t}| \leq e^t, \quad \text{y} \quad |2 \cos t| \leq 2e^t.$$

Una comparación de las gráficas en el intervalo $(0, \infty)$ se muestra en la figura 7.1.3.

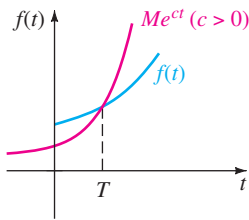


FIGURA 7.1.2 f es de orden exponencial c .

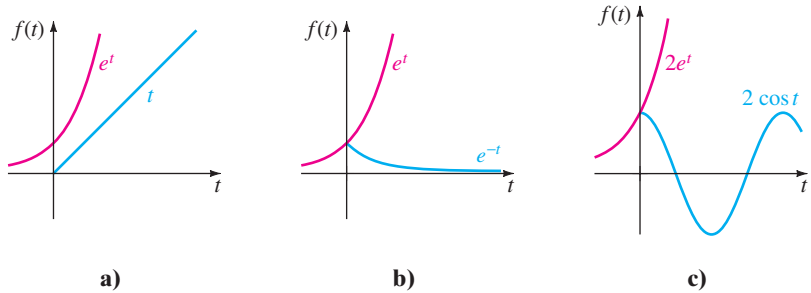


FIGURA 7.1.3 Tres funciones de orden exponencial $c = 1$.

Una función como $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial puesto que, como se muestra en la figura 7.1.4, su gráfica crece más rápido que cualquier potencia lineal positiva de e para $t > c > 0$.

Un exponente entero positivo de t siempre es de orden exponencial puesto que, para $c > 0$,

$$|t^n| \leq Me^{ct} \quad \text{o} \quad \left| \frac{t^n}{e^{ct}} \right| \leq M \quad \text{para} \quad t > T$$

es equivalente a demostrar que el $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n / e^{ct}$ es finito para $n = 1, 2, 3, \dots$. El resultado se deduce con n aplicaciones de la regla de L'Hôpital.

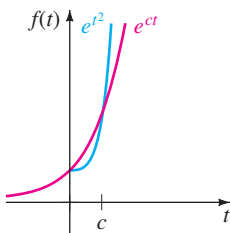


FIGURA 7.1.4 e^{t^2} no es de orden exponencial.

TEOREMA 7.1.2 Condiciones suficientes para la existencia

Si f es una función continua por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial c , entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

DEMOSTRACIÓN Por la propiedad aditiva del intervalo de integrales definidas podemos escribir

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt = I_1 + I_2.$$

La integral I_1 existe ya que se puede escribir como la suma de integrales en los intervalos en los que $e^{-st}f(t)$ es continua. Ahora puesto que f es de orden exponencial, existen constantes $c, M > 0, T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t > T$. Entonces podemos escribir

$$|I_2| \leq \int_T^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq M \int_T^\infty e^{-st} e^{ct} dt = M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt = M \frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}$$

para $s > c$. Puesto que $\int_T^\infty Me^{-(s-c)t} dt$ converge, la integral $\int_T^\infty |e^{-st} f(t)| dt$ converge por la prueba de comparación para integrales impropias. Esto, a su vez, significa que I_2 existe para $s > c$. La existencia de I_1 e I_2 implica que existe $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ para $s > c$. ■

EJEMPLO 5 Transformada de una función continua por tramos

Evalúe $\mathcal{L}\{f(t)\}$ donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3. \end{cases}$

SOLUCIÓN La función que se muestra en la figura 7.1.5, es continua por tramos y de orden exponencial para $t > 0$. Puesto que f se define en dos tramos, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ se expresa como la suma de dos integrales:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^3 e^{-st} (0) dt + \int_3^\infty e^{-st} (2) dt \\ &= 0 + \left. \frac{2e^{-st}}{-s} \right|_3^\infty \\ &= \frac{2e^{-3s}}{s}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

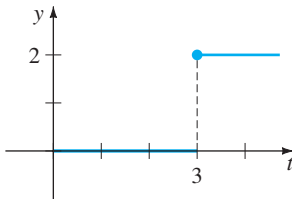


FIGURA 7.1.5 Función continua por tramos.

Se concluye esta sección con un poco más de teoría relacionada con los tipos de funciones de s con las que en general se estará trabajando. El siguiente teorema indica que no toda función arbitraria de s es una transformada de Laplace de una función continua por tramos de orden exponencial.

TEOREMA 7.1.3 Comportamiento de $F(s)$ conforme $s \rightarrow \infty$

Si f es continua por partes en $(0, \infty)$ y de orden exponencial y $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, entonces $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Puesto que f es de orden exponencial, existen constantes $\gamma, M_1 > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq M_1 e^{\gamma t}$ para $t > T$. También, puesto que f es continua por tramos en el intervalo $0 \leq t \leq T$, está necesariamente acotada en el intervalo; es decir, $|f(t)| \leq M_2 = M_2 e^{0t}$. Si M denota el máximo del conjunto $\{M_1, M_2\}$ y c denota el máximo de $\{0, \gamma\}$, entonces

$$|F(s)| \leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} dt = M \int_0^\infty e^{-(s-c)t} dt = \frac{M}{s-c}$$

para $s > c$. Conforme $s \rightarrow \infty$, se tiene $|F(s)| \rightarrow 0$ y por tanto $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \rightarrow 0$. ■

COMENTARIOS

i) En este capítulo nos dedicaremos principalmente a funciones que son continuas por tramos y de orden exponencial. Sin embargo, se observa que estas dos condiciones son suficientes pero no necesarias para la existencia de la transformada de Laplace. La función $f(t) = t^{-1/2}$ no es continua por tramos en el intervalo $[0, \infty)$, pero existe su transformada de Laplace. Vea el problema 42 en los ejercicios 7.1.

ii) Como consecuencia del teorema 7.1.3 se puede decir que las funciones de s como $F_1(s) = 1$ y $F_2(s) = s/(s+1)$ no son las transformadas de Laplace de funciones continuas por tramos de orden exponencial, puesto que $F_1(s) \not\rightarrow 0$ y $F_2(s) \not\rightarrow 0$ conforme $s \rightarrow \infty$. Pero no se debe concluir de esto que $F_1(s)$ y $F_2(s)$ no son transformadas de Laplace. Hay otras clases de funciones.

EJERCICIOS 7.1 Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-10.

En los problemas 1 a 18 use la definición 7.1 para encontrar $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

$$1. f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$2. f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$3. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$4. f(t) = \begin{cases} 2t + 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$5. f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

$$6. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi/2 \\ \cos t, & t \geq \pi/2 \end{cases}$$

7.

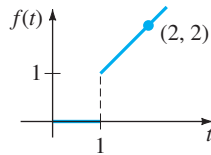


FIGURA 7.1.6 Gráfica para el problema 7.

8.

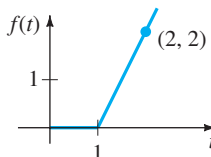


FIGURA 7.1.7 Gráfica para el problema 8.

9.

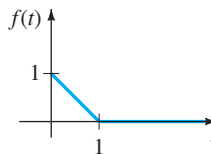


FIGURA 7.1.8 Gráfica para el problema 9.

10.

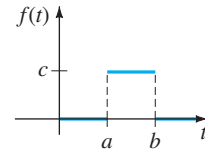


FIGURA 7.1.9 Gráfica para el problema 10.

$$11. f(t) = e^{t+7}$$

$$12. f(t) = e^{-2t-5}$$

$$13. f(t) = te^{4t}$$

$$14. f(t) = t^2 e^{-2t}$$

$$15. f(t) = e^{-t} \sin t$$

$$16. f(t) = e^t \cos t$$

$$17. f(t) = t \cos t$$

$$18. f(t) = t \sin t$$

En los problemas 19 a 36 use el teorema 7.1.1 para encontrar $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

$$19. f(t) = 2t^4$$

$$20. f(t) = t^5$$

$$21. f(t) = 4t - 10$$

$$22. f(t) = 7t + 3$$

$$23. f(t) = t^2 + 6t - 3$$

$$24. f(t) = -4t^2 + 16t + 9$$

$$25. f(t) = (t + 1)^3$$

$$26. f(t) = (2t - 1)^3$$

$$27. f(t) = 1 + e^{4t}$$

$$28. f(t) = t^2 - e^{-9t} + 5$$

$$29. f(t) = (1 + e^{2t})^2$$

$$30. f(t) = (e^t - e^{-t})^2$$

$$31. f(t) = 4t^2 - 5 \sin 3t$$

$$32. f(t) = \cos 5t + \sin 2t$$

$$33. f(t) = \sinh kt$$

$$34. f(t) = \cosh kt$$

$$35. f(t) = e^t \sinh t$$

$$36. f(t) = e^{-t} \cosh t$$

En los problemas 37 a 40 encuentre $\mathcal{L}\{f(t)\}$ usando primero una identidad trigonométrica.

$$37. f(t) = \sin 2t \cos 2t$$

$$38. f(t) = \cos^2 t$$

$$39. f(t) = \sin(4t + 5)$$

$$40. f(t) = 10 \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$$

41. Una definición de la **función gamma** está dada por la integral impropia $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, $\alpha > 0$.

- a) Demuestre que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
 b) Demuestre que $\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$.
 42. Use el hecho de que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ y el problema 41 para encontrar la transformada de Laplace de
 a) $f(t) = t^{-1/2}$ b) $f(t) = t^{1/2}$ c) $f(t) = t^{3/2}$.

Problemas para analizar

43. Construya una función $F(t)$ que sea de orden exponencial pero donde $f(t) = F'(t)$ no sea de orden exponencial. Construya una función f que no sea de orden exponencial, pero cuya transformada de Laplace exista.
 44. Suponga que $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ para $s > c_1$ y que $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$ para $s > c_2$. ¿Cuándo

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)?$$

 45. La figura 7.1.4 indica, pero no demuestra, que la función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial. ¿Cómo demuestra

la observación de que $t^2 > \ln M + ct$, para $M > 0$ y t suficientemente grande, que $e^{t^2} > Me^{ct}$ para cualquier c ?

46. Utilice el inciso c) del teorema 7.1.1 para demostrar que

$$\mathcal{L}\{e^{(a+ib)t}\} = \frac{s - a + ib}{(s - a)^2 + b^2},$$
 donde a y b son reales e $i^2 = -1$. Demuestre cómo se puede usar la fórmula de Euler (página 134) para deducir los resultados

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2}.$$

47. ¿Bajo qué condiciones es una función lineal $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$, una transformada lineal?
 48. La demostración del inciso b) del teorema 7.1.1 requiere el uso de la inducción matemática. Demuestre que si se supone que $\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = (n-1)!/s^n$ es cierta, entonces se deduce que $\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$.

7.2

TRANSFORMADAS INVERSAS Y TRANSFORMADAS DE DERIVADAS

REPASO DE MATERIAL

- Descomposición en fracciones parciales

INTRODUCCIÓN En esta sección se dan algunos pasos hacia un estudio de cómo se puede usar la transformada de Laplace para resolver ciertos tipos de ecuaciones para una función desconocida. Se empieza el análisis con el concepto de transformada de Laplace inversa o, más exactamente, la inversa de una transformada de Laplace $F(s)$. Después de algunos antecedentes preliminares importantes sobre la transformada de Laplace de derivadas $f'(t), f''(t), \dots$, se ilustra cómo entran en juego la transformada de Laplace y la transformada de Laplace inversa para resolver ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas.

7.2.1 TRANSFORMADAS INVERSAS

EL PROBLEMA INVERSO Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, es decir, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, se dice entonces que $f(t)$ es la **transformada de Laplace inversa** de $F(s)$ y se escribe $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. En el caso de los ejemplos 1, 2 y 3 de la sección 7.1 tenemos, respectivamente

Transformada	Transformada inversa
$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$	$1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$
$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$	$t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$
$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$	$e^{-3t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$

Pronto veremos que en la aplicación de la transformada de Laplace a ecuaciones no se puede determinar de manera directa una función desconocida $f(t)$; más bien, se puede despejar la transformada de Laplace $F(s)$ o $f(t)$; pero a partir de ese conocimiento, se determina f calculando $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. La idea es simplemente esta: suponga que

$F(s) = \frac{-2s + 6}{s^2 + 4}$ es una transformada de Laplace; encuentre una función $f(t)$ tal que

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. En el ejemplo 2 se muestra cómo resolver este último problema.

Para futuras referencias el análogo del teorema 7.1.1 para la transformada inversa se presenta como nuestro siguiente teorema.

TEOREMA 7.2.1 Algunas transformadas inversas

$$\text{a) } 1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$\text{b) } t^n = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{c) } e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$$

$$\text{d) } \sin kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 + k^2}\right\}$$

$$\text{e) } \cos kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + k^2}\right\}$$

$$\text{f) } \sinh kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 - k^2}\right\}$$

$$\text{g) } \cosh kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - k^2}\right\}$$

Al evaluar las transformadas inversas, suele suceder que una función de s que estamos considerando no concuerda *exactamente* con la forma de una transformada de Laplace $F(s)$ que se presenta en la tabla. Es posible que sea necesario “arreglar” la función de s multiplicando y dividiendo entre una constante apropiada.

EJEMPLO 1 Aplicando el teorema 7.2.1

Evalúe a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 7}\right\}$.

SOLUCIÓN a) Para hacer coincidir la forma dada en el inciso b) del teorema 7.2.1, se identifica $n + 1 = 5$ o $n = 4$ y luego se multiplica y divide entre $4!$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{24} t^4.$$

b) Para que coincida con la forma dada en el inciso d) del teorema 7.2.1, identificamos $k^2 = 7$ y, por tanto, $k = \sqrt{7}$. Se arregla la expresión multiplicando y dividiendo entre $\sqrt{7}$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2 + 7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}} \sin \sqrt{7}t. \quad \blacksquare$$

$\mathcal{L}^{-1}$ ES UNA TRANSFORMADA LINEAL La transformada de Laplace inversa es también una transformada lineal para las constantes α y β

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}, \quad (1)$$

donde F y G son las transformadas de algunas funciones f y g . Como en la ecuación (2) de la sección 7.1, la ecuación 1 se extiende a cualquier combinación lineal finita de transformadas de Laplace.

EJEMPLO 2 División término a término y linealidad

Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\}$.

SOLUCIÓN Primero se reescribe la función dada de s como dos expresiones dividiendo cada uno de los términos del numerador entre el denominador y después se usa la ecuación (1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4}\right\} = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{6}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \quad (2) \\ &= -2\cos 2t + 3\sin 2t. \quad \leftarrow \text{incisos e) y d) del teorema 7.2.1 con } k=2 \end{aligned}$$

FRACCIONES PARCIALES Las fracciones parciales juegan un papel importante en la determinación de transformadas de Laplace inversas. La descomposición de una expresión racional en las fracciones componentes se puede hacer rápidamente usando una sola instrucción en la mayoría de los sistemas algebraicos de computadora. De hecho, algunos SAC tienen paquetes implementados de transformada de Laplace y transformada de Laplace inversa. Pero para quienes no cuentan con este tipo de software, en esta sección y en las subsecuentes revisaremos un poco de álgebra básica en los casos importantes donde el denominador de una transformada de Laplace $F(s)$ contiene factores lineales distintos, factores lineales repetidos y polinomios cuadráticos sin factores reales. Aunque examinaremos cada uno de estos casos conforme se desarrolla este capítulo, podría ser buena idea que consultara un libro de cálculo o uno de precálculo para una revisión más completa de esta teoría.

En el siguiente ejemplo se muestra la descomposición en fracciones parciales en el caso en que el denominador de $F(s)$ se puede descomponer en *diferentes factores lineales*.

EJEMPLO 3 Fracciones parciales: diferentes factores lineales

Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$.

SOLUCIÓN Existen constantes reales A , B y C , por lo que

$$\begin{aligned} \frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4} \\ &= \frac{A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}. \end{aligned}$$

Puesto que los denominadores son idénticos, los numeradores son idénticos:

$$s^2+6s+9 = A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2). \quad (3)$$

Comparando los coeficientes de las potencias de s en ambos lados de la igualdad, sabemos que (3) es equivalente a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas A , B y C . Sin embargo, hay un atajo para determinar estas incógnitas. Si se hace $s=1$, $s=2$ y $s=-4$ en (3) se obtiene, respectivamente,

$$16 = A(-1)(5), \quad 25 = B(1)(6) \quad \text{y} \quad 1 = C(-5)(-6),$$

y así, $A = -\frac{16}{5}$, $B = \frac{25}{6}$, y $C = \frac{1}{30}$. Por lo que la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = -\frac{16/5}{s-1} + \frac{25/6}{s-2} + \frac{1/30}{s+4}, \quad (4)$$

y, por tanto, de la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$ y del inciso c) del teorema 7.2.1,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} &= -\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \\ &= -\frac{16}{5}e^t + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.\end{aligned}\quad (5) \quad \blacksquare$$

7.2.2 TRANSFORMADAS DE DERIVADAS

TRANSFORMADA DE UNA DERIVADA Como se indicó en la introducción de este capítulo, el objetivo inmediato es usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales. Para tal fin, es necesario evaluar cantidades como $\mathcal{L}\{dy/dt\}$ y $\mathcal{L}\{d^2y/dt^2\}$. Por ejemplo, si f' es continua para $t \geq 0$, entonces integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}\end{aligned}$$

$$\text{o} \quad \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \quad (6)$$

Aquí hemos supuesto que $e^{-st}f(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. De manera similar, con la ayuda de la ecuación (6),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t) dt = e^{-st} f'(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt \\ &= -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\} \\ &= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \quad \leftarrow \text{de (6)}\end{aligned}$$

$$\text{o} \quad \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \quad (7)$$

De igual manera se puede demostrar que

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \quad (8)$$

La naturaleza recursiva de la transformada de Laplace de las derivadas de una función f es evidente de los resultados en (6), (7) y (8). El siguiente teorema da la transformada de Laplace de la n -ésima derivada de f . Se omite la demostración.

