



Trabajo Práctico N.º 2: EDO lineales de segundo orden

Modelos masa–resorte y circuitos RLC - MATLAB / ode45

Propósito. Aplicar EDO lineales de segundo orden a modelos físicos, formular el problema de valores iniciales y obtener soluciones numéricas mediante MATLAB ode45, interpretando el comportamiento del sistema.

Tema central: EDO lineales de segundo orden.

Aplicaciones: Masa–resorte y circuito RLC.

Método numérico: MATLAB — ode45.

Enfoque: Modelado • simulación • interpretación.

Referencia conceptual. El material de Zill presenta la ecuación general $ax'' + bx' + cx = g(t)$ para sistemas lineales de segundo orden, y desarrolla movimiento masa–resorte libre, amortiguado y forzado, además del circuito RLC serie análogo. El TP N.º 2 propone problemas de EDO homogéneas, valores iniciales y circuitos RLC.

Orientaciones generales:

- En cada ejercicio identificar la variable dependiente, la variable independiente y el orden de la EDO.
- Reconocer los parámetros físicos y verificar que el modelo sea lineal de segundo orden.
- Escribir la EDO despejada como $y'' = f(t, y, y')$.
- Transformarla en un sistema de primer orden usando $y_1 = y$ e $y_2 = y'$.
- Resolver numéricamente con ode45 y graficar la respuesta.
- Analizar el tipo de respuesta: no amortiguada, sobreamortiguada, críticamente amortiguada, subamortiguada o forzada.
- Cuando corresponda, separar la respuesta en componente transitoria y componente de estado estable.
- Informar unidades y extraer al menos una conclusión física de la gráfica.

Plantilla MATLAB. Para $y'' = f(t, y, y')$:

`[t,Y] = ode45(@(t,Y) [Y(2); f(t,Y(1),Y(2))], [t0 tf], [y0 v0]);`

Luego `Y(:,1)=y` y `Y(:,2)=y'`.



Criterio de presentación

Cada ejercicio debe incluir: (1) modelo diferencial, (2) transformación a sistema de primer orden, (3) código MATLAB, (4) gráfica, (5) valores destacados y (6) interpretación física.

Ejercicios:

1) Movimiento libre no amortiguado

Situación. Una masa de 1 kg está unida a un resorte de constante $k = 25$ N/m. No se considera amortiguamiento. La masa se desplaza 0,12 m desde el equilibrio y se libera desde el reposo.

Modelo diferencial:

$$x'' + 25x = 0$$

Condiciones iniciales: $x(0) = 0,12$ m, $x'(0) = 0$ m/s

Intervalo de simulación: $0 \leq t \leq 4$ s

Consignas

- Resolver el PVI numéricamente con ode45.
- Graficar $x(t)$ y determinar aproximadamente el período de oscilación.
- Estimar la amplitud máxima y verificarla a partir de la gráfica.
- Comparar el período obtenido numéricamente con

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Interpretar qué representa físicamente la frecuencia natural.

MATLAB / ode45. Usar $y_1 = x$, $y_2 = x'$ y escribir $y_2' = -25y_1$. Graficar con `plot(t,Y(:,1))`.

2) Movimiento libre amortiguado: comparación de regímenes

Situación. Una masa de 2 kg está unida a un resorte de $k = 18$ N/m. La fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad. Se analizarán dos valores del coeficiente c para observar cómo cambia la respuesta.

Modelo diferencial:

$$2x'' + cx' + 18x = 0$$



Condiciones iniciales: $x(0) = 0,20 \text{ m}$, $x'(0) = 0 \text{ m/s}$

Intervalo de simulación: $0 \leq t \leq 6 \text{ s}$

Consignas

- Resolver el problema para $c = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ y para $c = 12 \text{ N}\cdot\text{s/m}$.
- Generar una gráfica para cada caso y comparar las respuestas.
- Clasificar cada sistema como subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado.
- Determinar cuál de los dos sistemas presenta oscilaciones.
- Explicar cómo influye el amortiguamiento en el tiempo necesario para acercarse al equilibrio.

MATLAB / ode45. Puede automatizarse con un bucle sobre $c = [2 \ 12]$. Para cada valor:

$f = @(t,Y)[Y(2);(-c*Y(2)-18*Y(1))/2];$

3) Movimiento forzado y estado estable

Situación. Una masa de 1 kg está unida a un resorte de $k = 20 \text{ N/m}$ y posee amortiguamiento $c = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$. Una fuerza externa periódica $F(t) = 6 \cos(4t) \text{ N}$ actúa sobre la masa.

Modelo diferencial:

$$x'' + 2x' + 20x = 6 \cos(4t)$$

Condiciones iniciales: $x(0) = 0 \text{ m}$, $x'(0) = 0 \text{ m/s}$

Intervalo de simulación: $0 \leq t \leq 12 \text{ s}$

Consignas

- Obtener $x(t)$ y $v(t)=x'(t)$ mediante ode45.
- Graficar $x(t)$ en todo el intervalo.
- Graficar por separado la respuesta total y, si se desea, una aproximación de la parte transitoria y de la respuesta de estado estable.
- Observar qué ocurre cuando aumenta el tiempo y explicar por qué la componente transitoria disminuye.
- Estimar la amplitud de la oscilación de estado estable.

