

Números complejos y el plano complejo

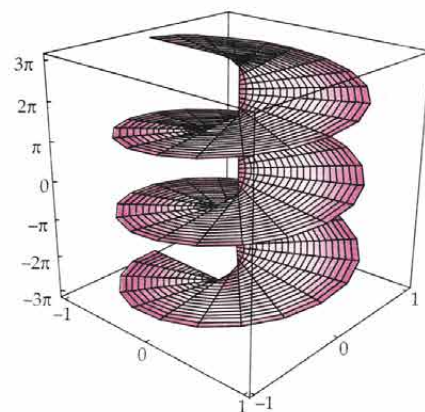
Contenido del capítulo

- 1.1 Números complejos y sus propiedades
- 1.2 Plano complejo
- 1.3 Forma polar de números complejos
- 1.4 Potencias y raíces
- 1.5 Conjuntos de puntos en el plano complejo
- 1.6 Aplicaciones

Capítulo 1 Preguntas de repaso

Introducción En los cursos elementales usted aprendió acerca de la existencia, y algunas de las propiedades, de los números complejos. Pero en los cursos de cálculo, lo más probable es que ni siquiera vio un número complejo. En este libro no sólo estudiamos números complejos; también abordaremos al cálculo de funciones de una variable compleja.

Empezamos con un examen profundo de la aritmética y del álgebra de los números complejos.



Superficie de Riemann para $\arg(z)$. Vea la página 88.

1.1 Números complejos y sus propiedades

Ninguna persona “inventó” los números complejos, pero las controversias que rodean el uso de estos números ya existían en el siglo XVI. En la búsqueda por resolver ecuaciones polinomiales con fórmulas que implican radicales, los primeros apasionados de las matemáticas se vieron obligados a admitir la existencia de otra clase de números, además de los números enteros positivos. Ecuaciones tales como $x^2 + 2x + 2 = 0$ y $x^3 = 6x + 4$ daban las “soluciones” $1 + \sqrt{-1}$ y $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-2}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-2}}$ que causaban consternación en particular dentro de la incipiente comunidad de estudiosos de las matemáticas porque *todos* sabían que no existían números tales como $\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-2}$, números cuyo cuadrado es negativo. Estos “números” sólo existen en la imaginación, o como opinó un filósofo, “lo imaginario, lo íntimo del niño del misticismo complejo”. Con el tiempo estos “números imaginarios” no desaparecieron, principalmente porque los matemáticos, como un grupo, son tenaces y algunos hasta prácticos. Un famoso matemático afirmó que, aunque “existen en nuestra imaginación... nada nos impide... que se utilicen en los cálculos”. Los matemáticos también odian tirar cosas. Después de todo, aún persistía el recuerdo de que los números negativos en un primer momento fueron tildados de “ficticios”. El concepto de *número*, evolucionó durante siglos, creciendo el conjunto de los números enteros de sólo positivos con la inclusión de los números negativos, los racionales y los números irracionales. Pero en el siglo XVIII el concepto de número dio un paso gigantesco en su evolución cuando el matemático alemán Carl Friedrich Gauss puso a los así llamados números imaginarios, o *números complejos*, como ya se estaban empezando a llamar, en una base lógica y consistente al tratarlos como una extensión del sistema de los números reales.

Nuestro objetivo en esta primera sección es examinar algunas definiciones básicas y la aritmética de los números complejos.

La unidad imaginaria Aún después de ganar una amplia respetabilidad, por medio de los trabajos seminales de Carl Friedrich Gauss y del matemático francés Augustin Louis Cauchy, el desafortunado nombre “imaginario” ha sobrevivido a través de los siglos. El símbolo i se utilizó originalmente como un disfraz para el nada adecuado símbolo $\sqrt{-1}$. Ahora decimos que i es la **unidad imaginaria** y se define por la propiedad $i^2 = -1$. Usando la unidad imaginaria, construimos un número general complejo a partir de dos números reales.

Definición 1.1.1 Números complejos

Un **número complejo** es cualquier número de la forma $z = a + ib$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria.

Terminología Las notaciones $a + ib$ y $a + bi$ se utilizan indistintamente. El número real a en $z = a + ib$ se llama la **parte real** de z , el número real b se llama la **parte imaginaria** de z . Las partes real e imaginaria de un número complejo z se abrevian $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$, respectivamente. Por ejemplo, si $z = 4 - 9i$, entonces, $\text{Re}(z) = 4$ e $\text{Im}(z) = -9$. Un múltiplo constante real de la unidad imaginaria se llama un **número imaginario puro**. Por ejemplo, $z = 6i$ es un número imaginario puro. Dos números complejos son **iguales** si sus correspondientes partes reales e imaginarias son iguales. Puesto que este sencillo concepto a veces es útil, se formalizará el último enunciado en la siguiente definición.

Nota: La parte imaginaria de $z = 4 - 9i$ es -9 no $-9i$.

Definición 1.1.2 Igualdad

Los números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ son **iguales**, $z_1 = z_2$, si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

En términos de los símbolos $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$, la definición 1.1.2 establece que $z_1 = z_2$ si $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ e $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$.

La totalidad de los números complejos o el conjunto de números complejos normalmente se denota por el símbolo $\mathbf{C}$. Debido a que *cualquier* número real a se puede escribir como $z = a + 0i$, vemos que el conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales es un subconjunto de $\mathbf{C}$.

Operaciones aritméticas Los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Si $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, estas operaciones se definen como sigue.

Suma:
$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Resta:
$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Multiplicación:
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + i(b_1a_2 + a_1b_2) \end{aligned}$$

División:
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}, \quad a_2 \neq 0, \text{ o } b_2 \neq 0 \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

Las conocidas leyes conmutativa, asociativa y distributiva valen para números complejos:

Leyes conmutativas:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{cases}$$

Leyes asociativas:
$$\begin{cases} z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \end{cases}$$

Ley distributiva:
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Considerando estas leyes, no hay necesidad de memorizar las definiciones de suma, resta y multiplicación.

Suma, resta y multiplicación

- (i) Para sumar (o restar) dos números complejos, simplemente sume (o reste) las correspondientes partes real e imaginaria.
- (ii) Para multiplicar dos números complejos, utilice la ley distributiva y el hecho de que $i^2 = -1$.

La definición de división merece más elaboración, y, por tanto, en breve analizaremos esta operación con más detalle.

EJEMPLO 1 Suma y multiplicación

Si $z_1 = 2 + 4i$ y $z_2 = -3 + 8i$, determine (a) $z_1 + z_2$ y (b) $z_1 z_2$.

Solución (a) Sumando las partes real e imaginaria, la suma de los dos números complejos z_1 y z_2 es

$$z_1 + z_2 = (2 + 4i) + (-3 + 8i) = (2 - 3) + (4 + 8)i = -1 + 12i.$$

(b) Por la ley distributiva e $i^2 = -1$, el producto de z_1 y z_2 es

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2 + 4i)(-3 + 8i) = (2 + 4i)(-3) + (2 + 4i)(8i) \\ &= -6 - 12i + 16i + 32i^2 \\ &= (-6 - 32) + (16 - 12)i = -38 + 4i. \end{aligned}$$



Cero y unidad El **cero** en el sistema de números complejos es el número $0 + 0i$, y la **unidad** es $1 + 0i$. El cero y la unidad se denotan por 0 y 1, respectivamente. El cero es la **identidad aditiva** en el sistema de números complejos ya que, para cualquier número complejo $z = a + ib$, se tiene $z + 0 = z$. Para ver esto, se utiliza la definición de suma:

$$z + 0 = (a + ib) + (0 + 0i) = a + 0 + i(b + 0) = a + ib = z.$$

De manera similar, la unidad es la **identidad multiplicativa** del sistema ya que, para cualquier número complejo z , tenemos $z \cdot 1 = z \cdot (1 + 0i) = z$.

Conjugado Si z es un número complejo, el número que se obtiene al cambiar el signo de su parte imaginaria se llama **complejo conjugado**, o simplemente **conjugado**, de z y se denota con el símbolo $\bar{z}$. En otras palabras, si $z = a + ib$, entonces su conjugado es $\bar{z} = a - ib$. Por ejemplo, si $z = 6 + 3i$, entonces $\bar{z} = 6 - 3i$; si $z = -5 - i$, entonces $\bar{z} = -5 + i$. Si z es un número real, por ejemplo, $z = 7$, entonces $\bar{z} = 7$. De las definiciones de la suma y la resta de números complejos, se demuestra fácilmente que el conjugado de la suma y la resta de dos números complejos es la suma y la resta de los conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2. \quad (1)$$

Además, tenemos las siguientes tres propiedades adicionales:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \bar{\bar{z}} = z. \quad (2)$$

Por supuesto, el conjugado de cualquier suma finita (o producto) de números complejos es la suma (o producto) de los conjugados.

Las definiciones de suma y multiplicación muestran que la suma y el producto de un número complejo z con su conjugado $\bar{z}$ es un número real:

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a \quad (3)$$

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2. \quad (4)$$

La diferencia de un número complejo z con su conjugado $\bar{z}$ es un número imaginario puro:

$$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib. \quad (5)$$

Ya que $a = \operatorname{Re}(z)$ y $b = \operatorname{Im}(z)$, con las ecuaciones (3) y (5) se obtienen dos fórmulas útiles:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (6)$$

Sin embargo, (4) es la relación importante en este análisis ya que permite utilizar a la división en una forma práctica.

División

Para dividir z_1 entre z_2 , multiplique el numerador y el denominador de z_1/z_2 por el conjugado de z_2 . Es decir,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \quad (7)$$

y después utilice el hecho de que $z_2 \bar{z}_2$ es la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria de z_2 .

El procedimiento descrito en (7) se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 División

Si $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = 4 + 6i$, determine z_1/z_2 .

Solución Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado $\bar{z}_2 = 4 - 6i$ del denominador $z_2 = 4 + 6i$ y después utilice (4):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{4 + 6i} = \frac{2 - 3i}{4 + 6i} \frac{4 - 6i}{4 - 6i} = \frac{8 - 12i - 12i + 18i^2}{4^2 + 6^2} = \frac{-10 - 24i}{52}.$$

Ya que queremos una respuesta en la forma $a + bi$, describimos el último resultado al dividir la parte real e imaginaria del numerador $-10 - 24i$ entre 52 y simplificando los términos:

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{10}{52} - \frac{24}{52}i = -\frac{5}{26} - \frac{6}{13}i.$$



Inversas En el sistema de números complejos, cada número z tiene un único **inverso aditivo**. Como en el sistema de números reales, el inverso aditivo de $z = a + ib$ es su *negativo*, $-z$, donde $-z = -a - ib$. Para cualquier número complejo z , tenemos $z + (-z) = 0$. Similarmente, cada número complejo diferente de cero tiene un **inverso multiplicativo**. En símbolos, para $z \neq 0$ existe uno y sólo un número complejo diferente de cero z^{-1} tal que $zz^{-1} = 1$. El inverso multiplicativo z^{-1} es igual al **recíproco** $1/z$.

EJEMPLO 3 Recíproco

Determine el recíproco de $z = 2 - 3i$.

Solución Por la definición de división, obtenemos

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2-3i} = \frac{1}{2-3i} \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2+3i}{13}.$$

La respuesta debe estar en la forma $a + ib$. $\Rightarrow$ Esto es,

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

Le toma unos segundos comprobar la multiplicación

$$zz^{-1} = (2-3i)\left(\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i\right) = 1.$$



Observaciones

Comparación con el análisis real

- (i) Muchas de las propiedades del sistema de números reales $\mathbf{R}$ valen en el sistema de números complejos $\mathbf{C}$, pero en realidad hay también algunas notables diferencias. Por ejemplo, el concepto de orden en el sistema de los números reales no se pasa al sistema de números complejos. En otras palabras, no podemos comparar dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$, $b_1 \neq 0$, y $z_2 = a_2 + ib_2$, $b_2 \neq 0$, usando desigualdades. Enunciados tales como $z_1 < z_2$ o $z_2 \geq z_1$ no tienen sentido en $\mathbf{C}$, excepto en el caso especial en que los dos números z_1 y z_2 son reales. Vea el problema 55 de los ejercicios 1.1. Por tanto, si ve un enunciado tal como $z_1 = \alpha z_2$, $\alpha > 0$, está implícito en el uso de la desigualdad $\alpha > 0$ que el símbolo α representa un número real.
- (ii) Algunas cosas que damos por imposibles en el análisis real, tal como $e^x = -2$ y $\sin x = 5$ cuando x es una variable real, son perfectamente correctas y comunes en el análisis complejo cuando el símbolo x se interpreta como variable compleja. Vea el ejemplo 3 de la sección 4.1 y el ejemplo 2 de la sección 4.3.

En lo que resta del libro continuaremos indicando otras diferencias entre el análisis real y el complejo.

EJERCICIOS 1.1 Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-1.

1. Evalúe las siguientes potencias de i .

- (a) i^8 (b) i^{11}
(c) i^{42} (d) i^{105}

2. Escriba el número dado en la forma $a + ib$.

- (a) $2i^3 - 3i^2 + 5i$ (b) $3i^5 - i^4 + 7i^3 - 10i^2 - 9$
(c) $\frac{5}{i} + \frac{2}{i^3} - \frac{20}{i^{18}}$ (d) $2i^6 + \left(\frac{2}{-i}\right)^3 + 5i^{-5} - 12i$

En los problemas 3 a 20 escriba el número dado en la forma $a + ib$.