TEOREMA 7.2.2 Transformada de una derivada

Si $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty)$ y son de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

SOLUCIÓN DE EDO LINEALES Es evidente del resultado general dado en el teorema 7.2.2 que $\mathcal{L}\{d^n y/dt^n\}$ depende de $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y las $n-1$ derivadas de $y(t)$ evaluadas en $t=0$. Esta propiedad hace que la transformada de Laplace sea adecuada para resolver problemas lineales con valores iniciales en los que la ecuación diferencial tiene *coeficientes constantes*. Este tipo de ecuación diferencial es simplemente una combinación lineal de términos $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = g(t),$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

donde las $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ y $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ son constantes. Por la propiedad de linealidad la transformada de Laplace de esta combinación lineal es una combinación lineal de transformadas de Laplace:

$$a_n \mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1} \mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right\} + \dots + a_0 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (9)$$

Del teorema 7.2.2, la ecuación (9) se convierte en

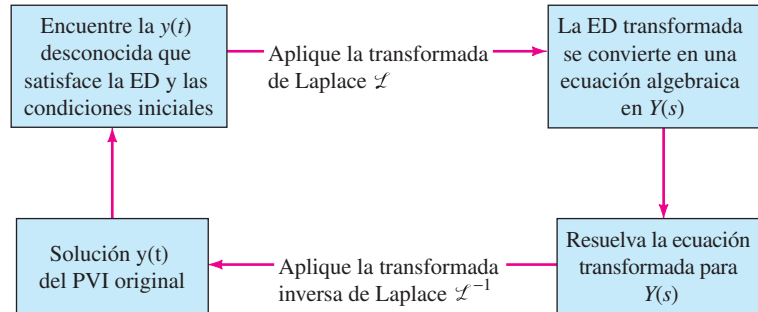
$$a_n[s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)] + \dots + a_0 Y(s) = G(s), \quad (10)$$

donde $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$. En otras palabras, *la transformada de Laplace de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se convierte en una ecuación algebraica en $Y(s)$* . Si se resuelve la ecuación transformada general (10) para el símbolo $Y(s)$, primero se obtiene $P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$ y después se escribe

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)}, \quad (11)$$

donde $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$, $Q(s)$ es un polinomio en s de grado menor o igual a $n - 1$ que consiste en varios productos de los coeficientes $a_i, i = 1, \dots, n$ y las condiciones iniciales prescritas $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ y $G(s)$ es la transformada de Laplace de $g(t)$.^{*} Normalmente se escriben los dos términos de la ecuación (11) sobre el mínimo común denominador y después se descompone la expresión en dos o más fracciones parciales. Por último, la solución $y(t)$ del problema con valores iniciales original es $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, donde la transformada inversa se hace término a término.

El procedimiento se resume en el siguiente diagrama.



En el ejemplo siguiente se ilustra el método anterior para resolver ED, así como la descomposición en fracciones parciales para el caso en que el denominador de $Y(s)$ contenga un *polinomio cuadrático sin factores reales*.

EJEMPLO 4 Solución de un PVI de primer orden

Use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 13 \sin 2t, \quad y(0) = 6.$$

SOLUCIÓN Primero se toma la transformada de cada miembro de la ecuación diferencial.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3\mathcal{L}\{y\} = 13\mathcal{L}\{\sin 2t\}. \quad (12)$$

^{*}El polinomio $P(s)$ es igual al polinomio auxiliar de n -ésimo grado en la ecuación (12) de la sección 4.3 donde el símbolo m usual se sustituye por s .

De (6), $\mathcal{L}\{dy/dt\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 6$, y del inciso d) del teorema 7.1.1, $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = 2/(s^2 + 4)$, por lo que la ecuación (12) es igual que

$$sY(s) - 6 + 3Y(s) = \frac{26}{s^2 + 4} \quad \text{o} \quad (s + 3)Y(s) = 6 + \frac{26}{s^2 + 4}.$$

Resolviendo la última ecuación para $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{6}{s + 3} + \frac{26}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)}. \quad (13)$$

Puesto que el polinomio cuadrático $s^2 + 4$ no se factoriza usando números reales, se supone que el numerador en la descomposición de fracciones parciales es un polinomio lineal en s :

$$\frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{A}{s + 3} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}.$$

Poniendo el lado derecho de la igualdad sobre un común denominador e igualando los numeradores, se obtiene $6s^2 + 50 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s + 3)$. Haciendo $s = -3$ se obtiene inmediatamente que $A = 8$. Puesto que el denominador no tiene más raíces reales, se igualan los coeficientes de s^2 y s : $6 = A + B$ y $0 = 3B + C$. Si en la primera ecuación se usa el valor de A se encuentra que $B = -2$, y con este valor aplicado a la segunda ecuación, se obtiene $C = 6$. Por lo que,

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{8}{s + 3} + \frac{-2s + 6}{s^2 + 4}.$$

Aún no se termina porque la última expresión racional se tiene que escribir como dos fracciones. Esto se hizo con la división término a término entre el denominador del ejemplo 2. De (2) de ese ejemplo,

$$y(t) = 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 3}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\}.$$

Se deduce de los incisos c), d) y e) del teorema 7.2.1, que la solución del problema con valores iniciales es $y(t) = 8e^{-3t} - 2 \cos 2t + 3 \sin 2t$. ■

EJEMPLO 5 Solución de un PVI de segundo orden

Resuelva $y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

SOLUCIÓN Procediendo como en el ejemplo 4, se transforma la ED. Se toma la suma de las transformadas de cada término, se usan las ecuaciones (6) y (7), las condiciones iniciales dadas, el inciso c) del teorema 7.2.1 y entonces se resuelve para $Y(s)$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - 3\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-4t}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s + 4}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s + 2 + \frac{1}{s + 4}$$

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s^2 - 3s + 2} + \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)(s + 4)} = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s - 1)(s - 2)(s + 4)}. \quad (14)$$

Los detalles de la descomposición en fracciones parciales de $Y(s)$ ya se presentaron en el ejemplo 3. En vista de los resultados en (3) y (4), se tiene la solución del problema con valores iniciales

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{16}{5}e^t + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}. \quad \blacksquare$$

En los ejemplos 4 y 5, se ilustra el procedimiento básico de cómo usar la transformada de Laplace para resolver un problema lineal con valores iniciales, pero podría parecer que estos ejemplos demuestran un método que no es mucho mejor que el aplicado a los problemas descritos en las secciones 2.3 y 4.3 a 4.6. No saque conclusiones negativas de sólo dos ejemplos. Sí, hay una gran cantidad de álgebra inherente al uso de la transformada de Laplace, *pero* observe que no se tiene que usar la variación de parámetros o preocuparse acerca de los casos y el álgebra en el método de coeficientes indeterminados. Además, puesto que el método incorpora las condiciones iniciales prescritas directamente en la solución, no se requiere la operación separada de aplicar las condiciones iniciales a la solución general $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + y_p$ de la ED para determinar constantes específicas en una solución particular del PVI.

La transformada de Laplace tiene muchas propiedades operacionales. En las secciones que siguen se examinan algunas de estas propiedades y se ve cómo permiten resolver problemas de mayor complejidad.

COMENTARIOS

i) La transformada de Laplace inversa de una función $F(s)$ podría no ser única; en otras palabras, es posible que $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$ y sin embargo $f_1 \neq f_2$. Para nuestros propósitos, esto no es algo que nos deba preocupar. Si f_1 y f_2 son continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces f_1 y f_2 son *esencialmente* iguales. Véase el problema 44 en los ejercicios 7.2. Sin embargo, si f_1 y f_2 son continuas en $[0, \infty)$ y $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$, entonces $f_1 = f_2$ en el intervalo.

ii) Este comentario es para quienes tengan la necesidad de hacer a mano descomposiciones en fracciones parciales. Hay otra forma de determinar los coeficientes en una descomposición de fracciones parciales en el caso especial cuando $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ es una función racional de s y el denominador de F es un producto de *distintos* factores lineales. Esto se ilustra al analizar de nuevo el ejemplo 3. Suponga que se multiplican ambos lados de la supuesta descomposición

$$\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4} \quad (15)$$

digamos, por $s-1$, se simplifica y entonces se hace $s=1$. Puesto que los coeficientes de B y C en el lado derecho de la igualdad son cero, se obtiene

$$\left. \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-2)(s+4)} \right|_{s=1} = A \quad \text{o} \quad A = -\frac{16}{5}.$$

Escrita de otra forma,

$$\left. \frac{s^2 + 6s + 9}{\boxed{(s-1)}(s-2)(s+4)} \right|_{s=1} = -\frac{16}{5} = A,$$

donde se ha sombreado o *cubierto*, el factor que se elimina cuando el lado izquierdo se multiplica por $s-1$. Ahora, para obtener B y C , simplemente se evalúa el lado izquierdo de (15) mientras se cubre, a su vez, $s-2$ y $s+4$:

$$\left. \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)\boxed{(s-2)}(s+4)} \right|_{s=2} = \frac{25}{6} = B$$

$$\text{y} \quad \left. \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)\boxed{(s+4)}} \right|_{s=-4} = \frac{1}{30} = C.$$

La descomposición deseada (15) se da en (4). Esta técnica especial para determinar coeficientes se conoce desde luego como **método de cubrimiento**.

iii) En este comentario continuamos con la introducción a la terminología de sistemas dinámicos. Como resultado de las ecuaciones (9) y (10) la transformada de Laplace se adapta bien a sistemas dinámicos *lineales*. El polinomio $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0$ en (11) es el coeficiente total de $Y(s)$ en (10) y es simplemente el lado izquierdo de la ED en donde las derivadas $d^k y/dt^k$ se sustituyen por potencias s^k , $k = 0, 1, \dots, n$. Es común llamar al recíproco de $P(s)$, en particular $W(s) = 1/P(s)$, **función de transferencia** del sistema y escribir la ecuación (11) como

$$Y(s) = W(s)Q(s) + W(s)G(s). \quad (16)$$

De esta manera se han separado, en un sentido aditivo, los efectos de la respuesta debidos a las condiciones iniciales (es decir, $W(s)Q(s)$) de los causados por la función de entrada g (es decir, $W(s)G(s)$). Vea (13) y (14). Por tanto la respuesta $y(t)$ del sistema es una superposición de dos respuestas:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)Q(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{W(s)G(s)\} = y_0(t) + y_1(t).$$

Si la entrada es $g(t) = 0$, entonces la solución del problema es $y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)Q(s)\}$. Esta solución se llama **respuesta de entrada cero** del sistema. Por otro lado, la función $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)G(s)\}$ es la salida debida a la entrada $g(t)$. Entonces, si la condición inicial del sistema es el estado cero (todas las condiciones iniciales son cero), entonces $Q(s) = 0$ y por tanto, la única solución del problema con valores iniciales es $y_1(t)$. La última solución se llama **respuesta de estado cero** del sistema. Tanto $y_0(t)$ como $y_1(t)$ son soluciones particulares: $y_0(t)$ es una solución del PVI que consiste en la ecuación homogénea relacionada con las condiciones iniciales dadas y $y_1(t)$ es una solución del PVI que consiste en la ecuación no homogénea con condiciones iniciales cero. En el ejemplo 5 se ve de (14) que la función de transferencia es $W(s) = 1/(s^2 - 3s + 2)$, la respuesta de entrada cero es

$$y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s-1)(s-2)}\right\} = -3e^t + 4e^{2t},$$

y la respuesta de estado cero es

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{1}{5}e^t + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.$$

Compruebe que la suma de $y_0(t)$ y $y_1(t)$ es la solución de $y(t)$ en el ejemplo 5 y que $y_0(0) = 1$, $y_0'(0) = 5$, mientras que $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$.

EJERCICIOS 7.2 Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-10.

7.2.1 TRANSFORMADAS INVERSAS

En los problemas 1 a 30 use el álgebra apropiada y el teorema 7.2.1 para encontrar la transformada inversa de Laplace dada.

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{48}{s^5}\right\}$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^3}\right)^2\right\}$

5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$

6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)^2}{s^3}\right\}$

7. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}\right\}$

9. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$

11. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$

13. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$

15. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$

8. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s} + \frac{6}{s^5} - \frac{1}{s+8}\right\}$

10. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s-2}\right\}$

12. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2+16}\right\}$

14. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+1}\right\}$

16. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}$

17. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 3s}\right\}$ 18. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2 - 4s}\right\}$
19. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 2s - 3}\right\}$ 20. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + s - 20}\right\}$
21. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.9s}{(s - 0.1)(s + 0.2)}\right\}$
22. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - 3}{(s - \sqrt{3})(s + \sqrt{3})}\right\}$
23. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s - 2)(s - 3)(s - 6)}\right\}$
24. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 1}{s(s - 1)(s + 1)(s - 2)}\right\}$
25. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3 + 5s}\right\}$ 26. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s + 2)(s^2 + 4)}\right\}$
27. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s - 4}{(s^2 + s)(s^2 + 1)}\right\}$ 28. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4 - 9}\right\}$
29. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}\right\}$ 30. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s + 3}{s^4 + 5s^2 + 4}\right\}$

7.2.2 TRANSFORMADAS DE DERIVADAS

En los problemas 31 a 40, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

31. $\frac{dy}{dt} - y = 1, \quad y(0) = 0$
32. $2\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad y(0) = -3$
33. $y' + 6y = e^{4t}, \quad y(0) = 2$
34. $y' - y = 2 \cos 5t, \quad y(0) = 0$
35. $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
36. $y'' - 4y' = 6e^{3t} - 3e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
37. $y'' + y = \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0$
38. $y'' + 9y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

39. $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$
40. $y''' + 2y'' - y' - 2y = \sin 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

Las formas inversas de los resultados del problema 46 en los ejercicios 7.1 son

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}\right\} = e^{at} \cos bt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}\right\} = e^{at} \sin bt.$$

En los problemas 41 y 42 use la transformada de Laplace y estas inversas para resolver el problema con valores iniciales dado.

41. $y' + y = e^{-3t} \cos 2t, \quad y(0) = 0$
42. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

Problemas para analizar

43. a) Con un ligero cambio de notación la transformada en (6) es igual a

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Con $f(t) = te^{at}$, analice cómo se puede usar este resultado junto con c) del teorema 7.1.1 para evaluar $\mathcal{L}\{te^{at}\}$.

- b) Proceda como en el inciso a), pero esta vez examine cómo usar (7) con $f(t) = t \sin kt$ junto con d) y e) del teorema 7.1.1 para evaluar $\mathcal{L}\{t \sin kt\}$.
44. Construya dos funciones f_1 y f_2 que tengan la misma transformada de Laplace. No considere ideas profundas.
45. Lea de nuevo el *Comentario iii)* de la página 269. Encuentre la respuesta de entrada cero y la respuesta de estado cero para el PVI del problema 36.
46. Suponga que $f(t)$ es una función para la que $f'(t)$ es continua por tramos y de orden exponencial c . Use los resultados de esta sección y la sección 7.1 para justificar

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Compruebe este resultado con $f(t) = \cos kt$.

7.3

PROPIEDADES OPERACIONALES I

REPASO DE MATERIAL

- Continúe practicando la descomposición en fracciones parciales.
- Completar el cuadrado.

INTRODUCCIÓN No es conveniente usar la definición 7.1 cada vez que se desea encontrar la transformada de Laplace de una función $f(t)$. Por ejemplo, la integración por partes requerida para evaluar $\mathcal{L}\{e^{t^2} \sin 3t\}$ es formidable en pocas palabras. En esta sección y la que sigue se presentan varias propiedades operacionales de la transformada de Laplace que ahorran trabajo y permiten construir una lista más extensa de transformadas (vea la tabla del apéndice III) sin tener que recurrir a la definición básica y a la integración.

7.3.1 TRASLACIÓN EN EL EJE s

UNA TRASLACION Evaluar transformadas tales como $\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\}$ y $\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$ es directo siempre que se conozca (y así es) $\mathcal{L}\{t^3\}$ y $\mathcal{L}\{\cos 4t\}$. En general, si se conoce la transformada de Laplace de una función f , $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, es posible calcular la transformada de Laplace de un múltiplo exponencial de f , es decir, $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$, sin ningún esfuerzo adicional que no sea *trasladar* o *desplazar*, la transformada $F(s)$ a $F(s - a)$. Este resultado se conoce como **primer teorema de traslación** o **primer teorema de desplazamiento**.

TEOREMA 7.3.1 Primer teorema de traslación

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a).$$

PRUEBA La demostración es inmediata, ya que por la definición 7.1.1

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s - a). \quad \blacksquare$$

Si se considera s una variable real, entonces la gráfica de $F(s - a)$ es la gráfica de $F(s)$ desplazada en el eje s por la cantidad $|a|$. Si $a > 0$, la gráfica de $F(s)$ se desplaza a unidades a la derecha, mientras que si $a < 0$, la gráfica se desplaza $|a|$ unidades a la izquierda. Véase la figura 7.3.1.

Para enfatizar, a veces es útil usar el simbolismo

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s \rightarrow s-a},$$

donde $s \rightarrow s - a$ significa que en la transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ siempre que aparezca el símbolo s se reemplaza por $s - a$.

EJEMPLO 1 Usando el primer teorema de traslación

Evalúe a) $\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\}$ b) $\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$.

SOLUCIÓN Los siguientes resultados se deducen de los teoremas 7.1.1 y 7.3.1.

$$\text{a) } \mathcal{L}\{e^{5t}t^3\} = \mathcal{L}\{t^3\}|_{s \rightarrow s-5} = \frac{3!}{s^4}|_{s \rightarrow s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}$$

$$\text{b) } \mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\} = \mathcal{L}\{\cos 4t\}|_{s \rightarrow s-(-2)} = \frac{s}{s^2 + 16}|_{s \rightarrow s+2} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 16} \quad \blacksquare$$

FORMA INVERSA DEL TEOREMA 7.3.1 Para calcular la inversa de $F(s - a)$, se debe reconocer $F(s)$, para encontrar $f(t)$ obteniendo la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ y después multiplicar $f(t)$ por la función exponencial e^{at} . Este procedimiento se resume con símbolos de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}|_{s \rightarrow s-a} = e^{at}f(t), \quad (1)$$

donde $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

En la primera parte del ejemplo siguiente se ilustra la descomposición en fracciones parciales en el caso cuando el denominador de $Y(s)$ contiene *factores lineales repetidos*.

