

Ejercicio 1.

Dados los vectores $A = [1, 2, 4]$, $B = [2, 1, 5]$ y $M = [-1, 3, 4]$, cuyas coordenadas están referidos al sistema referencial (x, y, z) .

El sistema referencial (x', y', z') está relacionado con el (x, y, z) por la rotación representada por la matriz $[R]$.

Realizar las siguientes operaciones:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

a) Aplicar el tensor $(A \otimes B)$ al vector M .
b) Aplicar el tensor $(A' \otimes B')$ al vector M'
c) Verificar el invariante escalar y el vectorial de $(A \otimes B)$ y $(A' \otimes B')$

Ejercicio 2.

Dado el tensor $[T]$ con sus componentes en el sistema referencial (x, y, z) . Se pide:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Determinar su representación en el sistema (x', y', z') , tal que $x' = -y$, $y' = x$, $z' = z$.
b) Descomponer al tensor $[T]$ en una suma de tensores, uno simétrico y otro antisimétrico.

Ejercicio 3.

Dada la matriz:

$$[T] = [M] = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 6 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

Indicar cuáles de los siguientes vectores, son vectores propios de $[M]$

$$V_1 = [1, -2, -2]; V_2 = [1, 2, -2]; V_3 = [-4, -2, -4]; V_4 = [3, 7, 5];$$

$$V_5 = [-8, 8, 4]; V_6 = [2, -1, 3]; V_7 = [-1, -2, 2]$$

- a) Determinar el factor de proporcionalidad λ
b) En caso de existir dos o más vectores propios y no ser coloniales, verificar su ortogonalidad

Ejercicio 4.

Se tiene el siguiente tensor de inercia $[I]$.

El mismo corresponde a un sólido de forma cilíndrica y densidad de masa constante.

La representación del tensor $[I]$ en el sistema xyz es la siguiente:

$$[I] = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 9 \end{bmatrix}$$

Se pide:

- Determinar la ecuación secular o característica
- Determinar los autovalores y los autovectores del tensor de inercia.
- Expresar el tensor $[I]$ en el sistema $x'y'z'$, cuya base son los autovectores normalizados de $[I]$
- Realice una representación gráfica de los sistemas " x y z " y " x' y' z' ", luego, ubique el cilindro en el dibujo.
- Considere los siguientes vectores expresados en " x y z ": $\omega_1 = [3; 2\sqrt{3}; 2]$; $\omega_2 = [3; (7\sqrt{3})/2; 7/2]$; $\omega_3 = [-2; \sqrt{3}; 1]$; $\omega_4 = [-2; -\sqrt{3}; -1]$. Aplicar a los mismos el operador $[I]$. Luego, expresar los vectores momento angular L resultantes en el sistema " $x'y'z'$ " y representar gráficamente junto con los vectores ω . Destacar los aspectos notables que se encuentran.

Ejercicio 5. Dado la forma cuadrática $F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3$, determinar el tensor al cual está asociada, reducir a la forma diagonalizada y obtener la transformación ortogonal correspondiente.

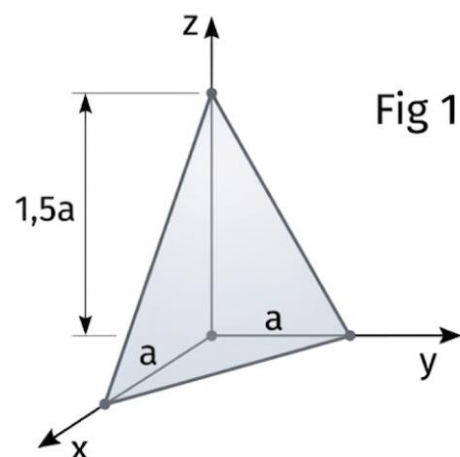
Ejercicio 6.

Sea el sólido con forma de tetraedro recto, mostrado en la figura 1. El tensor de inercia referido a los ejes (x, y, z) tiene por expresión $[I]$.

$$[I] = \frac{Ma^2}{40} \begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Hallar los ejes principales, y mostrarlos en el dibujo en forma conjunta con el tetraedro.

M es la masa total del tetraedro.



Ejercicio 7. Sea la distribución de masas mostrada en la figura 2. Despreciando las masas de las barras, y considerando las esferas como masas puntuales, determine el tensor de inercia referido a los ejes (x,y,z) . Luego, obtenga los ejes principales. Dibuje los ejes principales, y demuestre que el tensor de inercia referido a los ejes principales es diagonal.

Nota: Para masas puntuales (m):

$J_{xx} = (D_x)^2 m$ [D_x es la distancia desde la masa hasta el eje x]

$J_{xy} = -m \cdot x \cdot y$ [x = coordenada " x " de la masa, y = coordenada " y " de la masa]