- | | |
|---|---|
| 3. $(5 - 9i) + (2 - 4i)$ | 4. $3(4 - i) - 3(5 + 2i)$ |
| 5. $i(5 + 7i)$ | 6. $i(4 - i) + 4i(1 + 2i)$ |
| 7. $(2 - 3i)(4 + i)$ | 8. $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i)(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i)$ |
| 9. $3i + \frac{1}{2 - i}$ | 10. $\frac{i}{1 + i}$ |
| 11. $\frac{2 - 4i}{3 + 5i}$ | 12. $\frac{10 - 5i}{6 + 2i}$ |
| 13. $\frac{(3 - i)(2 + 3i)}{1 + i}$ | 14. $\frac{(1 + i)(1 - 2i)}{(2 + i)(4 - 3i)}$ |
| 15. $\frac{(5 - 4i) - (3 + 7i)}{(4 + 2i) + (2 - 3i)}$ | 16. $\frac{(4 + 5i) + 2i^3}{(2 + i)^2}$ |
| 17. $i(1 - i)(2 - i)(2 + 6i)$ | 18. $(1 + i)^2(1 - i)^3$ |
| 19. $(3 + 6i) + (4 - i)(3 + 5i) + \frac{1}{2 - i}$ | 20. $(2 + 3i)\left(\frac{2 - i}{1 + 2i}\right)^2$ |

En los problemas 21 a 24 utilice el **teorema del binomio***

$$(A + B)^n = A^n + \frac{n}{1!}A^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2!}A^{n-2}B^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}A^{n-k}B^k + \dots + B^n,$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$, para escribir el número dado en la forma $a + ib$.

- | | |
|-------------------|----------------------------|
| 21. $(2 + 3i)^2$ | 22. $(1 - \frac{1}{2}i)^3$ |
| 23. $(-2 + 2i)^5$ | 24. $(1 + i)^8$ |

En los problemas 25 y 26 determine $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$.

25. $z = \left(\frac{i}{3 - i}\right)\left(\frac{1}{2 + 3i}\right)$	26. $z = \frac{1}{(1 + i)(1 - 2i)(1 + 3i)}$
---	---

En los problemas 27 a 30 sea $z = x + iy$. Exprese la cantidad dada en términos de x y y .

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 27. $\text{Re}(1/z)$ | 28. $\text{Re}(z^2)$ |
| 29. $\text{Im}(2z + 4\bar{z} - 4i)$ | 30. $\text{Im}(\bar{z}^2 + z^2)$ |

En los problemas 31 a 34 sea $z = x + iy$. Exprese la cantidad dada en términos de los símbolos $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$.

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| 31. $\text{Re}(iz)$ | 32. $\text{Im}(iz)$ |
| 33. $\text{Im}((1 + i)z)$ | 34. $\text{Re}(z^2)$ |

En los problemas 35 y 36 demuestre que los números indicados satisfacen la ecuación dada. En cada caso explique por qué se pueden encontrar soluciones adicionales.

35. $z^2 + i = 0$, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Determine una solución adicional, z_2 .
36. $z^4 = -4$; $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$. Determine dos soluciones adicionales, z_3 y z_4 .

*Recuerde que los coeficientes en los desarrollos de $(A + B)^2$, $(A + B)^3$, etcétera, también se pueden obtener usando el triángulo de Pascal.

En los problemas 37 a 42 utilice la definición 1.1.2 para resolver cada ecuación para $z = a + ib$.

37. $2z = i(2 + 9i)$

38. $z - 2\bar{z} + 7 - 6i = 0$

39. $z^2 = i$

40. $\bar{z}^2 = 4z$

41. $z + 2\bar{z} = \frac{2-i}{1+3i}$

42. $\frac{z}{1+\bar{z}} = 3 + 4i$

En los problemas 43 y 44 resuelva el sistema de ecuaciones dado para z_1 y z_2 .

43. $iz_1 - iz_2 = 2 + 10i$

44. $iz_1 + (1+i)z_2 = 1 + 2i$

$-z_1 + (1-i)z_2 = 3 - 5i$

$(2-i)z_1 + 2iz_2 = 4i$

Enfocando los conceptos

45. ¿Qué podemos decir acerca del número complejo z si $z = \bar{z}$? ¿Si $(z)^2 = (\bar{z})^2$?
46. Piense en una solución alternativa al problema 24. Después, sin realizar un arduo trabajo, evalúe $(1+i)^{5404}$.
47. Para un entero no negativo n , i^n puede ser uno de los cuatro valores: 1, i , -1 , y $-i$. En cada uno de los siguientes cuatro casos, exprese el exponente entero n en términos del símbolo k , donde $k = 0, 1, 2, \dots$
- (a) $i^n = 1$ (b) $i^n = i$
- (c) $i^n = -1$ (d) $i^n = -i$
48. Existe un procedimiento alternativo al dado en (7). Por ejemplo, el cociente $(5+6i)/(1+i)$ debe expresarse en la forma $a+ib$:

$$\frac{5+6i}{1+i} = a+ib.$$

Por tanto, $5+6i = (1+i)(a+ib)$. Utilice este último resultado y la definición 1.1.2 para determinar el cociente dado. Utilice este método para determinar el recíproco de $3-4i$.

49. Suponga por el momento que $\sqrt{1+i}$ tiene sentido en el sistema de números complejos. Entonces, ¿cómo demostraría la validez de la igualdad

$$\sqrt{1+i} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}} + i\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}?$$

50. Suponga que z_1 y z_2 son números complejos. ¿Qué puede decir acerca de z_1 o z_2 si $z_1 z_2 = 0$?
51. Suponga que el producto $z_1 z_2$ de dos números complejos es una constante real diferente de cero. Demuestre que $z_2 = k\bar{z}_1$, donde k es un número real.
52. Sin hacer mucho trabajo, explique por qué se sigue inmediatamente de (2) y (3) que $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.
53. A los matemáticos les gusta demostrar que ciertas "cosas" en un sistema matemático son únicas. Por ejemplo, una demostración de una proposición tal como "La unidad en el sistema de los números complejos es única" por lo general comienza con la suposición de que existen dos unidades diferentes, por ejemplo, 1_1 y 1_2 , y después se procede a demostrar que esta suposición conduce a cierta contradicción. De una contradicción si se supone que existen dos unidades diferentes.
54. Siga el procedimiento indicado en el problema 53 para demostrar que la proposición "El cero en el sistema de números complejos es único".
55. Un sistema numérico se dice que es un **sistema ordenado** siempre que éste contenga un subconjunto P con las siguientes dos propiedades:

Primero, para cualquier número x diferente de cero en el sistema, ya sea x o $-x$ (pero no ambos) está en P .

Segundo, si x y y son números en P , entonces tanto xy como $x + y$ están en P .

En el sistema de números reales el conjunto P es el conjunto de números *positivos*. En el sistema de números reales decimos que x es mayor que y , escribiendo $x > y$, si y sólo si $x - y$ está en P . Analice por qué el sistema de números complejos no tiene dicho subconjunto P . [Sugerencia: Considere i y $-i$.]

1.2 Plano complejo

Un número complejo $z = x + iy$ está unívocamente determinado por un *par ordenado* de números reales (x, y) . La primera y segunda entradas del par ordenado corresponden, a su vez, con las partes real e imaginaria del número complejo. Por ejemplo, el par ordenado $(2, -3)$ corresponde al número complejo $z = 2 - 3i$. Inversamente, $z = 2 - 3i$ determina al par ordenado $(2, -3)$. Los números 7 , i y $-5i$ son equivalentes a $(7, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -5)$, respectivamente. De esta forma podemos asociar un número complejo $z = x + iy$ con un *punto* (x, y) en un plano coordenado.

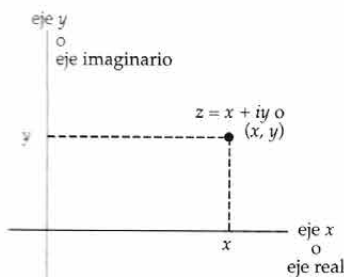


Figura 1.2.1 Plano z

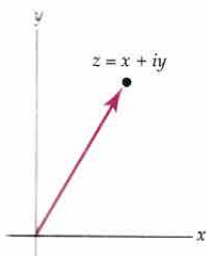


Figura 1.2.2 z como un vector de posición

Plano complejo Debido a la correspondencia entre un número complejo $z = x + iy$ y un y sólo un punto (x, y) en un plano coordenado, utilizaremos los términos *número complejo* y *punto* indistintamente. El plano coordenado que se muestra en la figura 1.2.1 se llama **plano complejo** o simplemente **plano z** . El eje horizontal o eje x se llama **eje real** ya que cada punto en dicho eje representa un número real. El eje vertical o eje y se llama **eje imaginario** ya que un punto en dicho eje representa un número imaginario puro.

Vectores En otros cursos sin duda ha visto que los números en un par ordenado de números reales se pueden interpretar como las componentes de un vector. Así, un número complejo $z = x + iy$ también se puede ver como un vector de posición bidimensional, es decir, un vector cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto terminal es el punto (x, y) . Vea la figura 1.2.2. Esta interpretación vectorial nos indica cómo definir la longitud del vector z como la distancia $\sqrt{x^2 + y^2}$ del origen al punto (x, y) . Esta longitud recibe un nombre especial.

Definición 1.2.1 Módulo

El **módulo** de un número complejo $z = x + iy$ es el número real

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

El módulo z de un número complejo z también se denomina el **valor absoluto** de z . Utilizaremos ambas *módulo* y *valor absoluto* en todo el libro.

EJEMPLO 1 Módulo de un número complejo

Si $z = 2 - 3i$, entonces de (1) determinamos el módulo del número como $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$. Si $z = -9i$, entonces con (1) se obtiene $|-9i| = \sqrt{(-9)^2} = 9$.



Propiedades Recuerde de (4) de la sección 1.1 que, para cualquier número complejo $z = x + iy$, el producto $z\bar{z}$ es un número real; específicamente, $z\bar{z}$ es la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria de z : $z\bar{z} = x^2 + y^2$. La inspección de (1) muestra entonces que $|z|^2 = x^2 + y^2$. Las relaciones

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{y} \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad (2)$$

merecen ser guardadas en la memoria. El módulo de un número complejo z tiene las propiedades adicionales,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{y} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \quad (3)$$

Observe que cuando $z_1 = z_2 = z$, la primera propiedad en (3) demuestra que

$$|z^2| = |z|^2. \quad (4)$$

La propiedad $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ se puede demostrar usando (2) y se deja como un ejercicio. Vea el problema 49 en los ejercicios 1.2.

De nuevo distancia La suma de números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dada en la sección 1.1, cuando se establece en términos de pares ordenados:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

es simplemente la definición de las componentes del vector suma. La interpretación vectorial de la suma $z_1 + z_2$ es el vector que se muestra en la figura 1.2.3(a) como la diagonal principal de un paralelogramo cuyo punto inicial es el origen y punto terminal es $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. La diferencia $z_2 - z_1$ se puede obtener ya sea comenzando del punto terminal de z_1 y finalizando en el punto terminal de z_2 , o como un vector de posición cuyo punto inicial es el origen y punto terminal es $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Vea la figura 1.2.3(b). En el caso $z = z_2 - z_1$, se sigue de (1) y de la figura 1.2.3(b) que la **distancia entre dos puntos** $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ en el plano complejo es igual a la distancia entre el origen y el punto $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$; es decir, $|z| = |z_2 - z_1| = |(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)|$ o

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (5)$$

Cuando $z_1 = 0$, de nuevo vemos que el módulo $|z_2|$ representa la distancia entre el origen y el punto z_2 .

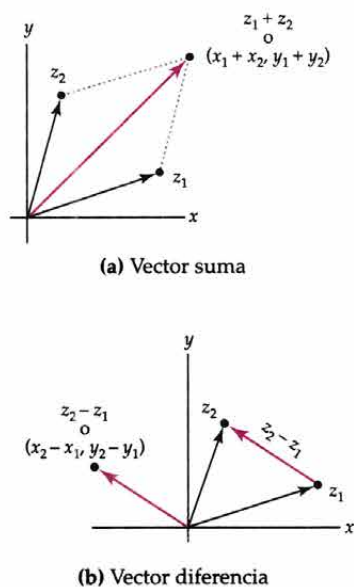


Figura 1.2.3 Suma y diferencia de vectores

EJEMPLO 2 Conjunto de puntos en el plano complejo

Describe el conjunto de puntos z en el plano complejo que satisface que $|z| = |z - i|$

Solución Podemos interpretar la ecuación dada como igualdad de distancias: la distancia de un punto z al origen iguala la distancia desde z al punto i . Geométricamente, esto parece plausible de la figura 1.2.4 que el conjunto de puntos z se encuentra sobre una recta horizontal. Para establecer esto analíticamente, utilizamos (1) y (5) para escribir $|z| = |z - i|$ como:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ x^2 + y^2 &= x^2 + (y - 1)^2 \\ x^2 + y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$

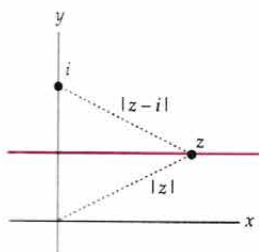


Figura 1.2.4 La recta horizontal es el conjunto de puntos que satisfacen que $|z| = |z - i|$.

La desigualdad se puede deducir usando las propiedades de los números complejos de la sección 1.1. Vea el problema 50 de los ejercicios 1.2.

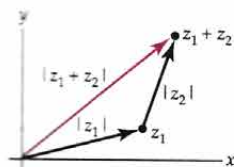


Figura 1.2.5 Triángulo formado por lados vectoriales

Con la última ecuación se obtiene $y = \frac{1}{2}$. Ya que la igualdad es verdadera para x arbitraria y $y = \frac{1}{2}$, lo cual es la ecuación de la recta horizontal que se muestra en color en la figura 1.2.4. Los números complejos que satisfacen $|z| = |z - i|$ se pueden entonces escribir como $z = x + \frac{1}{2}i$. □

Desigualdades En las observaciones del final de la última sección indicamos que no se puede definir ninguna relación de orden en el sistema de números complejos. Sin embargo, ya que $|z|$ es un número real, podemos comparar los valores absolutos de dos números complejos. Por ejemplo, si $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 5 - i$, entonces $|z_1| = \sqrt{25} = 5$ y $|z_2| = \sqrt{26}$ y, por tanto, $|z_1| < |z_2|$. En vista de (1), una interpretación geométrica de la última desigualdad es simple: El punto $(3, 4)$ está más cerca del origen que el punto $(5, -1)$.