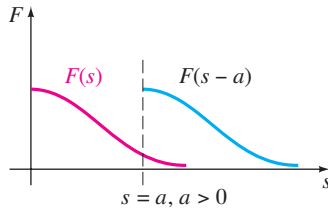


FIGURA 7.3.1 Desplazamiento en el eje s .

EJEMPLO 2 Fracciones parciales: factores lineales repetidos

Evalúe a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\}$.

SOLUCIÓN a) Un factor lineal repetido es un término $(s-a)^n$, donde a es un número real y n es un entero positivo ≥ 2 . Recuerde que si $(s-a)^n$ aparece en el denominador de una expresión racional, entonces se supone que la descomposición contiene n fracciones parciales con numeradores y denominadores constantes $s-a$, $(s-a)^2$, $\dots$, $(s-a)^n$. Por tanto, con $a=3$ y $n=2$ se escribe

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s-3)^2}.$$

Colocando los dos términos del lado derecho con un denominador común, se obtiene el numerador $2s+5 = A(s-3) + B$ y esta identidad produce $A=2$ y $B=11$. Por tanto,

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2} \quad (2)$$

$$\text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}. \quad (3)$$

Ahora $1/(s-3)^2$ es $F(s) = 1/s^2$ desplazada tres unidades a la derecha. Ya que $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} = t$, se tiene de (1) que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \Big|_{s \rightarrow s-3}\right\} = e^{3t}t.$$

$$\text{Por último, (3) es} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2e^{3t} + 11e^{3t}t. \quad (4)$$

b) Para empezar, observe que el polinomio cuadrático s^2+4s+6 no tiene raíces reales y por tanto no tiene factores lineales reales. En esta situación *completamos el cuadrado*:

$$\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6} = \frac{s/2+5/3}{(s+2)^2+2}. \quad (5)$$

El objetivo aquí es reconocer la expresión del lado derecho como alguna transformada de Laplace $F(s)$ en la cual se ha reemplazado s por $s+2$. Lo que se trata de hacer es similar a trabajar hacia atrás del inciso b) del ejemplo 1. El denominador en (5) ya está en la forma correcta, es decir, s^2+2 con $s+2$ en lugar de s . Sin embargo, se debe arreglar el numerador manipulando las constantes: $\frac{1}{2}s + \frac{5}{3} = \frac{1}{2}(s+2) + \frac{5}{3} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2}(s+2) + \frac{2}{3}$.

Ahora mediante la división entre el denominador de cada término, la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$, los incisos e) y d) del teorema 7.2.1 y por último (1),

$$\begin{aligned} \frac{s/2+5/3}{(s+2)^2+2} &= \frac{\frac{1}{2}(s+2) + \frac{2}{3}}{(s+2)^2+2} = \frac{1}{2} \frac{s+2}{(s+2)^2+2} + \frac{2}{3} \frac{1}{(s+2)^2+2} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\} + \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2} \Big|_{s \rightarrow s+2}\right\} + \frac{2}{3\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2} \Big|_{s \rightarrow s+2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} e^{-2t} \cos \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-2t} \sin \sqrt{2}t. \end{aligned} \quad (6) \quad (7) \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Un problema con valores iniciales

Resuelva $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 17$.

SOLUCIÓN Antes de transformar la ED, observe que su lado derecho es similar a la función del inciso a) del ejemplo 1. Después de usar la linealidad, el teorema 7.3.1 y las condiciones iniciales, se simplifica y luego se resuelve para $Y(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\} \\ s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) &= \frac{2}{(s-3)^3} \\ (s^2 - 6s + 9)Y(s) &= 2s + 5 + \frac{2}{(s-3)^3} \\ (s-3)^2 Y(s) &= 2s + 5 + \frac{2}{(s-3)^3} \\ Y(s) &= \frac{2s+5}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}.\end{aligned}$$

El primer término del lado derecho ya se ha descompuesto en fracciones parciales en (2) del inciso a) del ejemplo (2).

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}.$$

$$\text{Por lo que } y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} + \frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\}. \quad (8)$$

De la forma inversa (1) del teorema 7.3.1, los dos últimos términos de (8) son

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}_{s \rightarrow s-3} = te^{3t} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}_{s \rightarrow s-3} = t^4 e^{3t}.$$

Por lo que (8) es $y(t) = 2e^{3t} + 11te^{3t} + \frac{1}{12}t^4 e^{3t}$. ■

EJEMPLO 4 Un problema con valores iniciales

Resuelva $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

SOLUCIÓN $\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 6\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{e^{-t}\}$

$$\begin{aligned}s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \\ (s^2 + 4s + 6)Y(s) &= \frac{2s+1}{s(s+1)} \\ Y(s) &= \frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}\end{aligned}$$

Puesto que el término cuadrático en el denominador no se factoriza en factores lineales reales, se encuentra que la descomposición en fracciones parciales para $Y(s)$ es

$$Y(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{1/3}{s+1} - \frac{s/2 + 5/3}{s^2 + 4s + 6}.$$

Además, en la preparación para tomar la transformada inversa, ya se manejó el último término en la forma necesaria del inciso b) del ejemplo 2. Por lo que en vista de los resultados en (6) y (7), se tiene la solución

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\} - \frac{2}{3\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right\} \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \cos \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t} \sen \sqrt{2}t.
 \end{aligned}$$

7.3.2 TRASLACIÓN EN EL EJE t

FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO En ingeniería es común encontrar funciones que están ya sea “desactivadas” o “activadas”. Por ejemplo, una fuerza externa que actúa en un sistema mecánico, o un voltaje aplicado a un circuito, se puede desactivar después de cierto tiempo. Es conveniente entonces definir una función especial que es el número 0 (desactivada) hasta un cierto tiempo $t = a$ y entonces el número 1 (activada) después de ese tiempo. La función se llama **función escalón unitario** o **función de Heaviside**.

DEFINICIÓN 7.3.1 Función escalón unitario

La función escalón unitario $\mathcal{U}(t - a)$ se define como

$$\mathcal{U}(t - a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$

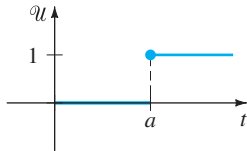


FIGURA 7.3.2 Gráfica de la función escalón unitario.

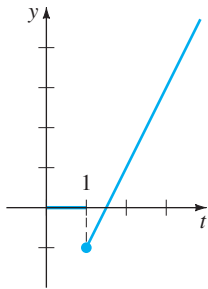


FIGURA 7.3.3 La función es $f(t) = (2t - 3)\mathcal{U}(t - 1)$.

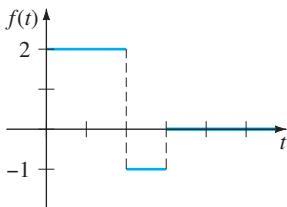


FIGURA 7.3.4 La función es $f(t) = 2 - 3\mathcal{U}(t - 2) + \mathcal{U}(t - 3)$.

Observe que se define $\mathcal{U}(t - a)$ sólo en el eje t no negativo, puesto que esto es todo lo que interesa en el estudio de la transformada de Laplace. En un sentido más amplio, $\mathcal{U}(t - a) = 0$ para $t < a$. En la figura 7.3.2, se muestra la gráfica de $\mathcal{U}(t - a)$.

Cuando una función f definida para $t \geq 0$ se multiplica por $\mathcal{U}(t - a)$, la función escalón unitario “desactiva” una parte de la gráfica de esa función. Por ejemplo, considere la función $f(t) = 2t - 3$. Para “desactivar” la parte de la gráfica de f para $0 \leq t < 1$, simplemente formamos el producto $(2t - 3)\mathcal{U}(t - 1)$. Véase la figura 7.3.3. En general, la gráfica de $f(t)\mathcal{U}(t - a)$ es 0 (desactivada) para $0 \leq t < a$ y es la parte de la gráfica de f (activada) para $t \geq a$.

La función escalón unitario también se puede usar para escribir funciones definidas por tramos en una forma compacta. Por ejemplo, si consideramos $0 \leq t < 2$, $2 \leq t < 3$, y $t \geq 3$ y los valores correspondientes de $\mathcal{U}(t - 2)$ y $\mathcal{U}(t - 3)$, debe ser evidente que la función definida por tramos que se muestra en la figura 7.3.4 es igual que $f(t) = 2 - 3\mathcal{U}(t - 2) + \mathcal{U}(t - 3)$. También, una función general definida por tramos del tipo

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases} \quad (9)$$

es la misma que:

$$f(t) = g(t) - g(t)\mathcal{U}(t - a) + h(t)\mathcal{U}(t - a). \quad (10)$$

Análogamente, una función del tipo

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ g(t), & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases} \quad (11)$$

puede ser escrita como

$$f(t) = g(t)[\mathcal{U}(t - a) - \mathcal{U}(t - b)]. \quad (12)$$

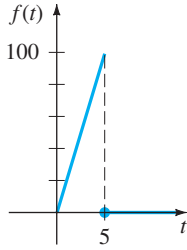
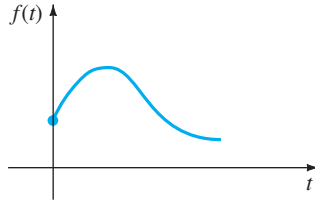
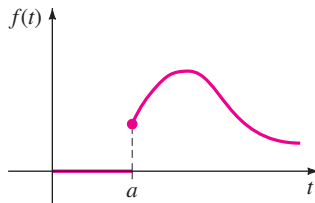


FIGURA 7.3.5 La función es $f(t) = 20t - 20tU(t-5)$.



a) $f(t), t \geq 0$



b) $f(t-a)U(t-a)$

FIGURA 7.3.6 Desplazamiento en el eje t .

EJEMPLO 5 Una función definida por tramos

Expresé $f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$ en términos de funciones escalón unitario. Trace la gráfica.

SOLUCIÓN En la figura 7.3.5 se muestra la gráfica de f . Ahora, de (9) y (10) con $a = 5$, $g(t) = 20t$ y $h(t) = 0$, se obtiene $f(t) = 20t - 20tU(t-5)$. ■

Considere una función general $y = f(t)$ definida para $t \geq 0$. La función definida por tramos

$$f(t-a)U(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ f(t-a), & t \geq a \end{cases} \quad (13)$$

juega un papel importante en la explicación que sigue. Como se muestra en la figura 7.3.6, para $a > 0$ la gráfica de la función $y = f(t-a)U(t-a)$ coincide con la gráfica de $y = f(t-a)$ para $t \geq a$ (que es la gráfica *completa* de $y = f(t)$, $t \geq 0$ desplazada a unidades a la derecha en el eje t), pero es idénticamente cero para $0 \leq t < a$.

Vimos en el teorema 7.3.1 que un múltiplo exponencial de $f(t)$ da como resultado una traslación de la transformada $F(s)$ en el eje s . Como una consecuencia del siguiente teorema, se ve que siempre que $F(s)$ se multiplica por una función exponencial e^{-as} , $a > 0$, la transformada inversa del producto $e^{-as}F(s)$ es la función f desplazada a lo largo del eje t en la manera que se muestra en la figura 7.3.6b. Este resultado, presentado a continuación en su versión de transformada directa, se llama **segundo teorema de traslación** o **segundo teorema de desplazamiento**.

TEOREMA 7.3.2 Segundo teorema de traslación

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)U(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

DEMOSTRACIÓN Por la propiedad de intervalo aditivo de integrales,

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t-a)U(t-a)dt$$

se puede escribir como dos integrales:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)U(t-a)\} = \int_0^a e^{-st}f(t-a) \underbrace{U(t-a)}_{\text{cero para } 0 \leq t < a} dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t-a) \underbrace{U(t-a)}_{\text{uno para } t \geq a} dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a) dt.$$

Ahora si hacemos $v = t - a$, $dv = dt$ en la última integral, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)U(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)}f(v)dv = e^{-as} \int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}. \quad \blacksquare$$

Con frecuencia se desea encontrar la transformada de Laplace de sólo una función escalón unitario. Esto puede ser de la definición 7.1.1 o teorema 7.3.2. Si se identifica $f(t) = 1$ en el teorema 7.3.2, entonces $f(t-a) = 1$, $F(s) = \mathcal{L}\{1\} = 1/s$ y por tanto,

$$\mathcal{L}\{U(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}. \quad (14)$$

Por ejemplo, si se usa la ecuación (14), la transformada de Laplace de la función de la figura 7.3.4 es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= 2\mathcal{L}\{1\} - 3\mathcal{L}\{U(t-2)\} + \mathcal{L}\{U(t-3)\} \\ &= 2\frac{1}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}. \end{aligned}$$

FORMA INVERSA DEL TEOREMA 7.3.2 Si $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, la forma inversa del teorema 7.3.2 $a > 0$, es

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t - a) \mathcal{U}(t - a). \quad (15)$$

EJEMPLO 6 Uso de la fórmula (15)

Evalúe **a)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\}$ **b)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\}.$

SOLUCIÓN **a)** De acuerdo con las identidades $a = 2$, $F(s) = 1/(s - 4)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{4t}$, se tiene de (15)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\} = e^{4(t-2)} \mathcal{U}(t-2).$$

b) Con $a = \pi/2$, $F(s) = s/(s^2 + 9)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \cos 3t$, de la ecuación (15) se obtiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\} = \cos 3\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

La última expresión se puede simplificar un poco con la fórmula adicional para el coseno. Compruebe que el resultado es igual a $-\sin 3t \mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$. ■

FORMA ALTERNATIVA DEL TEOREMA 7.3.2 Con frecuencia nos enfrentamos con el problema de encontrar la transformada de Laplace de un producto de una función g y una función escalón unitario $\mathcal{U}(t - a)$ donde la función g no tiene la forma precisa de desplazamiento $f(t - a)$ del teorema 7.3.2. Para encontrar la transformada de Laplace de $g(t)\mathcal{U}(t - a)$, es posible arreglar $g(t)$ en la forma requerida $f(t - a)$ usando álgebra. Por ejemplo, si se quiere usar el teorema 7.3.2 para determinar la transformada de Laplace de $t^2\mathcal{U}(t - 2)$, se tendría que forzar $g(t) = t^2$ a la forma $f(t - 2)$. Se debe trabajar algebraicamente y comprobar que $t^2 = (t - 2)^2 + 4(t - 2) + 4$ es una identidad. Por tanto,

$$\mathcal{L}\{t^2\mathcal{U}(t - 2)\} = \mathcal{L}\{(t - 2)^2\mathcal{U}(t - 2) + 4(t - 2)\mathcal{U}(t - 2) + 4\mathcal{U}(t - 2)\},$$

donde ahora cada término del lado derecho se puede evaluar con el teorema 7.3.2. Pero como estas operaciones son tardadas y con frecuencia no obvias, es más simple diseñar una forma alternativa del teorema 7.3.2. Usando la definición 7.1.1, la definición de $\mathcal{U}(t - a)$, y la sustitución $u = t - a$, se obtiene

$$\mathcal{L}\{g(t)\mathcal{U}(t - a)\} = \int_a^\infty e^{-st}g(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}g(u+a)du.$$

Es decir, $\mathcal{L}\{g(t)\mathcal{U}(t - a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t + a)\}.$ (16)

EJEMPLO 7 Segundo teorema de traslación: forma alternativa

Evalúe $\mathcal{L}\{\cos t \mathcal{U}(t - \pi)\}.$

SOLUCIÓN Con $g(t) = \cos t$ y $a = \pi$, entonces $g(t + \pi) = \cos(t + \pi) = -\cos t$ por la fórmula de adición para la función coseno. Por tanto, por la ecuación (16),

$$\mathcal{L}\{\cos t \mathcal{U}(t - \pi)\} = -e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\cos t\} = -\frac{s}{s^2 + 1}e^{-\pi s}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 Un problema con valores iniciales

Resuelva $y' + y = f(t)$, $y(0) = 5$, donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 3 \cos t, & t \geq \pi. \end{cases}$

SOLUCIÓN La función f se puede escribir como $f(t) = 3 \cos t \mathcal{U}(t - \pi)$, y entonces por linealidad, por los resultados del ejemplo 7 y por las fracciones parciales usuales, se tiene

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = 3\mathcal{L}\{\cos t \mathcal{U}(t - \pi)\}$$

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = -3 \frac{s}{s^2 + 1} e^{-\pi s}$$

$$(s + 1)Y(s) = 5 - \frac{3s}{s^2 + 1} e^{-\pi s}$$

$$Y(s) = \frac{5}{s + 1} - \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{s + 1} e^{-\pi s} + \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\pi s} + \frac{s}{s^2 + 1} e^{-\pi s} \right]. \quad (17)$$

Ahora procediendo como se hizo en el ejemplo 6, se tiene de (15) con $a = \pi$ que los inversos de los términos dentro del paréntesis son

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1} e^{-\pi s}\right\} = e^{-(t-\pi)} \mathcal{U}(t - \pi), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1} e^{-\pi s}\right\} = \sin(t - \pi) \mathcal{U}(t - \pi),$$

$$\text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1} e^{-\pi s}\right\} = \cos(t - \pi) \mathcal{U}(t - \pi).$$

Por lo que el inverso de (17) es

$$\begin{aligned} y(t) &= 5e^{-t} + \frac{3}{2} e^{-(t-\pi)} \mathcal{U}(t - \pi) - \frac{3}{2} \sin(t - \pi) \mathcal{U}(t - \pi) - \frac{3}{2} \cos(t - \pi) \mathcal{U}(t - \pi) \\ &= 5e^{-t} + \frac{3}{2} [e^{-(t-\pi)} + \sin t + \cos t] \mathcal{U}(t - \pi) \quad \leftarrow \text{identidades trigonométricas} \\ &= \begin{cases} 5e^{-t}, & 0 \leq t < \pi \\ 5e^{-t} + \frac{3}{2} e^{-(t-\pi)} + \frac{3}{2} \sin t + \frac{3}{2} \cos t, & t \geq \pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

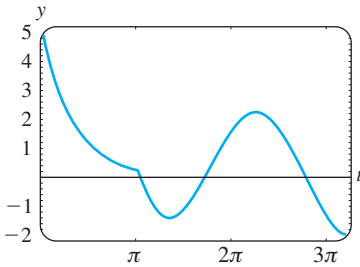


FIGURA 7.3.7 Gráfica de la función en (18).