MATLAB / ode45. La función forzada debe incorporarse en y_2' :
 $(-2*Y(2)-20*Y(1)+6*\cos(4*t)).$



4) Circuito RLC serie: respuesta libre

Situación. Un circuito RLC serie tiene $L = 1 \text{ H}$, $R = 8 \Omega$ y $C = 1/16 \text{ F}$. La fuente está desconectada, por lo que $E(t)=0$. El capacitor posee una carga inicial de 4 C y la corriente inicial es 2 A .

Modelo diferencial:

$$q'' + 8q' + 16q = 0$$

Condiciones iniciales: $q(0) = 4 \text{ C}$, $q'(0) = i(0) = 2 \text{ A}$

Intervalo de simulación: $0 \leq t \leq 2 \text{ s}$

Consignas

- Resolver $q(t)$ e $i(t)=q'(t)$ con ode45.
- Graficar simultáneamente la carga y la corriente en función del tiempo.
- Determinar numéricamente el instante en que la carga alcanza su máximo.
- Comparar el resultado con el criterio del discriminante $R^2 - \frac{4L}{C}$.
- Describir qué ocurre con $q(t)$ e $i(t)$ cuando t aumenta.

MATLAB / ode45. Modelo general RLC: $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t)$. Aquí $q'' = -8q' - 16q$. Condición inicial: $[4 \ 2]$.

5) Circuito RLC forzado: carga y corriente

Situación. Un circuito RLC serie tiene $L = 0,2 \text{ H}$, $R = 1,2 \Omega$ y $C = 0,5 \text{ F}$. Se aplica una tensión alterna $E(t) = 5 \cos(4t) \text{ V}$. Inicialmente el capacitor está descargado y no circula corriente.

Modelo diferencial:

$$0,2q'' + 1,2q' + 2q = 5 \cos(4t)$$

Condiciones iniciales: $q(0) = 0 \text{ C}$, $q'(0) = i(0) = 0 \text{ A}$

Intervalo de simulación: $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$

Consignas

- Resolver $q(t)$ e $i(t)$ mediante ode45.
- Graficar $q(t)$ e $i(t)$.
- Identificar visualmente la parte transitoria y la respuesta que permanece para tiempos grandes.
- Calcular una estimación de la amplitud de la carga en régimen permanente.



e) Explicar por qué la respuesta permanente tiene la misma frecuencia de la fuente.

MATLAB / ode45. Despejar q'' :

$$(5 \cdot \cos(4 \cdot t) - 1.2 \cdot Y(2) - 2 \cdot Y(1)) / 0.2.$$

Usar [0 10] y [0 0] como condiciones iniciales.

6) Masa-resorte forzada: búsqueda de la respuesta máxima

Situación. Una masa de 0,5 kg está unida a un resorte de $k = 8 \text{ N/m}$ y a un amortiguador de $c = 0,8 \text{ N}\cdot\text{s/m}$. Actúa una fuerza $F(t) = 3 \sin(3t) \text{ N}$. La masa parte del equilibrio y del reposo.

Modelo diferencial:

$$0,5x'' + 0,8x' + 8x = 3 \sin(3t)$$

Condiciones iniciales: $x(0) = 0 \text{ m}$, $x'(0) = 0 \text{ m/s}$

Intervalo de simulación: $0 \leq t \leq 20 \text{ s}$

Consignas

- Resolver $x(t)$ y $v(t)$ con ode45.
- Encontrar numéricamente el valor máximo de $|x(t)|$ y el instante en que ocurre.
- Graficar $x(t)$ y marcar el máximo encontrado.
- Estimar la frecuencia natural no amortiguada $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y compararla con la frecuencia de excitación.
- Explicar, desde la gráfica, si el sistema presenta una respuesta cercana a resonancia y qué efecto tiene el amortiguamiento.

MATLAB / ode45. Para buscar el máximo:

$[x_{\max}, \text{idx}] = \max(\text{abs}(Y(:, 1)))$; luego $t_{\max} = t(\text{idx})$.

Graficar y marcar el punto.

Anexo — estructura mínima para ode45

Paso 1. Definir $Y(1) = y$ y $Y(2) = y'$. Entonces $Y(1)' = Y(2)$ y $Y(2)' = f(t, Y(1), Y(2))$.

Paso 2. Escribir la función anónima f y resolver con ode45. El vector inicial siempre debe contener $[y(0) \ y'(0)]$.

$[t, Y] = \text{ode45}(@t, Y) [Y(2); f(t, Y(1), Y(2))], [t_0 \ t_f], [y_0 \ v_0]);$

Ejemplo de implementación — Ejercicio 4

```
f = @(t,Y) [Y(2);
-8*Y(2) - 16*Y(1)];

[t,Y] = ode45(f,[0 2],[4 2]);

q = Y(:,1);
i = Y(:,2);

plot(t,q,'LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('t [s]')
ylabel('q(t) [C]')
title('Carga del capacitor')

figure
plot(t,i,'LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('t [s]')
ylabel('i(t) [A]')
title('Corriente del circuito')
```

Entrega sugerida

- Archivo .m o Live Script con el código de cada ejercicio.
- Gráficas con título, ejes y unidades.
- Breve desarrollo del modelo y del sistema de primer orden.
- Tabla final con valores relevantes (máximos, tiempos, períodos o amplitudes, según corresponda).
- Conclusión de 3–5 líneas sobre el comportamiento físico observado.

Nota docente. Los seis problemas fueron diseñados como PVI para que puedan resolverse directamente con ode45. Se prioriza la interpretación numérica sin abandonar el planteo analítico de la EDO lineal de segundo orden.