Ahora considere el triángulo dado en la figura 1.2.5 con vértices en el origen, z_1 , y $z_1 + z_2$. Sabemos de la geometría que la longitud del lado del triángulo correspondiente al vector $z_1 + z_2$ no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los dos lados restantes. En símbolos podemos expresar esta observación con la desigualdad

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (6)$$

El resultado (6) se conoce como la **desigualdad del triángulo**. Ahora de la identidad $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$, con la ecuación (6) se obtiene

$$|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|.$$

Ya que $|z_2| = |-z_2|$ (vea el problema 47 en los ejercicios 1.2), despejando del último resultado a $|z_1 + z_2|$ se obtiene otra importante desigualdad:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|. \quad (7)$$

Pero ya que $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, la ecuación (7) se puede escribir en la forma alternativa $|z_1 + z_2| = |z_2 + z_1| \geq |z_2| - |z_1| = -(|z_1| - |z_2|)$ y así combinada con el último resultado implica

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|. \quad (8)$$

También se sigue de (6) que sustituyendo z_2 con $-z_2$ se obtiene $|z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |(-z_2)| = |z_1| + |z_2|$. Este resultado es igual a

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (9)$$

De (8) con z_2 sustituida por $-z_2$, también encontramos

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (10)$$

En conclusión, observamos que la desigualdad del triángulo (6) se extiende para cualquier suma finita de números complejos:

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|. \quad (10)$$

Las desigualdades (6), (8) y (10) serán importantes cuando trabajemos con integrales en los capítulos 5 y 6.

EJEMPLO 3 Una cota superior

Determine una cota superior para $\left| \frac{-1}{z^4 + 3z^2 + 2} \right|$ si $|z| = 2$.

Solución Por el segundo resultado en (3), el valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos. Así, con $|-1| = 1$ queremos determinar un número real positivo M tal que

$$\frac{1}{|z^4 + 3z^2 + 2|} \leq M.$$

Para lograr esta tarea queremos que el denominador sea tan pequeño como sea posible. Puesto que $z^4 + 3z^2 + 2 = (z^2 + 1)(z^2 + 2)$ podemos utilizar el primer resultado en (3) y (8) para escribir

$$|z^4 + 3z^2 + 2| = |z^2 + 1| \cdot |z^2 + 2| \geq ||z^2| - 1| \cdot ||z^2| - 2|. \quad (12)$$

Usando $|z| = 2$, la expresión (12) se convierte en

$$\begin{aligned} |z^4 + 3z^2 + 2| &\geq ||z^2| - 1| \cdot ||z^2| - 2| = ||4| - 1| \cdot ||4| - 2| \\ &= |4 - 1| \cdot |4 - 2| \\ &= 6. \end{aligned}$$

Por tanto para $|z| = 2$ tenemos

$$\left| \frac{-1}{z^4 + 3z^2 + 2} \right| = \frac{1}{|z^4 + 3z^2 + 2|} \leq \frac{1}{6}.$$

**Observaciones**

Hemos visto que la desigualdad del triángulo $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ indica que la longitud del vector $z_1 + z_2$ no puede ser mayor que la suma de las longitudes de cada uno de los vectores z_1 y z_2 . Pero los resultados dados en (3) son interesantes. El producto $z_1 z_2$ y el cociente z_1/z_2 ($z_2 \neq 0$), son números complejos y también son vectores en el plano complejo. Las igualdades $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ y $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ indican que las longitudes de los vectores $z_1 z_2$ y z_1/z_2 son exactamente iguales al producto y al cociente de las longitudes, de cada uno de los vectores z_1 y z_2 , respectivamente.

EJERCICIOS 1.2 Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 4 interprete z_1 y z_2 como vectores. Trace la gráfica z_1 , z_2 , y la suma y diferencia indicadas como vectores.

1. $z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = -2 + 5i$; $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$
2. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$; $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$
3. $z_1 = 5 + 4i$, $z_2 = -3i$; $3z_1 + 5z_2$, $z_1 - 2z_2$
4. $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = -2 + 3i$; $2z_1 + 4z_2$, $z_1 - z_2$
5. Dado que $z_1 = 5 - 2i$ y $z_2 = -1 - i$, determine un vector z_3 en la misma dirección que $z_1 + z_2$, pero cuatro veces más largo.

35. Considere los números complejos $z_1 = 4 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -2 - 2i$, $z_4 = 3 - 5i$.
- (a) Utilice cuatro diferentes bosquejos para dibujar los cuatro pares de puntos z_1, iz_1 ; z_2, iz_2 ; z_3, iz_3 y z_4, iz_4 .
- (b) En general, ¿cómo podría describir geoméricamente el efecto de multiplicar un número complejo $z = x + iy$ por i ? ¿Por $-i$?
36. ¿Cuál es el único número complejo con módulo 0?
37. ¿Bajo qué circunstancias $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?
38. Usando la variable compleja z , determine una ecuación de una circunferencia en el plano complejo de radio 5 centrado en $3 - 6i$. [Sugerencia: Utilice la ecuación (5)].
39. Describa el conjunto de puntos z en el plano complejo que satisfacen $z = \cos \theta + i \sin \theta$, donde θ se mide en radianes a partir del eje positivo x .
40. Usando la variable compleja z , determine una ecuación de una elipse en el plano complejo con focos en $-2 + i$ y $2 + i$ cuyo eje mayor es de 8 unidades de longitud.
41. Suponga que $z = x + iy$. En la ecuación (6) de la sección 1.1 vimos que x y y se podían expresar en términos de z y $\bar{z}$. Utilice estos resultados para expresar las siguientes ecuaciones cartesianas en forma compleja.
- (a) $x = 3$ (b) $y = 10$
(c) $y = x$ (d) $x + 2y = 8$
42. Usando notación compleja, determine una ecuación paramétrica del segmento de recta entre cualesquier dos números complejos distintos z_1 y z_2 en el plano complejo.
43. Suponga que z_1, z_2 y z_3 son tres puntos distintos en el plano complejo y k es un número real. Interprete geoméricamente a $z_3 - z_2 = k(z_2 - z_1)$.
44. Suponga que $z_1 \neq z_2$. Interprete geoméricamente a $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$ en términos de los vectores z_1 y z_2 .
45. Suponga que $w = \bar{z}/z$. Sin hacer ningún cálculo, explique por qué $|w| = 1$.
46. Sin hacer ningún cálculo, explique por qué las desigualdades $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ valen para todos los números complejos z .
47. Demuestre que
- (a) $|z| = |-z|$ (b) $|z| = |\bar{z}|$.
48. Para cualesquier dos números complejos z_1 y z_2 , demuestre que
- $$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$
49. En este problema empezamos demostrando la primera propiedad $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ en (3). Por el primer resultado en (2) podemos escribir $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)}$. Ahora utilice la primera propiedad en (2) de la sección 1.1 para continuar la demostración.
50. En este problema lo guiaremos a través de una demostración analítica de la desigualdad del triángulo (6).
- Puesto que $|z_1 + z_2|$ y $|z_1| + |z_2|$ son números positivos reales, tenemos que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ si y sólo si $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$. Por lo que, es suficiente demostrar que $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$.
- (a) Explique por qué $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2$.
- (b) Explique por qué $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2$.
- (c) Utilice los incisos (a) y (b) junto con los resultados del problema 46 para deducir (6).

1.3 Forma polar de números complejos

Recuerde del cálculo que un punto P en el plano cuyas coordenadas rectangulares son (x, y) se puede describir también en términos de **coordenadas polares**. El sistema de coordenadas polares, inventado por Isaac Newton, consiste de un punto O llamado **polo**, y de una semirrecta que sale del polo llamada **eje polar**. Si r es una distancia dirigida del polo a P y θ es un ángulo de inclinación (en radianes) medido del eje polar a la recta OP , entonces el punto se puede describir con el par ordenado (r, θ) , llamado coordenadas polares de P . Vea la figura 1.3.1.

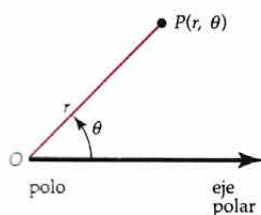


Figura 1.3.1 Coordenadas polares

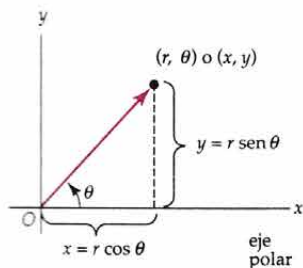


Figura 1.3.2 Coordenadas polares en el plano complejo

Sea cuidadoso cuando use $\tan^{-1}(y/x)$ ➡

Forma polar Suponga, como se muestra en la figura 1.3.2, que un sistema coordenado polar está sobrepuesto en el plano complejo con el eje polar coincidiendo con el eje positivo x y el polo O en el origen. Entonces x, y, r y θ están relacionadas por $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Estas ecuaciones nos permiten expresar un número complejo diferente de cero $z = x + iy$ como $z = (r \cos \theta) + i(r \sin \theta)$ o

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1)$$

Decimos que (1) es la **forma polar** o **representación polar** del número complejo z . De nuevo, de la figura 1.3.2 vemos que la coordenada r se puede interpretar como la distancia del origen al punto (x, y) . En otras palabras, adoptamos la convención de que r nunca es negativa,* por lo que podemos considerar a r como el módulo de z , que es, $r = |z|$. El ángulo θ de inclinación del vector z , que siempre se medirá en radianes del eje real positivo, es positivo cuando se mide en contra del sentido del reloj y negativo cuando se mide en el sentido del reloj. El ángulo θ se llama **argumento** de z y se denota con $\theta = \arg(z)$. Un argumento θ de un número complejo debe satisfacer las ecuaciones $\cos \theta = x/r$ y $\sin \theta = y/r$. Un argumento de un número complejo z no es único, ya que $\cos \theta$ y $\sin \theta$ tienen periodo 2π ; en otras palabras, si θ_0 es un argumento de z , entonces necesariamente los ángulos $\theta_0 \pm 2\pi$, $\theta_0 \pm 4\pi, \dots$ son también argumentos de z . En la práctica utilizamos $\tan \theta = y/x$ para determinar θ . Sin embargo, ya que $\tan \theta$ tiene periodo π , se debe tener cierto cuidado al usar la última ecuación. Una calculadora dará sólo ángulos que satisfacen $-\pi/2 < \tan^{-1}(y/x) < \pi/2$, estos son ángulos en el primer y cuarto cuadrantes. Hemos elegido θ consistentemente con el cuadrante en el que se localiza z ; esto puede requerir sumar o restar π a $\tan^{-1}(y/x)$ cuando sea apropiado. El siguiente ejemplo muestra cómo se hace esto.

EJEMPLO 1 Un número complejo en forma polar

Expresa $-\sqrt{3} - i$ en forma polar.

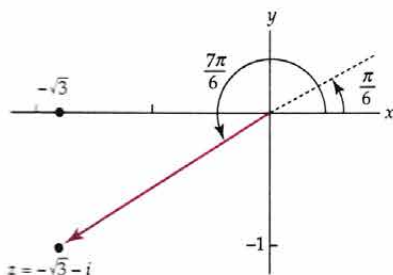
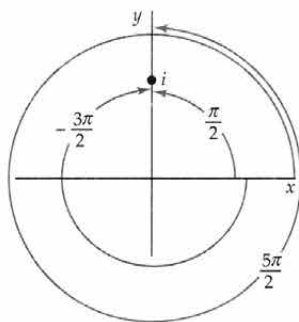
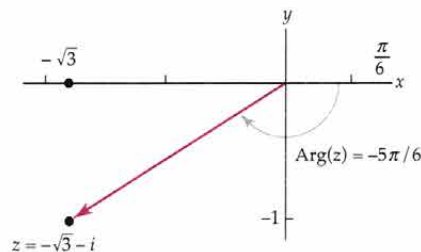


Figura 1.3.3 $\arg(-\sqrt{3} - i)$

Solución Con $x = -\sqrt{3}$ y $y = -1$ obtenemos $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$. Ahora $y/x = -1/(-\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$, y así una calculadora da $\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, que es un ángulo cuyo lado terminal está en el primer cuadrante. Pero ya que el punto $-\sqrt{3} - i$ se encuentra en el tercer cuadrante, tomamos la solución de $\tan \theta = -1/(-\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$ como $\theta = \arg(z) = \pi/6 + \pi = 7\pi/6$. Vea la figura 1.3.3. Se sigue de (1) que una forma polar del número es

$$z = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right). \quad (2)$$

*En general, en la descripción polar (r, θ) de un punto P en el plano cartesiano, podemos tener $r \geq 0$ o $r < 0$.

Figura 1.3.4 Algunos argumentos de i Figura 1.3.5 Argumento principal
 $z = -\sqrt{3} - i$

Argumento principal El símbolo $\arg(z)$ representa un conjunto de valores, pero la elección de un argumento θ de un número complejo que se encuentra en el intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$ se llama **valor principal** del $\arg(z)$ o **argumento principal** de z . El argumento principal de z es *único* y se representa con el símbolo $\text{Arg}(z)$, esto es,

$$-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi.$$

Por ejemplo, si $z = i$, vemos en la figura 1.3.4 que algunos valores de $\arg(i)$ son $\pi/2$, $5\pi/2$, $-3\pi/2$, y así sucesivamente, pero $\text{Arg}(i) = \pi/2$. Similarmente, vemos de la figura 1.3.5 que el argumento de $-\sqrt{3} - i$ que se encuentra en el intervalo $(-\pi, \pi]$, el argumento principal de z , es $\text{Arg}(z) = \pi/6 - \pi = -\frac{5\pi}{6}$. Usando $\text{Arg}(z)$ podemos expresar el número complejo en (2) en forma polar alternativa:

$$z = 2 \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right].$$

En general, $\arg(z)$ y $\text{Arg}(z)$ están relacionados por

$$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Por ejemplo, $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Para las elecciones $n = 0$ y $n = -1$, (3) da $\arg(i) = \text{Arg}(i) = \pi/2$ y $\arg(i) = -3\pi/2$, respectivamente.