Usando un programa de graficación hemos obtenido la gráfica de (18) que se muestra en la figura 7.3.7. ■

VIGAS En la sección 5.2 vimos que la deflexión estática $y(x)$ de una viga uniforme de longitud L con carga $w(x)$ por unidad de longitud se determina a partir de la ecuación diferencial lineal de cuarto orden

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w(x), \quad (19)$$

donde E es el módulo de Young de elasticidad e I es un momento de inercia de una sección transversal de la viga. La transformada de Laplace es particularmente útil para resolver la ecuación (19) cuando $w(x)$ se define por tramos. Sin embargo, para usar la transformada de Laplace se debe suponer de manera tácita que $y(x)$ y $w(x)$ están definidas en $(0, \infty)$ y no en $(0, L)$. Observe, también, que el siguiente ejemplo es un problema con valores en la frontera más que un problema con valores iniciales.

EJEMPLO 9 Un problema con valores en la frontera

Una viga de longitud L se empotra en ambos extremos, como se muestra en la figura 7.3.8. Determine la deflexión de la viga cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} w_0 \left(1 - \frac{2}{L}x\right), & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L. \end{cases}$$

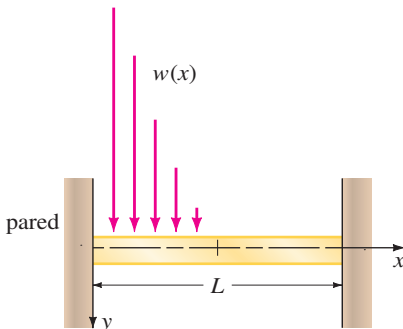


FIGURA 7.3.8 Viga empotrada con carga variable.

SOLUCIÓN Recuerde que debido a que la viga esta empotrada en ambos extremos, las condiciones de frontera son $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(L) = 0$, $y'(L) = 0$. Ahora usando (10) se puede expresar $w(x)$ en términos de la función escalón unitario:

$$\begin{aligned} w(x) &= w_0 \left(1 - \frac{2}{L}x \right) - w_0 \left(1 - \frac{2}{L}x \right) \mathcal{U} \left(x - \frac{L}{2} \right) \\ &= \frac{2w_0}{L} \left[\frac{L}{2} - x + \left(x - \frac{L}{2} \right) \mathcal{U} \left(x - \frac{L}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Transformando la ecuación (19) respecto a la variable x , se obtiene

$$EI(s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - sy''(0) - y'''(0)) = \frac{2w_0}{L} \left[\frac{L/2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} e^{-Ls/2} \right]$$

$$\text{o} \quad s^4 Y(s) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{2w_0}{EIL} \left[\frac{L/2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} e^{-Ls/2} \right].$$

Si hacemos $c_1 = y''(0)$ y $c_2 = y'''(0)$, entonces

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{2w_0}{EIL} \left[\frac{L/2}{s^5} - \frac{1}{s^6} + \frac{1}{s^6} e^{-Ls/2} \right],$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{c_1}{2!} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2!}{s^3} \right\} + \frac{c_2}{3!} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3!}{s^4} \right\} + \frac{2w_0}{EIL} \left[\frac{L/2}{4!} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4!}{s^5} \right\} - \frac{1}{5!} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5!}{s^6} \right\} + \frac{1}{5!} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5!}{s^6} e^{-Ls/2} \right\} \right] \\ &= \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{6} x^3 + \frac{w_0}{60 EIL} \left[\frac{5L}{2} x^4 - x^5 + \left(x - \frac{L}{2} \right)^5 \mathcal{U} \left(x - \frac{L}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones $y(L) = 0$ y $y'(L) = 0$ al último resultado, se obtiene un sistema de ecuaciones para c_1 y c_2 :

$$c_1 \frac{L^2}{2} + c_2 \frac{L^3}{6} + \frac{49w_0 L^4}{1920EI} = 0$$

$$c_1 L + c_2 \frac{L^2}{2} + \frac{85w_0 L^3}{960EI} = 0.$$

Resolviendo se encuentra que $c_1 = 23w_0 L^2 / (960EI)$ y $c_2 = -9w_0 L / (40EI)$. Por lo que la deflexión está dada por

$$y(x) = \frac{23w_0 L^2}{1920EI} x^2 - \frac{3w_0 L}{80EI} x^3 + \frac{w_0}{60EIL} \left[\frac{5L}{2} x^4 - x^5 + \left(x - \frac{L}{2} \right)^5 \mathcal{U} \left(x - \frac{L}{2} \right) \right]. \quad \blacksquare$$

EJERCICIOS 7.3 Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-11.

7.3.1 TRASLACIÓN EN EL EJE s

En los problemas 1 a 20 encuentre $F(s)$ o $f(t)$, como se indica.

1. $\mathcal{L}\{te^{10t}\}$
2. $\mathcal{L}\{te^{-6t}\}$
3. $\mathcal{L}\{t^3 e^{-2t}\}$
4. $\mathcal{L}\{t^{10} e^{-7t}\}$
5. $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$
6. $\mathcal{L}\{e^{2t}(t-1)^2\}$
7. $\mathcal{L}\{e^t \sin 3t\}$
8. $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 4t\}$
9. $\mathcal{L}\{(1 - e^t + 3e^{-4t}) \cos 5t\}$
10. $\mathcal{L}\left\{e^{3t} \left(9 - 4t + 10 \sin \frac{t}{2} \right)\right\}$

$$11. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^3} \right\}$$

$$12. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^4} \right\}$$

$$13. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 - 6s + 10} \right\}$$

$$14. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \right\}$$

$$15. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 4s + 5} \right\}$$

$$16. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s + 5}{s^2 + 6s + 34} \right\}$$

$$17. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+1)^2} \right\}$$

$$18. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s}{(s-2)^2} \right\}$$

$$19. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s-1}{s^2(s+1)^3} \right\}$$

$$20. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+1)^2}{(s+2)^4} \right\}$$

En los problemas 21 a 30, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

21. $y' + 4y = e^{-4t}$, $y(0) = 2$
22. $y' - y = 1 + te^t$, $y(0) = 0$
23. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
24. $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
25. $y'' - 6y' + 9y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
26. $y'' - 4y' + 4y = t^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
27. $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$
28. $2y'' + 20y' + 51y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$
29. $y'' - y' = e^t \cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
30. $y'' - 2y' + 5y = 1 + t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$

En los problemas 31 y 32, use la transformada de Laplace y el procedimiento descrito en el ejemplo 9 para resolver el problema con valores en la frontera dado.

31. $y'' + 2y' + y = 0$, $y'(0) = 2$, $y(1) = 2$
32. $y'' + 8y' + 20y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$
33. Un peso de 4 lb estira un resorte 2 pies. El peso se libera a partir del reposo 18 pulgadas arriba de la posición de equilibrio y el movimiento resultante tiene lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a $\frac{7}{8}$ veces la velocidad instantánea. Use la transformada de Laplace para encontrar la ecuación de movimiento $x(t)$.
34. Recuerde que la ecuación diferencial para la carga instantánea $q(t)$ en el capacitor en un circuito RCL en serie está dada por

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t). \quad (20)$$

Véase la sección 5.1. Use la transformada de Laplace para encontrar $q(t)$ cuando $L = 1$ h, $R = 20 \Omega$, $C = 0.005$ f, $E(t) = 150$ V, $t > 0$, $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$. ¿Cuál es la corriente $i(t)$?

35. Considere una batería de voltaje constante E_0 que carga el capacitor que se muestra en la figura 7.3.9. Divida la ecuación (20) entre L y defina $2\lambda = R/L$ y $\omega^2 = 1/LC$. Use la transformada de Laplace para demostrar que la solución $q(t)$ de $q'' + 2\lambda q' + \omega^2 q = E_0/L$ sujeta a $q(0) = 0$, $i(0) = 0$ es

$$q(t) = \begin{cases} E_0 C \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cosh \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}} \sinh \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t \right) \right], & \lambda > \omega, \\ E_0 C [1 - e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)], & \lambda = \omega, \\ E_0 C \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \frac{\lambda}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t \right) \right], & \lambda < \omega. \end{cases}$$

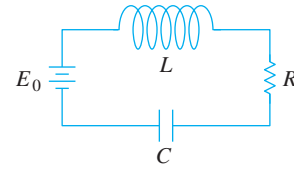


FIGURA 7.3.9 Circuito en serie del problema 35.

36. Use la transformada de Laplace para encontrar la carga $q(t)$ en un circuito RC en serie cuando $q(0) = 0$ y $E(t) = E_0 e^{-kt}$, $k > 0$. Considere dos casos: $k \neq 1/RC$ y $k = 1/RC$.

7.3.2 TRASLACIÓN EN EL EJE t

En los problemas 37 a 48 encuentre $F(s)$ o $f(t)$, como se indica.

37. $\mathcal{L}\{(t-1)\mathcal{U}(t-1)\}$
38. $\mathcal{L}\{e^{2-t}\mathcal{U}(t-2)\}$
39. $\mathcal{L}\{t\mathcal{U}(t-2)\}$
40. $\mathcal{L}\{(3t+1)\mathcal{U}(t-1)\}$
41. $\mathcal{L}\{\cos 2t\mathcal{U}(t-\pi)\}$
42. $\mathcal{L}\left\{\sin t\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$
43. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^3}\right\}$
44. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1+e^{-2s})^2}{s+2}\right\}$
45. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$
46. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4}\right\}$
47. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$
48. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}\right\}$

En los problemas 49 a 54, compare la gráfica dada con una de las funciones de los incisos a) a f). La gráfica de $f(t)$ se presenta en la figura 7.3.10.

- a) $f(t) - f(t)\mathcal{U}(t-a)$
- b) $f(t-b)\mathcal{U}(t-b)$
- c) $f(t)\mathcal{U}(t-a)$
- d) $f(t) - f(t)\mathcal{U}(t-b)$
- e) $f(t)\mathcal{U}(t-a) - f(t)\mathcal{U}(t-b)$
- f) $f(t-a)\mathcal{U}(t-a) - f(t-a)\mathcal{U}(t-b)$

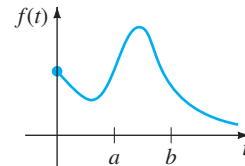


FIGURA 7.3.10 Gráfica para los problemas 49 a 54.

49.

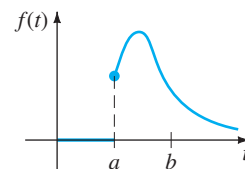


FIGURA 7.3.11 Gráfica para el problema 49.

50.

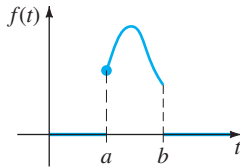


FIGURA 7.3.12 Gráfica para el problema 50.

51.

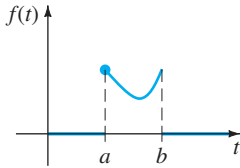


FIGURA 7.3.13 Gráfica para el problema 51.

52.

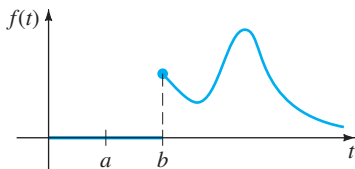


FIGURA 7.3.14 Gráfica para el problema 52.

53.

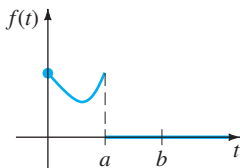


FIGURA 7.3.15 Gráfica para el problema 53.

54.

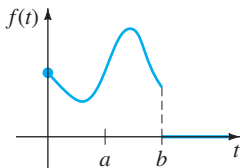


FIGURA 7.3.16 Gráfica para el problema 54.

En los problemas 55 a 62, escriba cada función en términos de funciones escalón unitario. Encuentre la transformada de Laplace de la función dada.

$$55. f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 3 \\ -2, & t \geq 3 \end{cases}$$

$$56. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 4 \\ 0, & 4 \leq t < 5 \\ 1, & t \geq 5 \end{cases}$$

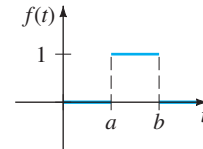
$$57. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t^2, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$58. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3\pi/2 \\ \sin t, & t \geq 3\pi/2 \end{cases}$$

$$59. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$60. f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

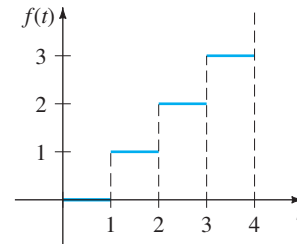
61.



pulso rectangular

FIGURA 7.3.17 Gráfica para el problema 61.

62.



función escalera

FIGURA 7.3.18 Gráfica para el problema 62.

En los problemas 63 a 70, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

$$63. y' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \text{ donde } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 5, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$64. y' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \text{ donde } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$65. y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, \text{ donde } f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$66. y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = -1, \text{ donde } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$67. y'' + 4y = \sin t \mathcal{U}(t - 2\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$68. y'' - 5y' + 6y = \mathcal{U}(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$69. y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, \text{ donde } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

$$70. y'' + 4y' + 3y = 1 - \mathcal{U}(t - 2) - \mathcal{U}(t - 4) + \mathcal{U}(t - 6), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

71. Suponga que un peso de 32 libras estira un resorte 2 pies. Si el peso se libera a partir del reposo en la posición de equilibrio, determine la ecuación de movimiento $x(t)$ si una fuerza $f(t) = 20t$ actúa en el sistema para $0 \leq t < 5$ y luego se retira (véase el ejemplo 5). Desprecie cualquier fuerza de amortiguamiento. Use un programa de graficación para trazar $x(t)$ en el intervalo $[0, 10]$.
72. Resuelva el problema 71 si la fuerza aplicada $f(t) = \sin t$ actúa en el sistema para $0 \leq t < 2\pi$ y después se retira.

En los problemas 73 y 74 use la transformada de Laplace para encontrar la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito RC en serie sujeto a las condiciones indicadas.

73. $q(0) = 0$, $R = 2.5 \Omega$, $C = 0.08$ f, $E(t)$ dada en la figura 7.3.19.

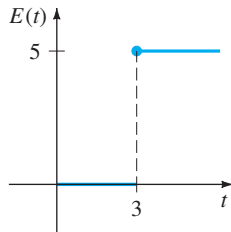


FIGURA 7.3.19 $E(t)$ en el problema 73.

74. $q(0) = q_0$, $R = 10 \Omega$, $C = 0.1$ f, $E(t)$ dada en la figura 7.3.20.

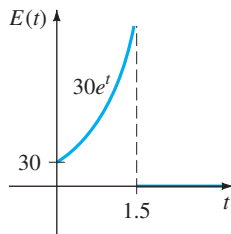


FIGURA 7.3.20 $E(t)$ en el problema 74.

75. a) Use la transformada de Laplace para encontrar la corriente $i(t)$ en un circuito LR en serie de una sola malla cuando $i(0) = 0$, $L = 1$ h, $R = 10 \Omega$ y $E(t)$ es como se ilustra en la figura 7.3.21.
- b) Use un programa de computadora para graficar y dibuje $i(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 6$. Use la gráfica para estimar $i_{\max}$ e $i_{\min}$, los valores máximo y mínimo de la corriente.

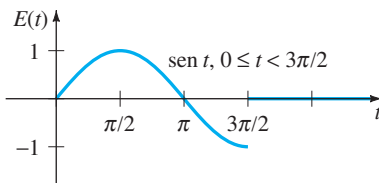


FIGURA 7.3.21 $E(t)$ en el problema 75.

76. a) Use la transformada de Laplace para determinar la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito RC en serie cuando $q(0) = 0$, $R = 50 \Omega$, $C = 0.01$ f y $E(t)$ es como se muestra en la figura 7.3.22.
- b) Suponga que $E_0 = 100$ V. Use un programa de computadora para graficar y dibuje $q(t)$ para $0 \leq t \leq 6$. Use la gráfica para estimar $q_{\max}$ el valor máximo de la carga.

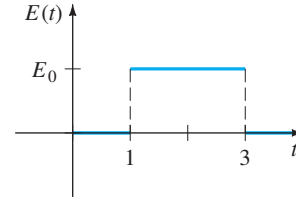


FIGURA 7.3.22 $E(t)$ en el problema 76.

77. Una viga en voladizo está empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho. Use la transformada de Laplace para determinar la deflexión $y(x)$ cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} w_0, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 \leq x < L. \end{cases}$$

78. Resuelva el problema 77 cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L/3 \\ w_0, & L/3 < x < 2L/3 \\ 0, & 2L/3 < x < L. \end{cases}$$

79. Encuentre la deflexión $y(x)$ de una viga en voladizo empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho cuando la carga total es como se da en el ejemplo 9.
80. Una viga está empotrada en su extremo izquierdo y apoyada simplemente en el extremo derecho. Encuentre la deflexión $y(x)$ cuando la carga es como la que se da en el problema 77.

Modelo matemático

81. **Pastel dentro de un horno** Lea de nuevo el ejemplo 4 en la sección 3.1 acerca del enfriamiento de un pastel que se saca de un horno.

- a) Diseñe un modelo matemático para la temperatura de un pastel mientras está dentro del horno con base en las siguientes suposiciones: en $t = 0$ la mezcla de pastel está a temperatura ambiente de 70° ; el horno no se precalienta por lo que en $t = 0$, cuando la mezcla de pastel se coloca dentro del horno, la temperatura dentro del horno también es 70° ; la temperatura del horno aumenta linealmente hasta $t = 4$ minutos, cuando se alcanza la temperatura deseada de 300° ; la temperatura del horno se mantiene constante en 300° para $t \geq 4$.
- b) Use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales del inciso a).

Problemas para analizar

82. Analice cómo se podría arreglar cada una de las siguientes funciones, de tal forma que el teorema 7.3.2 se pudiera usar directamente para encontrar la transformada de Laplace dada. Compruebe sus respuestas con la ecuación (16) de esta sección.

- a) $\mathcal{L}\{(2t+1)\mathcal{U}(t-1)\}$ b) $\mathcal{L}\{e^t\mathcal{U}(t-5)\}$
 c) $\mathcal{L}\{\cos t\mathcal{U}(t-\pi)\}$ d) $\mathcal{L}\{(t^2-3t)\mathcal{U}(t-2)\}$

83. a) Suponga que el teorema 7.3.1 se cumple cuando el símbolo a se reemplaza por ki , donde k es un número

real e $i^2 = -1$. Demuestre que $\mathcal{L}\{te^{kti}\}$ se puede usar para deducir

$$\mathcal{L}\{t \cos kt\} = \frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin kt\} = \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}.$$

b) Ahora use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales $x'' + \omega^2 x = \cos \omega t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

7.4

PROPIEDADES OPERACIONALES II

REPASO DE MATERIAL

- Definición 7.1.1
- Teoremas 7.3.1 y 7.3.2

INTRODUCCIÓN En esta sección se desarrollan varias propiedades operacionales más de la transformada de Laplace. En especial, veremos cómo encontrar la transformada de una función $f(t)$ que se multiplica por un monomio t^n , la transformada de un tipo especial de integral y la transformada de una función periódica. Las dos últimas propiedades de transformada permiten resolver ecuaciones que no se han encontrado hasta este punto: ecuaciones integrales de Volterra, ecuaciones integrodiferenciales y ecuaciones diferenciales ordinarias en las que la función de entrada es una función periódica definida por tramos.

7.4.1 DERIVADAS DE UNA TRANSFORMADA

MULTIPLICACIÓN DE UNA FUNCIÓN POR t^n La transformada de Laplace del producto de una función $f(t)$ con t se puede encontrar derivando la transformada de Laplace de $f(t)$. Para motivar este resultado, se supone que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe y que es posible intercambiar el orden de la derivada y de la integral. Entonces

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} [e^{-st} f(t)] dt = - \int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\};$$

es decir,
$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Se puede usar el último resultado para encontrar la transformada de Laplace de $t^2 f(t)$:

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot tf(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} \left(-\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\} \right) = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Los dos casos anteriores sugieren el resultado general para $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}$.

TEOREMA 7.4.1 Derivadas de transformadas

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $n = 1, 2, 3, \dots$, entonces

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

EJEMPLO 1 Uso del teorema 7.4.1

Evalúe $\mathcal{L}\{t \sen kt\}$.

SOLUCIÓN Con $f(t) = \sen kt$, $F(s) = k/(s^2 + k^2)$ y $n = 1$, el teorema 7.4.1 da

$$\mathcal{L}\{t \sen kt\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\sen kt\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{k}{s^2 + k^2} \right) = \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}. \quad \blacksquare$$

Si se quiere evaluar $\mathcal{L}\{t^2 \sen kt\}$ y $\mathcal{L}\{t^3 \sen kt\}$, todo lo que se necesita hacer, a su vez, es tomar el negativo de la derivada respecto a s del resultado del ejemplo 1 y después tomar el negativo de la derivada respecto a s de $\mathcal{L}\{t^2 \sen kt\}$.

NOTA Para encontrar transformadas de funciones $t^n e^{at}$, se puede usar el teorema 7.3.1 o el teorema 7.4.1. Por ejemplo,

$$\text{Teorema 7.3.1: } \mathcal{L}\{te^{3t}\} = \mathcal{L}\{t\}_{s \rightarrow s-3} = \frac{1}{s^2} \Big|_{s \rightarrow s-3} = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

$$\text{Teorema 7.4.1: } \mathcal{L}\{te^{3t}\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s-3} = (s-3)^{-2} = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

EJEMPLO 2 Un problema con valores iniciales

Resuelva $x'' + 16x = \cos 4t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

SOLUCIÓN El problema con valores iniciales podría describir el movimiento forzado, no amortiguado y en resonancia de una masa en un resorte. La masa comienza con una velocidad inicial de 1 pie/s en dirección hacia abajo desde la posición de equilibrio.

Transformando la ecuación diferencial, se obtiene

$$(s^2 + 16)X(s) = 1 + \frac{s}{s^2 + 16} \quad \text{o} \quad X(s) = \frac{1}{s^2 + 16} + \frac{s}{(s^2 + 16)^2}.$$

Ahora bien, en el ejemplo 1 se vio que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}\right\} = t \sen kt \quad (1)$$

y por tanto, identificando $k = 4$ en (1) y en el inciso d) del teorema 7.2.1, se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2 + 16}\right\} + \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2 + 16)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{4} \sen 4t + \frac{1}{8} t \sen 4t \end{aligned} \quad \blacksquare$$

7.4.2 TRANSFORMADAS DE INTEGRALES

CONVOLUCIÓN Si las funciones f y g son continuas por tramos en $[0, \infty)$, entonces un producto especial, denotado por $f * g$, se define mediante la integral

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

y se llama **convolución** de f y g . La convolución de $f * g$ es una función de t . Por ejemplo,

$$e^t * \sen t = \int_0^t e^\tau \sen(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2}(-\sen t - \cos t + e^t). \quad (3)$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau;$$

es decir, $f * g = g * f$. Esto significa que la convolución de dos funciones es conmutativa.

No es cierto que la integral de un producto de funciones sea el producto de las integrales. Sin embargo, es cierto que la transformada de Laplace del producto especial (2), es el producto de la transformada de Laplace de f y g . Esto significa que es posible determinar la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones sin evaluar en realidad la integral como se hizo en (3). El resultado que sigue se conoce como **teorema de convolución**.

TEOREMA 7.4.2 Teorema de convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

DEMOSTRACIÓN Sea $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau$

$$\text{y} \quad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta) d\beta.$$

Procediendo formalmente, tenemos

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right) \left(\int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta) d\beta \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau) g(\beta) d\tau d\beta \\ &= \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} g(\beta) d\beta. \end{aligned}$$

Conservando τ fija, hacemos $t = \tau + \beta$, $dt = d\beta$, por lo que

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t - \tau) dt.$$

En el plano τt se realiza la integración en la región sombreada de la figura 7.4.1. Puesto que f y g son continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, es posible intercambiar el orden de integración:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\} dt = \mathcal{L}\{f * g\}. \quad \blacksquare$$

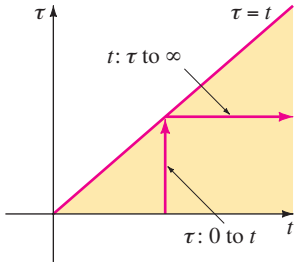


FIGURA 7.4.1 Cambio del orden de integración de primero t a primero τ .

EJEMPLO 3 Transformada de una convolución

Evalúe $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^\tau \sin(t - \tau) d\tau\right\}$.

SOLUCIÓN Con $f(t) = e^t$ y $g(t) = \sin t$, el teorema de convolución establece que la transformada de Laplace de la convolución de f y g es el producto de sus transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^\tau \sin(t - \tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\{e^t\} \cdot \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s - 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{(s - 1)(s^2 + 1)}. \quad \blacksquare$$

INVERSA DEL TEOREMA 7.4.2 El teorema de convolución en ocasiones es útil para encontrar la transformada de Laplace inversa del producto de dos transformadas de Laplace. Del teorema 7.4.2, se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g. \quad (4)$$

Muchos de los resultados de la tabla de transformadas de Laplace en el apéndice III, se pueden obtener usando la ecuación (4). En el ejemplo siguiente, se obtiene el elemento 25 de la tabla:

$$\mathcal{L}\{\sin kt - kt \cos kt\} = \frac{2k^3}{(s^2 + k^2)^2}. \quad (5)$$

EJEMPLO 4 Transformada inversa como una convolución

Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + k^2)^2}\right\}$.

SOLUCIÓN Sea $F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + k^2}$ por lo que

$$f(t) = g(t) = \frac{1}{k} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 + k^2}\right\} = \frac{1}{k} \sin kt.$$

En este caso la ecuación (4) da

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + k^2)^2}\right\} = \frac{1}{k^2} \int_0^t \sin k\tau \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (6)$$

Con la ayuda de la identidad trigonométrica

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

y las sustituciones $A = k\tau$ y $B = k(t - \tau)$ se puede realizar la integración en (6):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + k^2)^2}\right\} &= \frac{1}{2k^2} \int_0^t [\cos k(2\tau - t) - \cos kt] d\tau \\ &= \frac{1}{2k^2} \left[\frac{1}{2k} \sin k(2\tau - t) - \tau \cos kt \right]_0^t \\ &= \frac{\sin kt - kt \cos kt}{2k^3}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $2k^3$, se obtiene la forma inversa de (5). ■

TRANSFORMADA DE UNA INTEGRAL Cuando $g(t) = 1$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = 1/s$, el teorema de convolución implica que la transformada de Laplace de la integral de f es

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \quad (7)$$

La forma inversa de (7),

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}, \quad (8)$$

se puede usar en lugar de las fracciones parciales cuando s^n es un factor del denominador y $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ es fácil de integrar. Por ejemplo, se sabe para $f(t) = \sin t$ que $F(s) = 1/(s^2 + 1)$ y por tanto usando la ecuación (8)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 1)}\right\} &= \int_0^t \sin \tau d\tau = 1 - \cos t \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2 + 1)}\right\} &= \int_0^t (1 - \cos \tau) d\tau = t - \sin t \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2 + 1)}\right\} = \int_0^t (\tau - \sin \tau) d\tau = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t$$

etcétera.

ECUACIÓN INTEGRAL DE VOLTERRA El teorema de convolución y el resultado en (7) son útiles para resolver otros tipos de ecuaciones en las que una función desconocida aparece bajo un signo de integral. En el ejemplo siguiente se resuelve una **ecuación integral de Volterra** para $f(t)$,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (9)$$

Las funciones $g(t)$ y $h(t)$ son conocidas. Observe que la integral en (9) tiene la forma de convolución (2) con el símbolo h jugando el papel de g .

EJEMPLO 5 Una ecuación integral

Resuelva $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\tau) e^{t-\tau} d\tau$ para $f(t)$.

SOLUCIÓN En la integral se identifica $h(t - \tau) = e^{t-\tau}$ por lo que $h(t) = e^t$. Se toma la transformada de Laplace de cada término; en particular, por el teorema 7.4.2 la transformada de Laplace es el producto de $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{e^t\} = 1/(s - 1)$.

$$F(s) = 3 \cdot \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s + 1} - F(s) \cdot \frac{1}{s - 1}.$$

Después de resolver la última ecuación para $F(s)$ y realizar la descomposición en fracciones parciales, se encuentra

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s + 1}.$$

La transformada inversa entonces da

$$\begin{aligned} f(t) &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\} \\ &= 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}. \end{aligned}$$

CIRCUITOS EN SERIE En una sola malla o circuito en serie, la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de voltaje en un inductor, resistor y capacitor es igual al voltaje aplicado $E(t)$. Ahora se sabe que las caídas de voltaje en un inductor, resistor y capacitor son, respectivamente,

$$L \frac{di}{dt}, \quad Ri(t), \quad \text{y} \quad \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau,$$

donde $i(t)$ es la corriente y L , R y C son constantes. Se deduce que la corriente en un circuito, como el que se muestra en la figura 7.4.2, está gobernada por la **ecuación integrodiferencial**

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t). \quad (10)$$

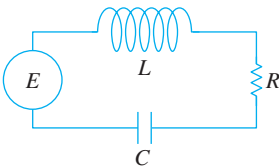


FIGURA 7.4.2 Circuito RCL en serie.

EJEMPLO 6 Una ecuación integrodiferencial

Determine la corriente $i(t)$ en un circuito RCL de un sola malla cuando $L = 0.1$ h, $R = 2 \Omega$, $C = 0.1$ f, $i(0) = 0$ y el voltaje aplicado es

$$E(t) = 120t - 120t \mathcal{U}(t - 1).$$

SOLUCIÓN Con los datos dados, la ecuación (10) se convierte en

$$0.1 \frac{di}{dt} + 2i + 10 \int_0^t i(\tau) d\tau = 120t - 120t \mathcal{U}(t - 1).$$

Ahora usando (7), $\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau) d\tau\right\} = I(s)/s$, donde $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$. Por lo que la transformada de Laplace de la ecuación integrodiferencial es

$$0.1sI(s) + 2I(s) + 10 \frac{I(s)}{s} = 120 \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-s} \right]. \quad \leftarrow \text{por (16) de la sección 7.3}$$

Multiplicando esta ecuación por $10s$, usando $s^2 + 20s + 100 = (s + 10)^2$ y después al despejar $I(s)$, se obtiene

$$I(s) = 1200 \left[\frac{1}{s(s + 10)^2} - \frac{1}{s(s + 10)^2} e^{-s} - \frac{1}{(s + 10)^2} e^{-s} \right].$$

Usando fracciones parciales,

$$I(s) = 1200 \left[\frac{1/100}{s} - \frac{1/100}{s + 10} - \frac{1/10}{(s + 10)^2} - \frac{1/100}{s} e^{-s} + \frac{1/100}{s + 10} e^{-s} + \frac{1/10}{(s + 10)^2} e^{-s} - \frac{1}{(s + 10)^2} e^{-s} \right].$$

De la forma inversa del segundo teorema de traslación (15) de la sección 7.3, finalmente se obtiene

$$i(t) = 12[1 - \mathcal{U}(t - 1)] - 12[e^{-10t} - e^{-10(t-1)} \mathcal{U}(t - 1)] - 120te^{-10t} - 1080(t - 1)e^{-10(t-1)} \mathcal{U}(t - 1).$$

Escrita como una función definida por tramos, la corriente es

$$i(t) = \begin{cases} 12 - 12e^{-10t} - 120te^{-10t}, & 0 \leq t < 1 \\ -12e^{-10t} + 12e^{-10(t-1)} - 120te^{-10t} - 1080(t - 1)e^{-10(t-1)}, & t \geq 1. \end{cases}$$

Con esta última expresión y un SAC, se traza la gráfica $i(t)$ en cada uno de los dos intervalos y después se combinan las gráficas. Observe en la figura 7.4.3 que aun cuando la función de entrada $E(t)$ es discontinua, la salida o respuesta $i(t)$ es una función continua. ■

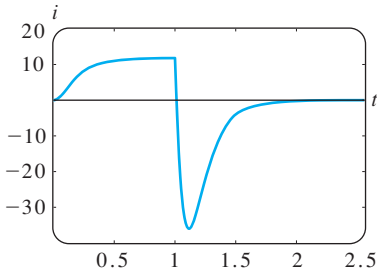


FIGURA 7.4.3 Gráfica de corriente $i(t)$ del ejemplo 6.

7.4.3 TRANSFORMADA DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA

FUNCIÓN PERIÓDICA Si una función periódica tiene periodo T , $T > 0$, entonces $f(t + T) = f(t)$. El siguiente teorema muestra que la transformada de Laplace de una función periódica se obtiene integrando sobre un periodo.

TEOREMA 7.4.3 Transformada de una función periódica

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo T , entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

DEMOSTRACIÓN Escriba la transformada de Laplace de f como dos integrales:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Cuando se hace $t = u + T$, la última integral se convierte en

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-s(u+T)} f(u+T) du = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du = e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Resolviendo la ecuación de la última línea para $\mathcal{L}\{f(t)\}$ se demuestra el teorema. ■

EJEMPLO 7 Aplicación de un voltaje periódico

Encuentre la transformada de Laplace de la función periódica que se muestra en la figura 7.4.4.

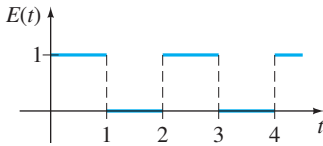


FIGURA 7.4.4 Onda cuadrada.

SOLUCIÓN La función $E(t)$ se llama de onda cuadrada y tiene periodo $T = 2$. En el intervalo $0 \leq t < 2$, $E(t)$ se puede definir por

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

y fuera del intervalo por $f(t+2) = f(t)$. Ahora del teorema 7.4.3

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{E(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} E(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} \cdot 1 dt + \int_1^2 e^{-st} \cdot 0 dt \right] \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \frac{1 - e^{-s}}{s} \quad \leftarrow 1 - e^{-2s} = (1 + e^{-s})(1 - e^{-s}) \\ &= \frac{1}{s(1 + e^{-s})}. \end{aligned} \quad (11) \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 Aplicación de un voltaje periódico

La ecuación diferencial para la corriente $i(t)$ en un circuito RL en serie de una sola malla es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t). \quad (12)$$

Determine la corriente $i(t)$ cuando $i(0) = 0$ y $E(t)$ es la función de onda cuadrada que se muestra en la figura 7.4.4.

SOLUCIÓN Si se usa el resultado de (11) del ejemplo anterior, la transformada de Laplace de la ED es

$$LsI(s) + RI(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-s})} \quad \text{o} \quad I(s) = \frac{1/L}{s(s + R/L)} \cdot \frac{1}{1 + e^{-s}}. \quad (13)$$

Para encontrar la transformada de Laplace inversa de la última función, primero se hace uso de la serie geométrica. Con la identificación $x = e^{-s}$, $s > 0$, la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad \text{se convierte en} \quad \frac{1}{1+e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \cdots$$

De
$$\frac{1}{s(s + R/L)} = \frac{L/R}{s} - \frac{L/R}{s + R/L}$$

se puede reescribir la ecuación (13) como

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right) (1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \dots) \\ &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \dots \right) - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{s + R/L} - \frac{1}{s + R/L} e^{-s} + \frac{e^{-2s}}{s + R/L} - \frac{e^{-3s}}{s + R/L} + \dots \right). \end{aligned}$$

Aplicando la forma del segundo teorema de traslación a cada término de ambas series, se obtiene

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{R} (1 - \mathcal{U}(t-1) + \mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-3) + \dots) \\ &\quad - \frac{1}{R} (e^{-Rt/L} - e^{-R(t-1)/L} \mathcal{U}(t-1) + e^{-R(t-2)/L} \mathcal{U}(t-2) - e^{-R(t-3)/L} \mathcal{U}(t-3) + \dots) \end{aligned}$$

o, de forma equivalente

$$i(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-Rt/L}) + \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - e^{-R(t-n)/L}) \mathcal{U}(t-n).$$

Para interpretar la solución, se supone por razones de ejemplificación que $R = 1$, $L = 1$ y $0 \leq t < 4$. En este caso

$$i(t) = 1 - e^{-t} - (1 - e^{-(t-1)}) \mathcal{U}(t-1) + (1 - e^{-(t-2)}) \mathcal{U}(t-2) - (1 - e^{-(t-3)}) \mathcal{U}(t-3);$$

en otras palabras,

$$i(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & 0 \leq t < 1 \\ -e^{-t} + e^{-(t-1)}, & 1 \leq t < 2 \\ 1 - e^{-t} + e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)}, & 2 \leq t < 3 \\ -e^{-t} + e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)} + e^{-(t-3)}, & 3 \leq t < 4. \end{cases}$$

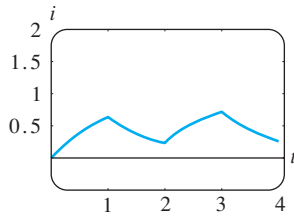


FIGURA 7.4.5 Gráfica de la corriente $i(t)$ en ejemplo 8.