Multiplicación y División La forma polar de un número complejo es especialmente conveniente cuando multiplicamos o dividimos dos números complejos. Suponga

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

donde θ_1 y θ_2 son argumentos cualesquier de z_1 y z_2 , respectivamente. Entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \quad (4)$$

y, para $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \quad (5)$$

Usando las fórmulas de suma* para el coseno y el seno, (4) y (5) se pueden describir como

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \quad (6)$$

y

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (7)$$

Examinando las expresiones en (6) y (7) y la figura 1.3.6 se encuentra que las longitudes de los dos vectores $z_1 z_2$ y z_1/z_2 son el producto de las longitudes de z_1 y de z_2 y del cociente de las longitudes de z_1 y z_2 , respectivamente. Vea (3) de la sección 1.2. Además, los argumentos de $z_1 z_2$ y z_1/z_2 están dados por

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2). \quad (8)$$

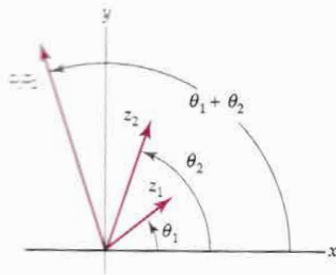


Figura 1.3.6 $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$

EJEMPLO 2 Argumento de un producto y de un cociente

Acabamos de ver que para $z_1 = i$ y $z_2 = -\sqrt{3} - i$ el $\operatorname{Arg}(z_1) = \pi/2$ y $\operatorname{Arg}(z_2) = -5\pi/6$, respectivamente. Por lo que los argumentos para el producto y cociente

$$z_1 z_2 = i(-\sqrt{3} - i) = 1 - \sqrt{3}i \quad \text{y} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{i}{-\sqrt{3} - i} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

se puede obtener de (8):

$$\arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

Valores adicionales de $\arg(z_1 z_2)$ y $\arg(z_1/z_2)$ se pueden encontrar al sumar múltiplos enteros de 2π a $-\pi/3$ o $4\pi/3$, respectivamente. $\square$

Potencias enteras de z Podemos determinar potencias enteras de un número complejo z de los resultados en (6) y (7). Por ejemplo, si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, entonces con $z_1 = z_2 = z$, en (6) se obtiene

$$z^2 = r^2 [\cos(\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta)] = r^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta).$$

Ya que $z^3 = z^2 z$, entonces se tiene que

$$z^3 = r^3 (\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta),$$

y así sucesivamente. Además, si tomamos $\arg(1) = 0$, entonces de (7) se obtiene

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(0 - \theta) + i \operatorname{sen}(0 - \theta)] = r^{-1} [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)].$$

Continuando de esta forma, obtenemos una fórmula para la n -ésima potencia de z para cualquier entero n :

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta). \quad (9)$$

Cuando $n = 0$, obtenemos el conocido resultado $z^0 = 1$.

* $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ y $\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$

EJEMPLO 3 Potencia de un número complejo

Calcule z^3 para $z = -\sqrt{3} - i$.

Solución En (2) del ejemplo 1 vimos que una forma polar del número dado es $z = 2[\cos(7\pi/6) + i \operatorname{sen}(7\pi/6)]$. Usando (9) con $r = 2$, $\theta = 7\pi/6$, y $n = 3$ obtenemos

$$(-\sqrt{3} - i)^3 = 2^3 \left[\cos\left(3 \cdot \frac{7\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{7\pi}{6}\right) \right] = 8 \left[\cos \frac{7\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{2} \right] = -8i$$

ya que $\cos(7\pi/2) = 0$ y $\operatorname{sen}(7\pi/2) = -1$. □

Observe en el ejemplo 3, si también queremos el valor de z^{-3} , entonces procederíamos en dos maneras: ya sea determinamos el recíproco de $z^3 = -8i$ o utilizamos (9) con $n = -3$.

Fórmula de De Moivre Cuando $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, tenemos $|z| = r = 1$, y así de (9) se obtiene

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta. \quad (10)$$

Este último resultado se conoce como **fórmula de De Moivre** y es útil en la deducción de ciertas identidades trigonométricas que implican $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$. Vea los problemas 33 y 34 de los ejercicios 1.3.

EJEMPLO 4 Fórmula de De Moivre

De (10), con $\theta = \pi/6$, $\cos \theta = \sqrt{3}/2$, y $\operatorname{sen} \theta = 1/2$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^3 &= \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta = \cos \left(3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i. \end{aligned}$$
□

Observaciones*Comparación con el análisis real*

- (i) Observe en el ejemplo 2 que, aunque usemos los argumentos principales de z_1 y z_2 que, $\arg(z_1/z_2) = 4\pi/3 \neq \operatorname{Arg}(z_1/z_2)$. Si bien (8) es verdadera para cualquier argumento de z_1 y z_2 , en general, *no es cierto* que $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$ y $\operatorname{Arg}(z_1/z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$. Vea los problemas 37 y 38 de los ejercicios 1.3.
- (ii) Se puede asignar un argumento a cualquier número complejo z diferente de cero. Sin embargo, para $z = 0$, $\arg(z)$ no se puede definir en una forma significativa.

- (iii) Si tomamos $\arg(z)$ del intervalo $(-\pi, \pi]$, la relación entre un número complejo z y su argumento es univaluada; esto es, cada número complejo diferente de cero tiene precisamente un ángulo en $(-\pi, \pi]$. Pero no existe nada especial en el intervalo $(-\pi, \pi]$, también establecemos una relación univaluada al usar el intervalo $(0, 2\pi]$ para definir el valor principal del argumento de z . Para el intervalo $(-\pi, \pi]$, el eje real negativo es análogo a una barrera que acordamos no cruzar; el nombre técnico de esta barrera es un **corte de rama**. Si utilizamos $(0, 2\pi]$, el corte de rama es el eje real positivo. El concepto de corte de rama es importante y se examinará con gran detalle cuando estudiemos funciones en los capítulos 2 y 4.
- (iv) La parte “coseno i seno” de la forma polar de un número complejo algunas veces se abrevia *cis*. Es decir,

$$z = r(\cos \theta + i \sen \theta) = r \text{ cis } \theta.$$

Esta notación usada principalmente en ingeniería, no la usaremos en este libro.

EJERCICIOS 1.3 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-2.*

En los problemas 1 a 10 escriba el número complejo dado en la forma polar usando primero un argumento $\theta \neq \text{Arg}(z)$, y después usando $\theta = \text{Arg}(z)$.

- | | |
|-----------------------|-------------------------------|
| 1. 2 | 2. -10 |
| 3. $-3i$ | 4. $6i$ |
| 5. $1 + i$ | 6. $5 - 5i$ |
| 7. $-\sqrt{3} + i$ | 8. $-2 - 2\sqrt{3}i$ |
| 9. $\frac{3}{-1 + i}$ | 10. $\frac{12}{\sqrt{3} + i}$ |

En los problemas 11 y 12 utilice una calculadora para escribir el número complejo dado primero en forma polar usando un argumento $\theta \neq \text{Arg}(z)$, y después usando $\theta = \text{Arg}(z)$.

- | | |
|-----------------------------|----------------|
| 11. $-\sqrt{2} + \sqrt{7}i$ | 12. $-12 - 5i$ |
|-----------------------------|----------------|

En los problemas 13 y 14 escriba el número complejo cuyas coordenadas polares (r, θ) están dadas en la forma $a + ib$. Si es necesario utilice una calculadora.

- | | |
|--------------------|--------------|
| 13. $(4, -5\pi/3)$ | 14. $(2, 2)$ |
|--------------------|--------------|

En los problemas 15 a 18 escriba el número complejo cuya forma polar está dada en la forma $a + ib$. Si es necesario utilice una calculadora.

- | | |
|--|--|
| 15. $z = 5 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sen \frac{7\pi}{6} \right)$ | 16. $z = 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sen \frac{11\pi}{4} \right)$ |
| 17. $z = 6 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sen \frac{\pi}{8} \right)$ | 18. $z = 10 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sen \frac{\pi}{5} \right)$ |

En los problemas 19 y 20 utilice (6) y (7) para determinar $z_1 z_2$ y z_1/z_2 . Escriba el número en la forma $a + ib$.

- | |
|--|
| 19. $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sen \frac{\pi}{8} \right), z_2 = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sen \frac{3\pi}{8} \right)$ |
| 20. $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sen \frac{\pi}{4} \right), z_2 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sen \frac{\pi}{12} \right)$ |

En los problemas 21 a 24 escriba cada número complejo en forma polar. Después utilice ya sea (6) o (7) para obtener la forma polar del número dado. Finalmente, escriba la forma polar en la forma $a + ib$.

21. $(3 - 3i)(5 + 5\sqrt{3}i)$

22. $(4 + 4i)(-1 + i)$

23. $\frac{-i}{1+i}$

24. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i}$

En los problemas 25 a 30 utilice (9) para calcular las potencias indicadas.

25. $(1 + \sqrt{3}i)^9$

26. $(2 - 2i)^5$

27. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$

28. $(-\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^4$

29. $\left[\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^{12}$

30. $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)\right]^6$

En los problemas 31 y 32 escriba en forma polar el número complejo dado y después en la forma $a + ib$.

31. $\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)^{12} \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$

32. $\frac{\left[8\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)\right]^3}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)\right]^{10}}$

33. Utilice la fórmula de De Moivre (10) con $n = 2$ para determinar identidades trigonométricas para $\cos 2\theta$ y $\sin 2\theta$.

34. Utilice la fórmula de De Moivre (10) con $n = 3$ para determinar identidades trigonométricas para $\cos 3\theta$ y $\sin 3\theta$.

En los problemas 35 y 36 determine un entero positivo n para el que valga la igualdad.

35. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = -1$

36. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n = 1$

37. Para los números complejos $z_1 = -1$ y $z_2 = 5i$, compruebe que:

(a) $\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$

(b) $\text{Arg}(-z_2/z_1) = \text{Arg}(-z_2) - \text{Arg}(z_1)$.

38. Para los números complejos dados en el problema 37, compruebe que:

(a) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(b) $\arg(-z_2/z_1) = \arg(-z_2) - \arg(z_1)$.

Enfocando los conceptos

39. Suponga que $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Describa geoméricamente el efecto de multiplicar z por un número complejo de la forma $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, cuando $\alpha > 0$ y cuando $\alpha < 0$.

40. Suponga $z = \cos \theta + i \sin \theta$. Si n es un entero, evalúe $z^n + \bar{z}^n$ y $z^n - \bar{z}^n$.

41. Escriba una ecuación que relacione a $\arg(z)$ con $\arg(1/z)$, $z \neq 0$.

42. ¿Hay algún caso especial en el que $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$? Pruebe sus afirmaciones.

43. ¿Cómo están relacionados los números complejos z_1 y z_2 si $\arg(z_1) = \arg(z_2)$?

44. Describa el conjunto de puntos z en el plano complejo que satisfacen que $\arg(z) = \pi/4$.

45. La estudiante A establece que, aunque no puede encontrar esto en el libro, piensa que $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$. Por ejemplo, dice, si $z = 1 + i$, entonces $\bar{z} = 1 - i$, y $\arg(z) = \pi/4$ y $\arg(\bar{z}) = -\pi/4$. El estudiante B no está de acuerdo, ya que siente que tiene un contraejemplo: Si $z = i$, entonces $\bar{z} = -i$; podemos tomar $\arg(i) = \pi/2$ y $\arg(-i) = 3\pi/2$, y así $\arg(i) \neq -\arg(-i)$. Tome partido y defienda su posición.
46. Suponga que z_1, z_2 y $z_1 z_2$ son números complejos en el primer cuadrante y que los puntos $z = 0, z = 1, z_1, z_2$, y $z_1 z_2$ están etiquetados por O, A, B, C y D , respectivamente. Estudie la fórmula en (6) y después analice cómo están relacionados los triángulos OAB y OCD .
47. Suponga que $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$. Si $z_1 = z_2$, entonces, ¿cómo están relacionados r_1 y r_2 ? ¿Cómo están relacionados θ_1 y θ_2 ?
48. Suponga que z_1 está en el primer cuadrante. Para cada z_2 analice el cuadrante en el que se pudiera ubicar $z_1 z_2$.
- (a) $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (b) $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
 (c) $z_2 = -i$ (d) $z_2 = -1$
49. (a) Para $z \neq 1$, compruebe la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

- (b) Utilice el inciso (a) y los resultados adecuados de esta sección para establecer que

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{2\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta}.$$

para $0 < \theta < 2\pi$. El resultado anterior se conoce como **identidad de Lagrange** y es útil en la teoría de series de Fourier.

50. Suponga que z_1, z_2, z_3 y z_4 son cuatro números complejos distintos. Interprete geoméricamente:

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

1.4 Potencias y raíces

Recuerde del álgebra que -2 y 2 se dice que son *raíces cuadradas* del número 4, ya que $(-2)^2 = 4$ y $(2)^2 = 4$. En otras palabras, las dos raíces cuadradas de 4 son soluciones distintas de la ecuación $w^2 = 4$. De igual manera decimos que $w = 3$ es una raíz cúbica de 27 pues $w^3 = 3^3 = 27$. Esta última ecuación nos indica de nuevo la dirección de las variables complejas, ya que cualquier número real tiene sólo una raíz cúbica *real* y *dos raíces complejas*. En general, decimos que un número w es una ***n*-ésima raíz** de un número complejo diferente de cero z si $w^n = z$, donde n es un entero positivo. Por ejemplo, le pedimos que compruebe que $w_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ y $w_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ son las dos raíces cuadradas del número complejo $z = i$, ya que $w_1^2 = i$ y $w_2^2 = i$. Vea el problema 39 en los ejercicios 1.1.

Ahora demostraremos que existen exactamente n soluciones de la ecuación $w^n = z$.

Raíces Suponga que $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ y $w = \rho(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$ son formas polares de los números complejos z y w . Entonces, usando (9) de la sección 1.3,

la ecuación $w^n = z$ será

$$\rho^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (1)$$

De (1) podemos concluir que

$$\rho^n = r \quad (2)$$

y

$$\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta. \quad (3)$$

Vea el problema 47 en los ejercicios 1.3.

De (2), definimos $\rho = \sqrt[n]{r}$ es la única raíz n -ésima positiva del número positivo real r . De (3), la definición de la igualdad de dos números complejos implica que

$$\cos n\phi = \cos \theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen} \theta.$$

Estas igualdades, a su vez, indican que los argumentos θ y ϕ están relacionados por $n\phi = \theta + 2k\pi$, donde k es un entero. Por lo que,

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Como k toma los valores enteros sucesivos $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ obtenemos n raíces n -ésimas distintas de z ; estas raíces tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$ pero argumentos diferentes. Observe que para $k \geq n$ obtenemos las mismas raíces ya que el seno y coseno tienen periodos 2π . Para ver por qué esto es así, suponga que $k = n + m$, donde $m = 0, 1, 2, \dots$. Entonces

$$\phi = \frac{\theta + 2(n+m)\pi}{n} = \frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\pi$$

$$\text{y} \quad \operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2m\pi}{n} \right), \quad \cos \phi = \cos \left(\frac{\theta + 2m\pi}{n} \right).$$

Resumimos este resultado. Las n raíces n -ésima de un número complejo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ diferente de cero están dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (4)$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

EJEMPLO 1 Raíces cúbicas de un número complejo

Determine las tres raíces cúbicas de $z = i$.