La gráfica de $i(t)$ en el intervalo $0 \leq t < 4$, que se muestra en la figura 7.4.5, se obtuvo con la ayuda de un SAC.

EJERCICIOS 7.4 Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-11.

7.4.1 DERIVADAS DE UNA TRANSFORMADA

En los problemas 1 a 8 use el teorema 7.4.1 para evaluar cada una de las transformadas de Laplace.

1. $\mathcal{L}\{te^{-10t}\}$
2. $\mathcal{L}\{t^3 e^t\}$
3. $\mathcal{L}\{t \cos 2t\}$
4. $\mathcal{L}\{t \sinh 3t\}$
5. $\mathcal{L}\{t^2 \sinh t\}$
6. $\mathcal{L}\{t^2 \cos t\}$
7. $\mathcal{L}\{te^{2t} \sin 6t\}$
8. $\mathcal{L}\{te^{-3t} \cos 3t\}$

En los problemas 9 a 14, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales dado. Use la tabla de transformadas de Laplace del apéndice III cuando sea necesario.

9. $y' + y = t \sin t$, $y(0) = 0$
10. $y' - y = te^t \sin t$, $y(0) = 0$

11. $y'' + 9y = \cos 3t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$
12. $y'' + y = \sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
13. $y'' + 16y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos 4t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

14. $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi/2 \\ \sin t, & t \geq \pi/2 \end{cases}$$

En los problemas 15 y 16, use un programa de graficación para trazar la gráfica de la solución indicada.

15. $y(t)$ del problema 13 en el intervalo $0 \leq t < 2\pi$
16. $y(t)$ del problema 14 en el intervalo $0 \leq t < 3\pi$

En algunos casos, la transformada de Laplace se puede usar para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes monomiales variables. En los problemas 17 y 18, use el teorema 7.4.1 para reducir la ecuación diferencial dada a una ED lineal de primer orden en la función transformada. Resuelva la ED de primer orden para $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y después encuentre $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

17. $ty'' - y' = 2t^2, \quad y(0) = 0$

18. $2y'' + ty' - 2y = 10, \quad y(0) = y'(0) = 0$

7.4.2 TRANSFORMADAS DE INTEGRALES

En los problemas 19 a 30, use el teorema 7.4.2 para evaluar cada una de las transformadas de Laplace. No evalúe la integral antes de transformar.

19. $\mathcal{L}\{1 * t^3\}$

20. $\mathcal{L}\{t^2 * te^t\}$

21. $\mathcal{L}\{e^{-t} * e^t \cos t\}$

22. $\mathcal{L}\{e^{2t} * \sin t\}$

23. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^\tau d\tau\right\}$

24. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos \tau d\tau\right\}$

25. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau\right\}$

26. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau \sin \tau d\tau\right\}$

27. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau\right\}$

28. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin \tau \cos(t - \tau) d\tau\right\}$

29. $\mathcal{L}\left\{t \int_0^t \sin \tau d\tau\right\}$

30. $\mathcal{L}\left\{t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right\}$

En los problemas 31 a 34, use (8) para evaluar cada transformada inversa.

31. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}$

32. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\}$

33. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s-1)}\right\}$

34. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)^2}\right\}$

35. La tabla del apéndice III no contiene un elemento para

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8k^3s}{(s^2 + k^2)^3}\right\}.$$

- Use (4) junto con los resultados de (5) para evaluar esta transformada inversa. Utilice un SAC como ayuda para evaluar la integral de convolución.
- Vuelva a analizar su respuesta del inciso a). ¿Podría haber obtenido el resultado en una forma diferente?

36. Emplee la transformada de Laplace y los resultados del problema 35 para resolver el problema con valores iniciales

$$y'' + y = \sin t + t \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Use un programa de graficación para trazar la solución.

En los problemas 37 a 46, use la transformada de Laplace para resolver la ecuación integral o la ecuación integrodiferencial.

37. $f(t) + \int_0^t (t - \tau)f(\tau) d\tau = t$

38. $f(t) = 2t - 4 \int_0^t \sin \tau f(t - \tau) d\tau$

39. $f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t - \tau) d\tau$

40. $f(t) + 2 \int_0^t f(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = 4e^{-t} + \sin t$

41. $f(t) + \int_0^t f(\tau) d\tau = 1$

42. $f(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} f(t - \tau) d\tau$

43. $f(t) = 1 + t - \frac{8}{3} \int_0^t (\tau - t)^3 f(\tau) d\tau$

44. $t - 2f(t) = \int_0^t (e^\tau - e^{-\tau}) f(t - \tau) d\tau$

45. $y'(t) = 1 - \sin t - \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad y(0) = 0$

46. $\frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad y(0) = 0$

En los problemas 47 y 48, resuelva la ecuación (10) sujeta a $i(0) = 0$ con L, R, C y $E(t)$ como se dan para cada problema. Use un programa de graficación para trazar la solución en el intervalo $0 \leq t < 3$.

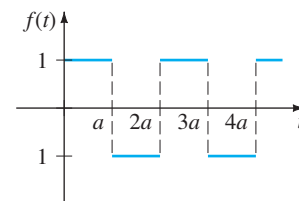
47. $L = 0.1 \text{ h}, R = 3 \Omega, C = 0.05 \text{ f},$
 $E(t) = 100[\mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 2)]$

48. $L = 0.005 \text{ h}, R = 1 \Omega, C = 0.02 \text{ f},$
 $E(t) = 100[t - (t - 1)\mathcal{U}(t - 1)]$

7.4.3 TRANSFORMADA DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA

En los problemas 49 a 54 use el teorema 7.4.3 para determinar la transformada de Laplace de cada una de las funciones periódicas.

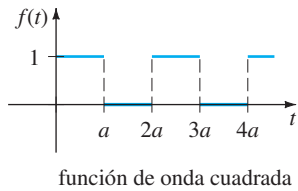
49.



función serpenteante

FIGURA 7.4.6 Gráfica para el problema 49.

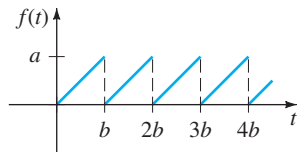
50.



función de onda cuadrada

FIGURA 7.4.7 Gráfica para el problema 50.

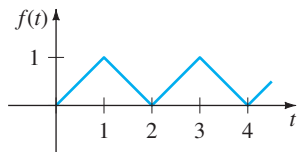
51.



función diente de sierra

FIGURA 7.4.8 Gráfica para el problema 51.

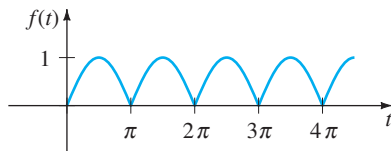
52.



función triangular

FIGURA 7.4.9 Gráfica para el problema 52.

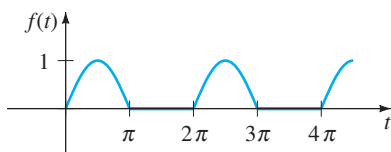
53.



rectificación de onda completa de sen t

FIGURA 7.4.10 Gráfica para el problema 53.

54.



rectificación de media onda de sen t

FIGURA 7.4.11 Gráfica para el problema 54.

En los problemas 55 y 56 resuelva la ecuación (12) sujeta a $i(0) = 0$ con $E(t)$ como se indica. Use un programa de graficación para trazar la solución en el intervalo $0 \leq t < 4$ en el caso cuando $L = I$ y $R = 1$.

55. $E(t)$ es la función serpenteante del problema 49 con amplitud 1 y $a = 1$.

56. $E(t)$ es la función diente de sierra del problema 51 con amplitud 1 y $b = 1$.

En los problemas 57 y 58 resuelva el modelo para un sistema forzado resorte/masa con amortiguamiento

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

donde la función forzada f es como se especifica. Utilice un programa de graficación para trazar $x(t)$ en los valores indicados de t .

57. $m = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $k = 5$, f es la función serpenteante del problema 49 con amplitud 10, y $a = \pi$, $0 \leq t < 2\pi$.

58. $m = 1$, $\beta = 2$, $k = 1$, f es la función de onda cuadrada del problema 50 con amplitud 5, y $a = \pi$, $0 \leq t < 4\pi$.

Problemas para analizar

59. Examine cómo se puede usar el teorema 7.4.1 para encontrar

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \ln \frac{s-3}{s+1} \right\}.$$

60. En la sección 6.3 vimos que $ty'' + y' + ty = 0$ es la ecuación de Bessel de orden $\nu = 0$. En vista de (22) de esta sección y de la tabla 6.1, una solución del problema con valores iniciales $ty'' + y' + ty = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, es $y = J_0(t)$. Use este resultado y el procedimiento descrito en las instrucciones de los problemas 17 y 18 para demostrar que

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}.$$

[Sugerencia: Podría ser necesario usar el problema 46 de los ejercicios 7.2].

61. a) Se sabe que la **ecuación diferencial de Laguerre**

$$ty'' + (1-t)y' + ny = 0$$

tiene soluciones polinomiales cuando n es un entero no negativo. Estas soluciones naturalmente se llaman **polinomios de Laguerre** y se denotan por $L_n(t)$. Determine $y = L_n(t)$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ si se sabe que $L_n(0) = 1$.

b) Demuestre que

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} t^n e^{-t} \right\} = Y(s),$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ y $y = L_n(t)$ es una solución polinomial de la ED del inciso a). Concluya que

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} t^n e^{-t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esta última relación para generar los polinomios de Laguerre es el análogo de la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre. Véase (30) en la sección 6.3.

Tarea para el laboratorio de computación

62. En este problema se indican las instrucciones de *Mathematica* que permiten obtener la transformada de Laplace simbólica de una ecuación diferencial y la solución del problema de valores iniciales al encontrar la transformada inversa. En *Mathematica* la transformada de Laplace de una función $y(t)$ se obtiene usando **LaplaceTransform** [$y[t]$, t , s]. En el renglón dos de la sintaxis se reemplaza **LaplaceTransform** [$y[t]$, t , s] por el símbolo **Y**. (Si no tiene Mathematica, entonces adapte el procedimiento dado encontrando la sintaxis correspondiente para el SAC que tenga a la mano.)

Considere el problema con valores iniciales

$$y'' + 6y' + 9y = t \sin t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

Cargue el paquete de transformada de Laplace. Reprodúzca con precisión y después, a su vez, ejecute cada renglón de la siguiente secuencia de instrucciones. Copie los resultados a mano o imprímalo.

```
diffequat = y''[t] + 6y'[t] + 9y[t] == t Sin[t]
transformdeq = LaplaceTransform[diffequat, t, s] /.
  {y[0] -> 2, y'[0] -> -1,
   LaplaceTransform[y[t], t, s] -> Y}
soln = Solve[transformdeq, Y]//Flatten
Y = Y/soln
InverseLaplaceTransform[Y, s, t]
```

63. Modifique de forma apropiada el procedimiento del problema 62 para encontrar una solución de

$$y''' + 3y' - 4y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

64. La carga $q(t)$ en un capacitor en un circuito CL en serie está dada por

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + q = 1 - 4\mathcal{U}(t - \pi) + 6\mathcal{U}(t - 3\pi),$$

$$q(0) = 0, \quad q'(0) = 0.$$

Modifique de forma apropiada el procedimiento del problema 62 para determinar $q(t)$. Trace la gráfica de su solución.

7.5 LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

INTRODUCCIÓN En el último párrafo de la página 261, se indicó que como una consecuencia inmediata del teorema 7.1.3, $F(s) = 1$ no puede ser la transformada de Laplace de una función f que es continua por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial. En el análisis siguiente se introduce una función que es muy diferente de las que ha estudiado en cursos anteriores. Más tarde veremos que de hecho existe una función o más precisamente, una *función generalizada*, cuya transformada de Laplace es $F(s) = 1$.

IMPULSO UNITARIO Los sistemas mecánicos suelen ser afectados por una fuerza externa (o fuerza electromotriz en un circuito eléctrico) de gran magnitud que actúa sólo por un periodo muy corto. Por ejemplo, podría caer un rayo en el ala vibrante de un avión, un martillo de bola podría golpear con precisión una masa en un resorte, una bola (de beisbol, golf, tenis) podría ser enviada por el aire al ser golpeada de modo violento con un bate, palo de golf o raqueta. Vea la figura 7.5.1. La gráfica de la función definida por partes

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a}, & t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0, & t \geq t_0 + a, \end{cases} \quad (1)$$

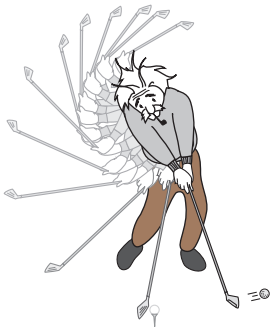


FIGURA 7.5.1 Un palo de golf aplica una fuerza de gran magnitud en la bola durante un periodo muy corto.

$a > 0, t_0 > 0$, que se muestra en la figura 7.5.2a, podría servir como modelo para tal fuerza. Para un valor pequeño de a , $\delta_a(t - t_0)$ es en esencia una función constante de gran magnitud que está “activada” sólo durante un periodo muy corto, alrededor de t_0 . El comportamiento de $\delta_a(t - t_0)$ conforme $a \rightarrow 0$ se ilustra en la figura 7.5.2b. La función $\delta_a(t - t_0)$ se llama **impulso unitario** porque tiene la propiedad de integración $\int_0^\infty \delta_a(t - t_0) dt = 1$.

LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC En la práctica es conveniente trabajar con otro tipo de impulso unitario, una “función” que aproxima a $\delta_a(t - t_0)$ y se define por el límite

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t - t_0). \quad (2)$$

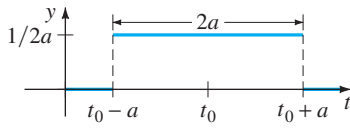
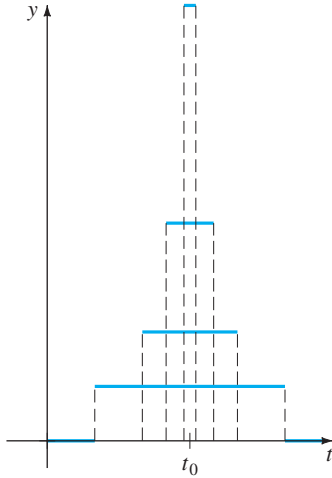
a) gráfica de $\delta_a(t - t_0)$ b) comportamiento de δ_a conforme $a \rightarrow 0$

FIGURA 7.5.2 Impulso unitario.

La última expresión, que no es una función en absoluto, se puede caracterizar por las dos propiedades

$$i) \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad y \quad ii) \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

El impulso unitario $\delta(t - t_0)$ se llama **función delta de Dirac**.

Es posible obtener la transformada de Laplace de la función delta de Dirac por la suposición formal de que $\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\delta_a(t - t_0)\}$.

TEOREMA 7.5.1 Transformada de la función delta de Dirac

$$\text{Para } t_0 > 0, \quad \mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}. \quad (3)$$

DEMOSTRACIÓN Para empezar se puede escribir $\delta_a(t - t_0)$ en términos de la función escalón unitario en virtud de (11) y (12) de la sección 7.3:

$$\delta_a(t - t_0) = \frac{1}{2a} [\mathcal{U}(t - (t_0 - a)) - \mathcal{U}(t - (t_0 + a))].$$

Por linealidad y (14) de la sección 7.3 la transformada de Laplace de esta última expresión es

$$\mathcal{L}\{\delta_a(t - t_0)\} = \frac{1}{2a} \left[\frac{e^{-s(t_0-a)}}{s} - \frac{e^{-s(t_0+a)}}{s} \right] = e^{-st_0} \left(\frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2sa} \right). \quad (4)$$

Puesto que (4) tiene la forma indeterminada $0/0$ conforme $a \rightarrow 0$ se aplica la regla de L'Hôpital:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\delta_a(t - t_0)\} = e^{-st_0} \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2sa} \right) = e^{-st_0}. \quad \blacksquare$$

Ahora cuando $t_0 = 0$, se puede concluir de (3) que

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

El último resultado enfatiza el hecho de que $\delta(t)$ no es el tipo usual de función que se ha estado considerando, puesto que se espera del teorema 7.1.3 que $\mathcal{L}\{f(t)\} \rightarrow 0$ conforme $s \rightarrow \infty$.

EJEMPLO 1 Dos problemas con valores iniciales

Resuelva $y'' + y = 4\delta(t - 2\pi)$ sujeta a

$$\text{a) } y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad \text{b) } y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Dos problemas con valores iniciales podrían servir como modelos para describir el movimiento de una masa en un resorte que se mueve en un medio en el cual el amortiguamiento es despreciable. En $t = 2\pi$ la masa recibe un golpe preciso. En a) la masa se libera a partir del reposo una unidad abajo de la posición de equilibrio. En b) la masa está en reposo en la posición de equilibrio.