Solución Considere que estamos básicamente resolviendo la ecuación $w^3 = i$. Ahora con $r = 1$, $\theta = \arg(i) = \pi/2$, una forma polar del número dado está dado por $z = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)$. De (4), con $n = 3$, entonces obtenemos

$$w_k = \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Por tanto, las tres raíces son

$$\begin{aligned} k = 0, \quad w_0 &= \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ k = 1, \quad w_1 &= \cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ k = 2, \quad w_2 &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -i. \end{aligned}$$

$\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt[3]{27} = 3$ son la raíz cuadrada principal de 4 y la raíz cúbica principal de 27, respectivamente. ➡

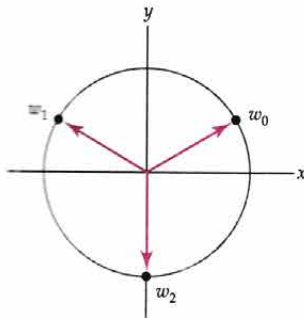


Figura 1.4.1 Tres raíces cúbicas de i

Raíz n -ésima principal En la página 15 indicamos que el símbolo $\arg(z)$ realmente se establece para un conjunto de argumentos para un número complejo z . Enunciando de otra manera, para un número complejo dado $z \neq 0$, $\arg(z)$ es infinitamente-valuada. De manera parecida, $z^{1/n}$ es n -valuada; es decir, el símbolo $z^{1/n}$ representa el conjunto de n raíces n -ésimas w_k de z . La única raíz de un número complejo z (obtenido al usar el valor principal de $\arg(z)$ con $k = 0$) naturalmente se refiere como la **n -ésima raíz principal** de w . En el ejemplo 1, ya que $\text{Arg}(i) = \pi/2$, vemos que $w_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ es la raíz cúbica principal de i . La elección de $\theta = \text{Arg}(z)$ y $k = 0$ nos garantiza que cuando z es un número positivo real r , la n -ésima raíz principal es $\sqrt[n]{r}$.

Ya que las raíces dadas en (4) tienen el mismo módulo, las n raíces n -ésimas de un número complejo diferente de cero z se encuentran en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ centrado en el origen en el plano complejo. Además, ya que la diferencia entre los argumentos de cualesquiera dos raíces sucesivas w_k y w_{k+1} es $2\pi/n$, las n raíces n -ésimas de z están igualmente espaciadas en esta circunferencia, empezando con la raíz cuyo argumento es θ/n . La figura 1.4.1 muestra las tres raíces cúbicas de i obtenidas en el ejemplo 1 espaciadas en intervalos angulares iguales de $2\pi/3$ en la circunferencia de un círculo unitario iniciando con la raíz w_0 cuyo argumento es $\pi/6$.

Como muestra el siguiente ejemplo, las raíces de un número complejo no tienen que ser números "agradables" como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Raíces cuartas de un número complejo

Determine las cuatro raíces cuartas de $z = 1 + i$.

Solución En este caso, $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \arg(z) = \pi/4$. De (4) con $n = 4$, obtenemos

$$w_k = \sqrt[4]{2} \left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Con la ayuda de una calculadora determinamos

$$k = 0, \quad w_0 = \sqrt[4]{2} \left[\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right] \approx 1.0696 + 0.2127i$$

$$k = 1, \quad w_1 = \sqrt[4]{2} \left[\cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \right] \approx -0.2127 + 1.0696i$$

$$k = 2, \quad w_2 = \sqrt[4]{2} \left[\cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} \right] \approx -1.0696 - 0.2127i$$

$$k = 3, \quad w_3 = \sqrt[4]{2} \left[\cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \right] \approx 0.2127 - 1.0696i.$$

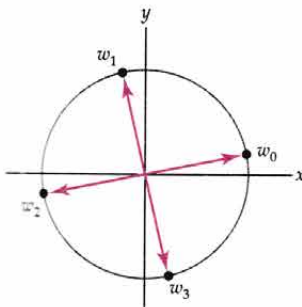


Figura 1.4.2 Cuatro raíces cúbicas de $1 + i$

Como se muestra en la figura 1.4.2, las cuatro raíces se encuentran en una circunferencia de radio $r = \sqrt[4]{2} \approx 1.09$ centrada en el origen y están espaciadas a iguales intervalos angulares de $2\pi/4 = \pi/2$ radianes, comenzando con la raíz cuyo argumento es $\pi/16$. Ya que $\theta = \text{Arg}(z) = \pi/4$, la cuarta raíz principal es w_0 . □

Observaciones*Comparación con el análisis real*

- (i) Como una consecuencia de (4), podemos decir que el sistema de números complejos es *cerrado* bajo la operación de extracción de raíces. Esto significa que para cualquier z en $\mathbb{C}$, $z^{1/n}$ está también en $\mathbb{C}$. El sistema de números reales no tiene una propiedad de cerradura similar, ya que si x está en $\mathbb{R}$, $x^{1/n}$ no está necesariamente en $\mathbb{R}$.
- (ii) Geométricamente, las n raíces n -ésimas de un número complejo z se pueden también interpretar como los vértices de un polígono regular con n lados que está inscrito dentro de un círculo de radio $\sqrt[n]{r}$ centrado en el origen. Puede ver la viabilidad de este hecho al examinar de nuevo las figuras 1.4.1 y 1.4.2. Vea el problema 19 en los ejercicios 1.4.
- (iii) Cuando m y n son enteros positivos con factores no comunes, entonces (4) nos permite definir una **potencia racional** de z , es decir, $z^{m/n}$. Se puede demostrar que el conjunto de valores $(z^{1/n})^m$ es igual que el conjunto de valores $(z^m)^{1/n}$. Este conjunto de n valores comunes está definido como $z^{m/n}$. Vea los problemas 25 y 26 de los ejercicios 1.4.

EJERCICIOS 1.4

Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 14 use (4) para calcular todas las raíces. Obtenga la n -ésima raíz principal en cada caso. Ubique las raíces $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$, en una circunferencia adecuada centrada en el origen.

1. $(8)^{1/3}$
2. $(-1)^{1/4}$
3. $(-9)^{1/2}$
4. $(-125)^{1/3}$
5. $(i)^{1/2}$
6. $(-i)^{1/3}$
7. $(-1 + i)^{1/3}$
8. $(1 + i)^{1/5}$
9. $(-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}$
10. $(-1 - \sqrt{3}i)^{1/4}$
11. $(3 + 4i)^{1/2}$
12. $(5 + 12i)^{1/2}$
13. $\left(\frac{16i}{1+i}\right)^{1/8}$
14. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{1/6}$
15. (a) Compruebe que $(4 + 3i)^2 = 7 + 24i$.
(b) Use el inciso (a) para encontrar los dos valores de $(7 + 24i)^{1/2}$.
16. Trabaje nuevamente el problema 15 usando (4).
17. Determine todas las soluciones de la ecuación $z^4 + 1 = 0$.
18. Use el hecho de que $8i = (2 + 2i)^2$ para determinar todas las soluciones de la ecuación

$$z^2 - 8z + 16 = 8i.$$

Las n raíces n -ésimas distintas de la unidad son soluciones de la ecuación $w^n = 1$. Los problemas 19 al 24 tratan con las raíces de la unidad.

19. (a) Demuestre que las raíces n -ésimas de la unidad están dadas por

$$(1)^{1/n} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

- (b) Determine las raíces n -ésimas de la unidad para $n = 3$, $n = 4$ y $n = 5$.
- (c) Con cuidado trace las raíces de la unidad encontradas en el inciso (b). Dibuje los polígonos regulares formados con las raíces como vértices. [Sugerencia: Vea (ii) en las Observaciones].
20. Suponga que w es una raíz cúbica de la unidad correspondiente a $k = 1$. Vea el problema 19(a).
- (a) ¿Cómo están relacionadas w y w^2 ?
- (b) Compruebe por cálculo directo que

$$1 + w + w^2 = 0.$$

- (c) Explique cómo el resultado del inciso (b) es consecuencia de la definición básica de que w es una raíz cúbica de 1, es decir, $w^3 = 1$. [Sugerencia: Factorice].
21. Para una n fija, si tomamos $k = 1$ en el problema 19(a), obtenemos la raíz

$$w_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Explique por qué las raíces n -ésimas de la unidad se pueden escribir como

$$1, w_n, w_n^2, w_n^3, \dots, w_n^{n-1}.$$

22. Considere la ecuación $(z + 2)^n + z^n = 0$, donde n es un entero positivo. Por cualquier medio, resuelva la ecuación para z cuando $n = 1$. Cuando $n = 2$.
23. Considere la ecuación en el problema 22.
- (a) En el plano complejo, determine la posición de todas las soluciones z cuando $n = 5$. [Sugerencia: Escriba la ecuación en la forma $[(z + 2)/(-z)]^5 = 1$ y use el inciso (a) del problema 19.]
- (b) Examine nuevamente las soluciones de la ecuación en el problema 22 para $n = 1$ y $n = 2$. Forme una suposición acerca de la posición de todas las soluciones de $(z + 2)^n + z^n = 0$.
24. Para las raíces n -ésimas de la unidad dadas en el problema 21, demuestre que

$$1 + w_n + w_n^2 + w_n^3 + \dots + w_n^{n-1} = 0.$$

[Sugerencia: Multiplique la suma $1 + w_n + w_n^2 + w_n^3 + \dots + w_n^{n-1}$ por $w_n - 1$.]

Antes de trabajar con los problemas 25 y 26, lea (iii) en las Observaciones. Si m y n son enteros positivos sin factores comunes, entonces los n valores de la potencia racional $z^{m/n}$ son

$$w_k = \sqrt[n]{r^m} \left[\cos \frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) + i \sin \frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) \right], \quad (5)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Las w_k son las n distintas soluciones de $w^n = z^m$.

25. (a) Primero calcule el conjunto de valores $i^{1/2}$ usando (4). Después calcule $(i^{1/2})^3$ usando (9) de la sección 1.3.
- (b) Ahora calcule i^3 . Después calcule $(i^3)^{1/2}$ usando (4). Compare estos valores con los resultados del inciso (b).
- (c) Por último, calcule $i^{3/2}$ usando la fórmula (5).
26. Use (5) para encontrar todas las soluciones de la ecuación $w^2 = (-1 + i)^5$.

Enfocando los conceptos

27. El vector dado en la figura 1.4.3 representa un valor de $z^{1/n}$. Usando sólo la figura y trigonometría, es decir, no utilice la fórmula (4), determine los valores restantes de $z^{1/n}$ cuando $n = 3$. Repita para $n = 4$ y $n = 5$.

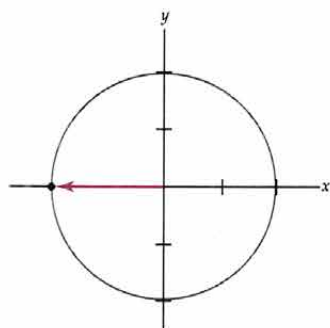


Figura 1.4.3 Figura para el problema 27

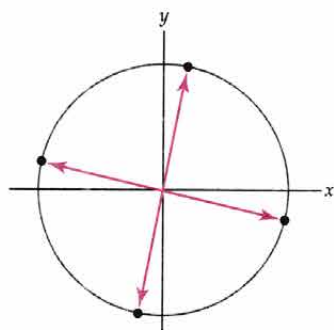


Figura 1.4.4 Figura para el problema 34

28. Suponga que n denota un entero no negativo. Determine los valores de n tal que $z^n = 1$ tenga sólo soluciones reales. Defienda su respuesta con argumentos matemáticos.
29. (a) Proceda como en el ejemplo 2 para encontrar los valores aproximados de las dos raíces cuadradas w_0 y w_1 de $1 + i$.
- (b) Demuestre que los valores exactos de las raíces en el inciso (a) son

$$w_0 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}, \quad w_1 = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}.$$

30. Analice: ¿Cuál es el significado geométrico del resultado del problema 24?
31. Analice: Un número real, ¿puede tener una n -ésima raíz compleja? ¿Puede un número complejo no real tener una n -ésima raíz real?
32. Suponga que w está ubicada en el primer cuadrante y es una raíz cúbica de un número complejo z . ¿Puede existir una segunda raíz cúbica de z localizada en el primer cuadrante? Defienda su respuesta con argumentos matemáticos.
33. Suponga que z es un número complejo que tiene una cuarta raíz w que no es real ni imaginaria pura. Explique por qué las cuartas raíces restantes no son reales ni imaginarias puras.
34. Analice: Los vectores en la figura 1.4.4 representan las cuatro cuartas raíces de un número complejo z . ¿Puede determinar a partir de sólo esta figura cuál raíz es la cuarta raíz principal de z ?

Tareas del laboratorio de cómputo

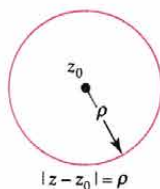
En los problemas 35-40, use un SAC* para encontrar primero $z^n = w$ para el número complejo dado y el valor indicado de n . Después, usando la salida y el mismo valor de n , determine si $w^{1/n} = (z^n)^{1/n} = z$. Si no, explique por qué no.

- | | |
|---------------------------|----------------------------------|
| 35. $z = 2.5 - i; n = 10$ | 36. $z = -0.5 + 0.3i; n = 5$ |
| 37. $z = 1 + 3i; n = 8$ | 38. $z = 2 + 2i; n = 12$ |
| 39. $z = i; n = 21$ | 40. $z = -1 + \sqrt{3}i; n = 11$ |

1.5 Conjuntos de puntos en el plano complejo

En las secciones anteriores examinamos algunas nociones elementales de álgebra y geometría de los números complejos. Pero apenas hemos tocado la superficie del tema conocido como análisis complejo; el propósito principal de nuestro estudio está por venir. Nuestro objetivo en los capítulos que siguen es examinar las funciones de una sola variable compleja $z = x + iy$ y los cálculos de estas funciones.