SOLUCIÓN a) De (3) la transformada de Laplace de la ecuación diferencial es

$$s^2 Y(s) - s + Y(s) = 4e^{-2\pi s} \quad \text{o} \quad Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Con la forma inversa del segundo teorema de traslación, se encuentra

$$y(t) = \cos t + 4 \sin(t - 2\pi) \mathcal{U}(t - 2\pi).$$

Puesto que $\sin(t - 2\pi) = \sin t$, la solución anterior se puede escribir como

$$y(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < 2\pi \\ \cos t + 4 \sin t, & t \geq 2\pi. \end{cases} \quad (5)$$

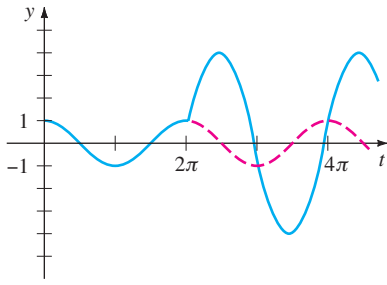


FIGURA 7.5.3 La masa es golpeada en $t = 2\pi$.

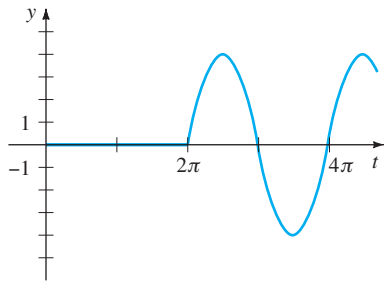


FIGURA 7.5.4 Ningún movimiento hasta que la masa es golpeada en $t = 2\pi$.

En la figura 7.5.3 se ve de la gráfica de (5) que la masa presenta movimiento armónico simple hasta que es golpeada en $t = 2\pi$. La influencia del impulso unitario es incrementar la amplitud de vibración a $\sqrt{17}$ para $t > 2\pi$.

b) En este caso la transformada de la ecuación es simplemente

$$Y(s) = \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2 + 1},$$

y así

$$y(t) = 4 \sin(t - 2\pi) \mathcal{U}(t - 2\pi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2\pi \\ 4 \sin t, & t \geq 2\pi. \end{cases} \quad (6)$$

La gráfica de (6) de la figura 7.5.4 muestra, como se esperaba de las condiciones iniciales, que la masa no exhibe movimiento hasta que es golpeada en $t = 2\pi$. ■

COMENTARIOS

i) Si $\delta(t - t_0)$ fuera una función en el sentido usual, entonces la propiedad i) en la página 293 implicaría $\int_0^\infty \delta(t - t_0) dt = 0$ en vez de $\int_0^\infty \delta(t - t_0) dt = 1$. Debido a que la función delta de Dirac no se “comporta” como una función ordinaria, aun cuando sus usuarios produjeron resultados correctos, al inicio los matemáticos la recibieron con gran desprecio. Sin embargo, en 1940 la controversial función de Dirac fue puesta en un fundamento riguroso por el matemático francés Laurent Schwartz en su libro *La Théorie de distribution* y esto, a su vez, condujo una rama completamente nueva de la matemática conocida como la **teoría de las distribuciones** o **funciones generalizadas**. En esta teoría (2) no es una definición aceptada de $\delta(t - t_0)$, ni se habla de una función cuyos valores son ∞ o 0. Aunque se deja en paz este tema, basta decir que la función delta de Dirac se caracteriza mejor por su efecto en otras funciones. Si f es una función continua, entonces

$$\int_0^\infty f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (7)$$

se puede tomar como la *definición* de $\delta(t - t_0)$. Este resultado se conoce como **propiedad de cribado**, puesto que $\delta(t - t_0)$ tiene el efecto de separar el valor $f(t_0)$ del conjunto de valores de f en $[0, \infty)$. Note que la propiedad ii) (con $f(t) = 1$) y (3) (con $f(t) = e^{-st}$) son consistentes con (7).

ii) Los *Comentarios* en la sección 7.2 indicaron que la función de transferencia de una ecuación diferencial lineal general de n -ésimo orden con coeficientes constantes es $W(s) = 1/P(s)$, donde $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$. La función de transferencia es la transformada de Laplace de la función $w(t)$, conocida como **función peso** de un sistema lineal. Pero $w(t)$ también se puede caracterizar en términos del análisis en cuestión. Por simplicidad se considera un sistema lineal de segundo orden en el que la entrada es un impulso unitario en $t = 0$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Aplicando la transformada de Laplace y usando $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ se muestra que la transformada de la respuesta y en este caso es la función de transferencia

$$Y(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{P(s)} = W(s) \quad \text{y así} \quad y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{P(s)}\right\} = w(t).$$

De esto se puede ver, en general, que la función peso $y = w(t)$ de un sistema lineal de n -ésimo orden es la respuesta de estado cero del sistema a un impulso unitario. Por esta razón $w(t)$ también se llama **respuesta de impulso** del sistema.

EJERCICIOS 7.5 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-12.*

En los problemas 1 a 12, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

1. $y' - 3y = \delta(t - 2), \quad y(0) = 0$
2. $y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 2$
3. $y'' + y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
4. $y'' + 16y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
5. $y'' + y = \delta\left(t - \frac{1}{2}\pi\right) + \delta\left(t - \frac{3}{2}\pi\right),$
 $y(0) = 0, y'(0) = 0$
6. $y'' + y = \delta(t - 2\pi) + \delta(t - 4\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
7. $y'' + 2y' = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
8. $y'' - 2y' = 1 + \delta(t - 2), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
9. $y'' + 4y' + 5y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
10. $y'' + 2y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
11. $y'' + 4y' + 13y = \delta(t - \pi) + \delta(t - 3\pi),$
 $y(0) = 1, y'(0) = 0$
12. $y'' - 7y' + 6y = e^t + \delta(t - 2) + \delta(t - 4),$
 $y(0) = 0, y'(0) = 0$
13. Una viga uniforme de longitud L soporta una carga concentrada w_0 en $x = \frac{1}{2}L$. La viga está empotrada en su extremo

izquierdo y libre en su extremo derecho. Use la transformada de Laplace para determinar la deflexión $y(x)$ de

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w_0 \delta\left(x - \frac{1}{2}L\right),$$

donde $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(L) = 0, y'''(L) = 0$.

14. Resuelva la ecuación diferencial del problema 13 sujeta a $y(0) = 0, y'(0) = 0, y(L) = 0, y'(L) = 0$. En este caso la viga está empotrada en ambos extremos. Véase la figura 7.5.5.

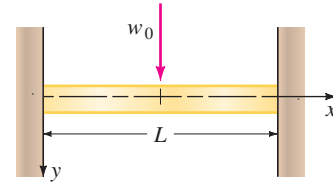


FIGURA 7.5.5 Viga en el problema 14.

Problemas para analizar

15. Alguien afirma que las soluciones de dos PVI

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 10y &= 0, & y(0) &= 0, & y'(0) &= 1 \\ y'' + 2y' + 10y &= \delta(t), & y(0) &= 0, & y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

son exactamente lo mismo. ¿Está de acuerdo o no? Justifique su respuesta.

7.6

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

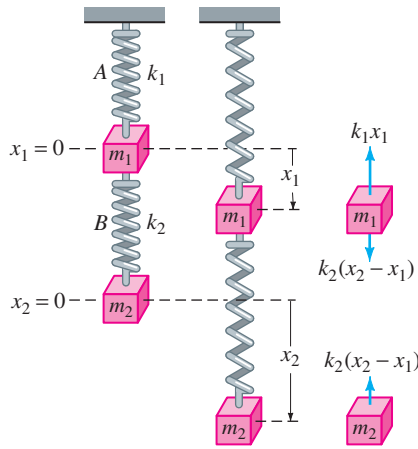
REPASO DE MATERIAL

- Solución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

INTRODUCCIÓN Cuando se especifican las condiciones iniciales, la transformada de Laplace de cada ecuación en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes reduce el sistema de ED a un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas en las funciones transformadas. Se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas para cada una de las funciones transformadas y luego se determinan las transformadas de Laplace inversas en la manera usual.

RESORTES ACOPLADOS Dos masas m_1 y m_2 están conectadas a dos resortes A y B de masa despreciable con constantes de resorte k_1 y k_2 respectivamente. A su vez, los dos resortes están unidos como se muestra en la figura 7.6.1. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos verticales de las masas desde sus posiciones de equilibrio. Cuando el sistema está en movimiento, el resorte B está sujeto a elongación y compresión; por lo que su elongación neta es $x_2 - x_1$. Por tanto, se deduce de la ley de Hooke que los resortes A y B ejercen fuerzas $-k_1 x_1$ y $k_2(x_2 - x_1)$ respectivamente, en m_1 . Si ninguna fuerza externa se aplica al sistema y si ninguna fuerza de amortiguamiento está presente, entonces la fuerza neta en m_1 es $-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$. Por la segunda ley de Newton se puede escribir

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1).$$



a) equilibrio b) movimiento c) fuerzas

FIGURA 7.6.1 Sistema resorte/masa acoplado.

De igual manera, la fuerza neta ejercida en la masa m_2 se debe sólo a la elongación neta de B ; es decir, $-k_2(x_2 - x_1)$. Por tanto, se tiene

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1).$$

En otras palabras, el movimiento del sistema acoplado se representa por el sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (1)$$

En el ejemplo siguiente se resuelve (1) bajo las suposiciones de que $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y que las masas comienzan desde sus posiciones de equilibrio con velocidades unitarias opuestas.

EJEMPLO 1 Resortes acoplados

Resuelva

$$\begin{aligned} x_1'' + 10x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -4x_1 + x_2'' + 4x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

sujeta a $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = -1$.

SOLUCIÓN La transformada de Laplace de cada ecuación es

$$s^2 X_1(s) - s x_1(0) - x_1'(0) + 10X_1(s) - 4X_2(s) = 0$$

$$-4X_1(s) + s^2 X_2(s) - s x_2(0) - x_2'(0) + 4X_2(s) = 0,$$

donde $X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}$ y $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\}$. El sistema anterior es igual a

$$\begin{aligned} (s^2 + 10)X_1(s) - 4X_2(s) &= 1 \\ -4X_1(s) + (s^2 + 4)X_2(s) &= -1. \end{aligned} \quad (3)$$

Resolviendo (3) para $X_1(s)$ y usando fracciones parciales en el resultado, se obtiene

$$X_1(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = -\frac{1/5}{s^2 + 2} + \frac{6/5}{s^2 + 12},$$

y por tanto

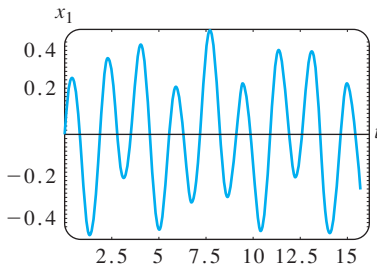
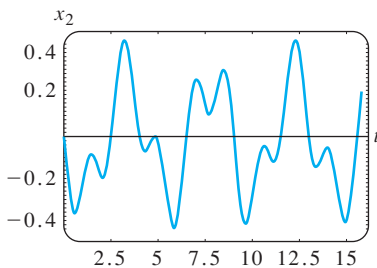
$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{5\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}\right\} + \frac{6}{5\sqrt{12}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{10} \sin \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5} \sin 2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión para $X_1(s)$ en la primera ecuación de (3), se obtiene

$$X_2(s) = -\frac{s^2 + 6}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = -\frac{2/5}{s^2 + 2} - \frac{3/5}{s^2 + 12}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\frac{2}{5\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}\right\} - \frac{3}{5\sqrt{12}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{5} \sin \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10} \sin 2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

a) gráfica de $x_1(t)$ vs. t b) gráfica de $x_2(t)$ vs. t **FIGURA 7.6.2** Desplazamientos de las dos masas.

Por último, la solución del sistema (2) es

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{10} \sin \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5} \sin 2\sqrt{3}t \\ x_2(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{5} \sin \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10} \sin 2\sqrt{3}t. \end{aligned} \quad (4)$$

Las gráficas de x_1 y x_2 de la figura 7.6.2 revelan el complicado movimiento oscilatorio de cada masa. ■

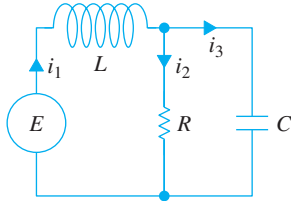


FIGURA 7.6.3 Red eléctrica.

REDES En (18) de la sección 3.3 vimos que las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ de la red que se muestra en la figura 7.6.3 con un inductor, un resistor y un capacitor, estaban gobernadas por el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} L \frac{di_1}{dt} + Ri_2 &= E(t) \\ RC \frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Resolvemos este sistema con la transformada de Laplace en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Una red eléctrica

Resuelva el sistema en (5) bajo las condiciones $E(t) = 60$ V, $L = 1$ h, $R = 50 \Omega$, $C = 10^{-4}$ f y al inicio las corrientes i_1 e i_2 son cero.

SOLUCIÓN Debemos resolver

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} + 50i_2 &= 60 \\ 50(10^{-4}) \frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 &= 0 \end{aligned}$$

sujeta a $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$.

Aplicando la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema y simplificando, se obtiene

$$\begin{aligned} sI_1(s) + 50I_2(s) &= \frac{60}{s} \\ -200I_1(s) + (s + 200)I_2(s) &= 0, \end{aligned}$$

donde $I_1(s) = \mathcal{L}\{i_1(t)\}$ e $I_2(s) = \mathcal{L}\{i_2(t)\}$. Resolviendo el sistema para I_1 e I_2 y descomponiendo los resultados en fracciones parciales, se obtiene

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{60s + 12\,000}{s(s + 100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s + 100} - \frac{60}{(s + 100)^2} \\ I_2(s) &= \frac{12\,000}{s(s + 100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s + 100} - \frac{120}{(s + 100)^2}. \end{aligned}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace, encontramos que las corrientes son

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t} \\ i_2(t) &= \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

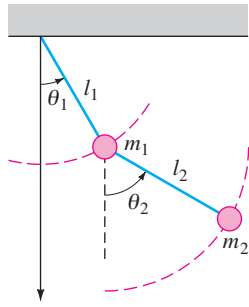


FIGURA 7.6.4 Péndulo doble.

Observe que tanto $i_1(t)$ como $i_2(t)$ del ejemplo 2 tienden hacia el valor $E/R = \frac{6}{5}$ conforme $t \rightarrow \infty$. Además, puesto que la corriente a través del capacitor es $i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = 60te^{-100t}$, se observa que $i_3(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

PÉNDULO DOBLE Considere el sistema de péndulo doble que consiste en un péndulo unido a otro como se muestra en la figura 7.6.4. Se supone que el sistema oscila en un plano vertical bajo la influencia de la gravedad, que la masa de cada varilla es despreciable y que ninguna fuerza de amortiguamiento actúa sobre el sistema. En la figura 7.6.4 también se muestra que el ángulo de desplazamiento θ_1 se mide (en radianes) desde una línea vertical que se extiende hacia abajo desde el pivote del sistema y que θ_2 se mide desde una línea vertical que se extiende desde el centro de masa m_1 . La dirección positiva es a la derecha; la dirección negativa es a la izquierda. Como se esperaría del análisis que condujo a la ecuación (6) de la sección 5.3, el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento es no lineal:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2\theta_1'' + m_2l_1l_2\theta_2'' \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2(\theta_2')^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)l_1g \sin \theta_1 &= 0 \\ m_2l_2^2\theta_2'' + m_2l_1l_2\theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2(\theta_1')^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_2g \sin \theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Pero si se supone que los desplazamientos $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ son pequeños, entonces las aproximaciones $\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$, $\sin(\theta_1 - \theta_2) \approx 0$, $\sin \theta_1 \approx \theta_1$, $\sin \theta_2 \approx \theta_2$ nos permiten reemplazar el sistema (6) por la linealización

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2\theta_1'' + m_2l_1l_2\theta_2'' + (m_1 + m_2)l_1g\theta_1 &= 0 \\ m_2l_2^2\theta_2'' + m_2l_1l_2\theta_1'' + m_2l_2g\theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

EJEMPLO 3 Doble péndulo

Se deja como ejercicio completar los detalles de usar la transformada de Laplace para resolver el sistema (7) cuando $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $l_1 = l_2 = 16$, $\theta_1(0) = 1$, $\theta_2(0) = -1$, $\theta_1'(0) = 0$ y $\theta_2'(0) = 0$. Debe encontrar que

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{1}{4} \cos \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{3}{4} \cos 2t \\ \theta_2(t) &= \frac{1}{2} \cos \frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{3}{2} \cos 2t. \end{aligned} \quad (8)$$

En la figura 7.6.5 se muestran con la ayuda de un SAC las posiciones de las dos masas en $t = 0$ y en tiempos posteriores. Véase el problema 21 en los ejercicios 7.6.

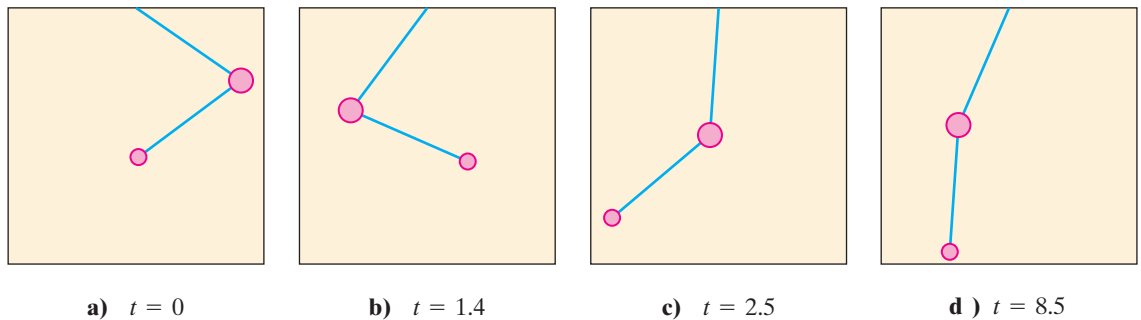


FIGURA 7.6.5 Posiciones de masas del péndulo doble en diferentes tiempos.