Antes de introducir el concepto de una función en el capítulo 2, necesitamos establecer algunas definiciones esenciales y la terminología de conjuntos en el plano complejo.

Figura 1.5.1 Círculo de radio ρ

Círculos Suponga $z_0 = x_0 + iy_0$. Puesto que $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ es la distancia entre los puntos $z = x + iy$ y $z_0 = x_0 + iy_0$, los puntos $z = x + iy$ que satisfacen la ecuación

$$|z - z_0| = \rho, \quad \rho > 0, \quad (1)$$

se encuentran en la circunferencia de un círculo de radio ρ centrado en el punto z_0 . Vea la figura 1.5.1.

*A lo largo del libro usaremos la abreviatura SAC para "sistema asistido de cómputo".

EJEMPLO 1 Dos círculos

- (a) $|z| = 1$ es la ecuación de una circunferencia de un círculo unitario centrado en el origen.
- (b) Al describir $|z - 1 + 3i| = 5$ como $|z - (1 - 3i)| = 5$, vemos de (1) que la ecuación describe la circunferencia de un círculo de radio 5 centrado en el punto $z_0 = 1 - 3i$.



Discos y vecindades Los puntos z que satisfacen la desigualdad $|z - z_0| \leq \rho$ pueden estar ya sea *sobre* la circunferencia del círculo $|z - z_0| = \rho$ o *dentro* del círculo. Decimos que el conjunto de puntos definido por $|z - z_0| \leq \rho$ es un **disco** de radio ρ centrado en z_0 . Pero los puntos z que satisfacen la estricta desigualdad $|z - z_0| < \rho$ se encuentran dentro, y no sobre, la circunferencia de un círculo de radio ρ centrado en el punto z_0 . Este conjunto se llama una **vecindad** de z_0 . A veces, necesitaremos usar una vecindad de z_0 que también *excluya* a z_0 . Dicha vecindad está definida por la desigualdad simultánea $0 < |z - z_0| < \rho$ y se llama una **vecindad excluyente** de z_0 . Por ejemplo, $|z| < 1$ define una vecindad del origen, mientras que $0 < |z| < 1$ define una vecindad excluyente del origen; $|z - 3 + 4i| < 0.01$ define una vecindad de $3 - 4i$, mientras que la desigualdad $0 < |z - 3 + 4i| < 0.01$ define una vecindad excluyente de $3 - 4i$.

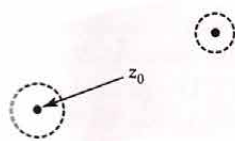
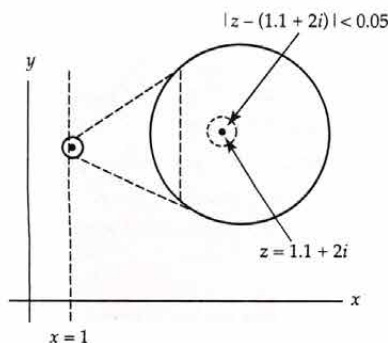
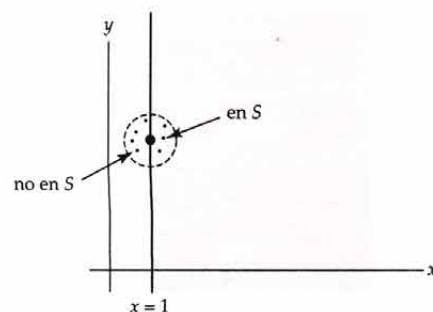


Figura 1.5.2 Conjunto abierto.

Conjuntos abiertos Se dice que un punto z_0 es un **punto interior** de un conjunto S del plano complejo si existe alguna vecindad de z_0 que se encuentra completamente dentro de S . Si cada punto z de un conjunto S es un punto interior, entonces se dice que S es un **conjunto abierto**. Vea la figura 1.5.2. Por ejemplo, la desigualdad $\operatorname{Re}(z) > 1$ define la *mitad derecha del plano*, que es un conjunto abierto. Todos los números complejos $z = x + iy$ para los que $x > 1$ están en este conjunto. Si elegimos, por ejemplo, $z_0 = 1.1 + 2i$, entonces una vecindad de z_0 que se encuentra totalmente en el conjunto se define por $|z - (1.1 + 2i)| < 0.05$. Vea la figura 1.5.3. Por otra parte, el conjunto S de puntos en el plano complejo definido por $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ *no* es abierto porque cada vecindad de un punto que se encuentra en la recta $x = 1$ debe contener puntos en S y no hay puntos en S . Vea la figura 1.5.4.

Figura 1.5.3 Conjunto abierto con vista ampliada de un punto cerca de $x = 1$ Figura 1.5.4 Conjunto S no abierto

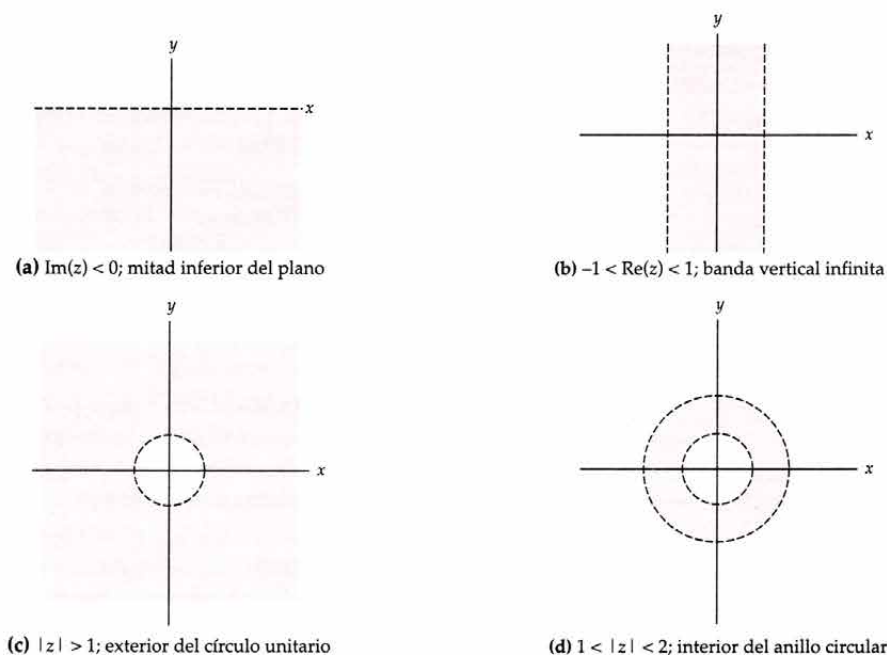
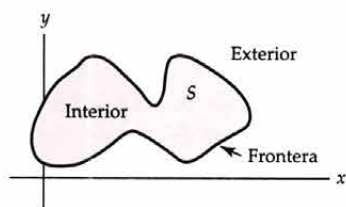


Figura 1.5.5 Cuatro ejemplos de conjuntos abiertos

EJEMPLO 2 Algunos conjuntos abiertos

La figura 1.5.5 muestra algunos conjuntos abiertos adicionales. □

Figura 1.5.6 Interior, frontera y exterior del conjunto S

Si *cada* vecindad de un punto z_0 de un conjunto S contiene al menos un punto de S y al menos un punto que no está en S , entonces se dice que z_0 es un **punto frontera** de S . Para el conjunto de puntos definido con $\text{Re}(z) \geq 1$, los puntos en la recta vertical $x = 1$ son puntos frontera. Los puntos que se encuentran en la circunferencia del círculo $|z - i| = 2$ son puntos frontera del disco $|z - i| \leq 2$ así como para la vecindad $|z - i| < 2$ de $z = i$. La colección de puntos frontera de un conjunto S se llama la **frontera** de S . La circunferencia $|z - i| = 2$ es la frontera tanto para el disco $|z - i| \leq 2$ como para la vecindad $|z - i| < 2$ de $z = i$. Un punto z que no es un punto interior ni un punto frontera de un conjunto S se dice que es un **punto exterior** de S ; en otras palabras, z_0 es un punto exterior de un conjunto S si existe *alguna* vecindad de z_0 que no contiene puntos de S . La figura 1.5.6 muestra un conjunto típico S con interior, frontera y exterior.

Un conjunto abierto S puede ser tan simple como el plano complejo con un sólo punto z_0 excluido. La frontera de este “plano perforado” es z_0 , y el único candidato para un punto exterior es z_0 . Sin embargo, S no tiene puntos exteriores ya que ninguna vecindad de z_0 puede estar libre de puntos del plano.

Anillo El conjunto S_1 de puntos que satisfacen la desigualdad $\rho_1 < |z - z_0|$ se encuentra en el exterior del círculo de radio ρ_1 centrado en z_0 , mientras que el conjunto S_2 de puntos que satisfacen $|z - z_0| < \rho_2$ se encuentran en el interior del círculo de radio ρ_2 centrado en z_0 . Por lo que, si $0 < \rho_1 < \rho_2$, entonces el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad simultánea

$$\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2, \quad (2)$$

es la intersección de los conjuntos S_1 y S_2 . Esta intersección es un anillo circular abierto centrado en z_0 . La figura 1.5.5(d) muestra dicho anillo centrado en el origen. El conjunto definido por (2) se llama **anillo circular** abierto. Al permitir que $\rho_1 = 0$, obtenemos una vecindad excluyente de z_0 .

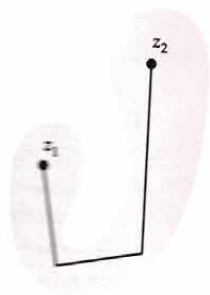
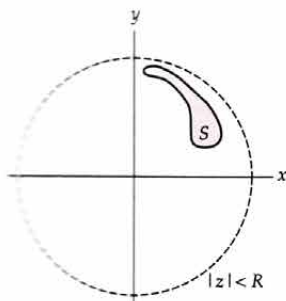


Figura 1.5.7 Conjuntos conexos

Nota: "Cerrado" no significa "no abierto"



Figura 1.5.8 Región anular

Figura 1.5.9 El conjunto S está acotado ya que cierta vecindad del origen encierra totalmente a S

Dominio Si cualquier par de puntos z_1 y z_2 en un conjunto S se puede conectar con una recta poligonal que consiste de un número finito de segmentos de rectas unidas por los extremos encontrados totalmente en el conjunto, entonces se dice que el conjunto S es **conexo**. Vea la figura 1.5.7. Un conjunto conexo abierto se llama **dominio**. Todos los conjuntos abiertos de la figura 1.5.5 son conexos y cada uno es un dominio. El conjunto de números z que satisfacen $\operatorname{Re}(z) \neq 4$ es un conjunto abierto pero no es conexo ya que no es posible unir puntos en cualquier lado de la recta vertical $x = 4$ con una recta poligonal sin salir del conjunto (considere que los puntos en la recta $x = 4$ no están en el conjunto). Una vecindad de un punto z_0 es un conjunto conexo.

Regiones Una **región** es un dominio del plano complejo con todos, alguno o ninguno de sus puntos frontera. Ya que un conjunto abierto no contiene ningún punto frontera, ésta es automáticamente una región. Una región que contiene todos los puntos frontera se dice que es **cerrada**. El disco definido por $|z - z_0| \leq \rho$ es un ejemplo de una región cerrada y se le conoce como un **disco cerrado**. Una vecindad de un punto z_0 definido por $|z - z_0| < \rho$ es un conjunto abierto o una región abierta y se dice que es un **disco abierto**. Si el centro z_0 es excluido de ya sea un disco cerrado o de un disco abierto, las regiones definidas por $0 < |z - z_0| \leq \rho$ o $0 < |z - z_0| < \rho$ se llaman **discos perforados**. Un **disco perforado abierto** es lo mismo que una vecindad excluyente de z_0 . Una región puede no ser abierta ni cerrada; la región anular definida por la desigualdad $1 \leq |z - 5| < 3$ contiene sólo algunos de estos puntos frontera (los puntos que se encuentran en la circunferencia del círculo $|z - 5| = 1$), y así ésta *no es abierta ni cerrada*. En (2) definimos una región anular circular; en una interpretación más general, un **anillo** o **región anular** puede tener la apariencia que se muestra en la figura 1.5.8.

Conjuntos acotados Finalmente, decimos que un conjunto S en el plano complejo está **acotado** si existe un número real $R > 0$ tal que $|z| < R$ para cada z en S . Es decir, S está acotado si se puede encerrar completamente dentro de cierta vecindad del origen. En la figura 1.5.9, el conjunto S que se muestra en color está acotado porque está completamente contenido dentro de la vecindad circular con línea punteada del origen. Un conjunto es **no acotado** si no está acotado. Por ejemplo, el conjunto de la figura 1.5.5(d) es acotado, mientras que los conjuntos en las figuras 1.5.5(a), 1.5.5(b) y 1.5.5(c) son no acotados.

Observaciones Comparación con el análisis real

En su estudio de las matemáticas indudablemente tuvo que enfrentarse con el concepto de *infinito*. Por ejemplo, en un curso de cálculo trató con *límites al infinito*, donde examinó el comportamiento de las funciones cuando x aumentaba o disminuía sin cota. Puesto que tenemos dos direcciones en una recta numérica, es conveniente representar los conceptos de "aumentando sin cota" y "disminuyendo sin cota" simbólicamente con $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$, respectivamente. A su vez éstos se pueden obtener sin la designación de $\pm \infty$ al tratar con un "punto ideal" llamado **punto al infinito**, que se denota simplemente con ∞ . Para hacer esto, identificamos cualquier número real a con un punto (x_0, y_0) en una circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, trazando una línea recta desde el punto $(a, 0)$ en

el eje x o recta horizontal al punto $(0, 1)$ en la circunferencia. El punto (x_0, y_0) es el punto de intersección de la recta con la circunferencia. Vea el problema 47 de los ejercicios 1.5. Debe quedar claro a partir de la figura 1.5.10(a) que está más distante del punto $(a, 0)$ que del origen, más cerca de (x_0, y_0) está $(0, 1)$. El único punto en la circunferencia que no corresponde a un número real a es $(0, 1)$. Para completar la correspondencia con *todos* los puntos en la circunferencia, identificamos a $(0, 1)$ con ∞ . Al conjunto que consiste de los números reales $\mathbf{R}$ unidos con ∞ se le llama **sistema de números reales extendido**.

En nuestro estudio el análogo de la recta numérica es el plano complejo. Recuerde que dado que $\mathbf{C}$ no está ordenado, las nociones de que z "aumente" o "disminuya" no tienen ningún significado. Sin embargo, si sabemos que aumenta el módulo $|z|$ de un número complejo z , el número se aleja del origen. Si permitimos que $|z|$ no tenga cotas, por ejemplo, a lo largo de los ejes real e imaginario, no hay que distinguir entre "direcciones" de estos ejes con otras notaciones tales como $z \rightarrow +\infty$, $z \rightarrow -\infty$, $z \rightarrow +i\infty$ y $z \rightarrow -i\infty$. En análisis complejo, sólo se utiliza una única noción de ∞ , ya que podemos ampliar el sistema de números complejos $\mathbf{C}$ de una manera análoga a la que acabamos de describir para el sistema de números reales $\mathbf{R}$. Sin embargo, esta vez asociamos un número complejo a un punto sobre una esfera unitaria llamada **esfera de Riemann**. Trazando una recta del número $z = a + ib$, que se escribe como $(a, b, 0)$, en el plano complejo al polo norte $(0, 0, 1)$ de la esfera, $x^2 + y^2 + u^2 = 1$, se determina un punto único, (x_0, y_0, u_0) sobre una esfera unitaria. Como se puede visualizar de la figura 1.5.10(b), un número complejo con un módulo muy grande está muy lejos del origen $(0, 0, 0)$ y, en consecuencia, el punto (x_0, y_0, u_0) está cerca de $(0, 0, 1)$. De esta manera se identifica cada número complejo con un único punto sobre la esfera. Vea los problemas 48-50 de los ejercicios 1.5. Debido a que al punto $(0, 0, 1)$ no le corresponde ningún número z en el plano, le corresponde ∞ . Por supuesto el sistema que consiste de $\mathbf{C}$ unido con el "punto ideal" ∞ se llama **sistema de números complejos extendido**.

A esta manera de corresponder o mapear a los números complejos con una esfera, excluyendo al polo-norte $(0, 0, 1)$, se le llama **proyección estereográfica**.

Para un número finito z , tenemos $z + \infty = \infty + z = \infty$, y para $z \neq 0$, $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$. Por otra parte, para $z \neq 0$ escribimos $z/0 = \infty$ y para $z \neq \infty$, $z/\infty = 0$. A expresiones como $\infty - \infty$, ∞/∞ , ∞^0 y 1^∞ no se les puede dar una definición significativa y se les llama indeterminadas.

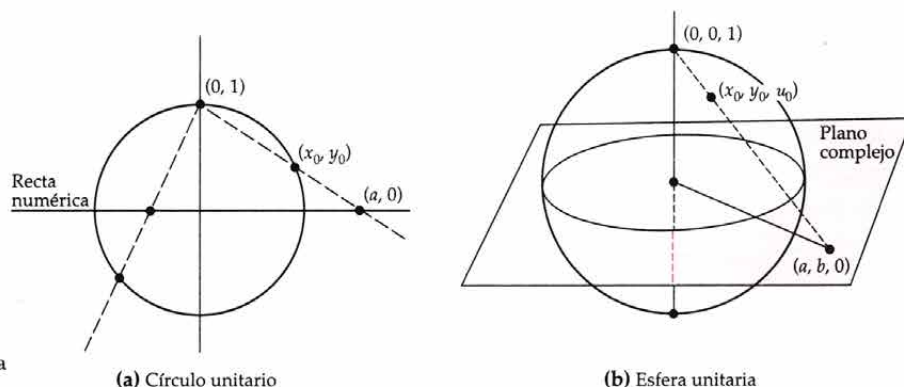


Figura 1.5.10 El método de correspondencia en (b) es una proyección estereográfica

EJERCICIOS 1.5

Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 12, trace la gráfica de la ecuación dada en el plano complejo.

1. $|z - 4 + 3i| = 5$
2. $|z + 2 + 2i| = 2$
3. $|z + 3i| = 2$
4. $|2z - 1| = 4$
5. $\operatorname{Im}(z) = 5$
6. $\operatorname{Im}(z) = -2$
7. $\operatorname{Im}(\bar{z} + 3i) = 6$
8. $\operatorname{Im}(z - i) = \operatorname{Re}(z + 4 - 3i)$
9. $|\operatorname{Re}(1 + i\bar{z})| = 3$
10. $z^2 + \bar{z}^2 = 2$
11. $\operatorname{Re}(z^2) = 1$
12. $\arg(z) = \pi/4$

En los problemas 13 a 24 bosqueje el conjunto S de puntos en el plano complejo que satisfacen la desigualdad dada. Determine si el conjunto es (a) abierto, (b) cerrado, (c) un dominio, (d) acotado o (e) conexo.

13. $\operatorname{Re}(z) < -1$
 14. $|\operatorname{Re}(z)| > 2$
 15. $\operatorname{Im}(z) > 3$
 16. $\operatorname{Re}((2 + i)z + 1) > 0$
 17. $2 < \operatorname{Re}(z - 1) < 4$
 18. $-1 \leq \operatorname{Im}(z) < 4$
 19. $\operatorname{Re}(z^2) > 0$
 20. $\operatorname{Im}(z) < \operatorname{Re}(z)$
 21. $|z - i| > 1$
 22. $2 < |z - i| < 3$
 23. $1 \leq |z - 1 - i| < 2$
 24. $2 \leq |z - 3 + 4i| \leq 5$
25. Dé los puntos frontera de los conjuntos en los problemas 13 a 24.
26. Considere el conjunto S que consiste del plano complejo con el círculo de circunferencia $|z| = 5$ excluido. Dé los puntos frontera de S . ¿Es S conexo?

En los problemas 27 y 28 bosqueje el conjunto de puntos en el plano complejo que satisfacen la desigualdad dada.

27. $0 \leq \arg(z) \leq \pi/6$
28. $-\pi < \arg(z) < \pi/2$

En los problemas 29 y 30 describa el conjunto sombreado de la figura dada usando $\arg(z)$ y una desigualdad.

29.

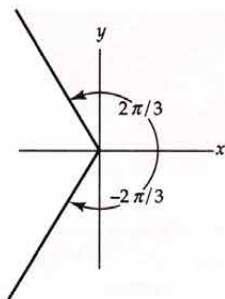


Figura 1.5.11 Figura para el problema 29

30.

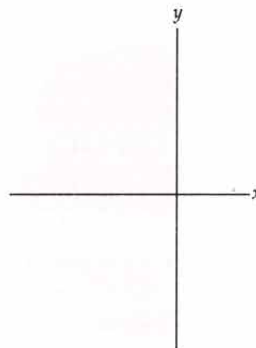


Figura 1.5.12 Figura para el problema 30

En los problemas 31 y 32 resuelva el par dado de ecuaciones simultáneas.

31. $|z| = 2, |z - 2| = 2$
32. $|z - i| = 5, \arg(z) = \pi/4$

Enfocando los conceptos

33. En la página 28 establecimos que si $\rho_1 > 0$, entonces el conjunto de puntos que satisfacen $\rho_1 < |z - z_0|$ es el exterior del círculo de radio ρ_1 centrado en z_0 . En general, describa el conjunto si $\rho_1 = 0$. En particular, describa el conjunto definido por $|z + 2 - 5i| > 0$.
34. (a) ¿Cuáles son los puntos frontera de una vecindad excluyente de z_0 ?
 (b) ¿Cuáles son los puntos frontera del plano complejo?
 (c) Dé varios ejemplos, no incluya el dado en la página 29, de un conjunto S en el plano complejo que ni es abierto ni cerrado.
35. Use notación compleja y desigualdades en los incisos (a) y (b).
 (a) Haga una lista de cinco conjuntos en el plano complejo que sean conexos.
 (b) Haga una lista de cinco conjuntos en el plano complejo que no sean conexos.
36. Considere el disco centrado en z_0 definido con $|z - z_0| \leq \rho$. Demuestre que este conjunto está acotado encontrando una $R > 0$, por lo que todos los puntos z en el disco satisfacen que $|z| < R$. [Sugerencia: Vea el análisis de desigualdades de la sección 1.2].
37. Suponga que z_0 y z_1 son puntos distintos. Usando sólo el concepto de distancia, describa con palabras el conjunto de puntos z en el plano complejo que satisfacen que $|z - z_0| = |z - z_1|$.
38. Usando sólo el concepto de distancia, describa con palabras el conjunto de puntos z en el plano complejo que satisface $|z - i| + |z + i| = 1$.

En los problemas 39 y 40 describa el conjunto sombreado en la figura dada llenando los dos espacios en blanco usando notación de conjuntos

$$\{z: \text{_____ y/o _____}\}$$

usando notación compleja para ecuaciones o desigualdades y una de las palabras y u o.

39.

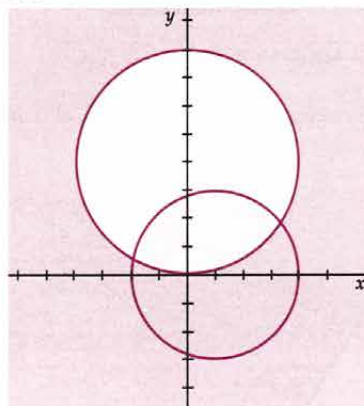


Figura 1.5.13 Figura para el problema 39

40.

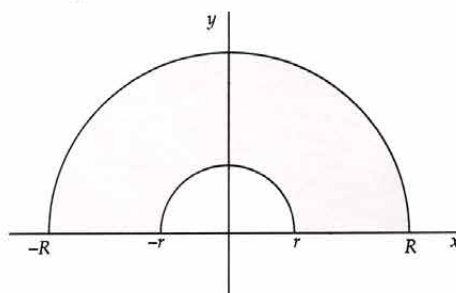


Figura 1.5.14 Figura para el problema 40

41. Considere el conjunto S de puntos en el plano complejo definido por $\{i/n, n = 1, 2, 3, \dots\}$. Analice cuál de los siguientes términos se aplica a S : *frontera*, *abierto*, *cerrado*, *conexo*, *acotado*.
42. Considere un conjunto finito S de números complejos $\{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$. Analice si S está necesariamente acotado. Defienda su respuesta con argumentos matemáticos.
43. Se dice que un conjunto S es **convexo** si cada par de puntos P y Q en S se puede unir mediante un segmento de recta $\overline{PQ}$ tal que cada punto del segmento de recta también se encuentre en S .

Determine cuál de los conjuntos S en el plano complejo definido por las condiciones siguientes son convexos.

(a) $|z - 2 + i| < 3$

(b) $1 < |z| < 2$

(c) $x > 2, y \leq -1$

(d) $y < x^2$

(e) $\operatorname{Re}(z) \leq 5$

(f) $\operatorname{Re}(z) \neq 0$

44. Analice: ¿Es un conjunto convexo, definido en el problema 43, necesariamente conexo?

45. Analice y decida si el conjunto vacío $\emptyset$ es un conjunto abierto.

46. Suponga que S_1 y S_2 son conjuntos abiertos en el plano complejo.

(a) Analice: ¿es la unión $S_1 \cup S_2$ un conjunto abierto? Si piensa que el enunciado es cierto, intente demostrarlo. Si piensa que el enunciado es falso, encuentre un contraejemplo.

(b) Repita el inciso (a) para la intersección $S_1 \cap S_2$.

Antes de responder los problemas 47 a 50, lea nuevamente las observaciones del final de esta sección.

47. Determine el punto (x_0, y_0) en la circunferencia unitaria que corresponde a cada uno de los números reales: $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -3, 1, 10$. Vea la figura 1.5.10(a).

48. Determine un punto (x_0, y_0, u_0) en la esfera unitaria que corresponde al número complejo $2 + 5i$. Vea la figura 1.5.10(b).

49. Describa el conjunto de puntos en la esfera unitaria que corresponde a cada uno de los siguientes conjuntos en el plano complejo.

(a) Los números en la circunferencia unitaria $|z| = 1$

(b) Los números dentro del disco abierto $|z| < 1$

(c) Los números exteriores al círculo unitario, que son, $|z| > 1$

50. Exprese las coordenadas del punto (x_0, y_0, u_0) en la esfera unitaria de la figura 1.5.10(b) en términos de las coordenadas del punto $(a, b, 0)$ en el plano complejo. Use estas fórmulas para comprobar su respuesta al problema 48. [Sugerencia: Primero demuestre que todos los puntos en la recta que contiene a $(0, 0, 1)$ y $(a, b, 0)$ son de la forma $(ta, tb, 1 - t)$.]

1.6 Aplicaciones

En esta sección vamos a examinar algunas de las aplicaciones simples de los números complejos. Se supondrá en el análisis que el lector tiene cierta familiaridad con métodos elementales de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En la sección 1.4 vimos cómo determinar las raíces de números complejos. Con esta base ahora estamos en condiciones de examinar la forma de resolver una ecuación cuadrática con coeficientes complejos usando la versión compleja de la fórmula cuadrática. Después examinamos cómo se utilizan los números complejos y la exponencial compleja en ecuaciones diferenciales. Este último análisis nos conduce a la fórmula de Euler y a una nueva manera compacta de escribir de nuevo la forma polar de un número complejo. Por último, exploramos algunas formas de utilizar los números complejos en la ingeniería eléctrica.

Álgebra Probablemente encontró por primera vez a los números complejos en un curso de álgebra donde aprendió que las raíces de las ecuaciones polinomiales pueden ser tanto complejas como reales. Por ejemplo, cualquier ecuación polinomial de segundo grado, o cuadrática, se puede resolver completando el cuadrado. En el caso general, $ax^2 + bx + c = 0$, donde los coeficientes $a \neq 0$, b y c son reales, al completar el cuadrado en x se obtiene la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1)$$

Cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo, las raíces de la ecuación son complejas. Por ejemplo, por (1) las dos raíces de $x^2 - 2x + 10 = 0$ son

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2}. \quad (2)$$

En los cursos elementales la unidad imaginaria i se escribe $i = \sqrt{-1}$ y se hace la suposición de que las leyes de exponentes valen para un número tal como $\sqrt{-36}$, que se puede escribir como $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \sqrt{-1} = 6i$. Denotemos las dos raíces complejas en (2) como $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = 1 - 3i$.