EJERCICIOS 7.6 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-12.*

En los problemas 1 a 12, use la transformada de Laplace para resolver el sistema dado de ecuaciones diferenciales.

1. $\frac{dx}{dt} = -x + y$
 $\frac{dy}{dt} = 2x$
 $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$
2. $\frac{dx}{dt} = 2y + e^t$
 $\frac{dy}{dt} = 8x - t$
 $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$
3. $\frac{dx}{dt} = x - 2y$
 $\frac{dy}{dt} = 5x - y$
 $x(0) = -1, \quad y(0) = 2$
4. $\frac{dx}{dt} + 3x + \frac{dy}{dt} = 1$
 $\frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} - y = e^t$
 $x(0) = 0, \quad y(0) = 0$
5. $2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = 1$
 $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2$
 $x(0) = 0, \quad y(0) = 0$
6. $\frac{dx}{dt} + x - \frac{dy}{dt} + y = 0$
 $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = 0$
 $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$
7. $\frac{d^2x}{dt^2} + x - y = 0$
 $\frac{d^2y}{dt^2} + y - x = 0$
 $x(0) = 0, \quad x'(0) = -2,$
 $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
8. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0$
 $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 4\frac{dx}{dt} = 0$
 $x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$
 $y(0) = -1, \quad y'(0) = 5$
9. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = t^2$
 $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} = 4t$
 $x(0) = 8, \quad x'(0) = 0,$
 $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
10. $\frac{dx}{dt} - 4x + \frac{d^3y}{dt^3} = 6 \operatorname{sen} t$
 $\frac{dx}{dt} + 2x - 2\frac{d^3y}{dt^3} = 0$
 $x(0) = 0, \quad y(0) = 0,$
 $y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$
11. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 3y = 0$
 $\frac{d^2x}{dt^2} + 3y = te^{-t}$
 $x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 0$
12. $\frac{dx}{dt} = 4x - 2y + 2\mathcal{U}(t - 1)$
 $\frac{dy}{dt} = 3x - y + \mathcal{U}(t - 1)$
 $x(0) = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}$

13. Resuelva el sistema (1) cuando $k_1 = 3, k_2 = 2, m_1 = 1, m_2 = 1$ y $x_1(0) = 0, x_1'(0) = 1, x_2(0) = 1, x_2'(0) = 0$.

14. Construya el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento vertical en línea recta de los resortes acoplados que se muestran en la figura 7.6.6. Use la transformada de Laplace para resolver el sistema cuando $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, m_1 = 1, m_2 = 1$ y $x_1(0) = 0, x_1'(0) = -1, x_2(0) = 0, x_2'(0) = 1$.

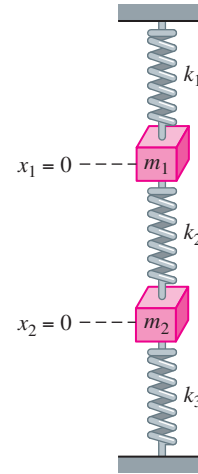


FIGURA 7.6.6 Resortes acoplados del problema 14.

15. a) Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura 7.6.7 es

$$L_1 \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t)$$

$$L_2 \frac{di_3}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t).$$

b) Resuelva el sistema del inciso a) si $R = 5 \, \Omega, L_1 = 0.01 \, \text{h}, L_2 = 0.0125 \, \text{h}, E = 100 \, \text{V}, i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$.

c) Determine la corriente $i_1(t)$.

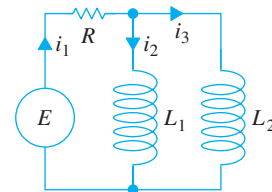


FIGURA 7.6.7 Red del problema 15.

16. a) En el problema 12 de los ejercicios 3.3 se pide demostrar que las corrientes $i_2(t)$ e $i_1(t)$ de la red eléctrica que se muestra en la figura 7.6.8 satisface

$$L \frac{di_2}{dt} + L \frac{di_3}{dt} + Ri_2 = E(t)$$

$$-R_1 \frac{di_2}{dt} + R_2 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C} i_3 = 0.$$

Resuelva el sistema si $R_1 = 10 \, \Omega$, $R_2 = 5 \, \Omega$, $L = 1 \, \text{h}$, $C = 0.2 \, \text{f}$.

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2, \end{cases}$$

$$i_2(0) = 0, \text{ e } i_3(0) = 0.$$

b) Determine la corriente $i_1(t)$.

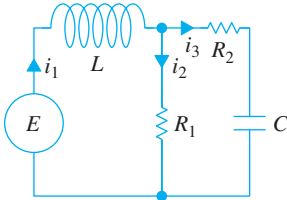


FIGURA 7.6.8 Red del problema 16.

17. Resuelva el sistema dado en (17) de la sección 3.3 cuando $R_1 = 6 \, \Omega$, $R_2 = 5 \, \Omega$, $L_1 = 1 \, \text{h}$, $L_2 = 1 \, \text{h}$, $E(t) = 50 \sin t$ V, $i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$.
18. Resuelva (5) cuando $E = 60 \, \text{V}$, $L = \frac{1}{2} \, \text{h}$, $R = 50 \, \Omega$, $C = 10^{-4} \, \text{f}$, $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.
19. Resuelva (5) cuando $E = 60 \, \text{V}$, $L = 2 \, \text{h}$, $R = 50 \, \Omega$, $C = 10^{-4} \, \text{f}$, $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.
20. a) Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales para la carga en el capacitor $q(t)$ y la corriente $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura 7.6.9 es

$$R_1 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q + R_1 i_3 = E(t)$$

$$L \frac{di_3}{dt} + R_2 i_3 - \frac{1}{C} q = 0.$$

b) Determine la carga en el capacitor cuando $L = 1 \, \text{h}$, $R_1 = 1 \, \Omega$, $R_2 = 1 \, \Omega$, $C = 1 \, \text{f}$.

$$E(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ 50e^{-t}, & t \geq 1, \end{cases}$$

$$i_3(0) = 0 \text{ y } q(0) = 0.$$

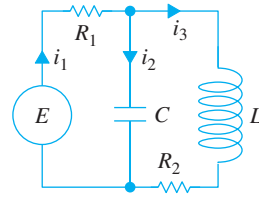


FIGURA 7.6.9 Red del problema 20.

Tarea para el laboratorio de computación

21. a) Use la transformada de Laplace y la información dada en el ejemplo 3 para obtener la solución (8) del sistema que se presenta en (7).
- b) Use un programa de graficación para trazar $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ en el plano $t\theta$. ¿Cuál masa tiene desplazamientos extremos de mayor magnitud? Use las gráficas para estimar la primera vez que cada masa pasa por su posición de equilibrio. Analice si el movimiento del péndulo es periódico.
- c) Trace la gráfica de $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ en el plano $\theta_1\theta_2$ como ecuaciones paramétricas. La curva que definen estas ecuaciones paramétricas se llama **curva de Lissajous**.
- d) En la figura 7.6.5a se presentan las posiciones de las masas en $t = 0$. Observe que se ha usado 1 radián $\approx 57.3^\circ$. Use una calculadora o una tabla de aplicación de un SAC para construir una tabla de valores de los ángulos θ_1 y θ_2 para $t = 1, 2, \dots, 10 \, \text{s}$. Después dibuje las posiciones de las dos masas en esos tiempos.
- e) Use un SAC para encontrar la primera vez que $\theta_1(t) = \theta_2(t)$ y calcule el correspondiente valor angular. Dibuje las posiciones de las dos masas en esos tiempos.
- f) Utilice un SAC para dibujar las rectas apropiadas para simular las varillas de los péndulos, como se muestra en la figura 7.6.5. Use la utilidad de animación de su SAC para hacer un “video” del movimiento del péndulo doble desde $t = 0$ hasta $t = 10$ usando un incremento de 0.1. [Sugerencia: Expresé las coordenadas $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_2(t), y_2(t))$ de las masas m_1 y m_2 respectivamente, en términos de $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$.]

REPASO DEL CAPÍTULO 7

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-12

En los problemas 1 y 2 utilice la definición de la transformada de Laplace para encontrar $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

$$1. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$2. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 4 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}$$

En los problemas 3 a 24 complete los espacios en blanco o conteste verdadero o falso.

3. Si f no es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}$ no existirá. _____
4. La función $f(t) = (e^t)^{10}$ no es de orden exponencial. _____
5. $F(s) = s^2/(s^2 + 4)$ no es la transformada de Laplace de una función que es continua por tramos y de orden exponencial. _____

6. Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)g(t)$. _____
7. $\mathcal{L}\{e^{-7t}\} =$ _____ 8. $\mathcal{L}\{te^{-7t}\} =$ _____
9. $\mathcal{L}\{\sin 2t\} =$ _____ 10. $\mathcal{L}\{e^{-3t}\sin 2t\} =$ _____
11. $\mathcal{L}\{t \sin 2t\} =$ _____
12. $\mathcal{L}\{\sin 2t \mathcal{U}(t - \pi)\} =$ _____
13. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20}{s^6}\right\} =$ _____
14. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s - 1}\right\} =$ _____
15. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 5)^3}\right\} =$ _____
16. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 5}\right\} =$ _____
17. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - 10s + 29}\right\} =$ _____
18. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s^2}\right\} =$ _____
19. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \pi}{s^2 + \pi^2}e^{-s}\right\} =$ _____
20. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{L^2s^2 + n^2\pi^2}\right\} =$ _____
21. $\mathcal{L}\{e^{-5t}\}$ existe para $s >$ _____.
22. Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces $\mathcal{L}\{te^{8t}f(t)\} =$ _____.
23. Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $k > 0$, entonces $\mathcal{L}\{e^{at}f(t - k)\mathcal{U}(t - k)\} =$ _____.
24. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{a\tau}f(\tau) d\tau\right\} =$ _____ mientras que $\mathcal{L}\{e^{at}\int_0^t f(\tau) d\tau\} =$ _____.

En los problemas 25 a 28, use la función escalón unitario para determinar una ecuación para cada gráfica en términos de la función $y = f(t)$, cuya gráfica se presenta en la figura 7.R.1.

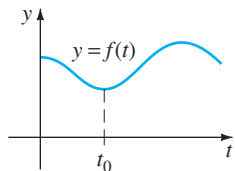


FIGURA 7.R.1 Gráfica para los problemas 25 a 28.

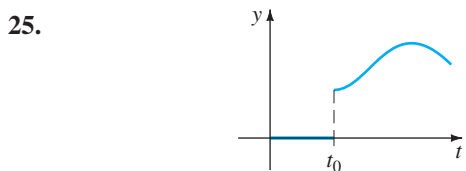


FIGURA 7.R.2 Gráfica para el problema 25.

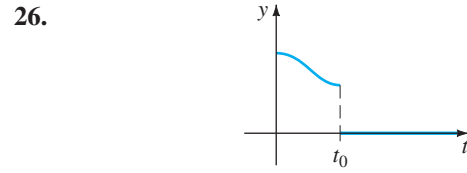


FIGURA 7.R.3 Gráfica para el problema 26.

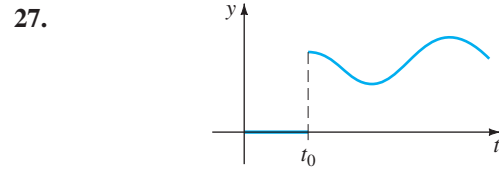


FIGURA 7.R.4 Gráfica para el problema 27.

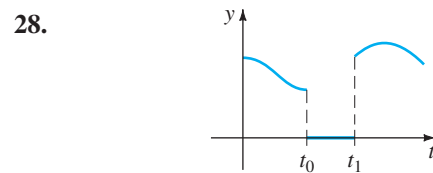


FIGURA 7.R.5 Gráfica para el problema 28.

En los problemas 29 a 32 exprese f en términos de funciones escalón unitario. Encuentre $\mathcal{L}\{f(t)\}$ y $\mathcal{L}\{e^t f(t)\}$.

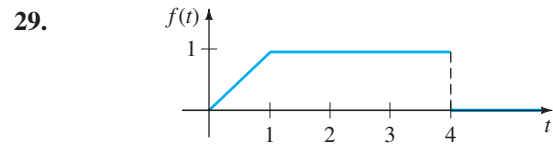


FIGURA 7.R.6 Gráfica para el problema 29.

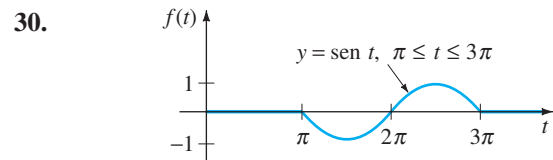


FIGURA 7.R.7 Gráfica para el problema 30.

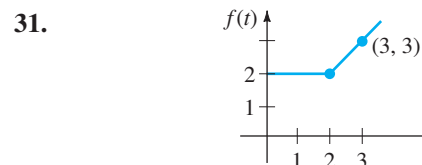


FIGURA 7.R.8 Gráfica para el problema 31.

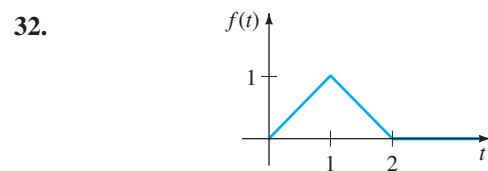


FIGURA 7.R.9 Gráfica para el problema 32.

En los problemas 33 a 38, use la transformada de Laplace para resolver la ecuación dada.

33. $y'' - 2y' + y = e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$

34. $y'' - 8y' + 20y = te^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

35. $y'' + 6y' + 5y = t - t^2 u(t - 2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

36. $y' - 5y = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}, \quad y(0) = 1$$

37. $y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau$, $y(0) = 1$

38. $\int_0^t f(\tau) f(t - \tau) d\tau = 6t^3$

En los problemas 39 y 40, use la transformada de Laplace para resolver cada sistema.

39. $x' + y = t$ $4x + y' = 0$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$	40. $x'' + y'' = e^{2t}$ $2x' + y'' = -e^{2t}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$
--	---

41. La corriente $i(t)$ en un circuito RC en serie se puede determinar de la ecuación integral

$$Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t),$$

donde $E(t)$ es el voltaje aplicado. Determine $i(t)$ cuando $R = 10 \Omega$, $C = 0.5$ f y $E(t) = 2(t^2 + t)$.

42. Un circuito en serie contiene un inductor, un resistor y un capacitor para el cual $L = \frac{1}{2}$ h, $R = 10 \Omega$ y $C = 0.01$ f, respectivamente. El voltaje

$$E(t) = \begin{cases} 10, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$$

se aplica al circuito. Determine la carga instantánea $q(t)$ en el capacitor para $t > 0$ si $q(0) = 0$ y $q'(0) = 0$.

43. Una viga en voladizo uniforme de longitud L está empotrada en su extremo izquierdo ($x = 0$) y libre en su extremo derecho. Encuentre la deflexión $y(x)$ si la carga por unidad de longitud se determina por

$$w(x) = \frac{2w_0}{L} \left[\frac{L}{2} - x + \left(x - \frac{L}{2} \right) u\left(x - \frac{L}{2} \right) \right].$$

44. Cuando una viga uniforme se apoya mediante una base elástica, la ecuación diferencial para su deflexión $y(x)$ es

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = w(x),$$

donde k es el módulo de la base y $-ky$ es la fuerza restauradora de la base que actúa en dirección opuesta a la de la carga $w(x)$. Vea la figura 7.R.10. Por conveniencia

algebraica suponga que la ecuación diferencial se escribe como

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4a^4 y = \frac{w(x)}{EI},$$

donde $a = (k/4EI)^{1/4}$. Suponga que $L = \pi$ y $a = 1$. Encuentre la deflexión $y(x)$ de una viga que está apoyada en una base elástica cuando

- a) la viga está apoyada simplemente en ambos extremos y una carga constante w_0 se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud,
b) la viga está empotrada en ambos extremos y $w(x)$ es una carga concentrada w_0 aplicada en $x = \pi/2$.

[Sugerencia: En ambas partes de este problema, use los elementos 35 y 36 de la tabla de transformadas de Laplace del apéndice III].

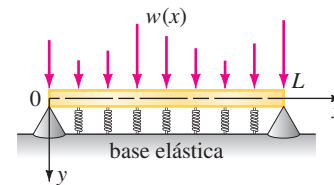


FIGURA 7.R.10 Viga sobre la base elástica del problema 44.

45. a) Suponga que dos péndulos idénticos están acoplados por medio de un resorte con k constante. Véase la figura 7.R.11. Bajo las mismas suposiciones hechas en el análisis anterior al ejemplo 3 de la sección 7.6, se puede demostrar que cuando los ángulos de desplazamiento $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ son pequeños, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales que describen el movimiento es

$$\theta_1'' + \frac{g}{l} \theta_1 = -\frac{k}{m} (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\theta_2'' + \frac{g}{l} \theta_2 = \frac{k}{m} (\theta_1 - \theta_2).$$

Utilice la transformada de Laplace para resolver el sistema cuando $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_1'(0) = 0$, $\theta_2(0) = \psi_0$, $\theta_2'(0) = 0$, donde θ_0 y ψ_0 son constantes. Por conveniencia, sea $\omega^2 = g/l$, $K = k/m$.

- b) Use la solución del inciso a) para analizar el movimiento de los péndulos acoplados en el caso especial cuando las condiciones iniciales son $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_1'(0) = 0$, $\theta_2(0) = \theta_0$, $\theta_2'(0) = 0$. Cuando las condiciones iniciales son $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_1'(0) = 0$, $\theta_2(0) = -\theta_0$, $\theta_2'(0) = 0$.

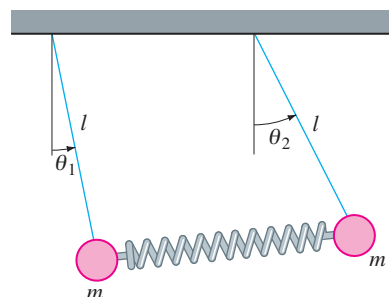


FIGURA 7.R.11 Péndulos acoplados del problema 45.