Nota: Las raíces z_1 y z_2 son conjugadas. Vea el problema 26 en los ejercicios 1.6.

Fórmula cuadrática La fórmula cuadrática es perfectamente válida cuando los coeficientes $a \neq 0$, b y c de una ecuación polinomial cuadrática $az^2 + bz + c = 0$ son números complejos. Aunque la fórmula se puede obtener exactamente de la misma forma que (1), elegimos escribir el resultado como

$$z = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}. \quad (3)$$

Observe que el numerador de la parte derecha de (3) se ve un poco diferente al tradicional $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ dado en (1). Considere que cuando $b^2 - 4ac \neq 0$, el símbolo $(b^2 - 4ac)^{1/2}$ representa el conjunto de dos raíces cuadradas de los números complejos $b^2 - 4ac$. Por lo que con (3) se obtienen dos soluciones complejas. A partir de aquí nos reservamos el uso del símbolo $\sqrt{}$ para números reales donde $\sqrt{a}$ denota la raíz positiva del número real $a \geq 0$. El siguiente ejemplo muestra el uso de (3).

Interpretación de $\sqrt{}$ en este libro $\Rightarrow$

EJEMPLO 1 Uso de la fórmula cuadrática

Resuelva la ecuación cuadrática $z^2 + (1 - i)z - 3i = 0$.

Solución De (3), con $a = 1$, $b = 1 - i$ y $c = -3i$, tenemos

$$z = \frac{-(1 - i) + [(1 - i)^2 - 4(-3i)]^{1/2}}{2} = \frac{1}{2} [-1 + i + (10i)^{1/2}]. \quad (4)$$

Para calcular $(10i)^{1/2}$ usamos (4) de la sección 1.4 con $r = \sqrt{10}$, $\theta = \pi/2$ y $n = 2$. Las dos raíces cuadradas de $10i$ son:

$$w_0 = \sqrt{10} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{5} + \sqrt{5}i$$

y

$$w_1 = \sqrt{10} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{10} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i$$

Por tanto, (4) da dos valores:

$$z_1 = \frac{1}{2} [-1 + i + (\sqrt{5} + \sqrt{5}i)] \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{1}{2} [-1 + i + (-\sqrt{5} - \sqrt{5}i)].$$

Estas soluciones de la ecuación original, escritas en la forma $z = a + ib$, son

$$z_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) + \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1)i \quad \text{y} \quad z_2 = -\frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1) - \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)i.$$

Nota: Las raíces z_1 y z_2 no son conjugadas. Vea el problema 26 en los ejercicios 1.6.



Factorización de un polinomio cuadrático Para encontrar todas las raíces de una ecuación polinomial podemos factorizar el polinomio completo. Este enunciado es corolario de un importante teorema que se demostrará en la sección 5.5. Por el momento, observe que si z_1 y z_2 son las raíces definidas por (3), entonces, un polinomio cuadrático $az^2 + bz + c$ se factoriza como

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2). \quad (5)$$

Por ejemplo, ya hemos usado (2) para demostrar que la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 10 = 0$ tiene raíces $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = 1 - 3i$. Con $a = 1$, (5) nos permite factorizar al polinomio $x^2 - 2x + 10$ usando números complejos:

$$x^2 - 2x + 10 = [x - (1 + 3i)][x - (1 - 3i)] = (x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i).$$

Similarmente, la factorización del polinomio cuadrático $z^2 + (1 - i)z - 3i$ en el ejemplo 1 es

$$z^2 + (1 - i)z - 3i = \left[z - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)i \right] \left[z + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)i \right].$$

Debido a que un primer curso de cálculo trata principalmente con cantidades reales, probablemente no vio ningún número complejo hasta que tomó un curso de ecuaciones diferenciales o de ingeniería eléctrica.

Ecuaciones diferenciales El primer paso para resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden $ay'' + by' + cy = f(x)$ con coeficientes reales a , b y c es resolver la ecuación homogénea asociada $ay'' + by' + cy = 0$. La última ecuación tiene soluciones de la forma $y = e^{mx}$. Para ver esto, sustituimos $y = e^{mx}$, $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$ en $ay'' + by' + cy = 0$:

$$ay'' + by' + cy = am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

De $e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$, vemos que $y = e^{mx}$ es una solución de la ecuación homogénea siempre que m sea la raíz de la ecuación polinomial $am^2 + bm + c = 0$. La última ecuación cuadrática se conoce como **ecuación auxiliar**. Ahora, cuando los coeficientes de una ecuación polinomial son *reales*, la ecuación puede no tener sólo una raíz compleja; es decir, las raíces complejas deben presentarse siempre en pares conjugados. Por lo que, si la ecuación auxiliar tiene raíces complejas $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, $\beta > 0$, entonces las dos soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$ son funciones exponenciales complejas $y = e^{(\alpha + i\beta)x}$ y $y = e^{(\alpha - i\beta)x}$. Para obtener soluciones reales de la ecuación diferencial usamos la **fórmula de Euler**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (6)$$

donde θ es real. Con θ sustituida, a su vez, por β y $-\beta$, usamos (6) para escribir

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \text{ y } e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x). \quad (7)$$

Ahora, puesto que la ecuación diferencial es homogénea, las combinaciones lineales

$$y_1 = \frac{1}{2} [e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x}] \text{ y } y_2 = \frac{1}{2i} [e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}]$$

son también soluciones. Pero por (7), las dos expresiones anteriores son funciones reales

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{y} \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (8)$$

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación diferencial

Resuelva la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Solución Aplicamos la fórmula cuadrática a la ecuación auxiliar $m^2 + 2m + 2 = 0$ y obtenemos las raíces complejas $m_1 = -1 + i$ y $m_2 = \overline{m}_1 = -1 - i$. Con las identificaciones $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, la ecuación (8) nos da dos soluciones $y_1 = e^{-x} \cos x$ y $y_2 = e^{-x} \sin x$. $\square$

Puede que recuerde que la así llamada solución general de una ecuación diferencial homogénea de orden n consiste de una combinación lineal de n soluciones linealmente independientes. Por lo que en el ejemplo 2, la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden dada es $y_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Forma exponencial de un número complejo Nos apresuramos a indicar que los resultados dados en (6) y (7) fueron suposiciones, ya que la función exponencial compleja aún no había sido definida. Como un breve anticipo del material de las secciones 2.1 y 4.1, la exponencial compleja e^z es el número complejo *definido* por

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \quad (9)$$

Aunque la prueba se pospone hasta la sección 4.1, (9) se puede utilizar para demostrar que la conocida ley de los exponentes es válida para los números complejos z_1 y z_2 :

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \quad (10)$$

porque de (10), los resultados en (7) son válidos. Además, observe que la fórmula de Euler (4) es un caso especial de (9) cuando z es un número imaginario puro, es decir, con $x = 0$ y y sustituido por θ . La fórmula de Euler proporciona una notación conveniente para los varios conceptos que se consideran al principio de este capítulo. La forma polar de un número complejo z , $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ahora se puede escribir más compacta

$$z = r e^{i\theta}. \quad (11)$$

Esta forma conveniente se llama **forma exponencial** de un número complejo z . Por Ejemplo, $i = e^{\pi i/2}$ y $1 + i = \sqrt{2} e^{\pi i/4}$. Además, la fórmula para las raíces n -ésimas de un número complejo, (4) de la sección 1.4, se convierte en

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (12)$$

Ingeniería Eléctrica En la aplicación de las matemáticas a situaciones físicas, los matemáticos y los ingenieros suelen enfocar el problema con formas completamente diferentes. Por ejemplo, considere el problema de encontrar la

corriente de estado estable $i_p(t)$ en un circuito en serie *LRC* en el que la carga $q(t)$ del capacitor al tiempo $t > 0$ se describe con la ecuación diferencial

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E_0 \sin \gamma t \quad (13)$$

donde las constantes positivas L , R y C son, a su vez, la inductancia, la resistencia y la capacitancia. Ahora, para determinar la **corriente de estado estable** $i_p(t)$, primero determinamos la **carga de estado estable** en el condensador determinando una solución particular $q_p(t)$ de (13). Procediendo como lo haríamos en un curso de ecuaciones diferenciales, vamos a utilizar el método de coeficientes indeterminados para encontrar $q_p(t)$. Esto implica suponer una solución particular de la forma $q_p(t) = A \sin \gamma t + B \cos \gamma t$, sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial, simplificando, igualando los coeficientes y despejando los coeficientes desconocidos A y B . Se deja como ejercicio demostrar que $A = E_0 X / (-\gamma Z^2)$ y $B = E_0 R / (-\gamma Z^2)$, cuando las cantidades

$$X = L\gamma - 1/C\gamma \quad \text{y} \quad Z = \sqrt{X^2 + R^2} \quad (14)$$

son llamadas, respectivamente, **impedancia** y **reactancia** del circuito. Así, la solución de estado estable de la carga en el circuito es

$$q_p(t) = -\frac{E_0 X}{\gamma Z^2} \sin \gamma t - \frac{E_0 R}{\gamma Z^2} \cos \gamma t.$$

De esta solución y $i_p(t) = q_p'(t)$ obtenemos la corriente de estado estable:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z} \left(\frac{R}{Z} \sin \gamma t - \frac{X}{Z} \cos \gamma t \right). \quad (15)$$

Los ingenieros eléctricos suelen resolver problemas de circuitos de este tipo usando análisis complejo. Primero que todo, para evitar confusión con la corriente i , un ingeniero eléctrico denotará a la unidad imaginaria i con el símbolo j , en otras palabras, $j^2 = -1$. Puesto que la corriente i se relaciona con la carga q con $i = dq/dt$, la ecuación diferencial (13) es igual a

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E_0 \sin \gamma t. \quad (16)$$

Ahora, en vista de la fórmula de Euler (6), si θ se sustituye por el símbolo γ , entonces el voltaje impreso $E_0 \sin \gamma t$ es igual a $\text{Im}(E_0 e^{j\gamma t})$. Debido a esta última forma, el método de los coeficientes indeterminados sugiere que intentemos una solución de (16) en forma de un múltiplo constante de una exponencial compleja, es decir, $i_p(t) = \text{Im}(A e^{j\gamma t})$. Sustituimos esta última expresión en la ecuación (16), suponiendo que la exponencial compleja satisface las reglas de derivación "habituales", utilizando el hecho de que la carga q es una antiderivada de la corriente i , e igualando los coeficientes de $e^{j\gamma t}$. El resultado es $(jL\gamma + R + 1/jC\gamma)A = E_0$, y de éste obtenemos

$$A = \frac{E_0}{R + j \left(L\gamma - \frac{1}{C\gamma} \right)} = \frac{E_0}{R + jX}, \quad (17)$$

donde X es la reactancia dada en (14). El denominador de la última expresión, $Z_c = R + j(L\gamma - 1/C\gamma) = R + jX$, se llama **impedancia compleja** del circuito. Como el módulo de la impedancia compleja es $|Z_c| = \sqrt{R^2 + (L\gamma - 1/C\gamma)^2}$, vemos de (14) que la impedancia Z y la impedancia compleja Z_c están relacionadas por $Z = |Z_c|$.

Ahora de la forma exponencial de un número complejo dada en (11), podemos escribir la impedancia compleja como

$$Z_c = |Z_c|e^{j\theta} = Ze^{j\theta}, \text{ donde } \tan \theta = \frac{L\gamma - \frac{1}{C\gamma}}{R}$$

Por lo que (17) se convierte en $A = E_0/Z_c = E_0/(Ze^{j\theta})$, y así la corriente de estado estable está dada por

$$i_p(t) = \text{Im} \left(\frac{E_0}{Z} e^{-j\theta} e^{j\gamma t} \right). \quad (18)$$

Se le recomienda comprobar que la expresión en (18) es la misma que la dada en (15).

El problema de encontrar la corriente de estado estable en un circuito en serie *LRC* descrito por la ecuación diferencial

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E_0 \cos \gamma t \quad (19)$$

se puede resolver de una manera similar. En este caso, el voltaje $E_0 \cos \gamma t$ sugiere que intentemos una solución de la forma $i_p(t) = \text{Re}(Ae^{j\gamma t})$. Con el mismo análisis que el anterior, obtenemos la solución de (19) dada por

$$i_p(t) = \text{Re} \left(\frac{E_0}{Z} e^{-j\theta} e^{j\gamma t} \right). \quad (20)$$

Observaciones

Comparación con el análisis real

Hemos visto en esta sección que si z_1 es una raíz compleja de una ecuación polinomial, entonces $z_2 = \bar{z}_1$ es otra raíz siempre que todos los coeficientes del polinomio sean reales, pero $\bar{z}_1$ no es necesariamente una raíz de la ecuación cuando al menos uno de los coeficientes no es real. En este último caso, podemos obtener otro factor del polinomio al dividir éste entre $z - z_1$. Observe que la división sintética es válida en el análisis complejo. Vea los problemas 27 y 28 de los ejercicios 1.6.

EJERCICIOS 1.6 Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-5.

En los problemas 1 a 6 resuelva la ecuación cuadrática dada usando la fórmula cuadrática (3). Después, utilice (5) para factorizar el polinomio.

1. $z^2 + iz - 2 = 0$
2. $iz^2 - z + i = 0$
3. $z^2 - (1 + i)z + 6 - 17i = 0$
4. $z^2 - (1 + 9i)z - 20 + 5i = 0$
5. $z^2 + 2z - \sqrt{3}i = 0$
6. $3z^2 + (2 - 3i)z - 1 - 3i = 0$ [Sugerencia: Vea el problema 15 de los ejercicios 1.4].

En los problemas 7 a 12 exprese el número complejo dado en forma exponencial $z = re^{i\theta}$.

7. -10
8. $-2\pi i$
9. $-4 - 4i$
10. $\frac{2}{1+i}$
11. $(3 - i)^2$
12. $(1 + i)^{20}$